Fairest of them all: Kwalitatieve en kwantitatieve vergelijking van kiessystemen

Konings, C.J.

C.J. Konings

Fairest of them all:

kwalitatieve en kwantitatieve vergelijking van kiessystemen

Bachelorscriptie

21 juli 2017

Scriptiebegeleider: dr. F.M. Spieksma

Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Inhoudsopgave

Inleiding

In de 21^{e} eeuw is de meest gangbare en meest nagestreefde staatsvorm de indirecte, parlementaire democratie. Wanneer mensen hun regering niet mogen kiezen, wordt dit 'niet eerlijk' gevonden. Landen waar de bevolking niet vrij is haar leiders en vertegenwoordigers te kiezen, mogen zich bijvoorbeeld niet bij de Europese Unie voegen voor zij zich een eerlijker staatsvorm aanmeten.

De precieze invulling van de term democratie verschilt van land tot land. Is er een districtenstelsel of een evenredige vertegenwoordiging; heeft de burger alleen stemrecht of ook stemplicht en meer? Aan de basis van elk kiessysteem staat de manier waarop stemmen geteld worden en de uitslag bepaald wordt. Deze scriptie gaat in op deze fundamentele vraag: welke manier van stemmen tellen is het eerlijkst?

Om daar antwoord op te geven, moet eerst worden gedefinieerd worden wat we bedoelen met het best, of het eerlijkst. Er zijn talloze eisen te bedenken waaraan een 'goed' kiessysteem moet voldoen.

In het eerste hoofdstuk staan de in deze scriptie gehanteerde notatie en enkele definities, zoals die van een 'keuzeruimte' en 'keuzefunctie', uiteengezet. In het bijzonder wordt in deze scriptie uitgegaan van strikt geordende ranglijsten van kiezers en een zwak geordende ranglijst bij de uitkomst, gebaseerd op de gedachte dat als de stemmen staken een tweede beslissingsprocedure in werking treedt. De zwak geordende uitkomstlijst vraagt ook om nieuwe notatie, die in dit hoofdstuk geïntroduceerd wordt.

Met de wiskundige definities op zak is het mogelijk om in het tweede hoofdstuk niet alleen sluitende wiskundige definities te geven van de criteria, maar ook te onderzoeken hoe de criteria zich tot elkaar verhouden. De fundamentele eisen worden wiskundig geformuleerd. Daarbij is gelet op de verschillende vormen waarin de eisen voorkomen in de literatuur (veelal uit de vakgebieden politicologie en economie) en de verschillende interpretaties die gehanteerd worden. De eerlijkheidscriteria die in deze scriptie besproken worden, vormen een grootste gemene deler van de verschillende interpretaties, of de zwakste vorm waarin zij bruikbaar zijn.

Eén zo'n criterium is unanimiteit, waarvan in het tweede hoofdstuk een zwakkere vorm is opgesteld, naast de algemeen gehanteerde sterkere vorm. In het kader van nationale verkiezingen is de zwakke vorm relevanter dan de sterke.

In hoofdstuk drie wordt aangetoond dat de beroemde onmogelijkheidsstelling van Kenneth Arrow [Arrow, 1950] ook opgaat voor de zwakkere vorm van het criterium unanimiteit. Drie verschillende bewijzen van Arrows stelling worden hiertoe behandeld en geanalyseerd: het oorspronkelijke, haast onleesbare bewijs van Arrow, een elegant bewijs van Storcken [Storcken, 1992], dat is aangepast om aan te tonen dat het criterium zwakke unanimiteit dezelfde paradox oplevert als sterke unanimiteit, en het bewijs van Ryan O'Donnell [O'Donnell, 2014], dat rust op Fourieranalyse van Boolese functies. De voor- en nadelen van O'Donnells aanpak worden besproken.

Vervolgens worden in het vierde hoofdstuk drie kiessystemen gedefinieerd en algoritmes gegeven waarmee de uitslag van verkiezingen kan worden bepaald. Het meerderheidsstelsel en de enkelvoudig overdraagbare stem zijn beide in sommige delen van de wereld in gebruik. Als derde mogelijkheid wordt de gewogen beperkte lijst gegeven. Dit kiessysteem valt het meest in de smaak bij een groep onderzochte kiezers, die aangaven deze vorm als 'het eerlijkst' te ervaren. In het derde hoofdstuk wordt onderzocht of dat gevoel ook wiskundig onderbouwd kan worden: de kiessystemen worden vergeleken op basis van de gegeven criteria. Het blijkt dat zij alledrie aan precies dezelfde eisen wel en aan precies dezelfde eisen niet voldoen.

In het laatste hoofdstuk volgt daarom een beperkte kwantitatieve vergelijking van de drie kiessystemen. Er wordt gekeken naar de kans op een situatie die volgens een eerlijkheidscriterium niet voor mag komen: de zogenaamde schendingskans. Op basis hiervan wordt alsnog een uitspraak gedaan over welk kiessysteem het 'best' is.

Ter illustratie van deze scriptie is op de dag van de Nederlandse Tweede Kamerverkiezingen van 15 maart 2017 een enquete afgenomen onder ruim tweehonderd respondenten. De resultaten van deze enquete staan uiteengezet in het zesde en laatste hoofdstuk.

Deze scriptie poogt orde te scheppen in de chaos van eerlijkscriteria en de onoverzichtelijke, vaak incomplete en soms incorrecte manier waarop die in bestaande literatuur behandeld worden. Het biedt een nieuwe kijk op de onmogelijkheidsstelling van Kenneth Arrow, formuleert een alternatief voor twee veelgebruikte kiessystemen en betoogt op basis van kwalitatieve en kwantitatieve analyse welk van de drie kiessystemen het eerlijkst is.

1 Notatie en definities

Een eenduidige beschrijving van kiessystemen bestaat er niet. Het is daarom belangrijk om eerst een aantal begrippen te definiëren en uit te leggen welke notatie er in deze scriptie gebruikt zal worden. Elke verkiezing begint met een groep kiezers en een groep kandidaten.

Notatie 1.1 (Kandidaten)**.** $K = \{a, b, c, ..., k\}$ is een niet-lege, eindige verzameling ($|K| = k$) van onderling disjuncte kandidaten.

Notatie 1.2 (Kiezers)**.** $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$ is een niet-lege, eindige verzameling ($|V| = n$)van kiezers.

Er wordt in deze scriptie, net als in *Verkiezingen, agenda's en manipulatie* van A.J.A. Storcken en H.C.M. de Swart, van uitgegaan dat kiezers een voorkeur hebben die alle kandidaten beslaat: iedere kiezer is in staat om de kandidaten strikt te ordenen op basis van voorkeur.

Notatie 1.3 (Strikt geordende lijst)**.** $P(K)$ is een permutatie, een strikte ordening van de kandidaten in K.

Alle mogelijke voorkeurslijsten van alle n kiezers samen noemen we de keuzeruimte.

Notatie 1.4 (Keuzeruimte)**.** $P(K)^n$ is de n-dimensionale ruimte van strikte ordeningen van kandidaten in K.

Een element uit de keuzeruimte is daarom een combinatie van voorkeurslijsten, van elke kiezer één. Zo'n element noemen we een profiel. Bij elke stembusgang is er sprake van een profiel, op basis waarvan de uitslag van de verkiezing wordt bepaald.

Notatie 1.5 (Profiel)**.** $x \in P(K)^n$ is een profiel.

Notatie 1.6. Voor kiezer $i \in V$, kandidaten $a, b \in K$ en profiel $x \in P(K)^n$ gebruiken we de volgende notatie:

- $P(K)^x_i$ is de voorkeurslijst van kiezer i onder profiel x;
- a^x_i is de plaats van kandidaat a op de geordende lijst van kiezer i onder profiel x;
- $P(K)^x_i[\iota]$ is de kandidaat op de ι^{de} plaats in de geordende lijst van kiezer i onder profiel x.

Voor kiezerslijsten beperken we ons tot strikte ordeningen. Kiezers moeten een geordende lijst opstellen met hun voorkeur voor kandidaten. De naar hun mening meest geschikte kandidaat plaatsen zij bovenaan, met het laagste rangnummer, 1, de minst geschikte onderaan, met hoogste rangnummer, k.

Wanneer we kiezers dwingen tot een strikt geordende lijst, kan het desalniettemin voorkomen dat de kandidaten in de verkiezingsuitkomst op dezelfde plaats eindigen.

Voorbeeld 1.7. Bekijk het geval dat we drie kandidaten hebben: $K = \{a, b, c\}$ en twee kiezers: $V = \{1, 2\}$, die respectievelijk de strikte voorkeurslijsten abc en bca hebben. Het meest simpele kiessysteem neemt alleen de eerste keuze van kiezers in overweging. De kandidaat met de meeste voorkeursstemmen wint, maar hier is het gelijk spel. Kandidaten a en b eindigen op een gedeelde eerste plaats.

Het is daarom nodig om een zwak geordende lijst te introduceren.

Notatie 1.8 (Zwak geordende lijst)**.** $\tilde{P}(K)$ is de vereniging van een geordende partitie van de kandidaten in K en een eindig aantal lege verzamelingen.
In het bijzonder, $\tilde{P}(K) = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$, met A_i de verzameling kandidaten op de i^{de} plek in de uitkomst.

- $A_i \subset K$, $i = 1, ..., k$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.
- $\cup_{i=1}^{k} A_i = K$.
- Als $m = |\cup_{i=1}^{l} A_i| > l$, dan $A_{l+1}, ..., A_m = \emptyset$.

Voorbeeld 1.9. Bekijk de kandidatenverzameling $K = \{a, b, c, d, e\}$. Een zwak geordende lijst hiervan is bijvoorbeeld: $\{\{a\}, \{b, c, d\}, \emptyset, \emptyset, \{e\}\}$.

Definitie 1.10. De triviale uitkomst is de uitkomst waarvoor geldt: $\phi(x) \in \tilde{P}(K)$ met $A_1 = K, A_2 = ...A_k = \emptyset$. Met andere woorden, alle kandidaten staan op een gedeelde eerste plek in de uitkomst.

Enerzijds kan beargumenteerd worden dat de triviale uitkomst niet per se triviaal is: het zegt iets over de kiezers en kandidaten als de kiezers het dusdanig oneens zijn dat zij het niet eens kunnen worden over de beste kandidaat. In het kader van deze scriptie is deze uitslag echter wel triviaal, omdat het geen onderlinge rangorde tussen de kandidaten aangeeft.

Definitie 1.11 (Relaties)**.** Kiezer i prefereert kandidaat a strikt boven kandidaat b onder $x \in P(K)^n$ als geldt: $a_i^x < b_i^x$. Immers, a staat 'hoger' op de ranglijst en heeft dus een lager rangnummer dan b.
Op dezelfde manier wordt a zwak geprefereerd boven b in de uitkomst $\phi(x)$ als geldt: $a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}$ en is de uitkomst onverschillig ten opzichte van a en b als $a_{\phi(x)} = b_{\phi(x)}$.
De relaties $<$, $\leq$ en $=$ zijn eigenschappen van ordeningen op $K \times K$.

$$\forall a, b \in K : a < b \text{ óf } b < a.$$

$$\forall a, b \in K : a \leq b \text{ of } b \leq a.$$

$$\forall a, b \in K : a = b \iff b = a.$$

In de bestaande literatuur over dit onderwerp worden deze relaties aangeduid met bijvoorbeeld een letter P voor de strikte preferentierelatie. Het nadeel van een dergelijke notatie is dat alleen ordeningen tussen kandidaten op dezelfde geordende lijst kunnen worden beschreven. Willen we twee verschillende geordende lijsten en de plaatsen van kandidaten daarop vergelijken, dan moet daar een andere notatie voor geïntroduceerd worden. De hier geïntroduceerde notatie voldoet in beide gevallen. Zo is het ook mogelijk om te spreken over: $a_i^x < b_j^y$: het rangnummer van kandidaat a op de lijst van kiezer i onder profiel x is kleiner dan het rangnummer van kandidaat b op de lijst van kiezer j onder profiel y.

Opmerking 1.12. De preferentierelatierelaties en onverschilligheidsrelatie zijn transitief:

$$\forall a, b, c \in K: \text{ als } a < b \text{ en } b < c, \text{ dan } a < c.$$

$$\forall a, b, c \in K: \text{ als } a \leq b \text{ en } b \leq c, \text{ dan } a \leq c.$$

$$\forall a, b, c \in K: \text{ als } a = b \text{ en } b = c, \text{ dan } a = c.$$

Opmerking 1.13. De striktepreferentierelatie $<$ en de onverschilligheidsrelatie $=$ sluiten elkaar uit. Dit volgt uit de definitie.

Dit brengt ons bij de keuzefunctie, de functie die aan een profiel een verkiezingsuitslag toewijst. Zoals gezegd hoeft die uitslag niet per se een strikte ordening van de kandidaten te zijn.

Definitie 1.14 (keuzefunctie)**.** Een afbeelding

$$\phi : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$$

heet een keuzefunctie.

De uitkomst wordt ook wel *sociale keuze* genoemd.

Notatie 1.15. De notatie van de zwak geordende lijst komt sterk overeen met de notatie van de sterk geordende lijst:

- $a_{\phi(x)} = i$ als $a \in A_i \in \tilde{P}(K)$: $a_{\phi(x)}$ is de plaats van kandidaat a op de zwak geordende lijst van de uitkomst gegeven profiel x.
- $\phi(x)[i] = A_i$ is de verzamelingen kandidaten op de i^{de} plaats op de zwak geordende lijst van de uitkomst gegeven profiel x.

Lemma 1.16. *Voor n kiezers en k kandidaten, geldt $|P(K)^n| = (k!)^n$. Dit zijn alle combinaties van rangschikkingen van k kandidaten door n kiezers.*

Bewijs. Wanneer er k kandidaten zijn, heeft elk van de n kiezers $k!$ manieren om die te rangschikken. Er zijn $(k!)^n$ profielen in de permutatieruimte $P(K)^n$. Het aantal verschillende profielen is dus $(k!)^n$. □

Kiezers worden dus als individuen gezien en zij zijn niet inwisselbaar. Als dit wel het geval is en kiezers onderling hun lijsten uit kunnen wisselen zonder de uitslag te beïnvloeden, dan heet de keuzefunctie anoniem, zoals in het volgende hoofdstuk uitgelegd wordt. Omdat dit een eerlijkheidscriterium is en er keuzefuncties te bedenken zijn die hier niet aan voldoen, kunnen we de kiezers in het algemeen niet als inwisselbaar beschouwen. Wel kunnen we kijken naar groepen kiezers:

Notatie 1.17 (Coalitie)**.** Een deelverzameling $S \subset V$ noemen we een coalitie.

Definitie 1.18 (Maximaal conflict)**.** $x \in P(K)^n$ is een maximaal conflict tussen coalities $S \subset V$ en $T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$, als voor alle paren kandidaten $a, b \in K$ geldt

- als er een $i \in S$ is met $a_i^x < b_i^x$, dan $a_j^x < b_j^x$ $\forall j \in S$ en $b_j^x < a_j^x$ $\forall j \in V \setminus S$.
- als er een $i \in S$ is met $b_i^x < a_i^x$, dan $b_j^x < a_j^x$ $\forall j \in S$ en $a_j^x < b_j^x$ $\forall j \in V \setminus S$.

Met andere woorden: de voorkeuren van kiezers binnen S of $V \setminus S$ zijn gelijk en de voorkeuren tussen S en $V \setminus S$ zijn tegengesteld.

Voorbeeld 1.19 (Presidentsverkiezingen)**.** Bij de Amerikaanse presidentsverkiezingen vormen 538 kiesmannen de kiezersverzameling V. Zij kunnen twee keer stemmen, eerst voor president en daarna voor vicepresident.
In 2016 konden de kiesmannen kiezen uit een tiental presidentskandidaten: de Democratische kandidaat Hillary Clinton, de Republikeinse kandidaat Donald Trump, de Libertarische, Groene, Constitutionele en Onafhankelijke kandidaten en een aantal anderen.
De keuzefunctie ϕ nam alleen de eerste keuze van de kiezers in overweging, zie het meerderheidsstelsel in hoofdstuk 4.
De uitkomst $P(L)$ met $|L| = 1$ was als volgt: de Republikeinse kandidaat Donald Trump kreeg de meeste stemmen en werd president.
Sommige kiesmannen waren verplicht te stemmen op de kandidaat die in hun staat een meerderheid had behaald. Dergelijke groepen kiesmannen zijn een mooi voorbeeld van een coalitie: er was een coalitie $S \in V$ van kiesmannen die verplicht op Clinton moest stemmen en een coalitie $T \in V$, $T \cap S = \emptyset$ die verplicht op Trump moest stemmen.

Met de hier geintroduceerde notatie en definities op zak, kunnen we in het volgende hoofdstuk de belangrijkste criteria voor de eerlijkheid van een kiessysteem beschouwen.

2 Eerlijkheidscriteria

We zullen nu criteria voor een 'eerlijk' kiessysteem introduceren. Er zijn veel verschillende criteria geformuleerd in de laatste twee eeuwen. Ze overlappen deels en zijn soms onder meerdere namen bekend. In deze scriptie zullen we voornaamste criteria bestuderen en zó formuleren dat ze aansluiten op de keuzefunctie zoals die in hoofdstuk 1 is gedefiniëerd en zó, dat mogelijke ambiguïteit uit literatuur uit de vakgebieden politicologie en economie weggenomen wordt.

Bekijk hieronder steeds een keuzefunctie ϕ, profielen $x, y \in P(K)^n$ en $x_i = P(K)_i^x$, de lijst van kiezer i onder x, zoals in het vorige hoofstuk geïntroduceerd.

2.1 Veelgebruikte criteria

Definitie 2.1 (Anonimiteit)**.** Zij p een willekeurige permutatie van de kiezerslijst $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Een keuzefunctie ϕ is anoniem als $\forall x, y \in P(K)^n$ en voor alle permutaties $p \in S_n$ geldt

$$\text{als } P(K)_i^y = P(K)_{p(i)}^x \forall i \in V, \text{ dan } \phi(x) = \phi(y).$$

Met andere woorden: een keuzefunctie is anoniem dan en slechts dan als alle kiezers gelijk worden behandeld. De voorkeur van iedere kiezer telt even zwaar mee en het verwisselen van kiezers in de lijst maakt niet uit voor de sociale keuze.

Definitie 2.2 (Dictatorschap)**.** De keuzefunctie ϕ is een dictatorschap als geldt:

$$\exists i \in V \text{ zodanig dat } \forall x \in P(K)^n \text{ en } \forall a, b \in K \text{ geldt: } a_i^x < b_i^x \implies a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}.$$

Met andere woorden, er is één kandidaat die de uitkomst bepaalt, onafhankelijk van andere kiezers. Dictatorschap komt ook in een sterkere vorm voor: $a_i^x < b_i^x \implies a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Deze interpretatie van de eis is echter minder relevant gegeven de zwak geordende uitslag $\phi(x)$.

