# Hoe lossen basisschoolleerlingen aftrekopgaven op?

*Adaptief kiezen tussen hoofdrekenen en cijferen voor aftreksommen tot de 1000*

Een experimenteel onderzoek onder 303 basisschoolleerlingen

**Naam: Daphne Wolsink**

**Studentnummer: 1239317**

**Studierichting: Pedagogische Wetenschappen Onderwijsstudies**

**Onder begeleiding van: Marian Hickendorff**

**Datum: 12 juli 2015**

**Inhoudsopgave**

## Samenvatting

De afgelopen jaren is er kritiek op het Nederlandse rekenniveau. Deze kritiek gaat gepaard met een felle discussie rondom het rekenonderwijs. In deze discussie is er veel aandacht voor het belang van adaptiviteit. Met behulp van het ASCM model van Siegler en de choice/no-choice methode is in dit experimentele onderzoek geanalyseerd of er een verschil is in adaptivteit tussen bovengemiddelde en onder gemiddelde rekenaars voor aftrekopgaven tot de 1000. In dit onderzoek, dat afgenomen is onder kinderen tussen de 8 t/m 12 jaar, worden allereerst beschrijvende resultaten weergegeven waarin te zien is hoe vaak de verschillende rekenstrategieën worden gebruikt door leerlingen van verschillende niveaus en uit verschillende groepen. Vervolgens is de mate van adaptivieit op twee manieren geanalyseerd. Uit de resultaten blijkt dat alle leerlingen adaptiviteit laten zien wat betreft opgavekenmerken, maar dat deze adaptiviteit significant groter is voor bovengemiddelde rekenaars dan voor onder gemiddelde rekenaars. Adaptiviteit wat betreft snelheid wordt gevonden voor onder gemiddelde leerlingen uit groep 6 en adaptiviteit wat betreft accuratesse wordt gevonden voor onder gemiddelde leerlingen uit groep 6 en alle leerlingen uit groep 7.

## Inleiding

De afgelopen jaren ligt het rekenniveau van Nederlandse kinderen onder vuur. Zowel nationaal als internationaal wordt er periodiek onderzocht hoe het staat met het rekenniveau van basisschoolleerlingen, en in beide gevallen vallen de Nederlandse resultaten tegen. Hoewel de totale rekenvaardigheden van basisschoolleerlingen niet zijn gedaald, is er toch ruimte voor kritiek. Zo zijn de scores van leerlingen uit groep 8 bij bewerking op grotere en kommagetallen sinds 1987 gedaald en is er bij driekwart van de nationaal gemeten onderdelen een gat tussen de gerealiseerde vaardigheden en de gestelde standaarden (KNAW, 2009). Ook de internationale TIMSS- 2011, die de resultaten weergeeft van kinderen met een gemiddelde leeftijd van 10 jaar laat zien dat Nederland niet langer uitblinkt. Nederland kan zich niet langer meten met de Aziatische landen, en verliest het ook tegenover andere West-Europese landen. Want hoewel Nederland nu nog een goede positie heeft, zal het ingehaald worden door landen als Engeland en de VS. Het rekenniveau in andere Westerse landen gaat vooruit, terwijl Nederlandse groei stagneert. Waar in Singapore door 43 % van de leerlingen het meest geavanceerde rekenniveau wordt gehaald, is dit in Nederland slechts door 5 % van de leerlingen behaald. De groep zwakke rekenaars is klein, maar de groep geavanceerde rekenaars is ook klein. Nederland blinkt niet uit, terwijl Nederland het juist moet hebben van zijn innovativiteit en dus moet er iets veranderen (KNAW, 2009).

Naast dat de internationale positie wat betreft het rekenniveau van Nederlandse kinderen veranderd is, is ook de manier waarop Nederlandse kinderen leren rekenen veranderd. In de media is er op dit moment sprake van een felle discussie tussen de voorstanders van realistisch rekenen en de voorstanders van traditioneel rekenen. Onder traditioneel rekenen verstaat men de methode waarbij de leerlingen één algoritmische strategie om een opgave op te lossen wordt aangereikt. Voorstanders van traditioneel rekenen zijn er van overtuigd dat zwakke rekenaars in verwarring worden gebracht door verschillende rekenstrategieën (Van der Craats, 2007). Vele trucjes die de leerlingen aangeleerd krijgen zijn volgens hen slechts op enkele opgaven toepasbaar, wat vooral zwakke rekenaars in verwarring brengt. De traditionalisten denken dan ook dat de leerlingen 12 stappenplannen moeten worden aangeleerd voor optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen van hele getallen, kommagetallen en breuken die ze elke keer kunnen doorlopen (KNAW, 2009). Door te oefenen wordt volgens hen inzicht vergaard (Treffers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Realisten kijken hier anders tegen aan. Oefenen zonder inzicht leidt volgens hen tot kennis zonder uitzicht (Treffers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Zij denken dat leerlingen uitgedaagd moeten worden met alledaagse problemen. Begrip van het rekenproces wordt als belangrijk gezien, en door kinderen alles zelf te laten ontdekken moeten zij proberen dit begrip te vormen. Belangrijk bij het realistisch rekenen is dat het rekenen realistisch voor de leerlingen wordt, en dat ze zich er wat bij voor kunnen stellen. Daarnaast moeten leerlingen alleen en met elkaar kunnen reflecteren op wat ze hebben gedaan (KNAW, 2009).

Om te bekijken of er ook daadwerkelijk een verschil is tussen het niveau van de leerlingen die onderwijs krijgen in realistisch rekenen, en de leerlingen die nog traditioneel onderwijs krijgen heeft de Advies KNAW-Commissie rekenonderwijs basisschool in 2009 onderzoek gedaan naar de verschillen in rekenniveaus van Nederlandse basisschoolleerlingen. Uit het bestudeerde materiaal kwam géén duidelijk verschil naar voren. Er is geen duidelijke overtuigende ondersteuning voor één van de beide didactieken. Wel liet het onderzoek zien dat rekenzwakke kinderen meer behoefte hebben aan een duidelijke sturing van de leraar (KNAW, 2009).

**Adaptiviteit in rekenen**

In de discussie die ontstaan is rondom rekenmethodes opperen voorstanders van het realistisch rekenen dus dat de leerlingen adaptiviteit moet worden aangeleerd (KNAW, 2009). Toch bestaan er in de literatuur nog verschillende ideeën over wat adaptiviteit precies inhoudt. In diverse literatuur wordt er gesproken van flexibiliteit wanneer een leerling uit verschillende strategieën de strategie kiest die het beste bij een opgave past (Torbeyns,Verschaffel & Ghesquière, 2009). Er zijn echter ook andere bronnen die menen dat flexibiliteit niet alleen bestaat uit het doorzien van de opgavekenmerken maar ook uit het kiezen van de strategie die de leerling het snelst en best tot een antwoord brengt. (Torbeyns et al., 2009). Siegler creëerde een model om de adaptiviteit van leerlingen te bepalen. Dit model heet het Adaptive Strategy Choice Model en gaat uit van 4 verschillende dimensies: a) strategie repertoire, dit geeft aan welke strategieën er worden gebruikt, b) strategie distributie, welke aangeeft wanneer de strategieën worden gebruikt, c) strategie efficiëntie, dit geeft aan hoe goed en hoe snel elke strategie wordt uitgevoerd en d) strategie selectie, hetgeen verwijst naar de individuele adaptiviteit bij strategiekeuzes. Hierbij is het van de belang dat de leerling de strategie kiest waarmee hij de som het snelst en het meest accuraat kan oplossen (Lemaire & Siegler, 1995).

In onderzoeken naar adaptiviteit van leerlingen worden ook vaak leerlingkenmerken als leerjaar, geslacht of rekenniveau meegenomen. Zo is er onderzoek gedaan naar de invloed van rekenniveau op adaptiviteit, waaruit blijkt dat kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau flexibeler rekenen (Hickendorff, Van Putten, Verhelst & Heiser, 2010). Want hoewel kinderen van verschillende rekenniveaus dezelfde strategieën gebruiken, is er een verschil in de frequentie, accuratesse, snelheid en adaptiviteit (Thorbeyns, Verschaffel, & Ghesquière, 2002). Deze verschillen in strategiekeuze tussen bovengemiddelde en onder gemiddelde leerlingen komt naar voren bij optellen, aftrekken en zelfs bij lezen. Doordat bovengenmiddelde leerlingen vaak meer kennis hebben, weten zij beter welke strategie ze wanneer moeten gebruiken. (Siegler, 1988).

