Herkenning en heuristieken bij complexe meetkunde problemen
Loef, Ruben

Herkenning en heuristieken bij complexe meetkunde problemen

Vakdidactische verdieping

Januari 2023

Ruben Loef

s0659975

ICLON

Universiteit Leiden

Begeleiders:

Peter Kop

Stefan Pouwelse

Samenvatting

In dit onderzoek is onderzocht hoe "probleemaanpak via herkenning en heuristieken" (PAHH) gebruikt kan worden als hulpmiddel bij het oplossen van meetkundige problemen. Hiertoe is samen met leerlingen een lijst met standaardopgaven samengesteld. Vervolgens zijn de leerlingen aan de slag gezet met verschillende meetkundige problemen. Leerlingen bepaalden aan de hand van een hulpmiddel met de standaardopgaven in hoeverre ze een probleem herkenden. Op basis van het herkenningsniveau werden heuristieken aangereikt die ze konden gebruiken voor verdere oplossing van het probleem.

Aan de hand van audio-opnames en uitwerkingen van de leerlingen is geanalyseerd hoe de leerlingen de opgaven hebben opgelost. Daarnaast is in een enquête is de leerlingen gevraagd wat ze van de gebruikte methode vonden. De leerlingen zijn zelf overwegend positief over de aanpak. De lijst met standaardopgaven helpt leerlingen bij herkenning van een probleem. De aangereikte heuristieken werden echter niet vaak bewust gebruikt. Wanneer de beheersing van de standaardopgaven onvoldoende was, lukte het de leerlingen niet om de opgaven volledig op te lossen.

Door herkenning van (deel)problemen lukte het de leerlingen stappen richting de oplossing van een probleem te zetten. Wel zullen leerlingen meer getraind moeten worden op deze manier van probleemoplossen. Ook zal er meer aandacht besteed moeten worden aan beheersing van de standaardopgaven.

Inleiding

Aanleiding vanuit theorie en praktijk

Hoewel wiskundige denkactiviteiten onderdeel zijn van de eindtermen, vinden leerlingen het lastig om niet-standaard opgaven op te lossen. Ze weten vaak niet hoe te beginnen. Vooral bij complexe opgaven (d.w.z. ingewikkelde opgaven, niet complex in de wiskundige betekenis), maken leerlingen vaak opmerkingen als “Ik snap het niet” of “Ik weet niet hoe ik moet beginnen”. Experts, daarentegen, hebben verschillende methodes tot hun beschikking om een bepaalde opdracht aan te pakken (Rott, 2013; Schoenfeld, 1980). Kunnen we deze expert methodes leerlingen aanleren?

Ik vind het belangrijk dat leerlingen zelf op onderzoek gaan, wiskundige verbanden leggen en problemen oplossen. Ik merk echter ook dat hier in praktijk weinig ruimte voor is. In de door mij gebruikte lesmethode (Getal en ruimte) is er relatief weinig aandacht voor dit onderwerp. Daarnaast voorkomen strakke planningen dat ik hier in de lessen veel tijd aan kan besteden. Ik ben daarom op zoek naar een manier of hulpmiddel waarbij leerlingen meer gestimuleerd worden zelfstandig problemen op te lossen, die ik makkelijk in mijn reguliere lessen kan gebruiken. Een voorbeeld van zo’n hulpmiddel is de META-kaart (Ernst et al., 2017).

Mijn vakdidactici op het Iclon (Peter Kop en Stefan Pouwelse) hebben onderzoek gedaan naar een “probleemaanpak via herkenning en heuristieken” (PAHH) framework om probleemaanpak door studenten te categoriseren op basis van herkenning (“wat herkent de leerling al”) en heuristieken (“welke strategie gebruikt de leerling vervolgens”). In het theoretisch kader wordt dit onderzoek in meer detail beschreven. Een generalisatie van dit 2D-frameworken is incidenteel toegepast bij het ontwerpen van onderwijs. In dit onderzoek ga ik onderzoeken in hoeverre dit framework door docenten ingezet kan worden als hulpmiddel om leerlingen te helpen bij het oplossen van complexere meetkunde problemen. In het vervolg van dit document heb ik het in dit verband over het PAHH-hulpmiddel.

Doel van het onderzoek

Het doel van dit onderzoek is 5VWO leerlingen zelfstandig complexere meetkunde problemen te laten oplossen met hulp op herkenning en heuristieken.

Theoretisch kader

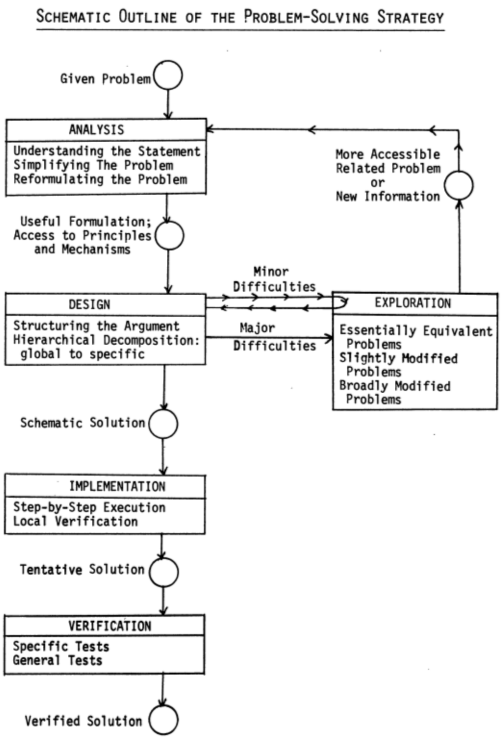
Pólya wordt gezien als de grondlegger van het wiskundig probleemoplossen. In zijn boek “How to Solve it” definieert hij 4 fasen hij het oplossen van problemen (Pólya, 1957):

1. “Understanding the problem” (het probleem begrijpen):
2. “Devising a plan” (een plan van aanpak maken):
3. “Carrying out the plan” (het plan uitvoeren)
4. “Looking back” (terugblikken)

Met name in de eerste twee fase worden leerlingen gestimuleerd zichzelf vragen te stellen, zoals:

- “Wat wordt er precies gevraagd”, “Welke data is er?”, “Kan ik een tekening maken ter verduidelijking?” (Fase 1)
- “Heb ik eerder een soortgelijk probleem gezien”, “Welke bekende technieken zou ik kunnen gebruiken?” (Fase 2)

Het oplossen van wiskundige problemen is geen vaardigheid die leerling al vooraf beheersen en zal volgens Schoenfeld apart aangeleerd moet worden (Schoenfeld, 1980). Hierbij kunnen strategieën aangeleerd worden die experts ook gebruiken (bijvoorbeeld: versimpelen van het probleem, speciale gevallen bekijken (zoeken naar een patroon) of een contradictie aantonen). Schoenfeld gebruikt daarbij een model vergelijkbaar als dat van Pólya, maar voegt een exploratiefase met (eventueel) meerdere iteraties in de eerste twee fase (zie Figuur 1).



Figuur 1: schematische weergave van probleemoplossingsstrategie volgens Schoenfeld (Schoenfeld, 1980)

Pólya en Schoenfeld stellen dus beide dat leerlingen een nieuw probleem strategisch moeten aanpakken met als doel uiteindelijk de link te kunnen leggen naar iets wat de leerling al beheerst. Landa heeft onderzoek gedaan naar hoe leerlingen een manier van denken aangeleerd kan worden. Hierin benoemt hij verschillende beheersingsniveaus van een bepaalde methode. Landa stelt dat als een leerling een bepaalde methode weet, hij deze ook uit kan leggen aan anderen. Op een beheersingsniveau hoger, kan de leerling deze methode ook uitvoeren.(Landa, 1983). Het is daarom voor leerlingen nuttig om zowel vragen te stellen als te beantwoorden.

In mijn onderzoek gaan leerlingen aan de slag met meetkunde met coördinaten. Bjuland heeft probleemoplossen op dit onderwerp onderzocht en laten zien dat het studenten in staat zijn om in groepsverband succesvol complexere problemen op te lossen zonder inmenging van een docent. In dit onderzoek werd geen hulp geboden, maar werd gekeken naar de gebruikte strategieën. Bjuland heeft hierbij met name gekeken naar het redeneerproces van de studenten en (meta-)cognitieve aspecten van het probleem oplossen. Bjuland herkent hierin 4 basis-heuristieken: visualiseren van het probleem, monitoring (d.w.z. metacognitieve activiteiten die de studenten gebruiken), zichzelf en elkaar bevragen en logisch redeneren. Hierin zijn heuristieken van Pólya en Schoenfeld terug te zien (Bjuland, 2004, 2007). Er moet wel aangetekend worden dat bij dit onderzoek de deelnemers volwassen waren (begin twintig).