Een keuzefunctie is niet-dictatoriaal als

$$\forall i \in V\ \exists x \in P(K)^n, a, b \in K, \text{ zodanig dat } a_i^x < b_i^x \text{ en } a_{\phi(x)} > b_{\phi(x)}.$$

Stelling 2.3. *Als ϕ een dictatoriale, anonieme keuzefunctie is, dan is de uitkomst triviaal.*

Bewijs. Stel, keuzefunctie ϕ is anoniem en dictatoriaal: zeg $i \in V$ is de dictator. Dan is er een profiel $x \in P(K)^n$ waarvoor dictator i voorkeur $P(K)_i^x$ heeft en er is een $j \in V, j \neq i$ zodanig dat $\{i\}$ en $\{j\}$ een maximaal conflict vormen. Zij $p \in S_n$ een permutatie van de kiezerslijst $\{1, 2, 3, ...n\}$ met $p(i) = j$. Laat $y \in P(K)^n$ met $P(K)_i^y = P(K)_{p(i)}^x$, zodat onder y kiezer i de voorkeur van kiezer j onder x heeft.
Met dictatorschap volgt nu: $\forall a, b \in K$: als $a_i^x < b_i^x$, dan $b_i^y < a_i^y$, $a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}$ en $b_{\phi(y)} \leq a_{\phi(y)}$. Uit anonimiteit volgt echter $\phi(x) = \phi(y)$, dus moet gelden $a_{\phi(x)} = b_{\phi(x)}$ en $a_{\phi(y)} = b_{\phi(y)}$. $\square$

Definitie 2.4 (Sterk unaniem)**.** De keuzefunctie ϕ is sterk unaniem als geldt:

$$a_i^x < b_i^x, \forall i \in V \implies a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}.$$

Met andere woorden, als alle kiezers kandidaat a boven kandidaat b prefereren, dan eindigt a ook boven b in de uitkomst, of sociale keuze. Dit wordt ook wel Pareto-optimaliteit genoemd [Storcken, 1992].

Dit criterium, sterke unanimiteit, wordt gehanteerd in alle geraadpleegde literatuur, onder andere Storcken en Arrow gebruiken dit criterium. Het blijkt echter voor de kiessystemen in deze scriptie geen veelzeggende definitie te zijn, vanwege het feit dat we zwakke ordeningen toestaan in de uitkomst. Het is daarom relevant om een zwakkere variant van dit criterium te beschouwen.

Definitie 2.5 (Zwak unaniem)**.** De keuzefunctie ϕ is zwak unaniem als geldt:

$$a_i^x < b_i^x \ \forall i \in V \implies a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}.$$

Wanneer een keuzefunctie zwak unaniem is, geldt dat een kandidaat die door alle kiezers boven een andere kandidaat geprefereerd wordt, niet lager mag eindigen, maar er in de sociale keuze wel gelijk spel mag zijn.

Opmerking 2.6. Als een keuzefunctie sterk unaniem is, dan is hij ook zwak unaniem.

Een ander veelgebruikt criterium is monotonie.

Definitie 2.7 (Monotoon)**.** De keuzefunctie ϕ is monotoon wanneer geldt:

$$a_i^y \leq a_i^x \ \forall i \in V \implies a_{\phi(y)} \leq a_{\phi(x)}.$$

Met andere woorden, wanneer alle kiezers kandidaat a hoger op hun lijst zetten (met een kleiner rangnummer), of op dezelfde plek houden, dan mag a niet lager eindigen in de uitkomst of sociale keuze. Deze eigenschap wordt ook wel positief associatief genoemd.

Definitie 2.8 (Opgelegd)**.** Een keuzefunctie ϕ is opgelegd als geldt:

$$\exists a, b \in K \text{ zodanig dat } \forall x \in P(K)^n : a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}.$$

Met andere woorden, de keuzefunctie is opgelegd als de volgorde van minstens één paar kandidaten vaststaat in de uitkomst, onafhankelijk van de lijsten van kiezers $i \in V$.

Een 'goede' keuzefunctie heeft geen opgelegde keuzes. Er geldt dan:

$$\forall a, b \in K \ \exists x, y \in P(K)^n \text{ zodanig dat } a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}, \text{ en } b_{\phi(y)} < a_{\phi(y)}.$$

Opmerking 2.9. Een dictatoriale en anonieme keuzefunctie is opgelegd. Dit volgt uit **Stelling 2.3**.

Definitie 2.10 (Onafhankelijk van irrelevante alternatieven (OIA))**.**
Zij $a, b \in K$ kandidaten en $x, y \in P(K)^n$ profielen. De keuzefunctie ϕ is OIA als geldt:

$$\text{als } \forall i \in V : a_i^x < b_i^x \iff a_i^y < b_i^y, \text{ dan } a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)} \iff a_{\phi(y)} < b_{\phi(y)}.$$

Met andere woorden: de onderlinge rangschikking van twee kandidaten in de uitkomst of sociale keuze is alleen afhankelijk van de rangschikking tussen die kandidaten in de permutatielijsten van kiezers en hangt niet af van mogelijke derde kandidaten.

Gevolg 2.11. *Als een keuzefunctie OIA is, dan geldt ook:*

$$\text{als } \forall i \in V : a_i^x < b_i^x \iff a_i^y < b_i^y, \text{ dan } a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)} \iff a_{\phi(y)} \leq b_{\phi(y)}.$$

Stelling 2.12. *Monotonie, niet-opgelegde keuze en OIA impliceren sterke unanimiteit.*

Bewijs. Neem aan dat ϕ monotoon, OIA en niet opgelegd is. Stel nu dat ϕ niet sterk unaniem is. Dat wil zeggen: $\exists x \in P(K)^n$ met $\forall i \in V : a_i^x < b_i^x$ en $b_{\phi(x)} \leq a_{\phi(x)}$.

Bewering: $\forall y \in P(K)^n$ geldt $b_{\phi(y)} \leq a_{\phi(y)}$.
Bewijs met behulp van volledige inductie naar alle voorkeuren voor b boven a.

1. Laat $y \in P(K)^n$ zodanig dat $\forall i \in V$: $a_i^y < b_i^y$.
Wegens OIA geldt $b_{\phi(y)} \leq a_{\phi(y)}$.

2. Inductiestap: er is een $z \in P(K)^n$ zodanig dat $b_{\phi(z)} \leq a_{\phi(z)}$ en $\exists \iota \in V : a_\iota^z < b_\iota^z$.
Laat $y \in P(K)^n$ zodanig dat $\forall j \neq \iota \in V : a_j^y = a_j^z, b_j^y = b_j^z$ en $b_\iota^y = a_\iota^z, a_\iota^y = b_\iota^z$.
Dus voor profiel y is er één kiezer meer met de voorkeur voor b boven a.
Dan geldt wegens monotonie: $\forall i \in V : b_i^y \leq b_i^z$ en $a_i^z \leq a_i^y$, dus $b_{\phi(y)} \leq b_{\phi(z)}$ en $a_{\phi(z)} \leq a_{\phi(y)}$. Dus geldt $b_{\phi(y)} \leq a_{\phi(y)}$.

3. Dus $\forall y \in P(K)^n$ geldt $b_{\phi(y)} \leq a_{\phi(y)}$.
Hieruit volgt dat ϕ is opgelegd. □

2.2 Toegevoegde criteria

Bovenstaande criteria zijn de meest gehanteerde en meest besproken eisen voor een eerlijk kiessysteem. Daar zijn de volgende criteria aan toe te voegen.

Met strategisch stemmen wordt in de volksmond bedoeld dat een kiezer niet stemt op de partij van zijn of haar voorkeur, maar op een andere partij, meestal om daarmee de kansen van een derde partij te verkleinen. Filosoof Allan Gibbard en econoom Mark Satterthwaite beschreven strategisch of onoprecht stemmen als volgt: stemmen op een andere wijze dan strikt naar eigen voorkeur, om daarmee een uitslag te bewerkstelligen die juist meer overeenkomt met de eigen voorkeur. Deze interpretatie is hieronder geformaliseerd.

Definitie 2.13 (Manipuleerbaarheid)**.** Een keuzefunctie $\phi(x)$ is niet manipuleerbaar als $\forall i \in V$ en $\forall x, y \in P(K)^n$ geldt

$$|\{(a, b) \in K^2 \mid a_i^x < b_i^x \text{ én } a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}\}| \geq |\{(a, b) \in K^2 \mid a_i^x < b_i^x \text{ én } a_{\phi(y)} < b_{\phi(y)}\}|,$$

met $y \in P(K)^n$ $y = x$ op $v \setminus \{i\}$.

Een keuzefunctie is dus niet manipuleerbaar, wanneer het voor geen enkele kiezer voordelig is om eenzijdig af te wijken en onoprecht te stemmen. Met voordelig bedoelen we dat de onderlinge volgorde van meer paren kandidaten in de sociale keuze overeenkomt met de wens van de kiezer.

Andersom is een keuzefunctie manipuleerbaar wanneer een kiezer onoprecht kan stemmen en daarmee de uitkomst voor zichzelf positief te beinvloeden, onafhankelijk van de lijsten van andere kiezers.

Definitie 2.14 (Condorcet winnaar en verliezer)**.** Een kandidaat a is een Condorcet winnaar voor profiel $x \in P(K)^n$ als $\forall b \in K$ geldt:

$$|\{i \in V \mid a_i^x < b_i^x\}| > |\{i \in V \mid b_i^x < a_i^x\}|.$$

Een kandidaat a is een Condorcet verliezer als $\forall b \in K$ geldt:

$$|\{i \in V \mid a_i^x < b_i^x\}| < |\{i \in V \mid b_i^x < a_i^x\}|.$$

Een kandidaat is dus een Condorcet winnaar als de kandidaat paarsgewijs wint van elke andere kandidaat, dat is: meer kiezers verkiezen a boven b dan b boven a. Een Condorcet verliezer verliest paarsgewijs van alle andere kandidaten.

Definitie 2.15 (Condorcet criterium)**.** Herinner: $\phi(x)[1]$ is de kandidaat die bovenaan eindigt in de uitkomst. Een keuzefunctie $\phi : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ voldoet aan het Condorcet criterium als geldt: als er voor een $x \in P(K)^n$ een Condorcet winnaar is, zeg $a \in K$, dan geldt $\phi(x)[1] = a$.

In het derde hoofdstuk bespreken we een keuzefunctie van Ryan O'Donnell die hij zelf de Condorcet keuzefunctie noemt en die als bijkomend voordeel heeft dat het een Boolese functie is. O'Donnell maakt hier gebruik van door de onmogelijkheidsstelling vanuit een andere invalshoek te bewijzen.

Als laatste bespreken we een criterium dat gebruikt wordt om verschillende verkiezingen met elkaar te vergelijken. Zo concludeert CPG Grey, maker van educatieve YouTube filmpjes, fervent tegenstander van het meerderheidsstelsel en voorstander van de enkelvoudig overdraagbare stem (zie hoofdstuk drie voor deze kiesstelsels), aan de hand van dit criterium dat de Britse parlementsverkiezingen van 2015 de slechtse ooit waren: `https://www.youtube.com/watch?v=r9rGX91rq5I`.

Definitie 2.16 (Misrepresentatie)**.** Zij $\phi : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ een keuzefunctie. De misrepresentatie E_m is dan de som over alle kandidaten van de absolute waarde van het verschil tussen de positie van de kandidaat in $\tilde{P}(K)$ en in $P(K)$. Hoe die verschillen berekend worden, verschilt per keuzefunctie.

De precieze invulling van de misrepresentatie hangt sterk af van de keuzefunctie ϕ die gebruikt wordt. Dat maakt de misrepresentatie een lastig criterium om kiessystemen te vergelijken. CPG Grey kan dus wel beargumenteren dat de Britse verkiezingen minder representatief waren dan voorgaande Britse verkiezingen, maar niet in één keer concluderen dat een ander kiessysteem beter werkt voor de Britse eilanden. Hieronder staan twee voorbeelden van berekeningen van de misrepresentatie, bij verschillende kiessystemen.

Voor een meerderheidsysteem, zoals het Engelse systeem per kiesdisrict, is het de som van alle absolute verschillen tussen het percentage van de stemmen en het percentage van de zetels dat een kandidaat krijgt.

Voorbeeld 2.17. Bekijk het geval waarin negen kandidaten strijden om één zetel. Als kandidaat a 20% van de stemmen krijgt en de andere acht elk 10%, dan wint kanidaat a alsnog 100% van de zetels. De misrepresentatie in dit voorbeeld is:
$E_m = |1 - 0,2| + 8|0 - 0,1| = 1,6$.

Definitie 2.18 (Borda score)**.** Ken aan elke plek in de permutaties van kiezers een gewicht toe: k aan de eerste plek, $k-1$ aan de tweede plek, ... , 1 aan de k^{de} plek. De bordascore B_i van kandidaat i is de som van alle behaalde gewichten.

Voorbeeld 2.19. Bekijk een Bordasysteem met n kiezers en m zetels. Elke kandidaat van wie de Bordascore boven een drempelwaarde komt, krijgt een zetel. De drempelwaarde: $\frac{1}{m} \cdot n(k + (k-1) + (k-2) + ... + 1) = \frac{nk(k+1)}{2m}$.
Zij $L \subset K$ de verzameling kandidaten die een zetel krijgen. De misrepresentatie wordt in dit geval gegeven door:

$$E_m = \sum_{j \in L} |\frac{nk(k+1)}{2m} - B_i| + \sum_{j \in K \setminus L} |B_i|.$$

Andere criteria die zich minder goed wiskundig laten beschrijven zijn de effectiviteit voor bestuur, toegankelijkheid voor kleine minderheidspartijen en invloed op het opkomstpercentage [Norris, 1997]. Op deze eisen wordt daarom in deze scriptie niet getoetst. Dat neemt niet weg dat ze mee kunnen wegen in de keuze voor een bepaald kiessysteem.

In dit hoofdstuk zijn de belangrijkste criteria voor een eerlijk kiessysteem aan bod gekomen en is de relatie tussen enkele van criteria aangegeven. Een belangrijk verband tussen drie van deze criteria is in dit hoofdstuk niet behandeld: het is onmogelijk voor een keuzefunctie om zowel (zwak) unaniem, niet-dictatoriaal als OIA te zijn. Deze stelling werd zeventig jaar geleden voor het eerst bewezen door Kenneth Arrow en wordt in het volgende hoofdstuk uitvoerig behandeld.

3 Arrows onmogelijkheidsstelling

Kenneth Arrow toonde in zijn artikel uit 1950 aan dat drie criteria voor een goede keuzefunctie onverenigbaar zijn: niet dictatoriaal, sterke unanimimiteit en onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven [Arrow, 1950]. Hij bekeek keuzefuncties die wat betreft structuur vergelijkbaar zijn met de hierboven gedefinieerde $\phi : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$. Arrow liet zien dat een verkiezing met twee of meer kiezers en drie of meer alternatieven niet aan al deze eisen kon voldoen en kreeg hiervoor in 1972 de Nobelprijs voor de economie.

Arrow gebruikt in zijn bewijs echter nog een vierde eis, namelijk dat de keuzefunctie rationeel is. Hij bedoelde daarmee dat de relaties in de sociale keuze transitief zijn. In het bijzonder geldt: als $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$ en $b_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$, dan $a_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$.

3.1 Arrows bewijs met sterke unanimiteit

Er bestaan verschillende bewijzen van Arrows onmogelijkheidsstelling. Hieronder staat het bewijs van Arrow zelf voor het speciale geval $|K| = 3, |V| = 2$ en het bewijs van Storcken voor het algemene geval. Voor drie alternatieve vormen van het bewijs, zie John Geanakoplos's artikel [Geanakoplos, 2004].

Stelling 3.1 (Onmogelijkheidsstelling van Arrow)**.** *Voor $|V| \geq 2$ en $|K| \geq 3$ geldt: als een keuzefunctie transitief is, sterk unaniem en onafhankelijk van irrelevante alternatieven, dan is de keuzefunctie een dictatorschap.*

Bewijs. Geval $|K| = 3, |V| = 2$ [Arrow, 1950].

Zij $K = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2\}$, $\phi : P(K)^2 \mapsto \tilde{P}(K)$, $x \in P(K)^2$. Arrow staat toe dat zowel voor de kiezers als voor de uitslag zwakke preferenties zijn toegestaan. Neem aan dat de keuzefunctie ϕ unaniem is en OIA. Stel dat ϕ niet dictatoriaal is.

Lemma 1. Zij de volgende situatie gegeven: als $a_1^x < b_1^x$ en $b_2^x < a_2^x$, dan $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat c.
Dan geldt $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$ als $a_1^x < b_1^x$, onafhankelijk van de keuze van kiezer 2.

Met andere woorden, als de ordening van kiezer 1 zwaarder telt dan die van kiezer 2 wanneer ze het oneens zijn, dan wordt de ordening van 1 zeker ook aangehouden wanneer 2 het eens is met 1.

Het bewijs volgt direct uit sterke unanimiteit.

Lemma 2. *$\overline{a}_1^x < \overline{b}_1^x$ en $\overline{b}_2^x < \overline{a}_2^x$ impliceert $\overline{a}_{\phi(x)} = \overline{b}_{\phi(x)}$, $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \{a, b, c\}$.*

Met andere woorden, als de twee kiezers het oneens zijn over twee kandidaten, dan is de uitkomst onverschillig ten opzichte van die kandidaten.

Het bewijs volgt uit non-dictatorschap.

Bewijs. Stel dat Lemma 2 niet waar is. Zonder verlies van algemeenheid bekijken we het scenario met: $a_1^x < b_1^x$, $b_2^x < a_2^x$ en $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Volgens Lemma

1 geldt dan $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$ als $a_1^x < b_1^x$, onafhankelijk van kandidaat c en de rangschikking van kiezer 2 (i).

Bekijk nu het geval: $P(K)_1^x = abc$ en $P(K)_2^x = bca$. Wegens sterke unanimiteit geldt: $b_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$ en wegens (i) geldt: $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Wegens de transitiviteit van de preferentierelatie geldt nu: $a_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$, terwijl $a_1^x < c_1^x$ en $c_2^x < a_2^x$. Wegens Lemma 1 geldt nu: als $a_1^x < c_1^x$, dan $a_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat b en kiezer 2 (ii).

Bekijk nu het geval $P(K)_1^x = bac$ en $P(K)_2^x = cba$. Wegens sterke unanimiteit geldt $b_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$ en wegens (ii) geldt $a_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$. Wegens transitiviteit geldt $b_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$. Uit Lemma 1 volgt nu: als $b_1^x < c_1^x$, dan $b_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat a en kiezer 2 (iii).