Ook geslacht lijkt een rol te spelen, zo lijken meisjes vaak gebruik te maken van traditionele en vaststaande strategieën terwijl jongens meer intuïtief zijn in hun strategiegebruik (Hickendorff et al., 2010)

**Rekenstrategieën voor aftrekken**

Leerlingen worden in het realistisch rekenonderwijs geleerd adaptief te rekenen en dus gebruik te maken van verschillende rekenstrategieën. De strategieën voor aftrekken zijn globaal in te delen in 2 categorieën, de algoritmische strategieën en het hoofdrekenen. De eerste groep strategieën zijn de algoritmische strategieën. Hierbij wordt vaak gebruik gemaakt van pen en papier. Een algoritme is een stap voor stap procedure die mits goed uitgevoerd altijd tot een goed antwoord leidt (De Goeij, z.d.).

De eerste soort algoritmisch rekenen is het cijferen. Bij het cijferen worden de losse delen van een getal als losse cijfers gezien wanneer deze onder elkaar worden gezet. Wanneer bijvoorbeeld de som 434-197 moet worden opgelost wordt deze som onder elkaar gezet, en wordt er gerekend van rechts naar links en geleend waar dat nodig is. Het oplossen van de som gaat dus als volgt:

| | |
|---|---|
| 31214<br>~~434~~<br>197<br>----<br>237 | 434<br>197<br>-----<br>300<br>-60<br>-3<br>-----<br>237 |

Figuur 1. voorbeeld cijferend rekenen en vorobeeld kolomgewijs rekenen

Belangrijk bij het cijferend rekenen is dat er een vaste manier voor bestaat die elke keer opnieuw uitgevoerd kan worden.

Een tweede categorie binnen het algoritmisch rekenen is het kolomsgewijs rekenen (zie Figuur 1). Kolomsgewijs rekenen is een strategie die voortbouwt op het splitsen, maar waarbij er gebruik wordt gemaakt van een algoritmische procedure. Bij het kolomsgewijs rekenen wordt er, in tegenstelling tot het cijferen wel gerekend van links naar rechts. (De Greef, 2013). Ook wordt er een getalwaarde toegekend aan de losse getallen (de Goeij, z.d). De getallen van de som worden onder elkaar gezet, en de hondertallen, tientallen en eenheden worden los van elkaar gezien. Dit zorgt ervoor dat de moeilijke som in 3 makkelijkere sommen wordt opgedeeld die voor de leerling makkelijker te behappen zijn.

Naast de algorimitische strategieën bestaan er ook de hoofdreken strategieën. Hoofdrekenen is niet alleen het rekenen in het hoofd, maar ook het rekenen met het hoofd en hoeft dus geen schriftelijke notatie uit te sluiten. De hoofdreken strategieën zijn onder te verdelen in 3 categorieën, die elk weer onderverdeeld kunnen worden in 3 strategieën. Allereerst is er het direct aftrekken . De eerste manier van direct aftrekken is het splitsen. Bij het gebruik van splitsen worden zowel de honderdtallen als de tientallen als de eenheden los behandeld (De Greef, 2013). Wanneer een leerling dus  bijvoorbeeld de opgave 465-233 voor zich krijgt, zal de leerling eerst 400-200 oplossen, dan 60 -

30 en dan 5-3, en deze antwoorden vervolgens bij elkaar optellen: 200+30+2. Een tweede strategie voor direct aftrekken is het rijgen. Bij het rijgen wordt altijd het aftrekgetal heel gelaten en de rest er vanaf geregen. Bij het rijgen wordt dan ook vaak een getallenlijn gebruikt (De Greef, 2013). Zo wordt bijvoorbeeld 462- 231, 462-200 = 262, 262-30=232, 232-1= 231. In sommige gevallen wordt er ook nog een derde categorie aangewezen, die alleen gebruikt kan worden bij opgaven met bepaalde kenmerken. Zo is er compenseren, dat handig is wanneer er tientallen overbrugd moeten worden. Dit kan bijvoorbeeld bij 345-297, waarbij eerst 345-300=45 wordt opgelost, en de 3 die er teveel van afgehaald zijn er vervolgens weer bij op worden geteld (Torbeyns et al., 2009).

Naast het direct aftrekken bestaat er ook het indirect optellen. Bij indirect optellen wordt er gebruik gemaakt van optellen om een aftreksom op te lossen. Ook indirect optellen wordt onderverdeeld in 3 verschillende strategieën. Ten eerste is er het indirect optellen- rijgen. Hierbij wordt het aftrekgetal heel gelaten en vanuit daar optegeteld. Zo wordt 462-231 opgelost door eerst 231+200= 431 uit te voeren, vervolgens 431+30= 461 en als laatste 461+1=462. Het antwoord is dan 200+30+1= 231. Een tweede manier is het indirect optellen- splitsen. Hierbij worden de eenheden, tientallen en honderdtallen apart opgelost. 462-231 wordt dan op de volgende manier aangepakt: 1+1=2, 30+30= 60, 200+200=400. Het antwoord is dan 1+30+200= 231. Ten derde is er nog het indirect optellen-varia bij deze manier van indirect optellen wordt er bijvoorbeeld gebruik gemaakt van compenseren. Dit gebeurt door toe te werken naar het dichtstbijzijnde honderdtal. De som 462-297 zou als volgt opgelost worden: 297+3= 300, 300+162=462. 3+162=165.

Tot slot is er de laatste categorie, het indirect aftrekken. Bij het gebruik van indirect aftrekken wordt er van het aftrekgetal naar de aftrekker toegewerkt. Bij indirect aftrekken- rijgen gebeurt dit door het aftrekgetal heel te houden. 462-297 wordt dan alsvolgt opgelost: 462-100= 362, 362-60= 302, 302-5=297. 100+60+5=165. Een tweede manier van indirect aftrekken is het indirect aftrekken splitsen. 462-297 wordt dan op de volgende wijze opgelost: 12-5=7, 150-60=90, 300-100=200. 5+60+100 =165. De derde strategie voor indirect aftrekken is varia, waarin er bijvoorbeeld gebruik wordt gemaakt van compenseren; 460-163=297, 462-2=460, 163+165.

Hoewel alle strategieën in principe bij alle sommen toepasbaar zijn, blijkt dit niet altijd handig (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière, 2006). Zo is compenseren vooral handig wanneer een van de getallen een 8 of een 9 bevat, zoals bij 462-297. Ook voor splitsen en rijgen zijn er bepaalde sommen waarop deze strategieën extra goed toepasbaar zijn, zo is splitsen extra handig bij het optellen van getallen. Bij aftrekken zorgt splitsen echter vaak voor problemen, namelijk als leerlingen een tiental moeten overbruggen (33 – 19 = __; 30 – 10 = 20, 3 – 9= -6, 20 - 6= 14). Rijgen is bij aftrekken juist efficiënter, omdat de leerlingen alleen maar hoeven af te trekken (33-12= __; 33-10=23, 23-2=21) (Torbeyns et al., 2006). De efficiëntie van verschillende strategieën verschilt, en dat is precies waar het bij adaptiviteit om draait, en waar in het huidige realistische rekenonderwijs de nadruk op ligt. Leerlingen moet aangeleerd worden de strategie te gebruiken waarmee zij een opgave het snelst en het meest accuraat kunnen oplossen.

**Onderzoek naar adaptief rekenen**

Om te bepalen of leerlingen ook daadwerkelijk adaptief gebruik maken van rekenstrategieën wordt er vaak gebruik gemaakt van de choice/no-choice methode (Siegler & Lemaire, 1997). Hierbij gaat men ervan uit dat leerlingen adaptief rekenen wanneer zij de strategie gebruiken waarmee zij het snelst en meest accuraat zijn. Met de choice/no-choice wordt de adaptiviteit bepaald door het gebruik van twee condities. In de keuzeconditie is de leerling vrij om te kiezen welke rekenstrategie hij wil gebruiken. In de geen-keuzeconditie wordt de leerling verteld welke strategie hij moet gebruiken, zodat het duidelijk wordt hoe goed de leerling de gevraagde strategie beheerst. Met elke afzonderlijke geen-keuzeconditie wordt bepaald hoe goed de leerling elke strategie beheerst. Door vervolgens te bekijken of de leerling de beste strategieën ook gebruikt in de vrije keuzeconditie, wordt de adaptiviteit bepaald (Siegler & Lemaire, 1997).

Voor elke strategiekeuze optie moet er een aparte geen-keuzeconditie worden gemaakt binnen de geen-keuzecondities. Alleen op deze manier kunnen de prestatiekenmerken op alle geen-keuzecondities worden bepaald en vervolgens worden gelinkt aan de adaptiviteit. Om de hoeveelheid strategieën zoveel mogelijk te beperken wordt er veelal aangegeven uit welke strategieën de leerlingen mogen kiezen. Voorgaande maakt deze manier van onderzoek echter wat onbetrouwbaar, omdat het ervoor kan zorgen dat de leerling niet de strategie mag gebruiken waar hij of zij het beste in is (Siegler & Lemaire, 1997).