Nieuw ontwerpprincipe	
OP1	*Op het PAHH-hulpmiddel worden vragen gesteld aan de leerlingen met als doel dat leerlingen zichzelf en elkaar in de toekomst blijven bevragen.*

Zoals in de inleiding al vermeld, wordt in dit onderzoek het PAHH framework bekeken. Ook het PAHH framework, is gebaseerd de theorieën van Pólya en Schoenfeld. Kop heeft dit framework in eerste instantie gebruikt als analysemiddel voor de aanpak van problemen op het gebied van tekenen van grafieken (P. M. G. M. Kop et al., 2021). Kop heeft hier leerlingen een functievoorschrift gegeven en gevraagd de bijbehorende grafiek te schetsen, zonder gebruik van hulpmiddelen. Vervolgens heeft hij geanalyseerd in hoeverre de leerlingen een bepaalde functie herkenden en welke heuristieken ze vervolgens hebben toegepast. In Figuur 2 staan de verschillende herkenningsniveaus en heuristieken samengevat. Pouwelse heeft later een vergelijkbaar onderzoek gedaan op het gebied van integraalrekening (Pouwelse S, n.d.).

Two-dimensional framework.

	Heuristic search (strong → weak)					
Levels of recognition (high → low)	A	A1. Graph is instantly recognized as a whole				
	B	B1. Recognition of family (with characteristics); possible graphs are known	B2. Search for 'parameters' of the graph	B3. Investigate the family characteristics, for instance via zeroes, derivative		
	C	C1. Split formula in subformulas, graphs of subformulas being known	C2. Compose the graphs by qualitative reasoning	C3. Compose the graphs by making a table		
	D	D1. Characteristic aspect of graph is recognized; rest of graph is unknown				
	E	E1. Graph is not recognized, algebraic formula is starting point for strategic exploration	E2. Qualitative reasoning for instance about domain, or vertical asymptote, or symmetry, or infinity behavior, or increase/decrease	E3. Algebraic manipulation	E4. Strategic search, for instance for zeroes or extreme values (via derivative)	E5. Calculate strategically chosen point(s)
	F	F1. No recognition at all	F2. Standard repertoire of research	F3. Make table with random x values		

Figuur 2: 2-dimensionaal PAHH framework voor tekenen van grafieken (P. M. G. M. Kop et al., 2015)

Hoewel bovenstaande onderzoeken domein-specifiek zijn, kan dit PAHH framework veralgemeniseerd worden, zoals in Tabel 1. In dit gegeneraliseerde framework zijn zes herkenningsniveaus voor een probleem gedefinieerd, van onmiddellijke herkenning tot totaal geen herkenning. Per herkenningsniveau worden toegepaste heuristieken gegeven. Een belangrijk aspect hierin is de probleemfamilie. Dit is een verzameling van soortgelijke problemen (of standaardopgaven), die de leerling eerder gezien heeft en op zou moeten beheersen. De strategieën van die de leerling bij deze opgaven heeft toegepast zijn wellicht ook toepasbaar op het huidige probleem. Het zelf laten nadenken over deze probleemfamilies of standaardopgaven helpt leerlingen bij het activeren en ordenen van de leerstof.

Nieuw ontwerpprincipes	
OP2	*De leerlingen maken een selectie van probleemfamilies/standaardopgaven uit het boek.*
OP3	*Het PAHH-hulpmiddel helpt leerlingen te identificeren op welk niveau ze een probleem herkennen en geeft per herkenningsniveau aan welke heuristieken te gebruiken zijn.*

Tabel 1: Een algemeen model (PAHH: probleemaanpak door herkenning en heuristeken). (P. Kop, n.d.)

Herkenningsniveau	Heuristieken
Gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend	Niet nodig
Een probleem-familie wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend	Zoek 'parameters' van de probleem-familie of gebruik kenmerken van probleem-familie
Het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familie-problemen	Los de deelproblemen op en voeg oplossingen samen, of, los de deelproblemen achter elkaar op
Enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend	
Er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart	Gebruik algemene heuristieken zoals Pólya: bekijk aparte gevallen, bekijk extremen, maak probleem kleiner, bekijk andere representaties
Er is geen herkenning en er wordt lukraak wat geprobeerd	

Het PAHH framework is incidenteel al ingezet om onderwijs te ontwerpen, bijvoorbeeld in een examentraining ((P. Kop, n.d.). Het SLO heeft een brochure gepubliceerd over hoe wiskundige denkactiviteiten te ontwerpen in onderbouw havo/vwo (Streun & Kop, 2017). In deze brochure zijn de ideeën uit het veralgemeniseerde PAHH framework terug te vinden.

Voor de interventie met een PAHH-hulpmiddel is het "Hele taak eerst met hulp op maat" een geschikte methode. Deze methode heeft vele voordelen, waaronder activatie van de voorkennis, stimulatie van meta-cognitieve vaardigheden en oefening met taken die leerlingen uiteindelijk moeten beheersen (Janssen et al., 2016; Kirschner & van Merriënboer, 2008). Deze zaken beoogt mijn onderzoek ook. Het PAHH-hulpmiddel kan hierbij als "hulp op maat" worden ingezet. Het PAHH-hulpmiddel moet daarom ook makkelijk hanteerbaar zijn in de les (bijvoorbeeld A4'tje, website, app).

Nieuw ontwerpprincipe	
OP4	*Het PAHH-hulpmiddel is in eerste instantie in papieren vorm, maximaal 1 A4 groot.*

De hele taak kan in dit geval een zorgvuldig geselecteerd opgave uit het tekstboek zijn, zoals in onderzoek van Palha. Ook in dit onderzoek worden leerlingen gestimuleerd zelf na te denken (bijvoorbeeld door elkaar te bevragen). Ook hier zijn de uitgangspunten dat leerlingen eerst iets in de opgaven herkennen en daarna door redeneren etc. de opgaven kunnen oplossen. In deze 'shift problem lessons approach' worden deze wiskundige denkprocessen gestimuleerd. In klassen waar volgens deze methode les is gegeven worden betere resultaten behaald dan in de controlegroep. (Palha et al., 2015).

Nieuw ontwerpprincipe

OP5 *Leerlingen worden aan de slag gezet volgens hele taak eerst met hulp op maat. De taak is zorgvuldig geselecteerd om slechts beperkte herkenning op te roepen. Hulp op maat wordt gegeven in de vorm van het PAHH-hulpmiddel.*

Vraagstelling: hoofdvraag met eventuele deelvragen

Hoofdvraag:

Welke karakteristieken heeft een lessenserie in 5VWO, die als doel heeft leerlingenprobleemaanpak in meetkunde te onderwijzen m.b.v. herkenning en heuristieken.

Deelvragen:

De deelvragen zijn verdeeld over twee categorieën.

Opbouw repertoire standaardopgaven

1. Welke standaardopgaven (probleemfamilies) halen leerlingen zelf uit het boek?

Gebruik PAHH-hulpmiddel

2. In hoeverre gebruiken leerlingen probleemfamilies bij het oplossen van complexe problemen?
3. Welke heuristieken gebruiken de leerlingen bij het oplossen van complexe problemen.
4. Hoe gebruiken leerlingen het hulpmiddel bij het oplossen van meetkunde problemen?
5. In hoeverre zijn ze succesvol om meetkunde problemen op te lossen met behulp van de aangeboden herkenningsniveaus en heuristieken?

Methode

Om bovenstaande onderzoeksvragen te beantwoorden is een ontwerponderzoek uitgevoerd. Hiervoor werden de ontwerpprincipes omgezet in concrete leskenmerken, zoals aangegeven in Tabel 2.