Bekijk nu het geval $P(K)_1^x = bca$ en $P(K)_2^x = cab$. Wegens sterke unanimiteit geldt $c_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$ en wegens (iii) geldt $b_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$. Wegens transitiviteit geldt $b_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$. Uit Lemma 1 volgt nu: als $b_1^x < a_1^x$, dan $b_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat c en kiezer 2 (iv).

Bekijk nu het geval $P(K)_1^x = cba$ en $P(K)_2^x = acb$. Wegens sterke unanimiteit geldt $c_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$ en wegens (iv) geldt $b_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$. Wegens transitiviteit geldt $c_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$. Uit Lemma 1 volgt nu: als $c_1^x < a_1^x$, dan $c_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat b en kiezer 2 (v).

Bekijk nu het geval $P(K)_1^x = cab$ en $P(K)_2^x = abc$. Wegens sterke unanimiteit geldt $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$ en wegens (v) geldt $c_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$. Wegens transitiviteit geldt $c_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Uit Lemma 1 volgt nu: als $c_1^x < b_1^x$, dan $c_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$, onafhankelijk van kandidaat a en kiezer 2 (vi).

Uit $(i), (ii), (iii), (iv), (v)$ en (vi) volgt dat kiezer 1 altijd zin krijgt en dus een dictator is. Dit bewijst Lemma 2. □

Bekijk profiel $x \in P(K)^2$ waarbij kiezer 1 de volgende ordening geeft: a, b, c en kiezer 2 de ordening c, a, b. Omdat $a_1^x < b_1^x$ en $a_2^x < b_2^x$, geldt $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Dit volgt uit sterke unanimiteit. Gezien $b_1^x < c_1^x$ en $c_2^x < b_2^x$, moet volgens Lemma 2 gelden $b_{\phi(x)} = c_{\phi(x)}$. Wegens de transitiviteit van de relaties geldt dan $a_{\phi(x)} < c_{\phi(x)}$. Er geldt echter ook $a_1^x < c_1^x$ en $c_2^x < a_2^x$, wat volgens Lemma 2 zou moeten leiden tot $a_{\phi(x)} = c_{\phi(x)}$. De relaties $<$ en $=$ sluiten elkaar uit. Dit systeem, met twee kiezers en drie alternatieven kan dus niet aan alle drie de eisen van Arrow voldoen. □

Dit bewijs is uit te breiden was naar willekeurig grote aantallen kiezers en kandidaten, waarbij het steeds voldoende is om te kijken naar een deelverzameling van drie kandidaten, zoals hierboven. Arrow leunde in zijn bewijs zwaar op de transitiviteit van een keuzefunctie, terwijl hij dat in zijn artikel slechts tussen neus en lippen door noemde. Daarnaast hanteerde Arrow het criterium sterke unanimiteit en niet zwakke unanimiteit.

In het volgende hoofdstuk zal echter blijken dat sterk unaniem geen relevant criterium is voor de kiessystemen die in deze scriptie behandeld worden. Omdat er hier voor gekozen is om een zwakke ordening in de uitslag toe te staan, is zwakke unanimiteit hier een beter criterium. Het blijkt bovendien dat de onmogelijkheidsstelling van Arrow ook opgaat voor zwakke unanimiteit. Het bewijs van A. Storcken leent zich goed om dit aan te tonen.

3.2 Storckens bewijs met zwakke unanimiteit

In dit bewijs volgen we in grote lijnen het bewijs van Storcken, maar steeds uitgaande van zwakke unanimiteit. Dit zwakkere criterium compliceert het bewijs enigszins.

Bewijs. Voor het algemene geval: $|K| = k, |V| = n$ [Storcken, 1992].

Zij $A = \{a, b, c..., n\}$ met $|A| \geq 3$. Stel $\phi : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ is zwak unaniem, niet-dictatoriaal en OIA.

Lemma 1. Voor elk maximaal conflict x tussen coalities S en $V \setminus S$, geldt: voor alle paren kandidaten $a, b \in K$ geldt $a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}$ als $a_i^x < b_i^x$, $i \in S$, of voor alle paren kandidaten geldt $a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}$ als $a_i^x < b_i^x$, $i \in V \setminus S$.

Met andere woorden: in het geval van een maximaal conflict beslist S of $V \setminus S$ de uitkomst. Het enige geval waarin ze beide beslissen is als alle kandidaten op een gedeelde eerste plek worden afgebeeld: $\phi(x) = \{\{a_1, a_2, ..., a_k\}, \emptyset, ..., \emptyset\}$, de triviale uitkomst.

Bewijs. Bekijk profiel $x \in P(K)^n$ met $a_1 a_2 ... a_{k-1} a_k$ de lijst van de kiezers in S, en $a_k, a_{k-1} ... a_2, a_1$ de lijst van kiezers in $V \setminus S$.
Stel $\exists c \in K \setminus \{a_i, a_{i+1}\}$ zodanig dat

$$\phi(x) = \tilde{P}(K)_{\phi(x)} = \{..., \{...a_i...\}, ..., \{...c...\}, ..., \{...a_{i+1}...\}, ...\} \ (*)$$

Zij $y \in P(K)^n$ het profiel met $\forall i \in S$ a_i en a_{i+1} van plek gewisseld, verder gelijk aan x. Dan geldt:

$$P(K)_S^y = a_1 a_2 ... a_{i-1} a_{i+1} a_i a_{i+2} ... a_{k-1} a_k$$

$$P(K)_{V \setminus S}^y = a_k a_{k-1} ... a_{i+2} a_{i+1} a_i a_{i-1} ... a_2 a_1.$$

Merk op: onder y geldt $\forall j \in V : (a_{i+1})_j^y < (a_i)_j^y$. Wegens zwakke unanimiteit geldt dus: $(a_{i+1})_{\phi(y)} \leq (a_i)_{\phi(y)}$. Merk dan ook op:

$$\forall j \in V : (a_i)_j^x < c_j^x \iff (a_i)_j^y < c_j^y \text{ en } (a_{i+1})_j^x < c_j^x \iff (a_{i+1})_j^y < c_j^y.$$

Wegens OIA en $(*)$ geldt $(a_i)_{\phi(y)} < c_{\phi(y)}$ en $c_{\phi(y)} < (a_{i+1})_{\phi(y)}$. Uit transiviteit volgt nu: $(a_i)_{\phi(y)} < (a_{i+1})_{\phi(y)}$.

Dit is in tegenspraak met het eerder gevonden $(a_{i+1})_{\phi(y)} \leq (a_i)_{\phi(y)}$.
Er bestaat dus niet een dergelijke c en a_i, a_{i+1} volgen elkaar op voor $1 \leq i < k$.
Hieruit volgt: als $a_i \in A_l \in \tilde{P}(K)$, dan $a_{i+1} \in A_m \in \tilde{P}(K)$, $m \geq l$ met hoogstens eindig veel lege verzamelingen tussen A_l en A_m. □

Lemma 2. Voor elke coalitie S beslist of S of $V \setminus S$ élk maximaal conflict $x \in P(K)^n$ tussen S en $V \setminus S$. De complementaire coalitie kan ook medebeslisser zijn als de uitkomst triviaal is: $\phi(x) = \{\{a_1, a_2, ..., a_k\}, \emptyset, ..., \emptyset\}$.

Bewijs. Opmerking 2.1 $\forall p, p' \in P(K)$ bestaat een reeks paarsgewijze verwisselen van kandidaten zodat p' uit p ontstaat. Dit is een standaardlemma uit Algebra [Stevenhagen, 2014].

Notatie Voor $p \in P(K)$ is $\tilde{p} \in \tilde{P}(K)$ een zwakke ordening met $\forall a, b \in K$: als $a < b$ in p, dan $a \leq b$ in $\tilde{p}$.

Lemma 2.2 Stel, S en $V \setminus S$ vormen een maximaal conflict, $P(K)^x_i = p \ \forall i \in S$ en $\{\{a_1, a_2, ..., a_k\}, \emptyset, ..., \emptyset\} \neq \phi(x) = \tilde{p}$ zij p' een permutatie die uit p ontstaat door paarsgewijze verwisselingen. Dan geldt: $\tilde{p'} = \phi(y)$ als $P(K)^y_i = p' \ \forall i \in S$.

Stel, S en $V \setminus S$ vormen een maximaal conflict, $P(K)^x_i = p \ \forall i \in S$ en S beslist: $\phi(x) = \tilde{p}$. Er zijn dus A_i, A_j, $i < j$ beide niet-leeg, dus $a_k \notin A_1$. Laat $y \in P(K)^n$ met $\forall j \in V : a_i$ en a_{i+1} omgewisseld, verder hetzelfde.
Dan geldt:

$$P(K)^y_S = p' = a_1...a_{i+1}a_i...a_k$$

$$P(K)^y_{V \setminus S} = q' = a_k...a_ia_{i+1}...a_1.$$

Lemma 1 impliceert dat geldt $\phi(x) \in \{\tilde{p'}, \tilde{q'}\}$. Met andere woorden, voor alle paren kandidaten $a, b \in K$ geldt $a_{\phi(y)} \leq b_{\phi(y)}$ als $a^x_i < b^x_i$, $i \in S$, of voor alle paren kandidaten geldt $a_{\phi(y)} \leq b_{\phi(y)}$ als $a^x_i < b^x_i$, $i \in V \setminus S$.

Wegens de aanname dat $\phi(x) = \tilde{p}$, geldt $(a_1)_{\phi(x)} \leq (a_i)_{\phi(x)}$, $(a_i)_{\phi(x)} \leq (a_k)_{\phi(x)}$ en $(a_1)_{\phi(x)} < (a_k)_{\phi(x)}$. Wegens OIA geldt: $(a_1)_{\phi(y)} \leq (a_i)_{\phi(y)}$, $(a_i)_{\phi(y)} \leq (a_k)_{\phi(y)}$ en $(a_1)_{\phi(y)} < (a_k)_{\phi(y)}$, dus $\phi(y) = \tilde{p'} \neq \tilde{q'}$.

Stel $\phi(x) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}, \emptyset, ..., \emptyset$, dan geldt $\phi(x) = \tilde{p} = \tilde{q}$: zowel S als $V \setminus S$ beslissen. Bekijk namelijk $y \in P(K)^n$ met dezelfde p' en q'. Wegens OIA geldt nu dat $\phi(y)$ is triviaal. □

Lemma 3. Voor alle coalities S en T geldt: als S en T beslissen op maximale conflicten met respectievelijk $V \setminus S$ en $V \setminus T$, dan beslist ook $S \cap T$ op de maximale conflicten.

Bewijs. Laat $x \in P(K)^n$ met coalities S en T met $P(K)^x_i = a_1...a_k$, $i \in S \cap T$ en $P(K)^x_j = a_k...a_1$, $j \in V \setminus S \cap T$. De vraag is: $\phi(x) = \tilde{p}$ of $\tilde{q}$.
We kiezen nu profiel $y \in P(K)^n$ met

$$P(K)_{S \cap T} = a_1a_2a_3a_4...a_k$$

$$P(K)_{S \setminus T} = a_2a_3a_1a_4...a_k$$

$$P(K)_{T \setminus S} = a_3a_1a_2a_4...a_k$$

$$P(K)_{V \setminus (S \cup T)} = a_4a_3a_2a_1...a_k.$$

Merk op: $(a_2)^x_S < (a_3)^x_S$, en $(a_3)^x_{V \setminus S} < (a_2)^x_{V \setminus S}$, S beslist op zijn maximale conflicten en ϕ is OIA, dus $(a_2)_{\phi(x)} \leq (a_3)_{\phi(x)}$.

Net zo: $(a_1)^x_T < (a_2)^x_T$ en $(a_2)^x_{V \setminus T} < (a_2)^x_{V \setminus T}$ en T beslist op zijn maximale conflicten, dus wegens OIA $(a_1)_{\phi(x)} \leq (a_2)_{\phi(x)}$. Dan geldt wegens transitiviteit $(a_1)_{\phi(x)} \leq (a_3)_{\phi(x)}$. Merk op: $(a_1)^x_{S \cap T} < (a_3)^x_{S \cap T}$ en $(a_3)^x_{V \setminus S \cap T} < (a_1)^x_{V \setminus S \cap T}$.

Terug naar het maximale conflict: $P(K)_{S \cap T} = a_1a_2a_3a_4...a_k$ en $P(K)_{V \setminus (S \cap T)} = a_k...a_4a_3a_2a_1$. Wegens OIA geldt $(a_1)_{\phi(x)} \leq (a_3)_{\phi(x)}$, dus wegens lemma 1 beslist $S \cap T$ zijn maximale conflict. Dus beslist $S \cap T$ volgens lemma 2 al zijn maximale conflicten. □

Volgens de aanname is ϕ niet dictatoriaal. Er geldt daarom $\forall i \in V\ \exists x(i) \in P(K)^n : \phi(x) \neq P(K)_i$, met andere woorden: $\forall i \in V$ bestaat een paar $a, b \in K : a_i^x < b_i^x$ en $b_{\phi(x)} < a_{\phi(x)}$. Noem dit paar (a^i, b^i).

Bekijk $S_i^x = \{j \in V : (a^i)_j^x < (b^i)_j^x\}$ en merk op $i \in S_i^x$.
Uit de definitie van de paren (a^i, b^i) (zodanig dat $(b^i)_{\phi(x)} < (a^i)_{\phi(x)}$) volgt dat S_i^x niet al zijn maximale conflicten beslist.

Uit Lemma 2 volgt dat $V \setminus S_i^x$ beslist $\forall i \in V$. Uit Lemma 3 volgt nu dat de doorsnede $\cap_{i \in V}(V \setminus S_i^x)$ al zijn maximale conflicten beslist. Deze doorsnede is leeg (immers $\forall i \in V : \exists S_i^x$ met $i \in S_i^x$).

Het complement hiervan is V en beslist geen van zijn maximale conflicten. Voor profiel $x \in P(K)^n$ waaronder alle kiezers dezelfde lijst hebben, is er zo'n maximaal conflict en beslist V niet, tenzij de uitkomst triviaal is. Dit is in tegenspraak met zwakke unanimiteit. □

Van deze drie eisen, waaraan een keuzefunctie niet tegelijkertijd kan voldoen, wordt in de regel de eis onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven achterwege gelaten. Het meerderheidsstelsel, zoals dat hieronder staat gedefinieerd, en het proportionele stelsel met open lijst dat in Nederland gehanteerd wordt, voldoen beide bijvoorbeeld niet aan OIA. In het algemeen voldoen keuzefuncties die verschillende gewichten toedelen aan de plaatsen op de lijst niet aan OIA.

3.3 O'Donnels bewijs met behulp van Fourieranalyse

Ryan O'Donnell behandelt in zijn boek *Analysis of Boolean Functions* een vorm van de keuzefunctie, de Condorcet keuzefunctie, die als een Boolese functie te beschrijven is [O'Donnell, 2014]. Vanuit deze beschouwing van de keuzefunctie, komt hij op een andere formulering van de onmogelijkheidsstelling van Arrow. O'Donnell bewijst de volgende ongelijkheid: als een Condorcet keuzefunctie unaniem is en altijd een Condorcet winnaar heeft, dan is er een dictator.

In deze paragraaf wordt de O'Donnells Condorcet keuzefunctie gedefinieerd en enkele eigenschappen afgeleid aan de hand van Fourier analyse van deze Boolese functie. We leggen uit hoe de Condorcet keuzefunctie ingebed is in de meer algemene definitie van een keuzefunctie die in deze scriptie gebruikt wordt, en wat de voor- en nadelen van beide definities zijn. We geven een schets van het bewijs van O'Donnells versie van Arrows onmogelijkheidsstelling en leggen uit hoe de oorspronkelijke onmogelijkheidsstelling volgt uit die van O'Donnell.

Condorcet keuzefunctie

De Condorcet keuzefunctie van O'Donnell kan in twee stappen worden geschreven als een keuzefunctie die compatibel is met een keuzefunctie zoals die in deze scriptie gedefinieerd is.

Definitie 3.2. De Condorcet keuzefunctie wordt gegeven door:

$$\phi = g \circ f : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K),$$

voor n oneven en waarbij

$$f : P(K)^n \mapsto \{-1,+1\}^{\binom{k}{2}}$$

$$\{-1,+1\}_{ab} = \text{sgn}(|\{i \in V \mid a_i^x < b_i^x\}| - |\{i \in V \mid b_i^x < a_i^x\}|;$$

en

$$g : \{-1,+1\}^{\binom{k}{2}} \mapsto \tilde{P}(K)$$

$$\phi(a) \leq \phi(b) \iff \{-1,+1\}_{ab} = 1,$$

met gelijkheid dan en slechts dan als er een Condorcetcykel is.

Merk op dat de ordening van $f(x)$ strikt is: paarsgewijs vergelijken met een oneven aantal kiezers levert altijd een winnaar op en nooit gelijk spel. O'Donnell staat geen even aantallen kiezers toe om een strikte ordening van $f(x)$ te garanderen.

De ordening van $g(f(x))$ daarentegen is niet strikt. Wanneer er sprake is van een Condorcetcykel, dan komen deze kiezers op een gedeelde plaats in de zwak geordende sociale keuze $\tilde{P}(K)$.

O'Donnell bedt zelf zijn keuzefunctie niet in in de keuzefunctie met een zwakke ordening als uitkomst, maar loopt wel tegen het probleem van Condorcetcykels aan. Het is verhelderend om zijn aanpak kort te bespreken. O'Donnell bekijkt voor iedere kiezer een vector met $k(k+1)/2$ uitkomsten $(\pm1, \pm1, ..., \pm1, \pm1, ..., \pm1)$. De uitslag is opnieuw zo'n vector, met de $k(k+1)/2$ paarsgewijze vergelijkingen.

Door de keuzefunctie zo op te schrijven, creëert O'Donnell een Boolese functie: $f_{a,b} : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$, $f_{a,b}(x) = \text{sgn}(x_{ab,1} + x_{ab,2} + ... + x_{ab,n})$ voor alle paren kandidaten $a, b \in K$. Hij analyseert deze keuzefunctie uitvoerig voor het geval $k = 2$ en slechts kort beschouwt hij de mogelijkheid $k \geq 3$. Wij gaan hier in op dat laatste geval, dat allerlei moeilijkheden met zich meebrengt, waaronder de mogelijkheid van een Condorcetcykel, zoals in het profiel hieronder.