Naast de adaptiviteit wat betreft accuratesse en oplossnelheid bestaat er ook adaptiviteit wat betreft opgavekenmerken. Men kan dit onderzoeken door in de keuzeconditie opgaven aan te bieden met bepaalde opgavekenmerken. Zo kan er bijvoorbeeld gebruik worden gemaakt van opgaven die meer geschikt zijn voor het gebruik van compenseren, of van opgaven die juist een algoritmische oplosmanier vereisen. Door vervolgens te bekijken of er ook daadwerkelijk meer algoritmische strategieën worden gebruikt voor de algoritmische opgaven, en meer compenseren voor de hoofdrekenopgaven, kan ook op deze manier adaptiviteit worden bepaald.

**Huidig onderzoek**

Naar aanleiding van de tegenvallende resultaten van peilingen in het rekenonderwijs op het gebied van aftrekken in Nederland is er een onderzoek gestart naar 3-cijferige aftrekopgaven zoals 869- 348. Eerder onderzoek naar aftrekken is voorhanden , maar het verrichte onderzoek bestrijkt vaak niet het domein tot de 1000. De focus ligt hierbij op de vraag welke strategieën leerlingen gebruiken en of de strategie die ze kiezen bij de opgave ook daadwerkelijk voor hen de meest efficiënte strategie is bij die opgave. Aan dit onderzoek namen basisschoolleerlingen uit groep 6 t/m groep 8 deel. Voor dit onderzoek werd gebruik gemaakt van een choice/no-choice design bestaande uit drie condities: één waarin leerlingen vrij waren in het kiezen van een oplossingsstrategie, één waarin zij verplicht gebruik moesten maken van een algoritmische strategie en één waarin zij juist gebruik moesten maken van hoofdrekenen. Deze drie condities bestonden elk uit 6 aftrekopgaven.

Zoals al eerder beschreven spelen ook leerlingkenmerken een belangrijke rol bij de adaptiviteit van de leerlingen. Daarom zal in dit onderzoek hier ook op worden ingegaan en zal de volgende vraag onderzocht worden: Is er een verschil in adaptiviteit wat betreft het oplossen van aftrekopgaven tot de 1000 voor bovengemiddelde en onder gemiddelde rekenaars? Vanuit de literatuur is er al veel aanleiding voor het idee dat bovengemiddelde rekenaars een hogere adaptiviteit hebben, omdat zij meer kennis hebben van de verschillende opgavekenmerken en hun eigen vaardigheden (Hickendorff et al., 2010) (Thorbeyns, et al., 2002). De verwachting is hier dan ook dat leerlingen met een hoger rekenniveau meer adaptiviteit zullen laten zien in de keuzeconditie dan leerlingen met een lager rekenniveau. Zij zullen dus vaker de strategie kiezen waarmee ze het snelst en het meest accuraat de sommen kunnen oplossen, en ze zullen hun strategiekeuze aanpassen aan de opgavekenmerken van de sommen in de keuzeconditie.

De strategieën die de leerlingen hebben gebruikt voor het oplossen van de verschillende opgaven van dit onderzoek zijn al eerder verzameld, maar zullen nu veel gedetailleerder in kaart gebracht worden. Waar eerst alleen werd gekeken naar de verschillen tussen algoritmisch rekenen en hoofdrekenen, zal er nu ook onderscheid gemaakt worden tussen kolomsgewijs rekenen, cijferen, splitsen, rijgen, compenseren en eventuele combinaties of afwijkende strategieën.

# Methode

## Deelnemers

Aan dit onderzoek namen 303 kinderen deel. Deze kinderen kwamen van 10 verschillende basisscholen uit Leiden, Den Haag en Rotterdam. Op de scholen werden verschillende rekenmethoden gebruikt, maar deze methoden waren allemaal gebaseerd op het realistisch rekenonderwijs. De leerlingen die deelnamen aan dit onderzoek waren allen tussen de 8 en 12 jaar oud. Het aantal deelnemende jongens en het aantal deelnemende meisjes was ongeveer gelijk verdeeld (48% jongens, 52% meisjes). In vergelijking met de Nederlandse populatie waren er relatief veel kinderen met een hoog rekenniveau in deze onderzoeksgroep. In de Nederlandse populatie beschrijft de Cito A-groep namelijk 25% van de hoogst scorende kinderen, terwijl in deze sample 37.8 % van de leerlingen een A score had. Verder had 29.5 % de letterscore B op de cito-rekentoets, 19.0 % score C, 9.5 % score D en 3.3 % score E. Om concreter te kunnen praten over de verschillende rekenniveaus zijn deze onderverdeeld in twee groepen, de bovengemiddelde groep die bestaat uit leerlingen met een A of B citoscore en de onder gemiddelde groep die bestaat uit leerlingen met een C-, D-, of E citoscore. Er is gekozen om gebruik te maken van 2 groepen omdat de groepen anders erg klein werden.

## Materiaal

In dit onderzoek is gebruik gemaakt van 3 kolommen van elk 6 opgaven met sommen tot de 1000 (zie bijlage). Het aftrekgetal had in alle opgaven als begingetal een 5,6,7, of 8 en de aftrekker had als begingetal een 1, 2, 3, of 4. Er werd gebruik gemaakt van 3 verschillende sets van opgaven, om te voorkomen dat de leerlingen dachten allemaal dezelfde sommen te maken. Om ervoor te zorgen dat de uitkomsten van de 3 sets wel te vergelijken zouden zijn, moesten de 3 sets allen van eenzelfde moeilijkheidsgraad zijn. Om dit te garanderen werd ervoor gezorgd dat de gemiddelden van de aftrekkers en de gemiddelden van de aftrekgetallen in de verschillende sets overeenkwamen. Elke set bestond uit 3 opgaven waarbij het voor de leerling makkelijk was om een algoritme toe te passen en 3 opgaven waarbij het makkelijker was om de som met het hoofd op te lossen.

Bij het samenstellen van de hoofdrekensommen, is erop gelet dat de aftrekker altijd dichtbij een hondertal lag, zodat het handig zou zijn om deze aftrekker af te ronden. Deze aftrekkers eindigden daarom altijd op 97, 98 of 99. Verder werd er bij de hoofdrekensommen voor gezorgd dat het aftrekgetal 26 eenheden hoger lag dan de aftrekker en dat er een tiental en een eenheid overbrugd moest worden. Doordat deze overbrugging moest plaatsvinden zou deze som het gebruik van compenseren moeten uitlokken.

Bij het samenstellen van de algoritmische sommen, waarbij het makkelijker was een algoritmische strategie te gebruiken, werd er op gelet dat de sommen het gebruik van hoofdrekenen zouden bemoeilijken. Er werd daarom voor gezorgd dat zowel de aftrekker als het aftrekgetal niet eindigden op een 5, 8 of 9 en dat er een tiental en een hondertal overbrugd moesten worden.

Elke opgave werd op een losse pagina aan de leerling getoond, hierdoor kreeg de leerling niet de kans om terug te kijken naar vorige opgaven of vooruit te kijken naar de opgaven die nog moesten komen. Daarnaast werd de opgave kaal aangeboden. Er was dus geen sprake van context,  om te voorkomen dat het taalniveau van de leerlingen een rol zou gaan spelen.

Om uit te sluiten dat de volgorde waarin de verschillende condities aangeboden werden effect had, werd voor de helft van de leerlingen na de keuzeconditie de geen-keuze hoofdrekenconditie als eerste aangeboden en voor de andere helft  de geen-keuze algoritmische conditie als eerste. Tenslotte werd ook de itemvolgorde, de volgorde waarin de verschillende opgaven werden aangeboden per conditie, gewisseld. Uiteindelijk ontstonden er dus 24 verschillende soorten opgaveboekjes, waarin de volgorde van de sets, de volgorde van de hoofdreken- en algoritmische geen-keuzeconditie en de itemvolgerde werden gewisseld.

**Condities**

Het onderzoek bestaat uit drie verschillende condities. De keuzeconditie, en de twee geen-keuzecondities. In de geen-keuzeconditie werden de leerlingen verplicht om gebruik te maken van de opgegeven strategie. Boven elke geen-keuzeconditie werd door middel van een plaatje aangegeven welke rekenstrategie de leerlingen moesten gebruiken. Zo stond er boven de  algoritmische conditie een lachend gezichtje met het spreekwolkje “Ik zet de getallen onder elkaar!’’, en boven de hoofdrekenconditie een gezichtje met een spreekwolkje dat aangaf “Ik zet de getallen niet onder elkaar, maar reken met mijn hoofd!”.  Voor alle condities werd een voorbeeldsom aangeboden om het concept duidelijk te maken.