Tabel 2: Kenmerken van de te ontwerpen lessen/leermiddelen

Ontwerpprincipe		**Concreet leskenmerk**
OP1	Op het PAHH-hulpmiddel worden vragen gesteld aan de leerlingen met als doel dat leerlingen zichzelf en elkaar in de toekomst blijven bevragen.	PAHH-hulpmiddel bevat concrete open vragen, voor de leerling.
OP2	De leerlingen maken een selectie van probleemfamilies/standaardopgaven uit het boek.	Aan het eind van de lessen voorafgaand aan de interventie-les vraagt de docent wat een standaardopgave bij de in die les behandelde stof kan zijn. Docent stelt vast in hoeverre deze passen bij zijn eigen keuze aan standaardopgaven (d.w.z. leerdoelen in de betreffende les). Aan het begin van de volgende lessen laat de docent de tot dan toe verzamelde standaardopgaven zien. De docent maakt een voorlopige versie van de standaardopgaven, die in de laatste les voor de interventie-les klassikaal besproken wordt. De docent past daarna eventueel de standaardopgaven nog aan en formuleert een eindversie van standaardopgaven voor de interventie-les.
OP3	Het PAHH-hulpmiddel helpt leerlingen te identificeren op welk niveau ze een probleem herkennen en geeft per herkenningsniveau aan welke heuristieken te gebruiken zijn.	Het PAHH-hulpmiddel bevat de inhoud van Tabel 1. Het hulpmiddel beschrijft in ieder geval de herkenningsniveaus, standaardopgaven en/of probleem families en welke heuristieken per niveau gebruikt kunnen worden. Het hulpmiddel zal in leerlingentaal beschikbaar zijn, dus een term als heuristiek zal vermeden worden.
OP4	Het PAHH-hulpmiddel is in eerste instantie in papieren vorm, maximaal 1 A4 groot.	Het PAHH-hulpmiddel zal op papier gemaakt worden. Het hulpmiddel zal 1 A4 groot zijn, met op één zijde een overzicht van herkenningsniveaus en heuristieken. Op de andere zijde staan de standaardopgaven /probleemfamilies.
OP5	Leerlingen worden aan de slag gezet volgens hele taak eerst met hulp op maat. De taak is zorgvuldig geselecteerd om slechts beperkte herkenning op te roepen. Hulp op maat wordt gegeven in de vorm van het PAHH-hulpmiddel.	De docent laat de leerlingen werken aan zorgvuldig geselecteerde opgaven (vragen beogen herkenningsniveau 3, 4 of 5) met het PAHH-hulpmiddel ter ondersteuning van het denkproces. Er wordt verwacht dat leerlingen de standaardopgaven voldoende beheersen om deze met behulp van het hulpmiddel op te lossen. De docent beantwoord geen inhoudelijke vragen.

Interventie

De interventie vond plaats op vrijdagmiddag (12:15 – 13:15 uur) in een 5VWO- klas, wiskunde B. Tijdens de interventie waren 17 leerlingen aanwezig, ingedeeld in zeven tweetallen en één drietal.

Het onderzoek werd uitgevoerd op basis van Getal en Ruimte, VWO 12e editie, wiskunde B, hoofdstuk 7 (meetkunde met coördinaten). Nadat alle theorie uit het hoofdstuk behandeld was, hebben de leerlingen één interventie-les met het PAHH-hulpmiddel problemen opgelost. In de lessen daarvoor werden kleinere interventies uitgevoerd als voorbereiding op de interventie-les. Het uiteindelijk gebruikte PAHH-hulpmiddel is te vinden in Bijlage I.

Dataverzameling: instrumenten, materialen

De volgende data werden tijdens het onderzoek verzameld:

- Standaardopgaven: leerlingen selecteerden in de lessen voorafgaand aan de interventie probleemfamilies/standaardopgaven. In de laatste les, voor de interventie-les bespraken we klassikaal nogmaals de verzamelde opgaven en selecteerden samen de definitieve standaardopgaven. De docent formuleerde na deze les de standaardopgaven op het PAHH-hulpmiddel en liet ze aan het begin van de interventie-les nogmaals zien.

Enquête: achteraf vulden de leerlingen een enquête met vijf open vragen (

- Tabel 3) in om te achterhalen hoe de leerlingen het PAHH-hulpmiddel ervaren hebben bij het probleemoplossen. De enquête werd anoniem afgenomen in Google Forms.
- Audio-opnames: Tijdens de interventie-les maakte ieder groepje audio opnamen met hun eigen telefoon.
- Uitwerkingen: Leerlingen werden aan de slag gezet met de vier opgaven in Bijlage II. Bij opgave 1 en 3 was de verwachting dat leerlingen de opgaven konden opsplitsen in deelproblemen. Bij de andere opgaven was de verwachting dat het herkenningsniveau lager was. De uitwerkingen van de opgaven werden verzameld.
- Oplosroute: per groepje, per opdracht, werd gevraagd bij hun uitwerkingen aan te geven welke herkenningsniveaus ze hebben doorlopen gedurende het oplossingsproces.

In Tabel 4 is aangegeven welk instrument gebruikt werd voor welke onderzoeksvraag.

Tabel 3: Overzicht van vragen in enquête die na afloop van interventie aan leerlingen is gegeven.

Nr.	Vraag
1	Hoe heb je de herkenningsniveaus gebruikt om de wiskundige problemen op te lossen?
2	Hoe heb je de standaardopgaven gebruikt om de wiskundige problemen op te lossen?
3	In hoeverre heeft deze methode geholpen om de wiskundige problemen op te lossen?
4	Wat vond je van deze manier om wiskundige problemen te benaderen?
5	Wil je nog iets anders kwijt over deze les of methode?

Tabel 4: Gebruikte onderzoeksinstrumenten per onderzoeksvraag.

	Standaardopgaven	*Enquête*	*Audio-opnames*	*Uitwerkingen*	*Oplosroute*
Hoofdvraag					
Hoe kan herkenning en het gebruik van heuristieken gebruikt worden in 5VWO om leerlingen zelfstandig complexe meetkunde problemen te laten oplossen?	x	x	x	x	x
Deelvragen					
1. Welke standaardopgaven (probleemfamilies) halen leerlingen zelf uit het boek?	x				
2. In hoeverre gebruiken leerlingen probleemfamilies bij het oplossen van complexe problemen?		x	x	x	x
3. Welke heuristieken gebruiken de leerlingen bij het oplossen van complexe problemen.			x	x	x
4. Hoe gebruiken leerlingen het hulpmiddel bij het oplossen van meetkunde problemen?			x	x	x
5. In hoeverre zijn ze succesvol om meetkunde problemen op te lossen met behulp van de aangeboden herkenningsniveaus en heuristieken?			x	x	

Analyse

Na de interventie-les werden per groepje de audio opnames teruggeluisterd en de ingeleverde uitwerkingen bekeken. Per opgave en per groepje werd geanalyseerd welke herkenningsniveaus werden doorlopen en welke heuristieken werden gebruikt. Hierbij is de codering uit Tabel 5 gebruikt. De gevonden oplosroute werd vergeleken met de route die de leerlingen zelf aangaven gevolgd te hebben.

Tabel 5: Gebruikte codering in de oplosroutes van leerlingen.

Herkenningsniveau	Heuristieken	Codering
Gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend		
Een standaardopgave wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend	(Aangepaste) strategie voor de standaardopgave wordt toegepast.	B1
Het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familie-problemen	(Aangepaste) strategie voor de standaardopgave wordt toegepast op deelprobleem.	C1
	Deelproblemen worden gecombineerd tot eindoplossing.	C2
Enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend	Op basis van de kenmerken wordt een deelprobleem herkend.	D1
	Op basis van de kenmerken wordt al eerder bekende theorie of vaardigheid herkend.	D2
Er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart	Er wordt benoemd wat er precies gevraagd wordt	E1
	Probleem wordt anders geformuleerd.	E2
	Beschikbare informatie wordt benoemd.	E3
	Er wordt een schets gemaakt.	E4
	Er worden speciale situaties bekeken.	E5
	Er wordt gezocht in lijst met standaardopgaven.	E6

Resultaten

Opbouw repertoire standaardopgaven

Deelvraag 1: Welke standaardopgaven (probleemfamilies) halen leerlingen zelf uit het boek?

Aan het einde van de lessen, voorafgaand aan de interventie-les, vroeg de docent aan de leerlingen welke standaardopgaven bij de, in die les behandelde, stof gevraagd konden worden. De leerlingen antwoorden hierop met een vragende vorm van de leerdoelen, die de docent aan het begin van de les besproken had. Het leerdoel “Aan het einde van de kun je de afstand tussen een punt en een lijn berekenen” werd bijvoorbeeld de standaardvraag “Wat is de afstand tussen punt P en lijn k?”. Alle op deze manier verzamelde standaardopgaven zijn te vinden in Figuur 3. Aan het begin van iedere les werd dit groeiende overzicht, ter herinnering, aan de leerlingen getoond.