	$P(K)_1^x$	$P(K)_2^x$	$P(K)_3^x$	$f(x)$
$a(+1)$ vs $b(-1)$	$+1$	$+1$	-1	$+1$
$b(+1)$ vs $c(-1)$	$+1$	-1	$+1$	$+1$
$c(+1)$ vs $a(-1)$	-1	$+1$	$+1$	$+1$

De kiezers hebben dus de volgende voorkeuren: $P(K)_1^x = a < b < c$, $P(K)_2^x = c < a < b$ en $P(K)_1^x = b < c < a$ en de uitslag is $\{+1, +1, +1\}$, of: $\tilde{P}(K) = (\{a, b, c\}\emptyset\emptyset)$.

Onmogelijkheidsstelling O'Donnell

O'Donnell beschouwt de Onmogelijkheidsstelling van Kenneth Arrow als een toepassing van Fourieranalyse van Boolese functies. Hij formuleert de stelling als volgt.

Stelling 3.3. *Zij $f_{a,b} : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$, $K = \{a, b, c\}$ een (sterk) unanieme Condorcet keuzefunctie. Als er altijd een Condorcet winnaar is, dan is er een dictator.*

Voor het bewijs hiervan gegeven kan worden, moet eerst een aantal zaken gedefinieerd worden.

Definitie 3.4 (Doorslaggevend)**.** Een kiezer $i \in V$ heet doorslaggevend voor $f : \{-1, +1\}^n \mapsto \{-1, +1\}$ en profiel x als geldt $f(x) \neq f(x^i)$, voor $x^i = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Met andere woorden, een kiezer is doorslaggevend als hij de uitslag in een paarsgewijze vergelijking kan veranderen door zijn voorkeur aan te passen.

Definitie 3.5 (Invloed)**.** De invloed van kiezer van $i \in V$ op de Boolese functie is $f : \{-1, +1\}^n \mapsto \{-1, +1\}$ is gedefinieerd als de kans dat i doorslaggevend is:

$$\mathbf{Inf}_i[f] = \mathbb{P}[f \neq f^i].$$

Definitie 3.6 (Fouriercoefficient)**.** Voor $f : \{-1, +1\}^n \mapsto \mathbb{R}$ en $S \subset V$, is de corresponderende Fouriercoefficiënt gedefiniëerd als

$$\hat{f}(S) = \mathbb{E}[f \chi_S].$$

Voor $\chi_S = \Pi_{i \in S} x_i$. Dit is het verwachte aantal doorslaggevende kiezers in coalitie S.

De Fourierexpansie van f wordt geschreven als:

$$f = \sum_{S \subset V} \hat{f}(S) \chi_S.$$

Definitie 3.7 (Fouriergewicht)**.** Voor $f : \{-1, +1\}^n \mapsto \mathbb{R}$ en $0 \leq \kappa \leq n$, is het Fouriergewicht van f op graad κ gedefiniëerd als

$$\mathbf{W}^\kappa[f] = \sum_{S \subset V, |S| = \kappa} \hat{f}(S)^2.$$

De som van Fouriergewichten bij Boolese functies is 1 (Stelling van Parseval).

Definitie 3.8 (ρ-gecorreleerd)**.** Zij $\rho \in [-1, 1]$. Gegeven $x \in \{-1, +1\}^n$, schrijven we $y \sim N_\rho(x)$ als

$$\forall i \in V \ N_\rho(x)_i = \begin{cases} x_i & \text{met kans } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho. \\ -x_i & \text{met kans } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rho. \end{cases}$$

We noemen x en y een ρ-gecorreleerd paar.

Definitie 3.9 (Ruisstabiliteit)**.** Voor $\rho \in [-1, 1]$,

$$\mathbf{Stab}_\rho[f] = \mathbb{E}[f \cdot f(N_\rho)]$$

is de ruisstabiliteit, een maat voor voor de correlatie tussen $f(x)$ en $f(y)$ als (x, y) een ρ-gecorreleerd paar is.

Voor $f : \{-1, 1\}^n \mapsto \{-1, 1\}$ en $\rho \in [-1, 1]$ is na te gaan:

$$\mathbf{Stab}_\rho[f] = \sum_{\kappa=0}^{n} \rho^\kappa \cdot \mathbf{W}^\kappa[f]$$

Definitie 3.10 (Not-all-equal functie)**.** NAE_n; $\{-1,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ is de not-all-equal functie, met $NAE_n(x) = 1$ dan en slechts dan als niet alle $x_1, ..., x_n$ gelijk zijn.

Opmerking 3.11. Voor dictatorfunctie f_i heeft dictator $i \in V$ invloed 1 en geldt voor alle ρ: $\mathbf{Stab}_\rho[f_i] = \rho$.

O'Donnell toont zijn stelling aan door eerst de kans op een Condorcet winnaar te beschouwen en dan te laten zien dat als die kans 1 is, er een dictator is.

Lemma 3.12. *De kans op een Condorcet winnaar is* $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\boldsymbol{Stab}_{-1/3}[f]$.

Bewijs. Dit volgt uit de Fourierexpansie:

O'Donnell gaat er van uit dat elk profiel met dezelfde waarschijnlijkheid voorkomt, een aanname die in Hoofdstuk 5 van deze scriptie ook gedaan zal worden.

Alle keuzes $(f_{a \text{ vs } b}, f_{b \text{ vs } c}, f_{c \text{ vs } a})$ zijn onafhankelijk getrokken uit de zes vectoren $(+1,+1,-1)$, $(+1,-1,+1)$, $(-1,+1,+1)$, $(-1,-1,+1)$, $(-1,+1,-1)$, $(+1,-1,-1)$. Dit zijn precies de vectoren die corresponderen met uitslagen met Condorcetwinnaars.

O'Donnell neemt aan dat de keuzefunctie f voor alle paarsgewijze verkiezingen hetzelfde werkt. Als voor kandidaten a en b geldt dat het teken van de uitslag (± 1) gelijk is aan dat van de som van de voorkeuren van kiezers, dan wordt de onderlinge uitslag tussen twee andere kandidaten c en d op dezelfde manier bepaald. O'Donnell neemt dus anonimiteit van kandidaten aan.

In de keuzefuncties die in het volgende hoofdstuk behandeld worden, is dit ook het geval, maar het geen algemene eigenschap van een keuzefunctie. Neem bijvoorbeeld een keuzefunctie die een of andere kandidaat $a \in K$ altijd de winnaar maakt in paarsgewijze verkiezingen wanneer minstens één kiezer a boven de andere kandidaat verkiest.

De Fourierreeks van NAE_3 is:

$$\begin{aligned} NAE_3(W_1, W_2, W_3) &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}W_1W_2 - \tfrac{1}{4}W_1W_3 - \tfrac{1}{4}W_2W_3 \\ &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\mathbf{Stab}_{-1/3}[f] \end{aligned} .$$

□

Lemma 3.13. *Als geldt* $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\boldsymbol{Stab}_{-1/3}[f] = 1$*, dan moet er een dictator zijn.*

Bewijs. $1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\mathbf{Stab}_{-1/3}[f] = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1/3)^k\mathbf{W}^k[f]$. Deze gelijkheid gaat alleen op als geldt $\mathbf{W}^1[f] = 1$ en $\mathbf{W}^k[f] = 0$ voor $k \in \{0, 2, ..., n\}$. Immers: $(-1/3)^k \geq -1/3$ voor alle k. Met Opmerking 3.12 en omdat f unaniem is, volgt $f(x) = \pm\chi_i$ voor een $i \in V$: er moet een dictator zijn. □

Voor een meer uitgebreide analyse van de Condorcet keuzefunctie als Boolese functie, zie het boek van O'Donnell.

Merk op dat de oorspronklijke onmogelijkheidsstelling van Arrow de criteria (zwak) unaniem, OIA en dictatorschap betreft en O'Donnells versie OIA inruilt voor de Condorceteigenschap.

De uitkomst bij de Condorcet keuzefunctie hangt al bijna geheel en alleen af van de onderlinge volgorde tussen twee kandidaten: alleen via een Condorcetcykel kan de volgorde tussen twee kandidaten in de uitslag beïnvloed worden door een of meerdere andere kandidaten.

Daarom is het voor deze specifieke Boolese keuzefunctie voldoende om het Condorcetcriterium te beschouwen: dit criterium impiceert namelijk OIA.
Uit O'Donnells onmogelijkheid volgt dus die van Arrow, met sterke unanimiteit.

4 Kiessystemen

Alle mogelijke kiessystemen zijn in vier categorien op te delen. De eerste zijn de meerderheidssystemen, waar de simpele meerderheid-, tweede ronde-, en alternatieve kiessystemen onder vallen. De volgende categorie wordt gevormd door de semi-proportionele systemen, waar de enkelvoudige overdraagbare stem, cumulatieve stem en gelimiteerde stem onder vallen. Daarna komt proportionele representatie, met open en gesloten partijstelsels. De lijst wordt gesloten door de gemengde systemen. In deze categorie valt bijvoorbeeld het 'additional member' systeem dat elementen uit meerderheidssystemen en proportionele representatie combineert [Norris, 1997].

Wereldwijd zijn er te veel verschillende soorten kiessystemen in gebruik, en daarnaast zijn nog te veel te bedenken, om ze allemaal in deze scriptie te behandelen. Hier worden er daarom slechts drie behandeld: het meerderheidsstelsel, het meest voorkomende systeem ter wereld, de enkelvoudige overdraagbare stem (EOS), in gebruik in delen van het voormalige Britse rijk en de gewogen beperkte lijst (GBL), een intuïtief 'eerlijk' systeem.

Elk van deze kiessystemen zijn twee-staps algoritmen, waarvan de eerste stap hier wordt gegeven. Dit resulteert in een zwak geordende lijst. De twee stap kan gebruikt worden om te bepalen welke kandidaten vervolgens een zetel krijgen.

Per kiessysteem wordt in dit hoofdstuk nagegeaan aan welke eerlijkheidscriteria het voldoet.

4.1 Meerderheidsstelsel

Het meerderheidsstelsel is het meest gebruikte kiessysteem ter wereld en daarom een logische keuze om als eerste te behandelen. De kandidaten met de meeste eerste stemmen winnen de verkiezing. In Amerika wint bijvoorbeeld de presidentskandidaat met de meeste stemmen de kiesmannen van een staat, en wint de kandidaat met de meeste kiesmannen het presidentsschap.

Onder het meerderheidsstelsel worden alleen de kandidaten op de eerste plaats in de lijsten van kiezers geteld. Op basis daarvan wordt een zwak geordende lijst samengesteld met k kandidaten. Vervolgens krijgen de eerste l kandidaten een zetel. Bijvoorbeeld: wanneer een president gekozen wordt, geldt $l = 1$. Wanneer een parlement met 150 zetels gekozen wordt, nemen we $l = 150$.

Definitie 4.1 (Meerderheidsstelsel)**.** $\phi_M : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ is de keuzefunctie voor het meerderheidsstelsel, dat op grond van het volgende algoritme bepaald wordt.

Algoritme Meerderheidsstelsel
Gegeven $|V| = n$ kiezers, $|K| = k$ kandidaten en $|L| = l$ zetels, $k, l, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, k \geq l$ en profiel $x \in P(K)^n$.
Zij w_{ia}^x het gewicht behorende bij de plaats van kandidaat a in de lijst van kiezer i onder profiel x:

$$w_{ia}^x = \begin{cases} 1 & \text{voor } a_i^x = 1. \\ 0 & \text{voor } a_i^x > 1. \end{cases}$$

Neem $D = \emptyset$, $\iota = 1$ en $A_1, ..., A_k = \emptyset$.

1. $A_\iota = \{a \mid a = \text{argmax}_{b \in K \setminus D} \sum_{i \in V} w^x_{ib}\}$.
2. $D = D \cup \{A_\iota\}$.
3. Als $| \cup^\iota_{i=1} A_i| < l$, verhoog $\iota = | \cup^\iota_{i=1} A_i| + 1$ en ga naar stap 1.
   Als $| \cup^\iota_{i=1} A_i| \geq l$, dan $A_{\iota + |A_\iota|} = \{a \in K \setminus D\}$, stop.

In het geval dat er meerdere kandidaten zijn met dezelfde som van gewichten, dan komen die kandidaten op dezelfde plek in de uitkomst te staan. Wanneer er meer kandidaten gelijk scoren dan er nog plekken zijn in L, moet met een tweede stap bepaald worden welke kandidaten een zetel krijgen. Deze tweede beslissing wordt hier niet besproken.

Stelling 4.2. *Het meerderheidsstelsel voldoet aan de volgende criteria: anoniem, niet dictatoriaal, zwak unaniem en niet opgelegd. Aan de overige criteria voldoet het niet.*

Hieronder volgt per criterium een bewijs of tegenvoorbeeld.

Anoniem
Laat $p(i) \in S_n$ een willekeurige permutatie van de kiezersverzameling V zijn.

Gegeven een profiel $x \in P(K)^n$, laat profiel y gedefiniëerd zijn met

$$P(K)^y_i = P(K)^x_{p(i)} \ \forall i \in V.$$

Dan geldt voor alle kandidaten $a \in K$:

$$\sum_{i \in V} w^x_{ia} = \sum_{i \in V} w^y_{ia}, \text{ dus } \phi_M(x) = \phi_M(y).$$

Niet dictatoriaal
Stel het meerderheidsstelsel is wel dictatoriaal. Dan is er een $i \in V$ zodanig dat $\forall x \in P(K)^n$ geldt $\phi_M(x) = \tilde{p}$, voor $p = P(K)^x_i$ en $\tilde{p}$ is een zwak geordende versie van p, zoals in Hoofdstuk 3 geïntroduceerd.

Stel zonder verlies van algemeenheid dat kandidaat $a \in K$ bovenaan de lijst van kiezer i staat.

Laat nu $x \in P(K)^n$ het profiel zijn waarin alle kiezers $j \in V \setminus \{i\}$ kandidaat $b \in K, b \neq a$ bovenaan hebben staan.

Voor $|V| \geq 3$ geldt dan $b_{\phi_M(x)} < a_{\phi_M(x)}$. Dit is in strijd met dictatorschap.

Zwak unaniem
Laat $x \in P(K)^n$ een profiel zijn met $a^x_i < b^x_i$, $\forall i \in V$.

Dan geldt $\sum_{i \in V} w^x_{ia} \leq \sum_{i \in V} w^x_{ib}$.

Dus voor $a \in A_\iota \in \tilde{P}(K)$, geldt $b \in A_\kappa \in \tilde{P}(K)$ met $\kappa \geq \iota$.

Hieruit volgt: $a_{\phi(x)} \leq b_{\phi(x)}$.

Niet sterk unaniem
Het meerderheidsstelsel is niet sterk unaniem: zij $a, b \in K$ en $x \in P(K)^n$ zodanig dat $a_i^x < b_i^x$ en $a_i^x > 1$ en $b_i^x > 1$ $\forall i \in V$. Dan geldt $a_{\phi_M(x)} = b_{\phi_M(x)}$.

Beschouw het volgende voorbeeld. Zij $K = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2\}$. Laat $x \in P(K)^n$ met $P(K)_1^x = P(K)_2^x = cab$. In dit geval wint c en is de uitkomst onverschillig ten opzichte van a en b: $a_{\phi_M(x)} = b_{\phi_M(x)}$. Onverschilligheid en strikte preferentie sluiten elkaar uit.

Niet monotoon
Een simpel voorbeeld toont aan dat het meerderheidsstelsel niet monotoon is: Zij $K = \{a, b, c, d\}$, $|V| = 12$ en $|L| = 2$. Laat $x, y \in P(K)^n$ profielen zijn met:

permutatie	aantal kiezers onder x	aantal kiezers onder y
$abcd$	5	5
$badc$	3	3
$cbad$	2	4
$dbac$	2	0

Dit geeft uitslagen: $\phi_M(x) = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}, \emptyset\}$ en $\phi_M(y) = \{\{a\}, \{c\}, \{b\}, \{d\}\}$. Merk op dat voor kandidaat b geldt: $\forall i \in V : b_i^y \geq b_i^x$, maar b eindigt lager in de uitkomst onder y dan onder x.

Niet opgelegd
Laat $a, b \in K$ willekeurig.

Zij $x \in P(K)^n$ een profiel met $\sum_{i \in V} w_{ia}^x > \sum_{i \in V} w_{ib}^x$. Dan $a_{\phi_M(x)} < b_{\phi_M(x)}$.
Zij $x \in P(K)^n$ een profiel met $\sum_{i \in V} w_{ib}^x > \sum_{i \in V} w_{ia}^x$. Dan $b_{\phi_M(x)} < a_{\phi_M(x)}$.

Niet OIA
Merk op dat het meerderheidsstelsel niet dictatoriaal is en wel zwak unaniem. Uit de aangepaste onmogelijkheidsstelling van Arrow volgt daarom dat het niet OIA is. Ten overvloede wordt hier ook nog een voorbeeld gegeven van een profiel dat OIA schendt.

Laat $K = \{a, b, c\}, V = \{1, 2, 3\}$, $l = 3$ en $x, y \in P(K)^2$ met:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	abc	abc
2	abc	bca
3	cba	acb

Dit geeft onder het meerderheidsstelsel de volgende uitkomsten:

$$\phi_M(x) = \{\{a\}, \{c\}, \{b\}\} \text{ en } \phi_M(y) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$$

Merk op dat geldt $\forall i \in V : b_i^x < c_i^x \iff b_i^y < c_i^y$, maar niet $b_{\phi_M(x)} < c_{\phi_M(x)} \iff b_{\phi_M(y)} < c_{\phi_M(y)}$.

Manipuleerbaar
Bekijk het volgende voorbeeld, $K = \{a, b, c\}$, $|V| = 6$, $l = 3$.

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	abc	bca
2	bac	bac
3	cba	cba
4	abc	abc
5	acb	acb
6	abc	abc

Dit geeft $\phi_M(x) = \{\{a\}, \{b, c\}, \emptyset\}$ en $\phi_M(y) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, doordat kiezer 1 kandidaat a achteraan zet.

Niet Condorcet
Het volgende voorbeeld toont aan dat het meerderheidsstelsel niet voldoet.
Bekijk $K = \{a, b, c\}$, $|V| = 7$, $|L| = 3$ en $x \in P(K)^n$:

aantal kiezers	permutatie
3	abc
2	bac
2	cba

De uitkomst is: $\phi_M(x) = \{\{a\}, \{b, c\}, \emptyset\}$, maar door paarsgewijs te vergelijken blijkt dat b Condorcet winnaar is.

Het meerderheidsstelsel is onrepresentatief in de zin dat de sociale keuze alleen afhangt van de eerste keuze en niet van de tweede tot en met k^{e} keuzes. Vooral als l, het aantal te vullen zetels, klein is - in het bijzonder $l = 1$ - is dit problematisch. De misrepresentatie kan dan zeer groot worden: herinner het voorbeeld uit Hoofdstuk 2. Verkiezingen kunnen gemakkelijk door zeer kleine coalities besloten worden en dus kunnen kleine verschuivingen in het electoraat grote gevolgen hebben in de uitkomst.