Figuur  2. Afbeelding boven geenkeuze-condities

**Procedure**

Deze scriptie is gebaseerd op data die al eerder zijn verzameld. Dit is vorig jaar door 8 proefleiders op de volgende manier gedaan: de leerlingen is verteld dat ze allemaal 18 rekenopgaven moesten oplossen om te bekijken op wat voor manier ze rekenen. Om het rekenniveau te bepalen werd de laatst behaalde cito-score voor rekenen gebruikt.  Elk leerling kreeg willekeurig een van de 24 soorten toetsboekjes toegewezen. Tijdens het oplossen van de rekenopgaven kregen de leerlingen de ruimte om notities te maken van de stappen die ze doorliepen. Als de kinderen geen of hele onduidelijke notitites maakten vroegen de proefleiders na het oplossen van de som om toelichting van de leerling. De uitleg van de leerling werd door de proefleider genoteerd. De oplostijd van de leerling werd gemeten met een timer door de tijd tussen het moment waarop de leerling de opgave te zien kreeg en het moment waarop de leerling het antwoord noteerde te meten. De privacy van de leerlingen is gewaarborgd door geen achternamen te gebruiken.

**Coderen**

Om te bekijken welke strategieën de leerlingen hebben gebruikt zijn de uitwerkingen bij de 18 opgaven van elke leerling gecodeerd. Voor elk van de verschillende opgaven is met behulp van de notities van de leerling en de notities van de proefleider bepaald welke strategie de leerling heeft gebruikt. De opgaven werden gecodeerd op basis van een hoofdtype en op basis van extra kenmerken.

Voor het coderen van de strategieën die de leerlingen gebruikten is er gebruik gemaatk van 16 verschillende hoofdtypen. Het eerste hoofdtype is het cijferalgoritme, bij het gebruik van cijferen wordt er duidelijk gewerkt van rechts naar links en wordt er geen getalwaarde toegekend aan de losse getallen. Het tweede hoofdtype is het kolomsgewijs rekenen. Dit is eveneenes een algoritimsche strategie, maar hierbij kent de leerling wel getalwaarde toe aan de losse getallen. Ook wordt er gewerkt van links naar rechts. Het derde hoofdtype is rekenen met cijfers. Hierbij wordt een algoritmische procedure als het cijferen uitgevoerd, maar deze wordt niet genoteerd op papier.

De overige hoofdtypes zijn onder te verdelen in 3 grote categorieën, het direct aftrekken, het indirect aftrekken en het indirect optellen. Voor elk van deze 3 categorieën bestaan er  de afzonderlijke hoofdtypes splitsen, rijgen, compenseren en andere.

Naast de hoofdtypen bestonden er ook subtypes waarbij er werd gekeken naar een aantal extra oploskenmerken. Zo werd er bekeken of het lenen werd genoteerd, er van strategie werd gewisseld, de tussenstappen werden genoteerd,  wanneer er werd gecompenseerd dit de eerste of de tweede term betrof  en of er een getallenlijn werd gebruikt. Wanneer er sprake was van het gebruik van een extra kenmerk werd dit voor de code van het gecodeerde hoofdtype genoteerd.

Omdat de antwoorden in de rekenboekjes  al eerder gecodeerd waren door de 8 eerdere proefleiders en de stukken nu opnieuw gecodeerd moesten worden, moest de intercodeursbetrouwbaarheid bepaald worden. Dit is gedaan door elke van de 2 codeurs 10 boekjes te laten coderen, deze uit te wisselen en de scores vervolgens met elkaar te vergelijken. Daarna zijn alle boekjes onder de twee codeurs verdeeld en apart van elkaar gecodeerd. Er is voor gezorgd dat elk van de twee proefleiders een deel opgavenboekjes van elke proefleider kreeg. Codeur 1 kreeg dus de helft van de opgaveboekjes van proefleider 7, en codeur 2 de andere helft. Uiteindelijk zijn alle gecodeerde gegevens ingevoerd in excel.

## Resultaten

Omdat de rekenstrategieën die de leerlingen hebben gebruikt door de codeurs erg specifiek zijn gecodeerd en het lastig is om duidelijke uitspraken te doen over deze specifieke coderingen zijn de oorspronkelijke variabelen opnieuw gecodeerd in nieuwe variabelen. Dit is gebeurd door de extra kenmerken te verwijderen. Na het verwijderen van deze extra kenmerken zijn er nog 14 rekenstrategieën overgebleven. Daarnaast zijn er vijf reststrategieën die aangeven dat een uitwerking niet duidelijk codeerbaar is. Allereerst zal er besproken worden welke strategieën de leerlingen hebben gebruikt in de keuzeconditie, en vervolgens zal er op twee manieren worden geanalyseerd of de leerlingen adaptief gedrag hebben vertoond. De eerste manier is door te analyseren of de leerlingen gebruik maken van de opgavekenmerken in de keuzeconditie bij het kiezen van een strategie en de tweede manier is door te bekijken of leerlingen de strategie die zij het best beheersen in de geen-keuzeconditie ook daadwerkelijk het meest gebruiken in de keuzeconditie.

### Frequentie gebruikte strategieën in de keuzeconditie

In tabel 1 worden 11 strategieën weergegeven. Dit zijn niet alle 14 mogelijke strategieën omdat strategieën die geen enkele keer zijn gebruikt voor de opgaven in de keuzeconditie niet zijn meegenomen in de tabel. Voor 45.7% van de opgaven hebben kinderen cijferen gebruikt, en cijferen is daarmee de meest gekozen strategie. De strategie die daarna het meest wordt gebruikt is het splitsen. Deze strategie wordt in 22.3% van de gevallen gebruikt. Daarnaast is te zien dat indirect optellen en indirect aftrekken zelden worden gebruikt in de keuzeconditie. Het totale percentage opgaven opgelost met een manier van indirect optellen betreft 4.4% *Tabel 1. Percentages gebruikte strategieën keuzeconditie.*

| Groep | Rekenniveau | Cijferen | Rek. Met cijfers | DA Rijg. | DA Splits. | DA Kg. | DA Varia | DA andere | IO Rijg. | IO Varia | IO Andere | IA Comp. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Bovengemiddeld | 16.4 | 0.7 | 17.4 | 40.0 | 1.2 | 3.9 | 11.1 | 0.0 | 3.2 | 0.7 | 0.0 |
| | Ondergemiddeld | 11.8 | 3.9 | 9.8 | 51.0 | 2.5 | 0.0 | 9.3 | 0.0 | 2.5 | 0.0 | 0.0 |
| 7 | Bovengemiddeld | 53.0 | 1.7 | 6.4 | 12.6 | 0.0 | 10.0 | 2.1 | 1.7 | 3.0 | 1.5 | 1.3 |
| | Ondergemiddeld | 61.1 | 4.6 | 1.4 | 16.7 | 0.0 | 6.9 | 6.0 | 0.0 | 1.4 | 1.4 | 0.0 |
| 8 | Bovengemiddeld | 75.8 | 0.9 | 4.1 | 3.1 | 0.0 | 3.8 | 3.8 | 0.6 | 3.8 | 1.6 | 0.0 |
| | Ondergemiddeld | 66.0 | 0.0 | 0.6 | 11.7 | 0.0 | 4.9 | 11.1 | 0.4 | 1.2 | 0.0 | 0.0 |
| Tot. | Bovengemiddeld | 46.0 | 1.1 | 9.7 | 19.9 | 0.4 | 6.2 | 5.7 | 0.8 | 3.3 | 1.2 | 0.5 |
| | Ondergemiddeld | 45.2 | 3.1 | 4.1 | 27.3 | 0.9 | 4.0 | 8.6 | 0.0 | 1.7 | 0.5 | 0.0 |
| | | 45.7 | 1.8 | 7.9 | 22.3 | 0.6 | 5.5 | 6.7 | 0.6 | 2.8 | 1.0 | 0.3 |

In 4.9% van de gevallen was de gekozen strategie niet codeerbaar, en in 4.3 % van de gevallen kwam dit omdat er niet voldoende toelichting van de proefleider was gegeven om de strategie te kunnen coderen.