Figuur 3: Standaardvragen zoals verzameld in de lessen voor de interventie-les.

In de laatste les voor de interventie zijn de standaardopgaven, in de vorm van het uiteindelijke hulpmiddel (op één A4 volgens OP4), nogmaals klassikaal besproken. Tijdens deze les hebben nog een paar kleine wijzigingen plaatsgevonden, waarna de uiteindelijke lijst met standaardopgaven is gemaakt en toegevoegd aan het PAHH-hulpmiddel (Bijlage I).

Gebruik PAHH-hulpmiddel

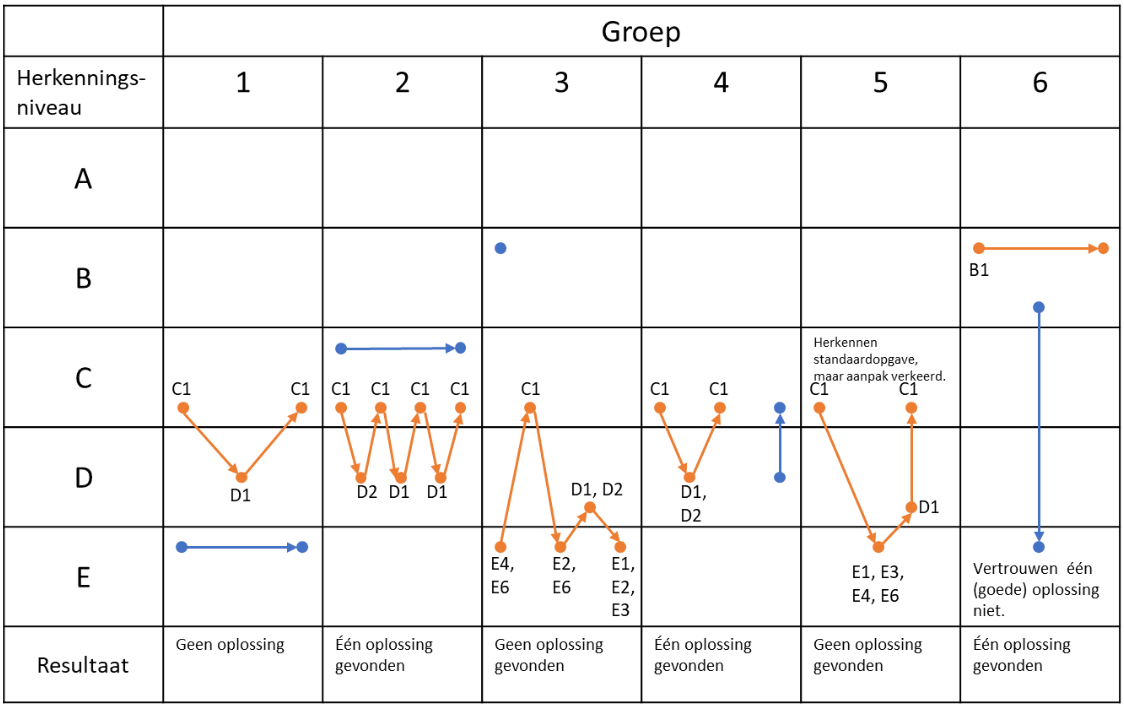
In de audio-opnames is, zonder uitzondering, te horen dat leerlingen beginnen met het probleem aan elkaar voor te lezen. In ongeveer de helft van de gevallen gevolgd door een korte samenvatting van het probleem en/of benoemen van de beschikbare informatie. Dit zijn op zich heuristieken die bij herkenningsniveau E passen, maar als daarna gelijk (een deel van) het probleem gekoppeld werd aan een standaardopgave of de hele oplossing werd overzien, dan werd in dit geval herkenningsniveau ingeschaald op A t/m C. Ook maakten meerdere groepjes een tekening. Als dit gebeurde als onderdeel van het oplossen van een standaardopgave, werd hieraan niet de codering E4 gegeven.

In Figuur 4 t/m Figuur 6 zijn de oplosroutes per groep terug te vinden, voor respectievelijk opgave 1a, 1b en 2. De overige opgaven zijn door geen enkele groep gemaakt en worden daarom ook niet behandeld. In blauw de route die leerlingen zelf hebben aangegeven en in oranje de route op basis van audio-opnames en uitwerkingen. Leerlingen doorlopen de herkenningsniveaus in de richting van de pijlen. Bij iedere herkenningsniveau is aangegeven welke heuristieken de leerlingen gebruiken op basis van de codering in Tabel 5. In de onderste rij is aangegeven of de leerlingen tot een eindoplossing zijn gekomen. Van twee groepen ontbraken de audio-opnames. De resultaten van deze tweetallen zijn niet in Figuur 4 t/m Figuur 6 verwerkt. Bij groep 5 ontbreekt de audio bij opgave 2, zoals aangegeven in Figuur 6. De resultaten uit Figuur 4 t/m Figuur 6 zullen samen met de resultaten van de enquête per deelvraag verder worden besproken. De enquête is door 12 van de 17 leerlingen ingevuld.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(-3,4)$, $B(1,6)$ en $C(0,-1)$.

a. Lijn k gaat door punt B. Er geldt dat de afstand van A tot lijn k gelijk is aan 2. Stel de mogelijke vergelijkingen voor lijn k op.



Figuur 4: Opgave 1a (boven) en de daar bijbehorende oplos-strategieën per groep leerlingen (onder).

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(-3, 4)$, $B(1, 6)$ en $C(0, -1)$.

b. Bereken de hoek tussen BA en BC. Rond af op één decimaal.

	Groep					
Herkennings-niveau	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						
E						
Resultaat	Opgave niet geprobeerd	Oplossing gevonden	Opgave niet geprobeerd	Opgave niet geprobeerd	Opgave niet geprobeerd	Oplossing gevonden

Figuur 5: Opgave 1b (boven) en de daar bijbehorende oplos-strategieën per groep leerlingen (onder).

Opgave 2

Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ met middelpunt M en punt $A(5, 0)$.
Een andere cirkel d gaat door A en M en het middelpunt ligt op de y-as.
Bereken de straal van d.

	Groep					
Herkennings-niveau	1	2	3	4	5 (Geen audio)	6
A						
B				?		B1 B1
C	C1 C1 C1	C1			C1	C1, C2
D	D2 D1					
E	E1, E2, E3, E6	E4		E1, E2, E3, E4, E5	E4	Onzeker van antwoord.
Resultaat	Geen oplossing gevonden	Oplossing gevonden (met rekenfout)	Opgave niet geprobeerd	Geen oplossing gevonden	Geen oplossing gevonden	Één oplossing gevonden

Figuur 6: Opgave 2 (boven) en de daar bijbehorende oplos-strategieën per groep leerlingen (onder).

Aan de hand van twee transcripties, wordt hieronder geïllustreerd hoe bovenstaande figuren tot stand zijn gekomen.

Fragment 1: groep 2, vraag 1a

Gegeven zijn de punten $A(-3,4)$, $B(1,6)$ en $C(0,-1)$.

a. Lijn k gaat door punt B. Er geldt dat de afstand van A tot lijn k gelijk is aan 2. Stel de mogelijke vergelijkingen voor lijn k op.

Figuur 7: Opgave 1a

…

P: Sowieso afstand tussen punten en lijn.

C: Een mogelijke vergelijking is ax+b...

[Leerlingen herkennen deelproblemen en willen die gaan oplossen; C1]

C: …, maar we hebben geen idee wat a is.

P: Ik ben nu de punten in een assenstelsel aan het tekenen.

[Leerlingen zien niet gelijk hoe vergelijking op te stellen. Maken een tekening om overzicht te herkennen kenmerken helder te krijgen; D2]

P: a kun je toch berekenen met Δy/Δx. a is de is de richtingscoëfficiënt

<Invullen getallen voor b, geeft uiteindelijk b=6-a>

[Leerlingen lossen deelprobleem op; C1]

<Leerlingen gaan zelf zoeken op hulpkaart naar herkenningsniveau.>

P: Ik denk dat we op niveau B zitten, want we zien wat ze moeten doen maar weten niet hoe verder.

…

P: Dan kunnen we de raaklijn door punt A buiten cirkel gebruiken.