Droop schreef eind negentiende eeuw het volgende over meerderheidsstelsels: "The method of majority voting cannot claim to have originated in any scientific consideration of the problem how a representative assembly might best be formed." Hij beargumenteert dat dit systeem neigt naar een twee partijenstelsel. "Smaller sections of the constituency, knowing that they cannot elect any representatives of their own selection, will annex themselves to one or the other of the two principal parties" [Droop, 1881].

Het meerderheidsstelsel gaat vaak gepaard met een districtenstelsel. Dat is vatbaar voor 'gerrymandering', het dusdanig indelen van kiesdistricten dat een partij in zo veel mogelijk districten een nauwe meerderheid haalt en daardoor disproportioneel veel zetels krijgt. Dit is bijvoorbeeld bij de verkiezingen voor het Amerikaanse congres een steeds groter probleem. Het staat echter los van de problemen die inherent zijn aan het meerderheidsstelsel: het feit dat deze keuzefunctie niet monotoon is, noch sterk unaniem, OIA, onmanipuleerbaar of Condorcet.

4.2 Enkelvoudige overdraagbare stem

De enkelvoudige overdraagbare stem is een kiessysteem dat vooral in de Angelsaksische delen van de wereld populair is. In Ierland is een variant van dit systeem in gebruik, net als in Australië, Nieuw Zeeland, India en Pakistan, en in het Verenigd Koninkrijk voor sommige lokale verkiezingen.

Bij dit systeem wordt eerst een kiesdrempel bepaald: een minimaal aantal voorkeursstemmen om een zetel te bemachtigen. In meerdere rondes worden de stemmen geteld. Men telt alleen de eerste keuzes: de kandidaat met de meeste voorkeursstemmen krijgt een zetel en wordt uit de lijst gehaald. Als echter geen enkele kandidaat de kiesdrempel haalt, wordt de slechtste kandidaat geëlimineerd uit de ranglijsten. Deze methode is als eerste beschreven door Thomas Hare [Geller, 2004].

Definitie 4.3 (Enkelvoudige overdraagbare stem)**.** $\phi_{EOS} : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ is de keuzefunctie voor de enkelvoudig overdraagbare stem, dat op grond van het volgende algoritme bepaald wordt.

Algoritme Enkelvoudig Overdraagbare stem
Voor $K = \{a, b, c, ...\}$, $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$, $|L| = l \in \{1, .., k\}$, profiel $x \in P(K)^n$.

Laat $\forall i \in V, x \in P(K)^n : w^x_{ia} = \begin{cases} 1 & \text{als } a^x_i = 1. \\ 0 & \text{als } a^x_i > 1. \end{cases}$

Neem $\iota = 1$, $O = \emptyset$, $N = \emptyset$ en $A_\iota = \emptyset$.

1. Bereken de kiesdrempel: $D = \lfloor \frac{n}{l+1} \rfloor + 1$.
2. Bepaal $d = \max\limits_{a \in K \setminus O} \sum_{i \in V} w^x_{ia}$.
3.
   - Als $d \geq D$, dan $A_\iota = \{a \mid a = \operatorname*{argmax}\limits_{b \in K \setminus O} \sum_{i \in V} w^x_{ib}\}$, ga naar stap 5.
   - Als $d < D$, ga naar stap 4.
4. Bepaal een verzameling S met 'slechtste' $a \in K$ met eliminatiemethode E (zie Definities 4.4, 4.5). $N = N \cup S$.
5. Herschik alle lijsten als volgt.
   - $\forall i \in V$ doe voor $1 \leq s \leq k$: als $P(K)^x_i[s] \in N$, dan voor $s \leq \kappa < k$: $P(K)^x_i[\kappa] := P(K)^x_i[\kappa + 1]$.
   - Voor $a \in N$ doe $a \in \{P(K)^x_i[k - |N| + 1], ..., P(K)^x_i[k]\}$.
6. $O = O \cup A_\iota \cup S$;
   Als $K \setminus O = \emptyset$, dan $A_{|\cup^\iota_{i=1} A_i|+1} = O$, stop.
   Als $K \setminus O \neq \emptyset$ en
   - $|\cup^\iota_{i=1} A_i| < l - 1$, dan $\iota = |\cup^\iota_{i=1} A_i| + 1$, ga naar stap 2.
   - $|\cup^\iota_{i=1} A_i| = l - 1$, dan $A_l = \{a \mid a = \operatorname{argmax}_{b \in K \setminus O} \sum_{i \in V} w^x_{ia}\}$ en $A_{|\cup^l_{i=1} A_i|+1} = K \setminus (\cup^l_{i=1} A_i)$, stop.
   - $|\cup^\iota_{i=1} A_i| \geq l$, dan $A_{|\cup^\iota_{i=1} A_i|+1} = K \setminus (\cup^l_{i=1} A_i)$, stop.

In het geval van twee kandidaten met dezelfde score, wordt aan beide kandidaten dezelfde plek in de uitkomst toegewezen. Wanneer er meer kandidaten zijn met gelijke score dan er plekken in L over zijn, moet met een tweede stap bepaald worden welke kandidaten een zetel krijgen.

Beschouw bijvoorbeeld de situatie waarin er evenveel kiezers zijn als kandidaten en geen twee kiezers dezelfde kandidaat bovenaan hun ranglijst hebben staan. Bijvoorbeeld, uit een groep moet een leider gekozen worden en iedereen stemt op zichzelf. Geen van de kandidaten haalt de kiesdrempel. Wanneer gebruik wordt gemaakt van voorkeurseliminatie, worden alle kandidaten tegelijk in de eerste eliminatieronde geëlimineerd. De kandidaten komen gezamenlijk op plek $k + 1 - k = 1$.

Merk op dat de laatste zetel, A_l gevuld wordt door een of meer kandidaten die de meeste stemmen hebben van de overgebleven rivalen, maar niet per se de kiesdrempel halen.

De meest gebruikte berekening van de kiesdrempel is het Droop quotum. Onder andere Ierland, Australië en Malta gebruiken deze drempelwaarde. Het Droop quotum stelt: $D = \lceil \frac{n}{l+1} \rceil$, waarbij n het aantal kiezers is en l het aantal te vergeven zetels. Bij Droop moeten kandidaat meer dan D voorkeursstemmen krijgen. In het bovenstaande algoritme, moeten kiezers minstens D voorkeursstemmen krijgen, maar D wordt gegeven door $D = \lfloor \frac{n}{l+1} \rfloor + 1$. Voor $\frac{n}{l+1}$ geen heel getal is de hier gehanteerde kiesdrempel strenger.

Stel bijvoorbeeld $n = 6, l = 3$. Dan krijgen bij Droop alleen kandidaten met 3 voorkeursstemmen of meer een zetel. In bovenstaand algoritme krijgen kandidaten met 2 voorkeursstemmen een zetel. Op die manier is de kans dat alle kandidaten geëlimineerd worden kleiner.

Welke eliminatiemethode E gebruikt wordt om kiezers uit het circuit te halen heeft grote invloed op de werking en eigenschappen van de enkelvoudig overdraagbare stem. Alle methoden E hebben gemeen dat stemmen boven de kiesdrempel niet verloren gaan, maar naar een tweede keuze gaan. Hier worden twee voorbeelden gegeven van eliminatiemethoden.

Definitie 4.4 (Voorkeursstemeliminatie)**.** In stap 2 van het algoritme bepalen we de verzameling slechtste kandidaten:

$$S = \{\operatorname*{argmin}_{a \in K \setminus O} \sum_{i \in V} w^x_{ia}\} \text{ , voor } \; w^x_{ia} = \begin{cases} 1 & \text{als } a^x_i = 1. \\ 0 & \text{als } a^x_i > 1. \end{cases}$$

Definitie 4.5 (Borda-eliminatie)**.** Bepaal de verzameling slechtste kandidaten:

$$S = \{\operatorname*{argmin}_{a \in K \setminus O} \sum_{i \in V} v^x_{ij}\} \text{ , voor } v^x_{ia} = k + 1 - a^x_i.$$

Wanneer twee kandidaten even 'slecht' zijn, worden zij beide uit de lijst gehaald en onderaan de bijgewerkte ranglijsten van de kiezers geplaatst.

Lemma 4.6 (Eliminatierondes)**.** *Als $|L| = |K|$, dan vinden er geen eliminatierondes plaats.*

Bewijs. Stel $|L| = |K|$ en laat $x \in P(K)^n$ een profiel zijn. De kiesdrempel wordt in dat geval $D = \lfloor \frac{|V|}{|L|+1} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{|V|}{|K|+1} \rfloor + 1$. Om een eliminatieronde te laten plaatsvinden, moet geen enkele kandidaat de kiesdrempel halen. Laat $\lambda = |\{a \in K \mid \sum_{i \in V} w_{ia}^x \geq 1\}|$ het aantal kandidaten zijn die bij minstens één kiezer op de eerste plek staan.
Voor een eliminatieronde plaats kan vinden, moet gelden dat zij geen van allen de kiesdrempel halen en dus hoogstens $D - 1$ voorkeursstemmen krijgen:

$$\begin{aligned} \lambda(D-1) &\geq |V| \\ \lambda(\lfloor \tfrac{|V|}{|K|+1} \rfloor + 1 - 1) &\geq |V| \\ \lambda(\tfrac{|V|}{|K|+1}) &\geq |V| \\ \lambda &\geq |K| + 1. \end{aligned}$$

Er zijn slechts $|K|$ kandidaten, dus dit is niet mogelijk. $\square$

We testen eerst de enkelvoudig overdraagbare stem met voorkeurseliminatie.

Stelling 4.7. *De enkelvoudig overdraagbare stem met voorkeurseliminatie voldoet aan de volgende eerlijkheidscriteria: anoniem, niet dictatoriaal, zwak unaniem en niet opgelegd. Aan de overige criteriavoldoet het niet.*

Hieronder volgt per criterium een bewijs of tegenvoorbeeld.

Anoniem zij $p(i) \in S_n$ een willekeurige permutatie van V.

Gegeven profielen $x, y \in P(K)^n$ met $\forall i \in V : P(K)_i^y = P(K)_{p(i)}^x$ geldt in elke ronde van het algoritme voor alle kandidaten $a \in K$:

$$\sum_{i \in V} w_{ia}^x = \sum_{i \in V} w_{ia}^y$$

dus

$$\phi_{EOS}(x) = \phi_{EOS}(y).$$

Niet dictatoriaal
Stel er is wel een dictator. Dan is er een $i \in V$ zodanig dat $\forall x \in P(K)^n$: $P(K)_i^x = p$ en $\phi(x) = \tilde{p}$, met $\tilde{p}$ een zwak geordende variant van permutatie p.

Bekijk de situatie met $K = \{a, b\}$, $|V| \geq 3$, $l = 1$. Zonder verlies van algemeenheid stellen we $P(K)_1 = ab$. We beschouwen profiel $x \in P(K)^n$ met

$$b_j^x < a_j^x \ \forall j \neq i \in V$$

$$\sum_{i \in V} w_{ia}^x = 1, \ \sum_{i \in V} w_{ib}^x \geq 2 \text{ en } \sum_{i \in V} w_{ib}^x \geq D.$$

$$\text{Dan } b_{\phi_{EOS}(x)} < a_{\phi_{EOS}(x)}.$$

Dit is in tegenspraak met de aanname.

Zwak unaniem
Laat $x \in P(K)^n$ een profiel zijn met $a_i^x < b_i^x \ \forall i \in V$. Dan geldt in elke ronde van het algoritme: $\sum_{i \in V} w_{ia}^x \geq \sum_{i \in V} w_{ib}^x$, dus $a_{\phi_{EOS}(x)} \leq b_{\phi_{EOS}(x)}$.

Niet sterk unaniem
EOS met voorkeurseliminatie is niet sterk unaniem. Bekijk het volgende tegenvoorbeeld.

Stel $K = \{a, b, c, d, e\}$ en $V = \{1, 2, 3\}$ en $x \in P(K)^n$ zodanig dat:

kiezer i	$P(K)_i^x$
1	$abcde$
2	$acbde$
3	$bacde$

Voor $|L| = 3$ geeft dit de uitslag: $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}, \emptyset\}$.
Dus $\forall i \in V$: $d_i^x < e_i^x$, maar $d_{\phi_{EOS}(x)} = e_{\phi_{EOS}(x)}$.

Niet opgelegd
Zij $a, b \in K, a \neq b$ twee willekeurige kandidaten. Bekijk profiel $x \in P(K)^n$ met

$$|\{i \in V \mid a_i^x < b_i^x\}| \geq l \geq |\{i \in V \mid b_i^x < a_i^x\}|,$$

dan

$$a_{\phi_{EOS}(x)} < b_{\phi_{EOS}(x)}$$

en profiel $y \in P(K)^n$ met

$$|\{i \in V \mid b_i^y < a_i^y\}| \geq l \geq |\{i \in V \mid a_i^y < b_i^y\}|,$$

dan

$$b_{\phi_{EOS}(y)} < a_{\phi_{EOS}(y)}.$$

Merk op dat deze profielen bestaan voor alle paren kandidaten. Voor geen enkel paar kandidaten staat de onderlinge volgorde in de uitkomst dus vast, onafhankelijk van het profiel.

Niet monotoon
Bekijk het volgende voorbeeld: $K = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ en $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $l = 7$, dus $D = 1$. Bekijk de volgende profielen $x, y \in P(K)^n$:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$abcdefg$	$afdbceg$
2	$afdbceg$	$afdbceg$
3	$afdbceg$	$afdbceg$
4	$agecbdf$	$agecbdf$
5	$agecbdf$	$agecbdf$

Dit geeft de volgende uitslagen: $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}, \{f, g\}, \emptyset, \{d, e\}, \emptyset, \{b\}, \{c\}\}$ en $\phi_{EOS}(y) : \{\{a\}, \{f\}, \{d\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}, \{g\}\}$.
Merk op:

$$g_i^x \geq g_i^y \text{ en } g_{\phi_{EOS}(x)} = 2 < 7 = g_{\phi_{EOS}(y)}.$$

Niet OIA
Merk op dat de EOS niet dictatoriaal is en wel zwak unaniem. Uit de aangepaste onmogelijkheidsstelling van Arrow volgt daarom dat het niet OIA is. Ten

overvloede wordt hier ook nog een voorbeeld gegeven van een profiel dat OIA schendt.

Beschouw het volgende voorbeeld: $K = \{a, b, c\}$, $|V| = 81$, $|L| = 1$, dus $D = \lfloor \frac{|V|}{|L|+1} \rfloor + 1 = 41$. Laat $x \in P(K)^n$ een profiel zijn met:

permutatie	aantal kiezers onder x	aantal kiezers onder y
abc	20	22
acb	5	5
bac	9	9
bca	17	17
cab	14	12
cba	16	16

In het geval van profiel x scoren de kandidaten als volgt: a haalt 25 stemmen, b 26 en c 30. Geen enkele kandidaat haalt de kiesdrempel en kandidaat a valt als eerste af. Dan scoren b en c respectievelijk 46 en 35. Dus: $\phi_{EOS}(x) = \{b\}\{a, c\}$. In het geval van profiel y scoren de kandidaten als volgt: a haalt 27 stemmen, b 26 en c 28. Geen enkele kandidaat haalt de kiesdrempel en kandidaat b valt als eerste af. Dan scoren a en c respectievelijk 36 en 45. Dus: $\phi_{EOS}(y) = \{\{c\}\{a, b\}\}$. Dan $a_i^x < b_i^x \forall i \in V$, maar $a_{\phi_{EOS}(x)} < b_{\phi_{EOS}(x)}$ en $b_{\phi_{EOS}(y)} < a_{\phi_{EOS}(y)}$

Manipuleerbaar

Bekijk $K = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ en $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $l = 7$, dus $D = 1$. Bekijk de volgende profielen $x, y \in P(K)^n$:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$abcdefg$	$afdbceg$
2	$afdbceg$	$afdbceg$
3	$afdbceg$	$afdbceg$
4	$agecbdf$	$agecbdf$
5	$agecbdf$	$agecbdf$

Dit geeft $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}, \{f, g\}, \emptyset, \{d, e\}, \emptyset, \{b\}, \{c\}\}$ en $\phi_{EOS}(y) = \{\{a\}, \{f\}, \{d\}, \{b\}, \{c\}, \{e\}, \{g\}\}$.

Merk op $|\{(a, b) \in K^2 \mid a_1^x < b_1^x \text{ én } a_{\phi_{EOS}(x)} < b_{\phi_{EOS}(x)}\}| = 14$ en $|\{(a, b) \in K^2 \mid a_1^y < b_1^y \text{ én } a_{\phi_{EOS}(y)} < b_{\phi_{EOS}(y)}\}| = 30$.

Door zijn stem niet oprecht uit te brengen, maar met twee andere kiezers mee te stemmen, krijgt kiezer 1 meer zijn zin dan wanneer hij oprecht zou stemmen.

Opmerking 4.8. Dit tegenvoorbeeld werkt ongeacht de soort eliminatie (voorkeur of Borda), omdat er geen eliminatie aan te pas komt.

Niet-Condorcet

Tegenvoorbeeld: Zij $K = \{a, b\}$, $|V| = 8$ en $|L| = 1$. In dat geval is $D = \lfloor \frac{8}{1+1} \rfloor + 1 = 5$. Bekijk profiel $x \in P(K)^n$ met:

aantal kiezers	permutatie
3	abc
2	bac
3	cba

In dit geval valt b als eerste af, daarna c, dus: $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\},\{b,c\},\emptyset\}$. Paarsgewijs vergelijken geeft aan dat b de Condorcetwinnaar is.

Stelling 4.9. *De enkelvoudig overdraagbare stem met Borda-eliminatie voldoet aan de volgende eerlijkheidscriteria: anoniem, niet dictatoriaal, zwak unaniem en niet opgelegd. Aan de overige criteriavoldoet het niet.*

Anoniem Laat $p(i) \in S_n$ een willekeurige permutatie van V zijn.
Gegeven profielen $x, y \in P(K)^n$ met $\forall i \in V : P(K)_i^y = P(K)_{p(i)}^x$, geldt in elke ronde van het algoritme voor alle kandidaten $a \in K$:

$$\sum_{i \in V} w_{ia}^x = \sum_{i \in V} w_{ia}^y \text{ en } \sum_{i \in V} v_{ia}^x = \sum_{i \in V} v_{ia}^y, \text{ dus } \phi_{EOS}(x) = \phi_{EOS}(y).$$

Niet dictatoriaal
Dit bewijs is analoog met EOS met voorkeurseliminatie.