De resultaten in tabel 1 laten ook  zien dat de leerlingen van verschillende rekenniveaus de opgaven met verschillende strategieën hebben opgelost.  Voor beide niveaus geldt dat de cijferstrategie de meest gebruikte strategie is. Voor leerlingen met een bovengemiddelde citoscore is het percentage sommen beantwoord met de cijferstrategie 46.0% en voor leerlingen met een onder gemiddelde score is dit 45.0%.  Om te bekijken of de groep waarin de leerlingen zitten ook een rol speelt is dit ook meegenomen in tabel 1. Hieruit blijkt dat hoewel de totale scores aangeven dat cijferen bij zowel de bovengemiddelde leerlingen als de onder gemiddelde leerlingen de meest gebruikte strategie is, dit bij kinderen in groep  6 niet het geval is. Daar ligt het percentage van opgaven die zijn opgelost met de cijferstrategie erg laag (bovengemiddeld 16.4% en onder gemiddeld 11.8%). In groep 7 en 8 stijgt dit percentage sterk, en is de cijferstrategie wel de meest voorkomende strategie (groep 7 53.0% en 61.0%, groep 8 75.8% en 66.0%).

Hoewel cijferen bij de bovengemiddelde  en onder gemiddelde leerlingen evenveel voorkomt is er wel sprake van een verschil in distributie van de splitstrategie voor bovengemiddelde en onder gemiddelde leerlingen.  Waar de splitstrategie bij kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau slechts in 19.9% van de gevallen wordt gebruikt, komt dit bij kinderen met een onder gemiddeld rekenniveau in 27.3% van de gevallen voor. Ook hierbij is een verschil te zien voor de verschillende groepen. In groep  6 wordt er bij veel opgaven gebruik gemaakt van de splitstrategie, voor de onder gemiddelde groep zelfs  bij  51.0% van de opgaven. In groep 8 is dit percentage sterk afgenomen en wordt slechts 6.0% van de sommen opgelost door het gebruik van splitsen.

Hoewel over het algemeen cijferen dus de meest gebruikte strategie is, is dit in groep 6 nog niet het geval. In groep 6 komt het splitsen het meest voor. Het gebruik van cijferen neemt toe naarmate kinderen de bovenbouw van de basisschool doorlopen. Daarnaast is te zien dat dat splitsen door leerlingen met een bovengemiddeld rekenniveau minder vaak wordt gebruikt dan door leerlingen met een onder gemiddeld rekenniveau.

**Adaptiviteit naar opgavekenmerken**

Om te bepalen of de leerlingen adaptief rekenen is er bekeken of de leerlingen gebruik maken van de opgavekenmerken in de keuzeconditie en dus compenseren bij de opgaven die geschikt zijn voor compenseren en algoritmisch rekenen voor de opgaven die meer geschikt waren voor een algoritmische strategie. Om deze gemiddelden te vergelijken zijn er 2 nieuwe variabelen gemaakt voor het gebruik van algoritmische strategieën, en twee nieuwe variabelen voor het gebruik van compenseren. De eerste variabele voor het gebruik van algoritmische strategieën telt hoe vaak algoritmische strategieën zijn gebruikt voor de hoofdrekenopgaven en de tweede variabele telt hoe vaak algoritmische strategieën zijn gebruikt voor de algoritmische opgaven. Door vervolgens een gepaarde t-toets te gebruiken kan bekeken worden of het gemiddelde gebruik van algoritmische strategieën voor de hoofdrekenopgaven en het gemiddelde gebruik van algoritmische strategieën voor de algoritmische opgaven significant van elkaar verschillen. Voor compenseren is dit op eenzelfde manier gebeurd en is ook de gepaarde t-toets gebruikt.

Tabel 2. *aantal keer compenseren hoofdrekenopgaven en aantal keer compenseren algoritmische opgaven*

| | *Hoofdrekenopgaven* | | *Algoritmische opgaven* | |
|---|---|---|---|---|
| | Frequentie | Percentage | Frequentie | Percentage |
| 0x | 238 | 78.5 | 283 | 93.4 |
| 1x | 22 | 7.3 | 11 | 3.6 |
| 2x | 20 | 6.6 | 4 | 1.3 |
| 3x | 23 | 7.6 | 5 | 1.7 |
| Totaal | 303 | 100 | 303 | 100 |

Uit de resultaten komt naar voren dat leerlingen zich bewust zijn van de opgavekenmerken bij het kiezen van een strategie. Er wordt een significant verschil gevonden tussen het gemiddelde gebruik van compenseren bij de hoofdrekenopgaven en het gemiddelde gebruik van compenseren voor de algoritmische opgaven (0.43 vs 0.11), $t(302) = 7.026$ , $p$=0.000.

In tabel 2 is te zien dat in 21.5 % van de gevallen compenseren minstens eenmaal wordt gebruikt voor de hoofdrekenopgaven, terwijl dit percentage voor de algoritmische opgaven slechts 6.6 % betreft. Daarnaast geeft tabel 2 weer dat bij de hoofdrekenopgaven 23 kinderen compenseren gebruiken voor alle drie de opgaven, terwijl bij de algoritmische conditie slechts 5 kinderen dit doen. Ook is het aantal kinderen dat helemaal niet compenseert groter bij de algoritmische opgaven dan bij de hoofdrekenopgaven, wat dus duidt op een adaptief gebruik van compenseren.

Tabel 3. *Algoritmische strategieën hoofdrekenopgaven en Algoritmische strategieën Algoritmische opgaven*

| | *Hoofdrekenopgaven* | | *Algortimische opgaven* | |
|---|---|---|---|---|
| | Frequentie | Percentage | Frequentie | Percentage |
| 0x | 147 | 48.5 | 155 | 51.2 |
| 1x | 9 | 3.0 | 12 | 4.0 |
| 2x | 18 | 5.9 | 19 | 6.3 |
| 3x | 129 | 42.6 | 117 | 38.6 |
| Totaal | 303 | 100 | 303 | 100 |

Ook wat betreft algoritmische strategieën wordt er een significant verschil gevonden (1.32 v.s 1.44), $t(302) = -2.98$ $p= 0.003$. Dit betekent dat er significant meer algoritmische strategieën worden gebruikt voor de algoritmische opgaven dan voor de hoofdrekenopgaven .Toch zijn de verschillen tussen beide opgavesoorten hier kleiner dan voor het compenseergedrag. Beide resultaten laten zien dat leerlingen zich bewust zijn van de opgavenkenmerken. Zo gebruiken ze zowel significant meer compenseer strategieën bij de compenseeropgaven als significant meer algoritmische strategieën bij de algoritmische opgaven.

tabel 4. *percentage gebruik compenseren*

| | Hoofdrekenopgaven | Algoritmische opgaven |
|---|---|---|
| AB | 26.1 | 6.9 |
| CDE | 11.3 | 6.2 |

tabel 5. *percentage gebruik algoritmische strategieën*

| | Hoofdrekenopgaven | Algoritmische opgaven |
|---|---|---|
| AB | 48.2 | 52.3 |
| CDE | 49.5 | 49.5 |

.

Voor leerlingen met een bovengemiddeld rekenniveau wordt er een beter aanpassingsvermogen op opgavekenmerken gevonden dan voor leerlingen met een onder gemiddeld rekenniveau. Zo maken de leerlingen met een AB-citoscore in 26.1 % van de gevallen gebruik van compenseren bij de hoofdrekenopgaven, terwijl dit maar in 6.9 % van de gevallen gebeurt bij de algoritmische opgaven. (0.52 v.s 0,11) $t(202)= 6.65$ $p=0.000$. Voor leerlingen met een onder gemiddelde citoscore omvat het gebruik van de compenseren 11.3% van de hoofdrekenopgaven en 6.2 % van de algoritmische opgaven (0.23 v.s 0.10) $t\ (96)=2.31$ $p = 0.023$ . Bij beide rekenniveaus is er dus een significant verschil tussen het gebruik van compenseren voor beide soorten opgaven.

Om te bekijken of het verschil in adaptiviteit tussen beide rekenniveaus significant is, is er gebruik gemaakt van een repeated measures anova. Hierbij was het rekenniveau de in between groups factor, en de verschillende opgaven kenmerken de within groups factor. Uit deze repeated measures anova komen 3 effecten naar voren. Allereerst wordt er een significant effect gevonden voor opgave type, dit wil zeggen dat het gebruik van compenseren afhankelijk is van het opgavetype $F(1,298)=31.079$, $p=0.000$ . Het tweede effect dat gevonden wordt is het in between groups effect van het rekenniveau, ook dit effect is significant $F(1,298)=3.983$, $p=0.047$. Rekenniveau is dus van invloed op het gebruik van compenseren, hoe hoger het rekenniveau hoe meer leerlingen compenseren. Tenslotte wordt er ook een significant interactieeffect gevonden $F(1,298)=7.824$ $p=0.005$. Kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau laten dus meer adaptief gedrag zien wat betreft compenseren dan kinderen met een onder gemiddeld rekenniveau. . Hoewel beide groepen leerlingen dus adaptief gedrag vertonen wat betreft compenseren, is het adaptieve gedrag van bovengemiddelde leerlingen significant groter.