C: Richtingscoëfficiënt van "Ak" keer richtingscoëfficiënt van k is –1.

C: Misschien een parametervergelijking?

[Leerlingen gaan op basis van kenmerken op zoek naar standaardopgaven; D1]

P: Wat als we b invullen in ax+b, dan y=ax+6-a....

[Leerlingen herkennen deelprobleem en lossen dit op; C1]

P: ...dan kunnen we misschien wat uitrekenen.

C: Ik heb geen flauw idee wat.

P: Ik ook niet

P: Wat nou als we een cirkel trekken om punt A met straal 2 en de raaklijnen tekenen?

[Ondanks dat leerlingen net een deelprobleem hebben opgelost herkennen ze vervolgstappen niet op basis van de kenmerken die ze wel herkennen proberen ze tot een standaardopgave te komen; D1]

P: Trouwens, als punt A daar zit en de straal is twee. Dan gaat ie precies hier recht overheen en dan heb je een richtingscoëfficiënt van 0.

C: Er zijn twee oplossingen, maar we hebben er nu eentje.

[Leerlingen herkennen deelprobleem en lossen dit op; C1]

Fragment 2: groep 8, vraag 2

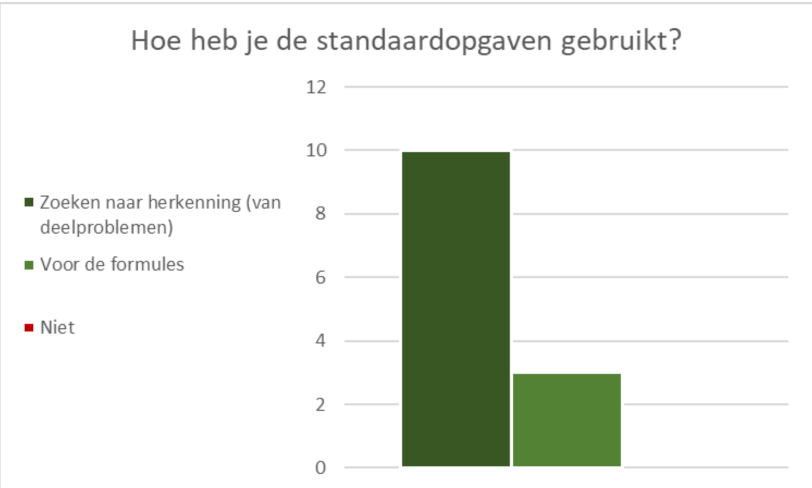
Gegeven zijn de cirkel $c: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ met middelpunt M en punt $A(5,0)$.
Een andere cirkel d gaat door A en M en het middelpunt ligt op de y-as.
Bereken de straal van d.

Figuur 8: Opgave 2

…
M: We moeten eerst deze omrekenen om het middelpunt te vinden
N: Dus c:…. <leerlingen splitsen kwadraat af>.
C: Middelpunt ligt op y-as, dus $x=0$
M: dus $x^2+ (y-y_M)^2 = r^2$
[Leerlingen gaan gelijk aan de slag en lijken te herkennen wat moet gebeuren. Ze benoemen niet gelijk de hele oplossingsstrategie; B1 (mogelijk C1)]
N: Ik weet nu niet hoe we verder moeten
M: Ik ook niet
M: Hij gaat door (5,0)
M: Je kan zo'n stelsel van vergelijkingen opstellen.
N: Dat gaan we doen.
<leerlingen zetten stelsel op>
M: Dat ziet er niet ok uit
N: Maar als je ze van elkaar aftrekt valt r weg
[Leerlingen herkennen deelprobleem en beginnen met oplossen; C1]
M: Maar die wil je toch juist weten
N: Die kunnen we uitrekenen als we uM weten.
<Stelsel wordt opgelost>
[Tijdens oplossen deelprobleem, herkennen leerlingen de stappen die vervolgens gezet moeten worden; B1]

Deelvraag 2: In hoeverre gebruiken leerlingen probleemfamilies bij het oplossen van complexe problemen?

In de enquête geven alle leerlingen aan de standaardopgaven gebruikt te hebben (Figuur 9). Twee leerlingen geven aan alleen de formules van de standaardopgaven gebruikt te hebben. Negen leerlingen geven aan dat ze de standaardopgaven gebruiken om de huidige opgave te herkennen (bijvoorbeeld "Door te kijken waar de opgave het meest op leek en wat toegepast moest worden, en dan het format toe te passen"). Eén leerling geeft aan beiden gebruikt te hebben.



Figuur 9: Enquête resultaten op de vraag 2: "Hoe heb je de standaardopgaven gebruikt om de wiskundige problemen op te lossen? ". Resultaten zijn gegroepeerd in drie categorieën.

Bovenstaande is in lijn met de coderingen in Figuur 4 t/m Figuur 6. B1, C1, D1 en E6 verwijzen naar gebruik van standaardopgaven. Er is in de figuren te zien dat vooral heuristieken C1 en D1 door alle groepjes veelvuldig gebruikt zijn. Alleen groep 6 heeft heuristiek D1 niet gebruikt. Deze groep haf bij alle opgaven een herkenningsniveau van C of hoger.

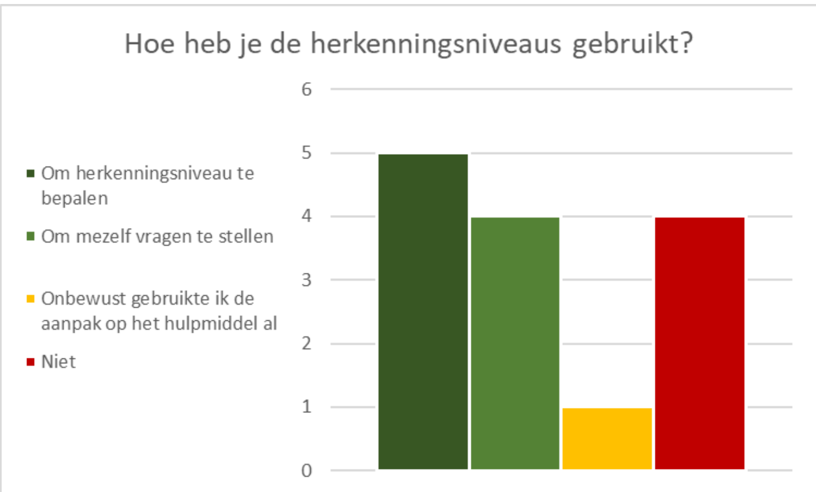
Deelvraag 3: Welke heuristieken gebruiken de leerlingen bij het oplossen van complexe problemen.

Bij deelvraag 2 was te zien dat de heuristieken gebaseerd op standaardopgaven veelvuldig gebruikt zijn. Ook is een aantal keer gebruik gemaakt van D2, waarbij terug gegrepen werd op eerder op gedane kennis. Bij herkenningsniveau E is te zien dat de iedere groep verschillende algemene heuristieken gebruikt (E1 tot en met E4). Alleen het bekijken van speciale gevallen (E5) slechts door één groep gebruikt. Daarnaast is ook te zien dat de leerlingen in de lijst met standaardopgaven op zoek gaan naar herkenning (E6).

Deelvraag 4: Hoe gebruiken leerlingen het hulpmiddel bij het oplossen van meetkunde problemen?

Aangezien de resultaten voor gebruik van standaardopgaven bij vorige deelvragen al besproken zijn, wordt hier alleen het gebruik van herkenningsniveaus en heuristieken besproken. In de enquête geeft een derde van de respondenten aan deze helemaal niet gebruikt te hebben (Figuur 10). Eén leerling geeft aan dat de hij/zij de aangereikte methode op het hulpmiddel al onbewust toepaste. De overige 7 leerlingen geven aan het hulpmiddel gebruikt te hebben om het herkenningsniveau te bepalen of zichzelf te bevragen. Het is opvallend dat slechts twee leerlingen aangeven beide gedaan te hebben.

De analyse van de audio fragmenten bevestigen bovenstaande. Leerlingen bepalen bij het begin van een opgave hun herkenningsniveau, maar lijken verder deze zijde van het hulpmiddel nauwelijks te bekijken. Alleen bij groep 2 is waargenomen dat ze elkaar bewust bevroegen a.d.h.v. de aangeboden heuristieken.