Zwak unaniem
Dit bewijs is analoog met EOS met voorkeurseliminatie.

Niet sterk unaniem
Bekijk het volgende tegenvoorbeeld: $K = \{a,b,c\}$, $|V| = 5$, $|L| = 1$ en $x \in P(K)^n$ met $i \in \{1,2,3\} : a_i^x < b_i^x < c_i^x$, $j \in \{4,5\} : b_j^x < c_j^x < a_j^x$.
In dit geval geldt $\forall i \in V : b_i^x < c_i^x$, maar is de uitkomst: $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}\{b,c\}\emptyset\}$.

Niet opgelegd
Dit bewijs is analoog met EOS met voorkeurseliminatie.

Niet monotoon
Zij $K = \{a,b,c,d\}$, $|V| = 7$, $L = 2$, dus $D = \lfloor \frac{7}{2+1} \rfloor + 1 = 3$. Laat $x, y \in P(K)^n$ profielen met:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$abdc$	$abdc$
2	$bcda$	$bcda$
3	$bdac$	$bdca$
4	$cdab$	$cdab$
5	$cdab$	$cdab$
6	$dacb$	$dcab$
7	$dcab$	$dcab$

Onder x haalt geen enkele kandidaat de kiesdrempel en zijn de Bordascores als volgt: $a : 16$, $b : 15$, $c : 18$ en $d : 21$. Kandidaat b valt dus af. Daarna krijgen c en d ieder drie voorkeursstemmen, precies genoeg voor de kiesdrempel. De uitslag is: $\phi_{EOS}(x) = \{\{c,d\},\emptyset,\{a\},\{b\}\}$.

Onder y haalt ook geen enkele kandidaat de kiesdrempel. De Bordascores zijn als volgt: $a : 14$, $b : 15$, $c : 20$ en $d : 21$. Kandidaat a valt dus af. Daarna haalt kandiaat b met drie voorkeursstemmen als enige de kiesdrempel. In de volgende stap haalt d de meeste stemmen, namelijk 4. De uitslag is: $\phi_{EOs}(y) = \{\{b\}, \{d\}, \{c\}, \{a\}\}$.

Merk op dat geldt: $\forall i \in V : c_i^y \leq c_i^x$, maar $c_{\phi_{EOS}(x)} < c_{\phi_{EOS}(y)}$.

Niet OIA
De EOS is niet dictatoriaal en wel zwak unaniem, met Arrow volgt daarom dat het niet OIA is. Hier wordt ook een voorbeeld gegeven van een profiel dat OIA schendt.

Bekijk: $K = \{a, b, c\}$, $|V| = 7$, $|L| = 3$, $D = \lfloor \frac{7}{3+1} \rfloor + 1 = 2$. Laat $x, y \in P(K)^n$ profielen zijn met:

permutatie	aantal kiezers onder x	aantal kiezers onder y
abc	3	3
cba	2	4
bac	2	0

Hirbij zijn er twee kiezers onder x voorkeur bac hadden en onder y cba. De andere kiezers veranderen hun voorkeur niet. Merk op dat geldt: $\forall i \in V a_i^x < b_i^x \iff a_i^y < b_i^y$. De uitslag is: $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ en $\phi_{EOS}(y) = \{\{b\}, \{a\}, \{c\}\}$, dus niet $a_{\phi_{EOS}(x)} < b_{\phi_{EOS}(x)} \iff a_{\phi_{EOS}(y)} < b_{\phi_{EOS}(y)}$.

Manipuleerbaar
Zie het voorbeeld in de vorige paragraaf.

Niet-Condorcet
Tegenvoorbeeld: Zij $K = \{a, b, c, d, e\}$, $|V| = 20$ en $|L| = 2$. In dat geval is: $D = \lfloor \frac{20}{2+1} \rfloor + 1 = 7$. Bekijk profiel $x \in P(K)^n$ met:

aantal kiezers	permutatie
4	$abcde$
3	$abdce$
3	$bcdea$
4	$cbdea$
3	$dbcea$
3	$ebcda$

In dit geval krijgt kandidaat a zeven voorkeursstemmen, precies genoeg voor een zetel. In de tweede iteratie krijgt b een plek toegewezen. Dan is L vol. De uitslag wordt $\phi_{EOS}(x) = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \emptyset, \emptyset\}$.
Paarsgewijs vergelijken wijst uit dat b de Condorcetwinnaar is.

Het Ierse kiessysteem is ingesteld in de jaren twintig van de vorige eeuw, met de bedoeling om de protestantse minderheid in het land te beschermen. Het idee heerste dus dat dit kiessysteem beter in staat was om de bevolking correct te representeren en de voorkeur van minderheden niet verloren te laten gaan [Farell, 2016].

Geller merkt op dat er ook nadelen zijn aan de enkelvoudige overdraagbare stem. Zo is het systeem, net als het meerderheidsstelsel, gevoelig voor kleine veranderingen, ook wel het 'butterfly effect' genoemd. Hiermee doelt hij op het feit dat EOS niet monotoon is en niet onafhankelijk van irrelevante alternatieven. Veranderingen in de ordening van een klein deel van de kandidaten bij een klein deel van de kiezers kan grote gevolgen hebben.[1]

Wanneer het Bordacriterium voor gebruikt wordt, blijft het enkelvoudige overdraagbare kiessysteem non-monotoon, maar is het volgens Geller lastiger om met kleine veranderingen in de ranglijsten grote veranderingen in de uitkomst teweeg te brengen [Geller, 2005]. Op gevoeligheid voor fouten gaan we in het volgende hoofdstuk verder in.

4.3 Gewogen Beperkte Lijst

Een systeem met rangschikking voelt 'eerlijker' dan een systeem waarbij alleen de eerste keuze meetelt. Toch voldoet EOS niet aan veel van de criteria voor een eerlijk kiessysteem. Bovendien is het geen pragmatisch kiessysteem. Wie in het stemhokje staat bij de Nederlandse Tweede Kamerverkiezingen heeft niet de tijd om alle honderden kandidaten te rangschikken.

Het kan daarom nuttig zijn om een systeem te construeren waarbij een ranglijst met m plaatsen gevuld mag worden, die elk een Bordaweging meekrijgen. In deze sectie wordt dit nieuwe systeem geïntroduceerd.

Een vorm van de beperkte ranglijst is sinds het einde van de dictatuur van Franco in gebruik bij de senaatsverkiezingen in Spanje. In enkele Amerikaanse staten wordt het gebruikt om lokale functionarissen te kiezen.

De senaten van Mexico en Argentinië worden gekozen met een gewogen beperkte stem. Iedere kiezer heeft twee stemmen, waarvan de eerste twee keer zo zwaar weegt als de eerste.

In feite is dit het huidige systeem in Nederland: er is gekozen voor $m = 1$. In het geval $m = 1$ is de gewogen beperkte lijst gelijk aan het meerderheidsstelsel. In deze sectie wordt dit systeem bekeken voor het algemene geval $1 < m \leq k$.

Definitie 4.10 (Gewogen Beperkte Lijst)**.** $\phi_G : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$ is de keuzefunctie van de gewogen beperkte lijst, dat op grond van het volgende algoritme bepaald wordt.

Algoritme Gewogen Beperkte Lijst
Voor $K = \{a, b, c, ...k\}$, $V = \{1, 2, ..., n\}$, $m, l > 0$, profiel $x \in P(K)^n$, $\phi_G : P(K)^n \mapsto \tilde{P}(K)$.

$$v^x_{ia} = \begin{cases} m + 1 - a^x_i & \text{als } a^x_i \leq m. \\ 0 & \text{als } a^x_i > m. \end{cases}$$

Laat $O = \emptyset$, $\iota = 1$ en $A_i = \emptyset$, $\forall i \in \{1, ..., k\}$.

1. $A_\iota = \{a \mid a = \text{argmax}_{b \in K \setminus O} \sum_{i \in V} v^x_{ib}\}$.
2. $O = O \cup A_\iota$.
3.
   - Als $|\cup^\iota_{i=1} A_i| < l$, verhoog $\iota = |\cup^\iota_{i=1} A_i| + 1$ en ga naar stap 2.
   - Als $|\cup^\iota_{i=1} A_i| \geq l$, $A_{\iota + |A_\iota|} = \{a \in K \setminus O\}$, stop.

[1] Geller, table 6, 278.

Wanneer twee kandidaten hetzelfde gewicht hebben, dan krijgen zij dezelfde plaats toegewezen en wordt L met het aantal dubbele plaatsen verlaagd. Als er meer kandidaten met dezelfde hoogste score zijn dan er nog plekken in L zijn, moet een tweede stap in werking treden om te bepalen welke kandidaat de laatste zetel krijgt. Die tweede stap wordt hier niet verder besproken.

Stelling 4.11. *De beperkte ongewogen lijst voldoet aan de volgende criteria: anoniem, niet dictatoriaal, zwak unaniem en niet opgelegd. Aan de overige criteriavoldoet het niet.*

Hieronder volgt per criterium een bewijs of tegenvoorbeeld.

Anoniem
Laat $p(i) \in S_n$ een willekeurige permutatie van de kiezersverzameling V zijn. Gegeven profielen $x, y \in P(K)^n$ met $\forall i \in V$: $P(K)_i^y = P(K)_{p(i)}^x$ geldt voor alle kandidaten $a \in K$: $\sum_{i \in V} v_{ia}^x = \sum_{i \in V} v_{ia}^y$, dus $\phi_G(x) = \phi_G(y)$.

Niet-dictatoriaal
Stel, er is wel een dictatoriale kiezer $i \in V$.

Bekijk profiel x zó dat $S = \{i\}$ en $V \setminus S$ een maximaal conflict vormen en $P(K)_i^x = p$, $P(K)_{j \neq i}^x = q$.

Voor $|V| \geq 3$, geldt dan $\tilde{P}(K) = \tilde{q} \neq \tilde{p}$.

Zwak unaniem
Laat $x \in P(K)^n$ een profiel zijn met $a_i^x < b_i^x \; \forall i \in V$.

Dan geldt $\sum_{i \in V} v_{ia}^x \geq \sum_{i \in V} v_{ib}^x$, dus $a_{\phi_G(x)} \leq b_{\phi_G(x)}$

Niet sterk unaniem
Bekijk het volgende voorbeeld, voor $m = 3, l = 5, k = 5, n = 3$ en profiel $x \in P(K)^3$ met:

kiezer i	$P(K)_i^x$
1	$abcde$
2	$acbde$
3	$bacde$

Dit geeft de uitslag: $\phi_G(x) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}, \emptyset\}$, dus $d_{\phi_G(x)} = e_{\phi_G(x)}$, terwijl $d_i^x < e_i^x text, \forall i \in V$.

Niet opgelegd
Laat $a, b \in K$ willekeurig. Bekijk profiel $x \in P(K)^n$ met $\forall i \in V \; a_i^x < b_i^x \leq m$. Dit geeft als uitkomst $a_{\phi(x)} < b_{\phi(x)}$. Bekijk nu profiel $y \in P(K)^n$ met $b_i^y < a_i^y \leq m \; \forall i \in V$: dit heeft als uitkomst $b_{\phi(y)} < a_{\phi(y)}$.

Niet monotoon
Bekijk de volgende twee profielen $x, y \in P(K)^3$ voor $K = \{a, b, c, d, e\}$ en $V = \{1, 2, 3\}$, $m = 3$, $l = 5$.

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$abcde$	$abcde$
2	$adcbe$	$abcde$
3	$aecbd$	$acbde$

Dit geeft de uitslagen: $\phi_G(x) : \{\{a\}, \{c\}, \{b, d, e\}, \emptyset, \emptyset\}$ en $\phi(y) : \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}, \emptyset\}$. Voor kandidaat c geldt: $c_i^y \leq c_i^x \forall i \in V$, maar $c_{\phi_G(y)} > c_{\phi_G(x)}$.

Niet OIA
Merk op dat de GBL niet dictatoriaal is en wel zwak unaniem. Uit de aangepaste onmogelijkheidsstelling van Arrow volgt daarom dat het niet OIA is. Ten overvloede wordt hier ook nog een voorbeeld gegeven van een profiel dat OIA schendt.

Bekijk het volgende voorbeeld: twee profielen $x, y \in P(K)^n$, met $K = \{a, b, c, d\}$, $V = \{1, 2, 3\}$, $m = l = 4$:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$adbc$	$adbc$
2	$dabc$	$adbc$
3	$adcb$	$cdab$

Dit geeft uitslagen: $\phi_G(x) = \{\{a\}, \{d\}, \{b\}, \{c\}\}$ en $\phi_G(y) : \{\{a\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}\}$. Merk op: er geldt $b_i^x < c_i^x \ \forall i \in V$ dan en slechts dan als $b_i^y < c_i^y$, maar $b_{\phi_G(x)} < c_{\phi_G(x)}$ en $b_{\phi_G(y)} > c_{\phi_G(y)}$.

Manipuleerbaar
Bekijk het volgende voorbeeld: $K = \{a, b, c, d, e, f\}$, $V = \{1, 2, 3\}$ en $x, y \in P(K)^3$ met:

kiezer i	$P(K)_i^x$	$P(K)_i^y$
1	$abcdef$	$bafedc$
2	$cabdef$	$cabdef$
3	$acbdef$	$acbdef$

Dit geeft de volgende scores:

	a	b	c	d	e	f
x	17	13	15	9	6	3
y	16	14	12	8	7	5

Dus $\phi(x) = \{\{a\}\{c\}\{b\}\{d\}\{e\}\{f\}\}$ en $\phi(y) = \{\{a\}\{b\}\{c\}\{d\}\{e\}\{f\}\} = P(K)_i^x$.

Niet Condorcet
Bekijk het volgende voorbeeld: $K = \{a, b, c\}$, $|V| = 10$, $m = 1, l = 3$ en profiel $x \in P(K)^10$ als volgt:

aantal kiezers	permutatie
4	abc
2	bac
3	cba

Dit geeft de uitslag: $\phi(x) = \{\{a\}, \{c\}, \{b\}\}$, maar paarsgewijs vergelijken toont aan dat b de Condorcetwinnaar is.

Dit kiessysteem is relatief onbekend en er is dan ook minder over geschreven dan over het meerderheidsstelsel of de enkelvoudig overdraagbare stem. Het is minder gevoelig voor kleine veranderingen in het electoraat dan het meerderheidsstelsel, zo zal in het volgende blijken. Ook is het een gunstiger systeem voor kleine of nieuwe partijen. Deze partijen krijgen namelijk relatief vaker een tweede of derde stem dan grote partijen. Dit was bij de Nederlandse Tweede Kamerverkiezingen van 2017 bijvoorbeeld het geval voor de kleine Partij voor de Dieren, zie ook Hoofdstuk 6.

Conclusie

Alhoewel de drie kiessystemen die in dit hoofdstuk bekeken zijn andere uitslagen kunnen geven bij dezelfde profielen (voor een voorbeeld, zie hoofdstuk 6), blijkt dat zij op de in hoofdstuk 2 geformuleerde eerlijkheidscriteria alle drie gelijk scoren.

	meerderheid	EOS - voorkeur	EOS - borda	GBL
anoniem	+	+	+	+
niet-dictatoriaal	+	+	+	+
zwak unaniem	+	+	+	+
sterk unaniem	-	-	-	-
niet opgelegd	+	+	+	+
monotoon	-	-	-	-
OIA	-	-	-	-
niet manipuleerbaar	-	-	-	-
Condorcet	-	-	-	-

Merk in het bovenstaande overzicht op dat de onmogelijkheidsstelling van Arrow in zijn oorspronkelijke vorm niet relevant was geweest voor deze kiessystemen: zij voldoen alle niet aan twee van de drie eisen uit de oorspronkelijke stelling.

De aangepaste onmogelijkheidsstelling daarentegen stelde ons in staat om te concluderen dat deze kiessystemen niet OIA waren, zonder het criterium verder te beschouwen. Ze waren immers al zwak unaniem en niet dictatoriaal.

Met deze kwalitatieve analyse zijn we helaas weinig opgeschoten waar het de hoofdvraag van deze scriptie betreft. Op basis van bovenstaand overzicht valt niet te concluderen dat een van de kiessystemen beter is dan de andere. Dit is wel een gunstige conclusie voor de tientallen landen in de wereld die het meerderheidsstelsel of de enkelvoudig overdraagbare stem hanteren bij hun nationale verkiezingen: op basis hiervan kunnen we niet concluderen dat een land onhandig heeft gekozen.

Toch vraagt dit om verdere analyse. In dit hoofdstuk is al kort de gevoeligheid van een kiessysteem voor kleine veranderingen ter sprake gekomen. In het volgende hoofdstuk zal gekeken worden naar de kansen op schending van een criterium. Op basis daarvan is wel onderscheid te maken tussen de drie kiessystemen.

5 Schendingskansen

In het vorige hoofdstuk zijn drie kiessystemen getest op de belangrijkste wiskundige eisen voor een eerlijk kiessysteem. Elk van de drie, wezenlijk van elkaar verschillende, systemen voldeed aan dezelfde criteria.

Aan een aantal criteria voldeden de kiessystemen stuk voor stuk niet, namelijk sterke unanimiteit, monotonie, OIA, manipuleerbaarheid en het Condorcet criterium. Om aan te tonen dat een kiessysteem niet voldoet, is het genoeg om een simpel tegenvoorbeeld te geven, zoals dan ook in veel gevallen is gedaan in het vorige hoofdstuk. Het kan echter interessant zijn om uit te zoeken welk deel van de mogelijke profielen in de keuzeruimte een tegenvoorbeeld vormt voor een criterium. Met andere woorden: hoe groot is de kans dat er zó gestemd wordt dat een criterium geschonden wordt?

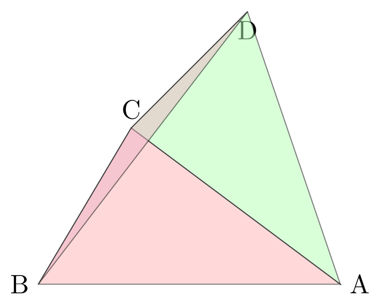
Daarnaast kunnen we ons afvragen hoe deze kans afhangt van het aantal kiezers, kandidaten, zetels en, in het geval van de gewogen beperkte lijst, de lengte van de lijst. In welk deel van alle mogelijke keuzeruimtes is er geen sprake van sterke unanimiteit, monotonie, onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven, manipuleerbaarheid en Condorcetwinnaars, bij de verschillende kiessystemen?

Dit geeft ons een aantal ingewikkelde telproblemen. Om de probleemstelling en het tellen inzichtelijker te maken, vertalen we het probleem naar de meer visuele vorm van een reguliere $k-1$-simplex.