Wat betreft het gebruik van algoritmische strategieën bij de algoritmische opgaven is er alleen een significant verschil gevonden voor de kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau (1.31 v.s 1.43), $t$ (202)=-2.96 df=202 $p<0.003$. Voor kinderen met een ondergemiddeld rekenniveau is er dus geen adaptiviteit gevonden wat betreft het gebruik van algoritmische rekenstrategieën. Ook voor het gebruik van algoritmische strategieën is er een repeated measures anova uitgevoerd. Opnieuw wordt er een significant effect gevonden voor opgavetype $F(1,298)=4.775$, $p=0.030$. Dit wil zeggen dat er meer algoritmische strategieën worden gebruikt voor de algoritmische opgaven dan voor de hoofdrekenopgaven. Voor rekenniveau wordt er geen hoofdeffect gevonden $F(1,298)=0.19$, $p=0.891$. Het interactieeffect is ook niet significant $F(1,298)=1.783$ $p=0.183$. Hoewel leerlingen met een bovengemiddeld niveau dus adaptiever gedrag laten zien wat betreft algoritmische strategieën, is dit gedrag niet significant adaptiever dan dat van ondergemiddelde leerlingen.

**Efficiëntie geen-keuzeconditie**

Om de tweede manier van adaptiviteit te analyseren wordt er gebruik gemaakt van de efficiëntie van de strategieën in de geen-keuzeconditie. Er wordt bekeken of de strategieën die het meest efficiënt blijken uit de geen-keuzeconditie ook daadwerkelijk het meest worden gebruikt in de keuzeconditie.

Tabel 6. *Oplossnelheid en accuratesse geen-keuzeconditie*

| Groep | Rekenniveau | Cijferen | Rek. Met cijfers | DA Rijg. | DA Splits. | DA Kg. | DA Varia | DA andere | IO Rijg. | IO Varia | IO Andere |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | Bovengemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 29.3 | 28.4 | 48.8 | 33.7 | 47.8 | 43.8 | 45.3 | 21.5 | 27.6 | 16.8 |
| | Acuratesse | 54.2 | 8.0 | 59.1 | 34.7 | 47.1 | 56.4 | 64.8 | 100 | 95.8 | 93.3 |
| | Ondergemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 41.3 | 9.3 | 58.1 | 35.1 | 43.8 | 127 | 39.3 | - | 34.6 | 17.1 |
| | Acuratesse | 60.3 | 100 | 17.3 | 23.7 | 19.0 | 100 | 65.6 | - | 75.0 | 100 |
| 7 | Bovengemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 22.8 | 17.5 | 33.2 | 27.9 | 35.0 | 28.5 | 21.4 | 40.4 | 19.7 | 38.3 |
| | Acuratesse | 85.3 | 15.4 | 78.1 | 49.1 | 50.0 | 73.6 | 43.5 | 81.1 | 66.7 | 92.9 |
| | Ondergemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 27.5 | 29.3 | 43.3 | 28.9 | 146 | 28.2 | 25.7 | | 44.1 | 14.0 |
| | Acuratesse | 68.9 | 35.5 | 51.0 | 28.7 | 100 | 40.9 | 56.3 | - | 90.0 | 25.0 |
| 8 | Bovengemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 21.7 | 27.2 | 50.7 | 25.7 | - | 20.1 | 29.9 | 19.3 | 17.6 | 27.1 |
| | Acuratesse | 84.2 | 45.8 | 67.9 | 50.0 | - | 62.3. | 66.7 | 84.2 | 86.0 | 87.5 |
| | Ondergemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 27.7 | 14.6 | 85.9 | 30.2 | | 32.4 | 36.9 | 22.3 | 41.0 | 55.0 |
| | Accuratesse | 75.1 | 100 | 26.3 | 11.8 | - | 18.5 | 54.2 | 50 | 100 | 50.0 |
| Tot. | Bovengemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 24.0 | 26.8 | 44.2 | 30.3 | 47.6 | 24.5 | 40.5 | 31.1 | 19.9 | 29.3 |
| | Accuratesse | 77.7 | 20.8 | 72.0 | 43.7 | 48.9 | 64.4 | 69.4 | 82.2 | 85.7 | 90.5 |
| | Ondergemiddeld | | | | | | | | | | |
| | Oplostijd | 30.7 | 21.9 | 56.2 | 32.2 | 45.2 | 33.8 | 34.0 | 22.3 | 39.9 | 31.6 |
| | Acuratesse | 69.2 | 23.1 | 36.5 | 27.0 | 20.0 | 38.0 | 64.5 | 50.0 | 87.0 | 40.0 |

Tabel 6 met de beschrijvende resultaten wat betreft accuratesse en snelheid voor de geen-keuzecondities laat een aantal dingen zien. Wat betreft accuratesse lijkt cijferen de beste oplosmanier. Alleen indirect optellen (IO) varia scoort hoger, maar deze oplosmanier is slechts 23 maal gebruikt. Cijferen zorgt in groep 6 nog voor een relatief laag percentage goede antwoorden (54.2 % en 60.3%), maar dit percentage goede antwoorden stijgt in groep 7 en 8 (85.3% en 68.9%; 84.2 % en 75.1%). Opvallend is verder dat splitsen een laag percentage goede antwoorden oplevert in groep 6, terwijl dit de strategie is die zijn in 50% van de gevallen gebruiken in de keuzeconditie.

Wat betreft oplossnelheid is er te zien dat vooral bij de bovengemiddelde kinderen cijferen een snelle oplosmanier lijkt. Daar is de gemiddelde oplossingstijd slechts 24.0 seconden, en alleen IO-varia blijkt een snellere oplosmanier. Opvallend genoeg is voor kinderen met een onder gemiddeld rekenniveau rekenen met cijfers de snelste oplosmanier, terwijl de accuratesse voor rekenen met cijfers slechts 23.1% is. Verder blijkt rijgen voor zowel de bovengemiddelde leerlingen als de onder gemiddelde leerlingen de strategie die de langste oplossingstijd geeft. Voor bovengemiddelde leerlingen gaat deze lange oplossingstijd gepaard met en hoge percentage accurate antwoorden (72.0%), maar voor onder gemiddelde leerlingen blijft dit percentage steken op 36.5%.

**Adaptiviteit naar snelheid en accuratesse in de keuzeconditie**

Een tweede manier om te onderzoeken of leerlingen adaptief rekenen is door te bekijken of leerlingen in de keuzesconditie de strategie gebruiken waarmee zij in de geen-keuzeconditie hebben aangetoond het snelst en het meest accuraat opgaven te kunnen oplossen. Dit wordt gedaan aan de hand van een correlatieanalyse. Om deze correlatieanalyse uit te voeren worden er 2 nieuwe variabelen aangemaakt. De eerste variabele betreft het verschil in accuratesse tussen de antwoorden van de leerlingen in de algoritmische geen-keuzeconditie en de hoofdreken geen-keuzeconditie. Dit wordt berekend door het aantal goede antwoorden behaald met hoofdrekenstrategieën van het aantal goede antwoorden behaald met algoritmische strategieën af te trekken. De tweede variabele betreft het verschil in gemiddelde oplossneltijd tussen de algoritmische geen-keuzeconditie en de hoofdreken geen-keuzeconditie, hierbij wordt de gemiddelde oplossnelheid van hoofdrekenstrategieën van de gemiddelde oplossnelheid van cijfer strategieën afgetrokken. Vervolgens wordt voor elk van deze variabelen bekeken of er een correlatie is  met het gebruik van de cijferstrategie in de keuzeconditie. Door te bekijken hoe groot deze correlatie is kan bekeken worden of leerlingen in de keuzeconditie doen waar zij goed in zijn volgens de geen-keuzecondities.

Voor zowel oplossnelheid als accuratesse wordt er door bepaalde groepen leerlingen een mate van adaptiviteit gevonden. Voor strategie-accuratesse wordt er een correlatie gevonden van $r(301)=0.22$, $p < 0.0001$ en voor strategie-oplossnelheid een correlatie van  $r=(301)-0.164$,  $p<0.005$. De correlatie tussen strategieaccuratesse en het gebruik van cijferen is postief. Deze waarde is positief omdat leerlingen meer gebruik maken van cijferen in de keuzeconditie als zij hier goed in zijn in de geen-keuzeconditie. Voor de correlatie tussen het gebruik van cijferen en strategie-oplossnelheid wordt juist een negatieve correlatie gevonden. Deze waarde is negatief omdat een lage oplossingstijd duidt op meer efficiëntie. Wanneer de oplossingstijd met een bepaalde strategie laag is, zal deze strategie dus meer gebruikt worden.