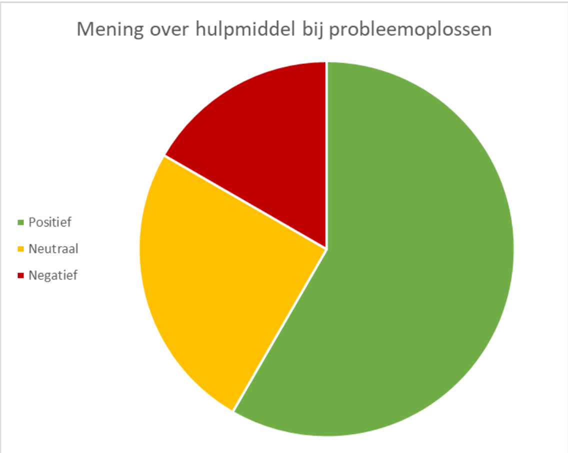


Figuur 10: Enquête resultaten op de vraag 1: "Hoe heb je de herkenningsniveaus gebruikt om de wiskundige problemen op te lossen? ". Resultaten zijn gegroepeerd in vier categorieën.

Deelvraag 5: In hoeverre zijn ze succesvol om meetkunde problemen op te lossen met behulp van de aangeboden herkenningsniveaus en heuristieken?

In ongeveer de helft van de gemaakt opgaven is minstens één van de antwoorden gevonden (Figuur 4 t/m Figuur 6). Ook wanneer de resultaten van de twee groepen zonder audioopname worden meegenomen blijkt ongeveer 50% van de opgaven beantwoord te zijn. Er zijn duidelijke verschillen zichtbaar in de gebruikte oplosroutes. Hier wordt bij de resultaten verder op in gegaan.

Op basis van de antwoorden op enquêtevragen 3, 4 en 5 is bepaald of hoe positief leerlingen staan tegenover het hulpmiddel bij probleemoplossen. De resultaten zijn terug te zien Figuur 11. Opvallend hierbij is dat de twee leerlingen die negatief zijn over het hulpmiddel, ook aangeven de herkenningsniveaus niet te hebben gebruikt.



Figuur 11: Mening van leerlingen over PAHH hulmiddel bij oplossen van wiskundige problemen op basis van enquêtevragen 3, 4 en 5.

Discussie en conclusies

Op basis van de verschillende deelvragen worden hieronder de resultaten verder besproken. Tot slot wordt ook de conclusie/hoofdvraag besproken. Hierbij worden ook enkele aanbevelingen gedaan.

Opbouw repertoire standaardopgaven

Deelvraag 1. Welke standaardopgaven (probleemfamilies) halen leerlingen zelf uit het boek?

De standaardopgaven zijn verzameld in de lessen voorafgaand aan de interventie. Bij de resultaten was te zien dat leerlingen vooral leerdoelen in vraagvorm gaven. De docent heeft deze leerdoelen aan het begin van deze lessen laten zien en lesactiviteiten zijn om deze leerdoelen heen gebouwd. Het ligt daarom voor de hand dat leerlingen de standaardvragen op de leerdoelen baseren. Het vragen naar de standaardopgaven fungeerde hier deels ook als een check of de leerdoelen behaald waren in de betreffende les.

In de les, waarin alle standaardopgaven nog een laatste keer besproken werden, waren de leerlingen passiever en was de discussie voornamelijk docent gestuurd. Mogelijke verklaring hiervoor is dat voor een groot deel van de leerlingen de standaardopgaven nog geen ‘standaard’ stof was voor alle leerlingen. Dit is waarschijnlijk deels te verklaren doordat de interventie-les plaatsvond op de dag na de herkansingen van de eerste toetsweek. Een deel van de leerlingen liep daardoor achter met de stof. Daarnaast zal meegespeeld hebben dat de standaardopgaven klassikaal zijn besproken. Deze lesvorm was passiever dan in het oorspronkelijke plan, waarbij groepjes leerlingen in een activerende vorm de standaardopgaven nogmaals zouden bekijken en een selectie zouden maken. Vanwege lesuitval was dit niet mogelijk.

Uiteindelijk zijn de standaardopgaven geselecteerd uit de docent-gestuurde leerdoelen, i.p.v. uit het boek.

Gebruik PAHH-hulpmiddel

Deelvraag 2. In hoeverre gebruiken leerlingen probleemfamilies bij het oplossen van complexe problemen?

We zagen we dat alle leerlingen de standaardvragen hebben gebruikt. De manier waarop dit gebeurde is afhankelijk van het herkenningsniveau bij de betreffende opgave en de beheersing van de betreffende standaardopgave. Bij deelvraag 5 zal per herkenningsniveau besproken worden in hoeverre het aangeboden hulpmiddel helpt bij het oplossen van meetkunde problemen. Bij deze deelvraag wordt alleen het gebruik van de standaardopgaven besproken.

De leerlingen hebben bij 11 van de 13 gemaakte opgaven een herkenningsniveau van C of hoger en herkennen dus een standaardopgave deels of helemaal (Figuur 4 t/m Figuur 6). We kunnen hier onderscheid maken tussen wanneer een standaardopgave beheerst wordt door een leerling en wanneer niet. In het eerste geval wordt het hulpmiddel gebruikt als geheugensteuntje, ter bevestiging of om de juiste formule te vinden. In de opnames is bijvoorbeeld bij vraag 1a meermaals te horen dat leerlingen zien dat de afstandsformule gebruikt moet worden, maar de exacte formulering opgezocht wordt op het hulpmiddel.

Als de standaardopgaven niet beheerst worden, gebruiken de leerlingen het hulpmiddel als een catalogus met standaardopgaven waarin gezocht kan worden. Een voorbeeld hiervan is terug te vinden in fragment 1 in de resultaten, waarin de leerling op basis van de kenmerken van het probleem een standaardopgave herkennen (D1).

Opvallend was dat sommige groepjes worstelden met basisvaardigheden, zoals opstellen van een lijn door twee punten. Het is onduidelijk of deze vaardigheden niet meer paraat waren, of dat leerlingen moeite hadden omdat de vaardigheden in een andere context gevraagd werden. Wellicht hadden deze vaardigheden ook toegevoegd moeten worden aan de lijst met standaardopgaven.

Deelvraag 3. Welke heuristieken gebruiken de leerlingen bij het oplossen van complexe problemen.

Op het hulpmiddel zijn verschillende heuristieken per herkenningsniveau aangeboden. De leerlingen is daarom gevraagd aan te geven welke herkenningsniveaus ze hebben doorlopen tijdens het maken van de opgaven. De initiële inschatting van het herkenningsniveau door de leerlingen komt overeen met mijn inschaling (Figuur 4 t/m Figuur 6). De leerlingen hebben echter niet door als ze een niveau omhoog of omlaag gaan tijdens het oplossen van een probleem. Groep 6 dacht bovendien onterecht tot twee keer toe dat onzekerheid over het eindantwoord resulteert in een laag herkenningsniveau.

In de enquête geeft slechts 4 van de 12 leerlingen aan de aangeboden heuristieken te gebruiken. Dit volgt ook uit de audio-opnames. Alleen bij groep 2 is te horen dat ze, nadat ze hun herkennings-niveau hebben bepaald, zichzelf de vragen stellen op basis van de bijbehorende statistieken op het hulpmiddel. De overige groepen gebruiken overigens wel de aangeboden heuristieken, maar dit lijkt op basis van de audio-opnamen onafhankelijk van het hulpmiddel te gebeuren. Ook als een groep vast loopt, wordt weinig of niet gekeken naar de heuristieken op het hulpmiddel. Leerlingen blijven dan hangen bij ‘Dit is echt moeilijk’ of

‘Ik snap er niets van’. Vooral bij lagere herkenningsniveaus (D of E) maken de leerlingen uiteindelijk zelf vaak wel een schets maken, lezen de vraag nogmaals door of benoemen de belangrijkste informatie. Dit is in lijn met de literatuur zoals beschreven in het theoretisch kader. Daarnaast is het zoeken naar een bijpassende opgave in de lijst met standaardopgaven (E6) ook een veel gebruikte heuristiek. Hier wordt bij deelvraag 5 op teruggekomen.

Deelvraag 4. Hoe gebruiken leerlingen het hulpmiddel bij het oplossen van meetkunde problemen?