Definitie 5.1 (reguliere $k-1$-simplex)**.** Een reguliere $k-1$-simplex is een regelmatige k-hoek in $\mathbb{R}^k$ waarbij de afstand tussen elk paar knooppunten gelijk is.

Opmerking 5.2 (Hoekpunten)**.** De reguliere $k-1$-simplex heeft hoekpunten $(1,0,...,0)$, ..., $(0,...0,1,0,...,0)$, ... $(0,....,0,1)$. Merk op dat dit k hoekpunten zijn in $\mathbb{R}^k$.

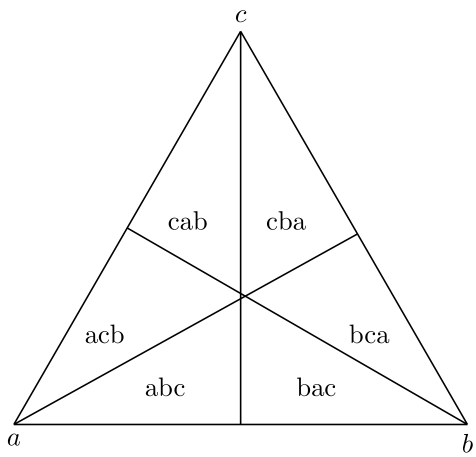
Voorbeeld 5.3. In het vlak is dit een regelmatige driehoek, in $\mathbb{R}^3$ is dit een tetraëder.



Elke reguliere k-simplex is te maken uit de reguliere $k-1$-simplex door een nieuw hoekpunt met elk ander hoekpunt te verbinden met zijdes van gelijke lengte.

Deel de 2-simplex in gelijke helften met de middelloodlijnen van alle ribben. In het algemeen kan een $k-1$-simplex in gelijke helften worden gesplitst met 'loodlijnen' in $\mathbb{R}^{k-1}$. Dit kan op $k-1$ manieren en creëert $k!$ gebieden op de zijden van de $k-1$-simplex.

Opmerking 5.4. Laat elk hoekpunt een kandidaat representeren, dan representeren de hierboven verkregen $k!$ vlakken alle mogelijke permutaties van k kandidaten. Hoe korter de afstand van een vlak tot een hoekpunt, hoe hoger dat hoekpunt in de bij dat vlak horende permutatie staat. Kiezers worden verdeeld over deze vlakken, afhankelijk van hun permutaties $P(K)_i$. Zie hieronder het geval $k = 3$.



Figuur 1: Simplex-representatie voor het geval $K = \{a, b, c\}$

Opmerking 5.5. Merk op dat de tweedeling middendoor de ribbe (a, b) de driehoek opdeelt in een helft met alle permutaties $P(K)$ met $a < b$ en een helft met alle $P(K)$ met $b < a$. De gebieden van permutaties met a op de eerste plek grenzen direct aan hoekpunt a en de gebieden van permutaties met a op de tweede plek grenzen weer direct aan die gebieden.

Deze manier om naar permutatieruimtes te kijken werd geïntroduceerd door Donald Saari in zijn artikel uit 2002, om kiessystemen te kunnen vergelijken [Saari, 2002]. Hij doet dit alleen voor de gevallen $k = 3$, maar, zoals hierboven uitgelegd, het is uit te breiden naar hogere dimensies.

Merk op dat hier aangenomen wordt dat elk profiel even waarschijnlijk is. In werkelijkheid is dit niet het geval. Twee kandidaten die het over alles oneens zijn, zullen waarschijnlijk niet dicht bij elkaar staan in de lijsten van kiezers.

5.1 Meerderheidsstelsel

Het meerderheidsstelsel voldoet niet aan de eisen sterk unaniem, monotoon, onafhankelijk van irrelevante alternatieven en Condorcet, bleek in het vorige hoofdstuk. Hier wordt daarom gekeken welk deel van de profielen de criteria sterk unaniem en monotoon geschonden worden. In de eerste plaats wordt daarbij naar het geval $k \leq 4$ gekeken.

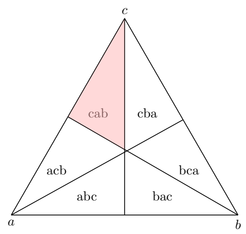
Sterk unaniem

Het meerderheidsstelsel is niet sterk unaniem, wanneer geldt:

- $\exists\ a, b \in K,\ x \in P(K)^n$ met $\forall i \in V : 1 < a_i^x < b_i^x$. Dan geldt namelijk $a_{\phi(x)} = b_{\phi(x)}$.
- $\forall i \in V : a_i^x < b_i^x$, maar het algoritme loopt af (L is vol) voor $a = \text{argmax}_{a \in K \setminus O}\, w_{ia}^x$ aan bod komt.

We bekijken hier alleen het eerste geval. Dat is als volgt te vertalen naar de reguliere n-simplex. Er zijn minstens twee hoeken leeg en voor een splitsing van de simplex in gelijke helften, midden door de ribbe tussen twee lege hoekpunten, bevinden alle kiezers zich in dezelfde helft.

Het voorbeeld uit hoofdstuk 3 van een profiel dat sterke unanimiteit schendt, ziet er als volgt uit: $K = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2\}$, $l = 3$, $x \in P(K)_1^x = P(K)_2^x = cab$. Beide kiezers bevinden zich in het vak linksboven. De hoeken a en b zijn leeg, en alle kiezers bevinden zich in de linkerhelft. De uitslag is $\phi(x) = \{\{c\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.



Er moeten steeds vier dingen bepaald worden: op hoeveel manieren er twee of meer lege hoekpunten te kiezen zijn (dat wil zeggen dat er twee of meer kandidaten nooit op de eerste plaats staan), op hoeveel manieren de simplex in twee helften worden gedeeld, met welke kans zitten alle kiezers in dezelfde helft en wat wordt er dubbel geteld.

Voor er een bovengrens wordt gegeven, worden eerst twee gevallen uitgewerkt. We bekijken $k = 3$, $n = 2$ en $k = 4$, $n = 2$.

Voorbeeld 5.6 ($|K| = 3$, $|V| = 2$, $l = 1, 2, 3$)**.** Er zijn $\binom{3}{2}$ manieren om twee lege hoekpunten te kiezen en gegeven twee lege hoekpunten is er één manier om de driehoek in tweeën te splitsen. Alle kiezers bevinden zich in één van beide helften. Symmetrie geeft hier een factor 2. Met kans $\frac{1}{k!} = \frac{1}{6}$ bevindt elke kiezer zich in de juiste helft en niet in een leeg hoekpunt. Dit geeft:

$$P(\text{mis}) = 2 \cdot \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

Voorbeeld 5.7 ($|K| = 4$, $|V| = n$, $l = 1, 2, 3, 4$)**.** Er zijn $\binom{4}{2}$ manieren om twee lege hoekpunten te kiezen. Gegeven twee lege hoekpunten is er één manier om de simplex in tweeën te splitsen. Symmetrie levert hier een factor 2 op. Gegeven twee lege hoekpunten en een spitsing zijn er zes vakken (of permutaties) over, uit het totaal van 24. Alle kiezers bevinden zich met kans $\frac{6}{24}$ in de juiste helft en niet in een leeg hoekpunt.

Dit zou geven $P(\text{mis}) = 2\binom{4}{2}(\frac{1}{4})^n$. Bijvoorbeeld voor $n = 2$: $P(\text{mis}) = \frac{18}{24}$. Hierbij worden echter een aantal permutaties dubbel geteld:

- De gevallen waarbij alle kiezers zich in hetzelfde hoekpunt bevinden en dezelfde volgorde aanhouden voor de kandidaten die niet op de eerste plek staan worden nu 3 keer geteld. Dit moet dus weer twee keer worden afgetrokken. Alle kiezers bevinden zich met kans $\frac{1}{24}$ in het overgebleven vlak.
- Daarnaast is het mogelijk dat twee uit drie kandidaten die niet op de eerste plek staan, in dezelfde volgorde staan. Die profielen worden twee keer geteld. Er zijn vier manieren om drie lege hoekpunten te kiezen en vervolgens drie manieren om een kandidaat te kiezen voor de tweede en twee voor de vierde plek. De kiezers bevinden zich in dit geval niet beide in hetzelfde van de twee overgebleven vlakken: dit geeft $2^n - 2$ mogelijke verdelingen van de kiezers over die vakken.

$$\begin{aligned} P(\text{mis}) &= 2\binom{4}{2}\left(\frac{6}{24}\right)^n - 2(4\cdot 3\cdot 2\left(\frac{1}{24}\right)^n) - 4\cdot 3\cdot 2(2^n-2)(\frac{1}{24})^n \\ &= 12\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2\left(\frac{1}{24}\right)^{n-1} - (2^n-2)(\frac{1}{24})^{n-1} \end{aligned}$$

Voor $n = 2$ wordt dit: $P(\text{mis}) = \frac{18}{24} - \frac{2}{24} - \frac{2}{24} = \frac{14}{24}$.

Algemene formule: een alternerende som

Aan de hand van de simplex-representatie worden nu een onder- en bovengrens gegeven voor kans op schending, gegeven k kandidaten, n kiezers en $l = k$ zetels.

We tellen $\frac{\frac{1}{2}(k-m)(k-1)!}{k!} = \frac{k-m}{2k}$ vlakken in de simplex die zowel in de juiste helft als niet in een van de m lege hoeken zitten.

Merk bovendien op dat het aantal keren dat gevallen met $m > 2$ lege hoekpunten dubbel geteld worden als volgt naar boven begrensd is. Gegeven een keuze van i lege hoekpunten, worden de gevallen met $i < m \leq k-1$ lege hoekpunten hoogstens $\binom{m}{i}$ keer geteld. Dit is namelijk het aantal keer dat het geval 'alle kiezers hebben precies dezelfde volgorde voor de overige $m-i$ kandidaten' wordt geteld.

Voor k kandidaten en n kiezers zijn er $(k-3)(k-1)!$ gevallen waarin minstens de drie hoeken leeg zijn. Drie kandidaten staan namelijk niet op de eerste plek. Daarna is de volgorde weer vrij. Delen door $k!$ geeft: $\frac{(k-3)(k-1)!}{k!} = \frac{k-3}{k}$.

Bij elke iteratie wordt het aantal dubbel getelde gevallen van m lege hoekpunten afgetrokken, waarmee ook het aantal gevallen dat $m+1, m+2, ...k-1$ lege hoekpunten worden geteld, verandert. De algemene formule voor de schendingskans is door dit principe van in- en exclusie een alternerende som. Elke nieuwe factor heeft een absolute waarde die kleiner is dan de absolute waarde van de voorgaande factor, omdat er naar een steeds groter aantal lege hoekpunten wordt gekeken en dus steeds minder mogelijke permutaties overblijven.

Een ondergrens voor deze alternerende som is $2\binom{k}{2}\left(\frac{k-2}{2k}\right)^n - 3\left(\frac{(k-3)}{k}\right)^n$.

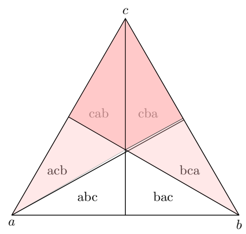
Een bovengrens voor deze alternerende som is $2\binom{k}{2}\left(\frac{k-2}{2k}\right)^n$.

In de hierboven besproken voorbeelden geeft dit de volgende grenzen:

- $\mathbb{P}(\text{mis} \mid k = 3, n = 2) = \frac{1}{6}$, met ondergrens $2\binom{3}{2}(\frac{3-2}{2\cdot 3})^2 - 3(\frac{3-3}{3})^2 = \frac{1}{6}$ en bovengrens $2\binom{3}{2}(\frac{3-2}{2\cdot 3})^2 = \frac{1}{6}$.
- $\mathbb{P}(\text{mis} \mid k = 4, n = 2) = \frac{28}{48}$, met ondergrens $2\binom{4}{2}(\frac{4-2}{2\cdot 4})^2 - 3(\frac{4-3}{4})^2 = \frac{27}{48}$ en bovengrens $2\binom{4}{2}(\frac{4-2}{2\cdot 4})^2 = \frac{36}{48}$.

Monotoon

De $k-1$-simplex vanuit elk hoekpunt in k stukken op te delen: de vlakken in een hoekpunt, de vlakken die daar direct aan grenzen, etc, tot het achtervlak is bereikt, zie de onderstaande figuur.



Merk op dat kandidaat c in de donker gekleurde gebieden op de eerste plek staat, in de lichtere gebieden op tweede plek en in de witte gebieden op de derde plek.

Twee profielen $x, y \in P(K)^n$ vormen een tegenvoorbeeld tegen monotonie als geldt $\exists a \in K\ \forall i \in V : a_i^x \geq a_i^y$ en $a_{\phi(x)} < a_{\phi(y)}$. Dit kun je als volgt vertalen naar de simplex-representatie:

- Kiezers mogen van x naar y niet naar lichter gearceerde gebieden verplaatsen.
- Er zijn onder y meer hoekpunten voller dan het donkere hoekpunt en meer dan onder x.

Er moeten steeds de volgende dingen bepaald worden: op hoeveel manieren zijn een of meer donkere hoekpunten te kiezen, bij hoeveel uit de $(k!)^{2n}$ mogelijke paren profielen $(x, y) \in P(K)^{2n}$ 'gaat het fout', hoe vaak wordt er dubbel geteld en hoe wordt dit beïnvloed door het zetelaantal?

Voorbeeld 5.8 (Voor $|K| = 3$, $n = 2$)**.** Er zijn $(3!)^2 = 36$ mogelijke profielen, waarbij de volgorde van kiezers wel uitmaakt.

De profielen $x \in P(K)^2$ zijn in twee groepen in te delen: de profielen waarbij beide kiezers dezelfde kandidaat op de eerste plek hebben staan en de profielen waarbij ze allebei een andere kandidaat het beste vinden.

In het eerste geval komt die eerste kandidaat op de eerste plaats in de uitkomst en komen de andere twee op een gedeelde tweede plaats. De kandidaat op de eerste plaats kan niet lager uitkomen zonder hem van de eerste plaats in kiezerslijsten te halen.

De twee andere kandidaten kunnen wel afzakken van de tweede naar de derde plaats. Dit is precies dan het geval, als onder profiel y twee kandidaten op een gedeelde eerste plaats komen en de derde kandidaat op de derde plaats.

Stel, zonder verlies van algemeenheid, $P(K)^x_1 = abc$. Dan zijn de volgende paren profielen een schending van monotonie. Merk op dat de permutaties verticaal staan.

x	$\phi(x)$	y								$\phi(y)$	y		$\phi(y)$
aa	a	ab	ba	ab	ba	ba	ab	ab	ba	ab	ac	ca	ac
bb	bc	ba	ab	bc	cb	ac	ca	cc	cc	$\emptyset$	bb	bb	$\emptyset$
cc	$\emptyset$	cc	cc	ca	ac	cb	bc	ba	ab	c	ca	ac	b

x	$\phi(x)$	y				$\phi(y)$	y				$\phi(y)$
aa	a	ab	ba	ab	ba	ab	ac	ca	ac	ca	ac
bc	bc	bc	ac	cc	cc	$\emptyset$	ba	bc	bb	bb	$\emptyset$
cb	$\emptyset$	ca	cb	ba	ab	c	cb	ab	ca	ac	b

Merk op dat alle profielen x een gedeelde tweede plaats hebben en alle profielen y een gedeelde eerste plaats. Dit vertaalt zich als volgt naar de simplex: precies bij deze paren profielen zijn er onder y meer hoekpunten voller dan het donkere hoekpunt (dat immers leeg is en blijft) dan onder x.

De kans op een schending is $\frac{1}{6} \cdot \frac{18}{36} = \frac{108}{1296} = \frac{1}{12}$.

Voorbeeld 5.9 (Voor $|K| = 3$, $n = 3$)**.** Er zijn $(3!)^3 = 216$ mogelijke profielen, waarbij de volgorde van kiezers uitmaakt.

Stel, zonder verlies van algemeenheid, $P(K)^x_1 = abc$.

Op pagina 46 staan de profielen die een schending vormen gegeven, met het aantal keer dat ze voorkomen wegens symmetrie erboven. De tabel illustreert meteen dat zelfs bij kleine aantallen kandidaten en kiezers het telprobleem zeer uitgebreid wordt. Een volledig overzicht van de paren die een schending vormen van monotonie zal daarom bij de kiessystemen EOS en GBL niet meer gegeven worden.

Merk op dat de permutaties verticaal staan.

Stel $l = 2$ of $l = 3$.

De volgende drie profielen $x \in P(K)^3$ zorgen een schending met dezelfde profielen $y \in P(K)^3$. Alleen de eerste is in de tabel opgenomen.

$$\begin{array}{ccc} aaa & aaa & aaa \\ bbc & bcb & bcc \\ ccb & cbc & cbb \end{array} .$$

De volgende profielen zorgen voor een schending met dezelfde profielen y (op een permutatie van de kandidaten na). Alleen van de eerste zijn de schendingen uitgeschreven:

$$\begin{array}{cccccc} abc & abc & abc & acb & acb & acb \\ baa & bab & bcb & baa & bba & bbc \\ ccb & cca & caa & cbc & cac & caa \end{array}.$$

Hetzelfde geldt voor de profielen $x \in P(K)^3$:

$$\begin{array}{cc} abc & acb \\ bca & bac \\ cab & cba \end{array}.$$

In totaal zijn $6 \cdot (1 \cdot 54 + 3 \cdot 36 + 6 \cdot 28 + 2 \cdot 24) = 2268$ paren die een schending vormen.

De kans op schending is $\frac{2268}{46656} \approx 0,049$.

Stel $l = 1$.

Als de drie kiezers niet elk een andere kandidaat op de eerste plek hebben staan, is er een kandidaat met een strikt hoger gewicht dan de andere. Die eindigt op de eerste plek in de uitkomst en de andere twee op een gedeelde tweede plek. Met drie kiezers is het niet mogelijk om de permutaties zo te herschikken dat de winnaar en een van de twee andere gelijk eindigen op een gedeelde eerste plek. Dus een schending van monotonie komt in die gevallen niet voor.