Wanneer er wordt gekeken naar verschillen tussen verschillende leerjaren en rekenniveaus komen de volgende dingen naar voren. In groep 6 wordt er geen significante correlatie gevonden voor strategie-oplossnelheid voor kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau, terwijl deze wel wordt gevonden voor kinderen met een onder gemiddeld rekenniveau. ($r(70)=-0.153$, $p<0,208$ en $r(32)=-0.494$, $p<0.005$). Kinderen uit groep 6 met een onder gemiddeld rekenniveau lijken dus wel adaptief wat betreft oplossnelheid terwijl kinderen met een bovengemiddeld rekenniveau dit niet lijken te zijn. Voor groep 7 wordt er voor zowel een bovengemiddeld rekenniveau als een onder gemiddeld rekkenniveau een significante correlatie gevonden wat betreft strategie-oplossnelheid. Tenslotte wordt er voor leerlingen uit groep 8 geen significante correlatie gevonden wat betreft strategie-oplossnelheid. Kinderen van beide rekenniveaus vertonen dus geen adaptief gedrag wat betreft oplossnelheid in groep 8.Wat betreft strategie-accuraatheid wordt er alleen voor kinderen in groep 6 met een bovengemiddeld rekenniveau een significante correlatie gevonden, voor alle andere leerlingen uit groep 6, en ook alle leerlingen uit groep 7 en 8 wordt er geen significante correlatie gevonden voor strategie-accuraatheid. Dit wil zeggen dat er voor deze leerlingen geen relatie wordt gevonden tussen het aantal goede antwoorden in de geen-keuzecondities en de strategie die zij kiezen in de keuzeconditie.

Tabel 7. *correlaties groep en rekenniveau oplossnelheid accuratesse*

| Groep | Rekenniveau | Correlatie Strategie-oplossnelheid | Correlatie Strategie-accuraatheid |
|---|---|---|---|
| 6 | Bovengemiddeld | -0.153, $p<0.208$ | 0.283, $p<0.016$ |
| | Ondergemiddeld | -0.494 $p<0.005$ | 0.216, $p<0.219$ |
| 7 | Bovengemiddeld | -0.467, $p<0.0001$ | 0.038 , $p<0743$ |
| | Ondergemiddeld | -0.448, $p<0.006$ | 0.090, $p<0.743$ |
| 8 | Bovengemiddeld | -0.156, $p<0.270$ | 0.014, $p<0.919$ |
| | Ondergemiddeld | -0.141, $p<0.483$ | 0.174, $p<0.385$ |

## Discussie

### Conclusie

Met behulp van het ASCM model (Lemaire & Siegler, 1995) en de keuze/geen keuzecondities(Siegler & Lemaire,1997 ) is in dit onderzoek onder 303 kinderen tussen de 8 en de 12 jaar geanalyseerd of er een verschil is wat betreft strategie repertoire, strartegie distibutie, strategie efficiëntie en strategie adaptiviteit voor aftrekopgaven tot de 1000 tussen bovengemiddelde en onder gemiddelde rekenaars.

Wat betreft de distributie van strategieën in de keuzeconditie kan geconcludeerd worden dat cijferen over het algemeen de meest gebruikte strategie is. Voor bovengemiddelde rekenaars ligt het percentage van sommen opgelost met cijferen op 46.0% en voor onder gemiddelde leerlingen is dit 45.2%. Toch blijkt uit de distributie van strategieën uitgesplitst naar groepen en rekenniveaus dat cijferen niet in alle groepen de meest gebruikte strategie is. In groep 6 ligt dit percentage op slechts 16.4% voor bovengemiddelde rekenaars en 11.8% voor onder gemiddelde rekenaars. In groep 7 stijgen deze percentages naar 53.0% en 61.1% en in groep 8 zelfs naar 75.8% en 66.0%. Er is dus een stijgende lijn te zien voor het gebruik van de cijferstrategie, afhankelijk van de groep waarin de leerling zit  Dit zou kunnen komen doordat leerlingen in groep 6 de cijferstrategie nog niet goed aangeleerd hebben gekregen en daarom dus minder gebruiken.

Ook voor het gebruik van splitsen is er een verschil te zien tussen de verschillende groepen. Splitsen is in groep 6 met 40.0% voor de bovengemiddelde rekenaars en  51.0% voor de onder gemiddelde rekenaars de meest gebruikte strategie, maar dit percentage neemt af in groep 7 (12.6% en 16.7%) en 8 (3.1% en 11.7%). Opvallend aan de distributie van strategieën is dus vooral het verschil gevonden tussen de verschillende groepen. Deze verschillen zijn groter dan de verschillen in distributie van strategieën tussen de twee rekenniveaus.

Uit de resultaten van de adaptiviteit naar de opgavekenmerken blijkt dat de hele groep leerlingen zowel voor de algoritmische opgaven als voor de compenseeropgaven adaptiviteit laat zien. Er worden dus meer algoritmische strategieën gebruikt voor de algoritmische opgaven dan voor de compenseeropgaven, en meer compenseer strategieën voor de compenseeropgaven dan voor de algoritmische opgaven. Uit de analyses naar de verschillen tussen de twee rekenniveaus blijkt dat bovengemiddelde rekenaars significant meer gebruik maken van compenseren op de compenseeropgaven dan onder gemiddelde rekenaars. Bovengemiddelde rekenaars laten dus meer adaptiviteit naar opgavekenmerkenzien wat betreft compenseren. Voor algoritmische opgaven wordt er echter geen significant verschil gevonden tussen bovengemiddelde leerlingen en onder gemiddelde leerlingen.

Naast de adaptiviteit naar opgavekenmerken is er ook gekeken naar adaptiviteit naar snelheid en accuratesse. Allereerst is hiervoor de efficiëntie van de strategieën in de geen-keuzeconditie weergegeven. Hieruit blijkt dat cijferen de strategie is die de meeste goede antwoorden oplevert en dat dit percentage stijgt in groep 7 en 8 ten opzichte van groep 6. Cijferen wordt in groep 6 dus niet alleen

een stuk minder vaak gebruikt dan in groep 7 en 8, maar blijkt ook minder efficiënt dan in groep 7 en 8. Wat betreft oplossnelheid lijkt voor bovengemiddelde leerlingen cijferen de beste oplosmanier, terwijl voor onder gemiddelde rekenaars rekenen met cijfers de snelste oplosmanier blijkt.

Analyses naar de adaptiviteit voor snelheid en accuratesse laten zien of de leerling zijn strategiekeuze in de keuzeconditie aanpast aan hoe snel en hoe goed hij is met bepaalde strategieeen in de geen-keuzecondities. Wanneer de leerling adaptief is gebruikt hij dus de strategie waar hij goed in is. Wat betreft strategie-accuraatheid is er alleen voor leerlingen met een bovengemiddeld rekenniveau uit groep 6 adaptiviteit gevonden. Voor onder gemiddelde leerlingen uit groep 6 en alle leerlingen uit groep 7 en 8 wordt er geen adaptiviteit gevonden wat betreft strategie-accuraatheid. Voor strategie-oplossnelheid is er sprake van adaptiviteit voor 3 van de 6 groepen. Hier wordt voor onder gemiddelde rekenaars uit groep 6 en voor alle rekenaars uit groep 7 adaptiviteit gevonden. Leerlingen uit groep 8 laten dus geen enkele vorm van adaptiviteit zien, niet wat betreft snelheid en ook niet wat betreft accuratesse.

**Limitaties**

Er zijn een aantal limitaties wat betreft dit onderzoek . Dit onderzoek heeft voortgeborduurd op data die reeds vorig jaar zijn verzameld, wat voor wat moeilijkheden heeft gezorgd. Allereerst waren de manieren waarop de proefleiders van vorig jaar de uitwerkingen van de leerlingen hebben genoteerd uiteenlopend. Waar sommige proefleiders uitgebreid commentaar hebben opgeschreven, was er bij sommige proefleiders sprake van incompleet commentaar. Hierdoor was 4.9% van de strategieën niet codeerbaar. Ook zouden onduidelijke commentaren van de proefleiders voor verkeerde strategie interpretaties van de codeurs kunnen hebben gezorgd. Bovendien werden alle opgaveboekjes slechts door 1 iemand gecodeerd. Hoewel de intercodeursbetrouwbaarheid wel is bepaald, zou het toch beter zijn om om alles onfhankelijk van elkaar door meer dan één codeur te laten doen omdat strategieën soms veel op elkaar lijken en het codeerboek niet altijd 100% duidelijk blijkt.