Uit de vorige twee deelvragen blijkt dat de leerlingen het hulpmiddel voornamelijk gebruiken voor de standaardopgaven en niet voor de heuristieken. Dit zou verklaard kunnen worden doordat de leerlingen niet gewend zijn aan deze manier van werken. Normaal gesproken hebben leerlingen tijdens de les meer en andere hulpmiddelen tot hun beschikking (boek, klasgenoot of docent). Tijdens de interventie-les was de lijst met standaardopgaven de enige inhoudelijke bron die de leerlingen tot hun beschikking hadden en waren de opgaven lastiger dan de meeste opgaven in het boek.

Tijdens de interventie-les heb ik leerlingen er meerdere malen moeten op wijzen dat het hulpmiddel ook een andere kant heeft. Leerlingen schreven op welk niveau ze een probleem herkenden. Waarschijnlijk voornamelijk om dat dit deel van de opdracht was. De heuristieken bij ieder herkenningsniveau, werden niet of nauwelijks bewust gebruikt. Wel gebruiken leerlingen de aangedragen heuristieken regelmatig onbewust. Een aantal leerlingen geeft op de vragenlijst ook aan de aangedragen heuristieken al te gebruiken (“Goede manier, zo doe ik het meestal ook wel op de toets maar dan indirect”, “Wel een goed idee. Ook al doe ik dit al soort van”, “Het oplossen van het wiskundige probleem vond ik niet heel anders gaan.”)

Deelvraag 5. In hoeverre zijn ze succesvol om meetkunde problemen op te lossen met behulp van de aangeboden herkenningsniveaus en heuristieken?

Uit de enquête blijkt dat leerlingen overwegend positief zijn over de methode. Ze geven aan dat de methode helpt bij het oplossen van problemen (Figuur 11). Ongeveer 50% van de problemen die gemaakt zijn is (deels) zijn opgelost. Het gebruik van standaardopgaven, herkenningsniveaus en heuristieken is bij vorige deelvragen besproken. Hier wordt besproken hoe succesvol het gebruik van het hulpmiddel in het algemeen is. De mate van succes van oplossen hangt af van het (initiële) herkenningsniveau. Er worden daarom verschillende situaties bekeken:

<u>Initiële herkenningsniveau A of B</u>

In 4 van de 13 gemaakte opgaven is het initiële herkenningsniveau A of B is. In al deze gevallen wordt uiteindelijk een (deel van de) oplossing van het probleem gevonden. De leerlingen weten in vrijwel alle gevallen gelijk de oplossingsstrategie en passen deze toe. Groep 6 gaat bij opgave 2 even naar herkenningsniveau C, omdat ze niet alle benodigde deelproblemen herkennen. Daarna zien ze vrij snel dat ze een cirkelvergelijking voor d moeten opstellen en vinden snel een oplossing.

Bij deze initiële herkenningsniveaus wordt het hulpmiddel voornamelijk gebruikt als ondersteuning (zie ook deelvraag 2). Het zou kunnen dat in deze situaties het probleem ook zonder hulpmiddel zou zijn opgelost. Dit is uit de data echter niet te achterhalen. Als naslagwerk heeft het hulpmiddel hier in ieder geval zijn dienst bewezen.

Initiële herkenningsniveau C

Als het initiële herkenningsniveau C is, hebben leerlingen moeite de (deel)problemen op te lossen. Leerlingen gaan na initiële herkenning minstens één herkenningsniveau omlaag tijdens het oplosproces (Figuur 4 t/m Figuur 6). De herkenning van het (deel)probleem lijkt er te zijn, maar leerlingen lopen vast op de uitvoering ("We weten wat we moeten doen, maar niet hoe." of "We kunnen dit allemaal berekenen, maar ik kan niet de touwtjes aan elkaar knopen."). Mogelijke verklaringen hiervoor zijn dat de standaardopgaven nog onvoldoende bekend zijn bij de leerlingen, of dat het hulpmiddel onvoldoende ondersteuning biedt om van een standaardprobleem naar een standaardoplossing te gaan. De standaardopgaven zijn heel beknopt weergegeven. De aanname hierbij was dat standaardopgaven bekend waren bij de leerlingen, maar dit bleek dus dit niet volledig het geval.

(Initiële) herkenningsniveau D of E

In 9 van de 13 gemaakte opgaven hebben de leerlingen op een moment in het oplosproces een herkenningsniveau van D of E (Figuur 4 t/m Figuur 6). Een veel gebruikte strategie is om dan in de lijst met standaardopgaves op zoek te gaan naar een standaardopgave die bij het probleem past. Alleen als een groep al herkenningsniveau D had, lukte het om m.b.v. de standaardopgaven van het herkennen van enkele kenmerken naar het herkennen van een (deel)probleem te gaan (D1). Bij opgave 1a vinden groep 2 en 4 op deze manier uiteindelijk één van de twee oplossingen. Bij opgave 1a vinden groep 2 en 4 op deze manier uiteindelijk één van de twee oplossingen. Een voorbeeld hiervan staat in de transcriptie van fragment 1 in de resultaten.

Het gebruik van heuristiek E6 heeft in geen enkel geval tot een eindantwoord heeft geleid (Figuur 4 t/m Figuur 6). Algemene heuristieken zijn hier succesvoller. Het zou zelfs kunnen dat de lijst met standaardopgaven hier leerlingen er van weerhoudt algemene heuristieken te gebruiken. Dit kan echter niet uit de data geconcludeerd worden. Het gebruik van heuristiek E6 in combinatie met andere heuristieken, resulteerde wel altijd in een toename van herkenningsniveau. Uit de audiofragmenten blijkt een andere heuristiek (bijvoorbeeld het maken van een tekening) de oorzaak te zijn van de stijging van herkenningsniveau.

Conclusie/Hoofdvraag.

Welke karakteristieken heeft een lessenserie in 5VWO, die als doel heeft leerlingenprobleemaanpak in meetkunde te onderwijzen m.b.v. herkenning en heuristieken.

Hierboven was te lezen dat de leerlingen de standaardvragen voornamelijk uit de leerdoelen halen, in plaats vanuit het boek. De leerlingen gebruiken tijdens de interventie wel de aangeboden heuristieken, maar lijken dit niet op basis van het hulpmiddel te doen. De lijst met standaardopgaven werd veelvuldig gebruikt. De manier van gebruik van de standaardopgaven was afhankelijk van herkenningsniveau en beheersing van de standaardopgave. Bij goede beheersing van de standaardopgaven lukte het leerlingen (een deel van) de meetkunde problemen op te lossen. Als de standaardopgaven minder goed bekend waren, werd zoeken door de lijst met standaardopgaven als extra heuristiek gebruikt. Dit was alleen succesvol op herkennings-niveaus van D en hoger.

De leerlingen zijn positief over de methode. Ze vinden het hulpmiddel overzichtelijk en in de meeste gevallen helpt het bij om stappen te zetten richting de oplossing van een meetkundig probleem. De interventie in huidige opzet heeft daarom een positieve invloed gehad.

Op basis van bovenstaande volgen, per oorspronkelijk ontwerpprincipe, een aantal aanbevelingen ter verbetering van een (vergelijkbare) lessenserie in de toekomst:

- OP1: Beperk gebruik van hulpmiddel niet tot één les. Stel bijvoorbeeld iedere les een lastige vraag en coach leerlingen a.d.h.v. het hulpmiddel: “Wat herken je?”, “Welke vraag kun je jezelf of elkaar stellen?”, etc.
- OP1: Bespreek met leerlingen hoe het hulpmiddel aan te passen, zodat de aangeboden heuristieken wel beter gebruikt worden.
- OP2: Oorspronkelijk was het idee om alle standaardopgaven in een activerende werkvorm in kleinere groepjes te bespreken, i.p.v. klassikaal. Het op een activerende manier ophalen van standaardopgaven zou kunnen helpen bij een betere bekendheid van de standaardopgaven. Zorg dat hier tijd voor is. De leerlingen kan daarnaast ook gevraagd worden een standaardopgave op te lossen.
- OP2: Beperk standaardopgaven niet tot theorie uit het huidige hoofdstuk om te voorkomen dat leerlingen voorkennis missen.
- OP3: Op lagere herkenningsniveaus is het gebruik van standaardopgaven niet direct succesvol. Besteed, naast het ophalen van standaardopgaven, voldoende aandacht aan het gebruik van de aangeboden heuristieken. Eventueel kan de tabel op een apart blad worden afgedrukt, i.p.v. op de achterkant van de standaardopgaven.
- OP4: Zorg dat de aangeboden standaardopgaven past bij de het huidige kennisniveau van de leerlingen. In dit onderzoek was had een uitgewerkte opgave wellicht beter gewerkt dan een schematische weergave. Laat de eis van maximaal één A4 hierbij eventueel los.
- OP5: De opgaven waren te lastig voor sommige leerlingen. Zorg dat elke leerling succes kan ervaren, bijvoorbeeld door te differentiëren in moeilijkheid van de opgaven.