Wanneer de leerling geen uitwerking bij de opgave noteerde werd de leerling verbaal gevraagd hoe de leerling de opgave had opgelost. Naast dat het voor de proefleider misschien lastig is om uitgebreid genoeg op te schrijven wat de leerling verbaal aangeeft, is het voor leerlingen ook lastig om verbaal uit te drukken wat hij of zij zojuist heeft gedaan. Zo zou er bijvoorbeeld sprake kunnen zijn van sociale wenselijkheid. Kinderen zouden soms incomplete antwoorden geven, die dus geen goede weerspiegeling van de gebruikte strategie geven (Coony, 1992). Er is echter ook onderzoek dat liet zien dat verbale weergave die kinderen geven van wat zij uitvoeren vaak accuraat is (Robinson, 2011)

Verder is er een limitatie wat betreft het gebruik van de keuze/geenkeuze methode. Om uitspraken te kunnen doen over de verschillende specifieke strategieën zou er eigenlijk voor elke strategie een geen-keuzeconditie moeten zijn (Luwel, Onghena, Torbeyns, Schillemans & Verschaffel, 2009). Dit was echt praktisch niet uitvoerbaar omdat er gebruikt werd gemaakt van erg specifieke coderingen van de strategieën. Daarom is er voor gekozen gebruik te maken van een geen-keuzeconditie voor cijferen en een geen-keuzeconditie voor hoofdrekenen. Er kunnen hierdoor voor adaptiviteit wat betreft accuratesse en oplossnelheid nu alleen globale uitspraken gedaan worden over twee groepen strategieën; hoofdrekenen en cijferen. Uitspraken over de adaptiviteit wat betreft specifiekere strategieën kunnen niet gedaan worden.

Tenslotte wordt er in dit onderzoek ook vanuit gegaan dat alle opgaveboekjes gelijk zijn qua moeilijkheidsgraad. Deze gelijkheid in niveau is zoveel mogelijk geprobeerd te bereiken door specifieke eisen te stellen aan de hoofdrekenopgaven en algoritmische opgaven die werden gebruikt. Echter, door het gebruik van verschillende opgaven kan deze gelijkheid in niveau nooit gegarandeerd worden. Ook de invloed van de volgorde van opgaven is niet bekeken. Beginnen met een bepaalde opgavesoort zou er voor kunnen zorgen dat meer opvolgende opgaven ook met deze strategie worden opgelost.

**Implicaties**

Zoals een van de de limitaties al aangaf zou er in vervolgonderzoek kunnen worden ingegaan op de adaptiviteit wat betreft specifiekere strategieën, omdat er nu alleen gebruik is gemaakt van een hoofdrekenconditie en een algoritmische conditie. Dit zou bijvoorbeeld gedaan kunnen worden door gebruik te maken van meer geen-keuzecondities. Een goed voorbeeld voor een nuttige extra geen-keuzeconditie zou een conditie voor splitsen zijn. Splitsen is de meest gebruikte strategie in groep 6, en door een geen-keuzeconditie voor splitsen toe te voegen zou de adaptivtieit wat betreft het gebruik van splitsen beter geanalyseerd kunnen worden.

Ook zou in volgend onderzoek overwogen kunnen worden de kinderen uit groep 6 buiten het onderzoek te laten. Uit de resultaten blijkt namelijk dat kinderen uit groep 6 veelal sterk afwijken wat betreft strategie distributie. Dit zou kunnen komen doordat kinderen uit groep 6 sommige strategieën nog niet goed aangeleerd hebben gekregen, waardoor ze meer moeite hadden met de cijferstrategie en deze is dus ook minder vaak gebruiken in de keuzeconditie.

Verder blijkt uit dit onderzoek dat leerlingen met een bovengemiddeld rekenniveau meer adaptiviteit laten zien dan kinderen met een ondergemiddeld rekenniveau wat betreft opgavekenmerken. Dit verschil in adaptiviteit zou meegenomen kunnen worden in het onderwijs. Zo zou onderzocht kunnen worden of voor leerlingen met een ondergemiddeld rekenniveau meer focus moet worden gelegd op verschillende stappenplannen voor verschillende opgaven. Het blijkt namelijk lastig voor leerlingen met een ondergemiddeld rekenniveau om opgavekenmerken te doorzien. Eerder onderzoek naar adaptviteit onder verschillende rekenniveaus liet al zien dat leerlingen met een ondergemiddeld rekenniveau meer sturing nodig hebben (KNAW, 2009). En het zou dus overwogen kunnen worden om zwakkere leerlingen meer duidelijke stappenplannen aan te rijken.

Tenslotte zou er in vervolg onderzoek gekeken kunnen worden naar bepaalde veel voorkomende fouten die leerlingen maken. Tijdens het coderen van de opgaven zijn deze fouten namelijk duidelijk naar voren gekomen. Zo zijn er veel leerlingen die altijd het kleinste getal van het grootste getal aftrekken, ookal staat dit kleinste getal als aftrekgetal genoemd. Daarnaast zijn er veel kinderen die vergeten dat er een tiental overbrugd moet worden bij het splitsen.  Literatuur naar systematische fouten geeft aan dat het van groot belang is om systematisch fouten in kaar te brengen. Wanneer de systematische fouten die gemaakt worden in kaart gebracht worden helpt dit allereerst om leerproblemen aan te geven. Daarnaast kan het helpen om te laten zien waar het fout gaat in de leerling-leraar interactie. Fouten die leerlingen maken komen ergens vandaan, en inzicht in deze fouten kan dus helpen het leerproces te verbeteren., (Radatz,1980).

# Bijlage

| | HR- opgaven | | CR-opgaven |
|---|---|---|---|
| Set 1 | | | |
| A1 | 857 – 498= | A4 | 862 – 473= |
| A2 | 846 – 399= | A5 | 744 – 167= |
| A3 | 531 – 297= | A6 | 633 – 354= |
| Set 2 | | | |
| B1 | 762 – 497= | B4 | 731 – 174= |
| B2 | 627 – 298= | B5 | 853 – 467= |
| B3 | 835 – 399= | B6 | 641 – 353= |
| Set 3 | | | |
| C1 | 674 – 298= | C4 | 656 – 367= |
| C2 | 743 – 499= | C5 | 731 – 173= |
| C3 | 835 – 397= | C6 | 842 – 454= |

| Voorbeeldopgaven | |
|---|---|
| 1. | 388 - 212 = |
| 2. | 386 - 133 = |
| 3. | 83 - 42 = |

## Literatuurlijst


Coony, J.B. (1992). The influence of verbal protocol methods on children's mental compution. *Learning and individual differences, 3,* 237-257.

De Greef, C (2013). Voorkeursstrategieen in het rekenonderwijs (afstudeeronderzoek). Christelijke hoge school Ede.

De Goeij, E. (z.d.). Aftrekken volgens een standaardprocedure. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 3,* 3-9.

Hickendorff, M., van Putten, C.M., Verhelst, N.D., & Heiser, W.J. (2010). Individual Differences in Strategy Use on Division Problems: Mental versus Written Computation. *Journal of Educational* Psychology, *102,* 438-452.

Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschoolanalyse en sleutels tot verbetering*. KNAW: Amsterdam.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children'slearning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124, 83–97.*

Luwel,K., Onghena, P., Torbeyns, J., Schillemans, V., Verschaffel, L. (2009). Strengths and Weaknesses of the Choice/No-Choice Method in Research on Strategy use. *European Psychologist, 14,* 351-362.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the learning of mathematics, 1,* 16-20.

Robinson, K., M. (2001). The Validity of Verbal Reports in Children's Subtraction . *Journal of Educational* Psychology, *93*, 211-222.

Siegler, R.S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM Using the Choice/ No Choice Method. *Journal of Experimental Psychology, 126,* 71-92.

Siegler, R.S. (1988). Individual Differences in Strategy Choices: Good Students, Not-So-Good Students, and Perfectionists. *Child Development, 4,* 833-851.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2002). Strategic competence: Applying Siegler's theoretical and methodological framework to the domain of simple addition. *European Joural of Psychology of Education, 3,* 275-291.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2006).The Development of Children's Adaptive Expertise in the Number Domain 20 to 100. *Cognition and instruction, 24,* 439–465.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM Mathematics Education, 41,* 581-590.

Treffers, A & Van den Heuvel- Panhuizen, M (2010). De rekenmethode telt. *Geraadpleegd op*: 10 april. http://www.fisme.science.uu.nl/nl/knaw-rapport/documents/derekenmethodetelt1.pdf

Van de Craats, J. (2007). Onderwijs Mythen in de rekendidactiek: Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *NAW , 5.*

Van Putten, C.M., & Hickendorff, M. (2009). Peilstokken van Plasterk: evaluatie van de rekenvaardigheid in groep 8.*Tijdschrift voor Orthopedagogiek, 48,* 183-194.