We hebben gezien dat de gebruikte methode de meeste leerlingen helpt bij het oplossen van problemen, maar er is zeker nog ruimte voor verbetering. Met bovenstaande aanpassingen verwacht ik dat leerlingen nog succesvoller gaan zijn in probleemoplossen. Ik ben daarom zeker van plan deze methode vaker in te gaan zetten in de toekomst.

Referenties

Bjuland, R. (2004). Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry. *Educational Studies in Mathematics 2004 55:1*, *55*(1), 199–225. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017690.90763.C1

Bjuland, R. (2007). Adult Students' Reasoning in Geometry: Teaching Mathematics through Collaborative Problem Solving in Teacher Education. *The Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 1–30. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1056

Ernst, R., Nijhof, P., & Ghysels, J. M. C. (2017). *De metadenkende leerling: effecten van de META-methode*.

Janssen, F., Hulshof, H., & van Veen, K. (2016). *Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs: Praktisch gereedschap om je onderwijsrepertoire te blijven uitbreiden*. Universiteit Leiden/Groningen.

Kirschner, P., & van Merriënboer, J. (2008). *Ten steps to complex learning a new approach to instruction and instructional design*.

Kop, P. (n.d.). *Personal communication*.

Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., & van Driel, J. H. (2021). Promoting insight into algebraic formulas through graphing by hand. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(2), 125–144. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1765078

Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., Veenman, M. V. J., & van Driel, J. H. (2015). Identifying a framework for graphing formulas from expert strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 121–134. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.002

Landa, L. N. (1983). *Instructional-design Theories and Models: A new paradigm of instructional theory* (C. M. Reigeluth & A. A. Carr-Chellman, Eds.; Vol. 2). Psychology Press.

Palha, S., Dekker, R., & Gravemeijer, K. (2015). THE EFFECT OF SHIFT-PROBLEM LESSONS IN THE MATHEMATICS CLASSROOM. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(6), 1589–1623. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9543-z

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton University Press.

Pouwelse S. (n.d.). *Unpublished work*.

Rott, B. (2013). Comparison of expert and novice problem solving at grades five and six. *Proceedings of PME 37*, *4*, 113–120.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. *The American Mathematical Monthly*, *87*(10), 794–805. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995155

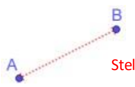
Streun, A. van, & Kop, P. M. G. M. (2017). *Het ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo-vwo. Implementatie examenprogramma havo/vwo 2015*.

Bijlage I PAHH-hulpmiddel

Niveau	Probleemherkenning (In hoeverre herken je de opgave?)	Aanpak (Welke vragen kun je jezelf en elkaar stellen?)
A	Je ziet gelijk hoe het probleem opgelost moet worden.	Los het probleem op!
B	Je herkent een standaardopgave in het probleem, maar je ziet niet gelijk hoe je het hele probleem kunt op lossen.	Kun je de (aangepaste) strategie voor de standaardopgave hier toepassen?
C	Je herkent verschillende onderdelen van het probleem, maar niet het gehele probleem. Je kunt het probleem opdelen in kleinere problemen.	Aan welke standaardopgaven doen de deelproblemen je denken? Hoe kun je de verschillende deelproblemen apart oplossen? Hoe kun je de deelproblemen combineren tot een eindoplossing?
D	Je herkent een paar kenmerken van het probleem.	Welke kenmerken herken je? Aan welke standaardopgave(n) doen deze kenmerken je denken? Of aan welke bekende theorie?
E	Je herkent bijna niets.	Stel jezelf of elkaar algemene vragen over het probleem. Bijvoorbeeld: Wat wordt er precies gevraagd? Hoe kan je de opgave anders formuleren? Welke informatie is er gegeven? Kun je een schets maken? Welke speciale situaties kun je bekijken?

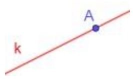
STANDAARDOPGAVEN

Afstand tussen twee punten



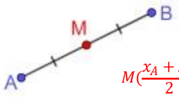
Stelling van Pythagoras

Lijn door punt



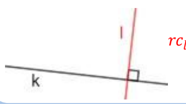
$k: y = ax + b$

Midden van een lijnstuk bepalen



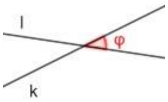
$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

Richtingscoëfficiënt van loodrechte lijn



$rc_l \cdot rc_k = -1$

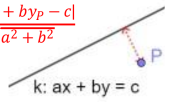
Hoek tussen twee lijnen



$\tan(\alpha) = rc_k$
$\tan(\beta) = rc_l$
$\varphi = \alpha - \beta$

Afstand tussen punt en lijn

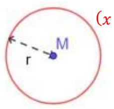
$d(k, P) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



Zijn lijnen l en k evenwijdig, snijdend of hetzelfde?

Vorm	$ax + by = c$	$y = ax + b$
Evenwijdig	$\frac{a_k}{a_l} = \frac{b_k}{b_l} \neq \frac{c_k}{c_l}$	$a_k = a_l\,; b_k \neq b_l$
Vallen samen	$\frac{a_k}{a_l} = \frac{b_k}{b_l} = \frac{c_k}{c_l}$	$a_k = a_l\,; b_k = b_l$
Snijden	$\frac{a_k}{a_l} \neq \frac{b_k}{b_l}$	$a_k \neq a_l$

Opstellen cirkelvergelijking



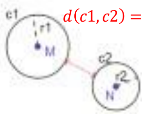
$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

Omschrijven cirkelvergelijking in andere vorm

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

→: haakjes uitwerken;
←: kwadraat afsplitsen

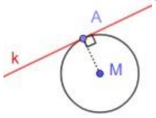
Afstand tussen twee cirkels



$d(c1, c2) = d(M, N) - r1 - r2$

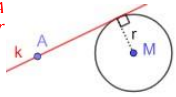
Raaklijn door punt A op cirkel

$k \perp AM$



Raaklijn door punt A buiten cirkel

1. Parameter vergelijking van lijn k door A
2. $d(k, M) = r$



Bijlage II Meetkundige problemen

Hieronder vind je een aantal wiskundige problemen. Om de problemen op te lossen maak je gebruik van de hulpkaart met herkenningsniveaus en standaardopgaven.
Geef tijdens of na het beantwoorden van iedere opgave aan via welke herkenningsniveaus je tot een oplossing van het probleem bent gekomen.

Opgave 1

Gegeven zijn de punten $A(-3, 4)$, $B(1, 6)$ en $C(0, -1)$.

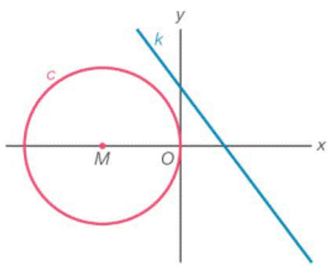
a. Lijn k gaat door punt B. Er geldt dat de afstand van A tot lijn k gelijk is aan 2. Stel de mogelijke vergelijkingen voor lijn k op.
b. Bereken de hoek tussen BA en BC. Rond af op één decimaal.

Opgave 2

Gegeven zijn de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ met middelpunt M en punt $A(5, 0)$.
Een andere cirkel d gaat door A en M en het middelpunt ligt op de y-as.
Bereken de straal van d.

Opgave 3

Gegeven zijn de lijn k: $4x + 3y = 9$ en cirkel c: $(x + 4)^2 + y^2 = 16$
De cirkel d is de kleinste cirkel met middelpunt op k die c raakt.
Wat zijn straal en middelpunt van cirkel d.



Opgave 4

Gegeven is de lijn k: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$.
De middelpunten M en N van de cirkels c_1 en c_2 liggen op k.
c_1 raakt de y-as en de straal van c_1 is 3.
c_2 raakt de x-as en de straal van c_2 is 4.
Zie de figuur hiernaast.
De lijn l Staat loodrecht op k en er geldt $d(l, c_1) = d(l, c_2)$.
Beschrijf de strategie die je kunt gebruiken om de vergelijking van l op te stellen.