We bekijken daarom alleen de profielen $x \in P(K)^3$ waar elke kiezer een andere kandidaat op de eerste plaats heeft staan. Voor een overzicht van de profielen y die hiermee een schending vormen, zie de tabel op de volgende pagina, bij de profielen x met een gedeelde eerste plaats. Dit zijn 1296 paren profielen in totaal. De schendingskans is dus $\frac{6 \cdot 6 \cdot 28 + 2 \cdot 6 \cdot 24}{46656} = \frac{1296}{46656} = \frac{1}{36} \approx 0,028$.

x	$\phi(x)$	y							
		3	3	3	3	6	6	3	
aaa	a	aab	aab	aab	aab	aab	aab	aac	
bbb	bc	bba	bbc	cca	ccc	bca	bcc	bbb	
ccc		ccc	cca	bbc	bba	cbc	cba	cca	
		3	3	3	3	6	6	3	
		abb	abb	abb	abb	abb	abb	acc	
		baa	bcc	caa	ccc	bac	cac	bbb	
		ccc	caa	bcc	baa	cca	bca	caa	
		1	2	1	2	2	2	2	
aaa	a	aab	aab	aab	aba	aba	aba	aba	
bbc	bc	bbc	bcc	ccc	bac	bcc	cac	ccc	
ccb		cca	cba	bba	ccb	cab	bcb	bab	
		1	2	1	2	2	2	2	
		bba	bba	bba	abb	abb	abb	abb	
		aac	cac	ccc	bac	cac	bcc	ccc	
		ccb	acb	aab	cca	bca	caa	baa	
		1	1	2	2	1	1	2	2
		aac	aac	caa	caa	cca	cca	acc	acc
		bba	bbb	bbc	bbb	bbc	bbb	bba	bbb
		ccb	cca	acb	acc	aab	aac	cab	caa
		1	2	1	1	2	1	1	1
abc	abc	aac	aac	aac	bbc	bbc	bbc	abb	acc
baa		bba	bca	cca	aaa	caa	cca	baa	baa
ccb		ccb	cbb	bbb	ccb	acb	aab	ccc	cbb
		1	2	1	1	2	1	1	1
		aac	aac	aac	bbc	bbc	bbc	abb	acc
		bbb	bcb	ccb	aab	cab	ccb	caa	caa
		cca	cba	bba	cca	aca	aaa	bcc	bbb
		1	1	1	1	1	1	1	1
		aba	aba	aba	aba	cbc	cbc	cbc	cbc
		bab	bac	bcb	bcc	baa	bab	bca	bcb
		ccc	ccb	cac	cab	acb	aca	aab	aaa
		1	1	1	1	1	1		
abc	abc	aac	bbc	aba	cbc	aab	acc		
bca		bca	aca	bab	baa	bba	baa		
cab		cbb	cab	ccc	acb	ccc	cbb		
		1	1	1	1	1	1		
		aac	bbc	aba	cbc	aab	acc		
		bcb	acb	bac	bab	cba	caa		
		cba	caa	ccb	aca	bcc	bbb		
		1	1	1	1	1	1		
		aac	bbc	aba	cbc	aab	acc		
		cca	cca	bcb	bca	bca	bba		
		bbb	aab	cac	aab	cbc	cab		
		1	1	1	1	1	1		
		aac	bbc	aba	cbc	aab	acc		
		ccb	ccb	bcc	bcb	cca	cba		
		bba	aaa	cab	aaa	bbc	bab		

5.2 Enkelvoudig overdraagbare stem

Voor dit kiessysteem gaan we dezelfde criteria kwantificeren als bij het meerderheidsstelsel. Dezelfde gevallen worden uitgewerkt: $k = 3$, $n = 2$ en $k = 4$, $n = 2$ bij sterk unaniem en $k = 3$, $n = 2$, $k = 3$, $n = 3$ bij monotoon.

Sterk unaniem

We noemen een kandidaat $a \in K$ unaniem geprefereerd boven $b \in K$ als geldt $a_i^x < b_i^x \ \forall i \in V$.

Dit kan op twee manieren 'mis' gaan:
1. Alle zetels zijn gevuld voor a, b behandeld worden.
2. Als $\sum_{i \in V} w_{ia}^x = \sum_{i \in V} w_{ib}^x = 0$ bij een voorkeurseliminatieronde.

Opmerking 5.10. Het toewijzen van een zetel aan een kandidaat en het elimineren van een kandidaat komt op hetzelfde neer als het verwijderen van een hoekpunt uit de $k - 1$-simplex.

Voorbeeld 5.11 (Geval $k = 3$, $n = 2$)**.** Beschouw het geval dat er drie kandidaten zijn en twee kiezers en stel dat er één zetel te vergeven is. In dat geval is de kiesdrempel $D = 2$.

Als beide kiezers dezelfde kandidaat op de eerste plek hebben staan, haalt die kandidaat de kiesdrempel en komt op de eerste plaats. De twee andere kandidaten eindigen op een gedeelde tweede plek. Als een van hen unaniem boven de ander verkozen werd, is er sprake van een schending.

Als de kiezers niet dezelfde kandidaat bovenaan hebben staan, haalt geen enkele kandidaat de kiesdrempel, maar omdat er nog maar één zetel te verdelen is, wordt die toegewezen aan de kandidaat met de meeste voorkeursstemmen. Dit resulteert in een gedeelde eerste plaats voor de twee kandidaten die de kiezers het beste vonden. De derde kandidaat eindigt op de derde plaats. In dat geval is er geen sprake van schending.

Voor $l = 1$ is de kans op schending $\frac{1}{6}$.

Merk op dat we nooit aan een eliminatieronde toekomen, dus dit geldt voor zowel EOS met voorkeurseliminatie als voor EOS met Borda-elimminatie.

Stel dat er twee of drie zetels te vergeven zijn. In dat geval is de kiesdrempel $D = 1$. De kans op schending is nul. Het kan namelijk niet voorkomen dat de zetels al gevuld zijn voor een unaniem geprefereerde kandidaat aan bod komt (immers: $k - l < 2$) en omdat de kiesdrempel altijd gehaald wordt, komen er geen eliminatierondes voor.

Voorbeeld 5.12 (Geval $k = 4$, $n = 2$)**.** Beschouw het geval dat er vier kandidaten zijn en twee kiezers en stel dat er één zetel te vergeven is. In dat geval is de kiesdrempel $D = 2$. Omdat er slechts één zetel te vergeven is komen we nooit aan een eliminatieronde toe, ook als de kiesdrempel niet gehaald wordt.

Er is een schending precies dan als de zetel al gevuld is voor een unaniem geprefereerde kandidaat behandeld wordt in het algoritme.

Als beide kiezers dezelfde kandidaat op de eerste plek hebben staan, krijgt die de zetel en komen de andere drie op een gedeelde tweede plaats. Als minstens één van die drie unaniem geprefeerd wordt, is er sprake van schending. Dat gebeurt in $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$ van de gevallen.

Als de kiezers ieder een andere kandidaat op de eerste plek hebben staan, komen die samen op de gedeelde eerste plek en komen de andere twee kandidaten op een gedeelde derde plaats. Als van de laatste twee kandidaten één unaniem geprefereerd wordt boven de ander, is er sprake van schending. Dat gebeurt in $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ van de gevallen.

Op deze manier volgt dat voor $l = 1$ de kans op een schending $\frac{14}{24}$ is.

Voor $l = 2$ gaat de drempelwaarde omlaag: $D = 1$. Opnieuw komen we nooit aan een eliminatieronde toe en is er een schending precies dan als de zetels al gevuld zijn voor een unaniem geprefereerde kandidaat langskomt in het algoritme.

We beschouwen weer eerst het geval dat beide kiezers dezelfde kandidaat op de eerste plaats heeft staan. De kans hierop is $\frac{1}{4}$. Die kandidaat komt op de eerste plaats in de uitkomst en wordt herschikt naar achterin beide kiezerslijsten.

Als daarna weer beide kiezers dezelfde kandidaat bovenaan hebben staan, komt die op de tweede plek en overige twee op een gedeelde derde plaats, met schending als de een unaniem boven de ander geprefereerd werd. Als de kiezers twee verschillende kandidaten bovenaan hebben staan, komen die op een gedeelde tweede plek en de laatste op de vierde plaats. Er is dan geen schending.

De kans op schending is $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Terug naar het begin: als de kiezers twee verschillende kandidaten op de eerste plaats hadden staan, komen die op een gedeelde eerste plaats en de overige twee kandidaten op een gedeelde derde plaats. Als er tussen die laatste twee unanieme preferentie was, is er sprake van schending. De kans hierop is $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Voor $l = 2$ is de kans op schending daarom $\frac{10}{24}$.

Voor $l = 3$ en $l = 4$ is de drempelwaarde ook $D = 1$. Er vinden geen eliminatierondes plaats, omdat de kiesdrempel altijd gehaald wordt. De kans dat er een unaniem geprefeerde kandidaat nog niet is langskomen in het algoritme voor de drie of vier zetels gevuld zijn is nul, immers: $k - l < 2$. De schendingskans is in dit geval dus nul.

Opmerking 5.13. Wanneer er evenveel zetels als kandidaten zijn, $l = k$, of $l = k - 1$ is de schendingskans nul. De kiesdrempel is in dat geval $D = 1$ en er zijn geen eliminatierondes. Ook komt het niet voor dat alle zetels gevuld zijn voor een unaniem geprefereerde kandidaat langskomt in het algoritme.

Monotoon

Twee profielen $x, y \in P(K)^n$ vormen een tegenvoorbeeld tegen monotonie als geldt: $\exists a \in K$ zodanig dat $a_i^x \geq a_i^y \; \forall i \in V$, maar $a_{\phi(x)} < a_{\phi(y)}$.

Voorbeeld 5.14 (Geval $|K| = 3$, $n = 2$)**.** Er zijn $(3!)^2 = 36$ mogelijke profielen $x \in P(K)^2$, waarbij de volgorde van kiezers uitmaakt. Er zijn dus $36^2 = 1296$ paren $(x, y) \in (P(K)^2)^2$.

Voor $l = 3$ en $l = 2$ is de kiesdrempel $D = 1$. Bekijk de profielen x met twee verschillende kandidaten op de eerste plek. Die kandidaten komen op een gedeelde eerste plek, de overige kandidaat op de derde plaats. Die laatste kandidaat kan niet lager eindigen dan hij al doet en de eerste twee kunnen alleen lager eindigen, wanneer ze van de eerste plek gehaald worden. Voor deze profielen x vindt er voor geen enkel profiel y een schending plaats.

Bekijk de profielen x met dezelfde kandidaat bovenaan beide kiezerslijsten. Die kandidaat komt op de eerste plaats in de uitkomst. Als de volgorde van de overige twee kandidaten bij beide kiezers gelijk is, komt de een op de tweede, de ander op de derde plaats. De kandidaat die onder x op de tweede plaats komt, kan onder y op de derde plaats komen zonder zelf omlaag geplaatst te worden, wanneer de andere kandidaten op een gedeelde eerste plek komen.

Als de volgorde tussen de overige twee kandidaten verschilt, komen ze op een gedeelde tweede plaats en kunnen beide naar de derde plaats afzakken onder y door daar een gedeelde eerste plaats te creëren. Zie onderstaand overzicht.

x	$\phi(x)$	y		$\phi(y)$
aa	a	ac	ca	ac
bb	b	bb	bb	$\emptyset$
cc	c	ca	ac	b

x	$\phi(x)$	y				$\phi(y)$	y				$\phi(y)$
aa	a	ab	ba	ab	ba	ab	ac	ca	ac	ca	ac
bc	bc	bc	ac	cc	cc	$\emptyset$	ba	bc	bb	bb	$\emptyset$
cb	$\emptyset$	cb	ca	ba	ab	c	cb	ab	ca	ac	b

De schendingskans is $\frac{5}{108} \approx 0,046$.

Voor $l = 1$ is de kiesdrempel $D = 2$ en de schendingskans $\frac{1}{12}$. Opnieuw kijken we alleen naar profielen x waarbij beide kiezers dezelfde kandidaat op de eerste plaats heeft staan. Dit gaat analoog aan het geval $k = 3$, $n = 2$, $l = 1$ bij het meerderheidsstelsel.

Voorbeeld 5.15 (Geval $|K| = 3$, $n = 3$)**.** Voor $l = 3$ is de drempelwaarde $D = 2$ en voor $l = 2$ is dat $D = 1$. In beide gevallen is de schendingskans $\frac{1296}{46656} = \frac{1}{36}$.

Op dezelfde manier als bij het meerderheidsstelsel zijn de profielparen uit te schrijven.

Voor $l = 2$, $l = 3$, nemen we zonder verlies van algemeenheid aan dat geldt $P(K)^x_1 = abc$.

We bekijken alle combinaties van profielen die tot een schending leiden.

x	$\phi(x)$	y			
aaa	a	aca	cac	caa	acc
bbc	b	bbc	bba	bbc	bba
ccb	c	cab	acb	acb	cab

De tabel voor de volgende profielen is analoog aan de bovenstaande tabel:

aaa	aaa
bcb	bcc
cbc	cbb

x	$\phi(x)$	y			
abb	b	aab	bba	aba	bab
bcc	c	bcc	acc	bcc	acc
caa	a	cba	cab	cab	cba

De tabel voor de volgende profielen is analoog aan de bovenstaande tabel:

aac	aca
bba	bac
ccb	cbc

x	$\phi(x)$	y											
abc	abc	abb	abb	acc	acc	aba	aba	aba	aba	cbc	cbc	cbc	cbc
baa	$\emptyset$	baa	caa	baa	caa	bac	bcc	bab	bcb	bca	baa	bcb	bab
ccb	$\emptyset$	ccc	bcc	cbb	bbb	ccb	cab	ccc	cac	aab	acb	aaa	aca
		aac	aac	aac	aac	aac	aac	aac	aac				
		bba	bca	cba	cca	bbb	bcb	cbb	ccb				
		ccb	cbb	bcb	bbb	cca	cba	bca	bba				
		bbc	bbc	bbc	bbc	bbc	bbc	bbc	bbc				
		aaa	aca	caa	cca	aab	acb	cab	ccb				
		ccb	cab	acb	aab	cca	caa	aca	aaa				

De tabel voor de volgende profielen is analoog aan de bovenstaande tabel:

acb	abc	acb	abc	acb
baa	bab	bba	bcb	bbc
cbc	cca	cac	caa	caa

x	$\phi(x)$	y											
abc	abc	abb	abb	acc	acc	aba	aba	cbc	cbc	aac	aac	bbc	bbc
bca	$\emptyset$	bca	cca	bba	cba	bac	bcc	baa	bca	bcb	bca	aca	acb
cab	$\emptyset$	cac	bac	cab	bab	ccb	cab	acb	aab	cba	cbb	cab	caa

De tabel voor de volgende profielen is analoog aan de bovenstaande tabel:

acb
bac
cba

Voor $l = 1$ geldt $D = 1$ en is de schendingskans gelijk aan $\frac{1152}{46656}$. Dit betreft alleen de gevallen waarbij alle kiezers een andere kandidaat op de eerste plaats hebben staan.

5.3 Gewogen Beperkte Lijst

Voor dit kiessysteem gaan we dezelfde criteria kwantificeren als bij het meerderheidsstelsel en EOS. Dezelfde gevallen worden weer uitgewerkt: $k = 3$, $n = 2$ en $k = 4$, $n = 2$ bij sterk unaniem en $k = 3$, $n = 2$, $k = 3$, $n = 3$ bij monotoon.

Sterk Unaniem

De gewogen beperkte lijst is niet sterk unaniem wanneer geldt: $\exists a, b \in K$ en een profiel $x \in P(K)^n$ zodanig, dat $\forall i \in V$: $m < a_i^x < b_i^x$. Dan geldt namelijk

$a_{\phi_G(x)} = b_{\phi_G(x)}$. (1)

Ook gaat het 'fout' als $\forall i \in V$: $a_i^x < b_i^x$, maar het algoritme loopt af voordat a een zetel toegewezen kan worden, met andere woorden, er zijn l kandidaten ongelijk aan a en b met hogere scores. (2)

Het eerste geval is analoog aan de analyse van unanimiteit bij het meerderheidsstelsel naar de reguliere $k-1$-simplex te vertalen. Er zijn minstens twee hoeken leeg en voor een splitsing van de simplex in twee gelijke helften, middendoor de ribbe tussen twee lege hoekpunten, bevinden alle kiezers zich in dezelfde helft. Het verschil is dat er nu meer vakken dan alleen in de aangewezen hoekpunten leeg moeten zijn.

Er moeten steeds vier dingen bepaald worden: op hoeveel manieren zijn er twee of meer lege hoekpunten te kiezen, op hoeveel manieren kan de simplex vervolgens in twee gelijke helften worden opgedeeld, met welke kans zitten alle kiezers in de juiste helft en wat wordt er dubbel geteld.

Opmerking 5.16. Voor $m = 1$ de lengte van de beperkte lijst, is de gewogen beperkte lijst gelijk aan het meerderheidsstelsel.

Voorbeeld 5.17 (Geval $k = 3$, $n = 2$, $m = 2$)**.** Voor $l = 1$ is de schendingskans hetzelfde als bij het meerderheidsstelsel: alleen wanneer beide kandidaten exact dezelfde voorkeur hebben gaat het mis: $P(K)_1^x = P(K)_2^x = abc$ en $\phi_G(x) = (\{a\}, \{b, c\}, \emptyset)$. De kans hierop is $\frac{1}{6}$.

Voor $l = 2, 3$ is de schendingskans nul. Als beide kiezers een kandidaat boven de ander verkiezen, dan hebben deze niet beide totaal gewicht nul en bovendien zijn de zetels nog niet gevuld wanneer de eerste van deze kandidaten aan de beurt komt.

Hetzelfde geldt voor drie kandidaten, twee kiezers en $m = 3$. Als $l = 1$, is de schendingskans $\frac{1}{6}$ en als er meer dan één zetel te vergeven is, is de schendingskans nul.

Voorbeeld 5.18 (Geval $k = 4$, $m = 2$, $|V| = n$)**.** Voor $l = 3, 4$ bepalen we schendingskans als volgt: er zijn $\binom{4}{2}$ manieren om twee lege hoekpunten te kiezen en gegeven twee lege hoekpunten is er één manier om de simplex in twee helften te spitsen. Symmetrie levert een factor twee op: of alle kiezers bevinden zich in de eerste helft, of alle kiezers bevinden zich in de tweede helft.

Kiezers mogen zich niet in de gekozen hoekpunten bevinden en niet in de direct daaraanliggende vlakken. Dit zijn precies de permutaties met die kandidaten op de eerste of tweede plek, $2 \cdot 6$ vlakken elk, met vier vlakken overlap. Er blijven $24 - (2 \cdot 12 - 4) = 4$ vlakken over, twee in elke helft. Als bijvoorbeeld a, b worden gekozen als kandidaten op de 3e en 4e plek, dan zijn er vier permutaties, *cdab*, *dcab*, *cdba* en *dcba*, over. Er kunnen niet meer dan twee hoeken leeg gekozen worden, omdat er in totaal maar vier kandidaten zijn.

Dit geeft: $P(\text{mis}) = 2 \cdot \binom{4}{2}(\frac{2}{24})^n = (\frac{1}{12})^{n-1}$. Voor $n = 2$ is de schendingskans dus $\frac{1}{12}$.

Voor $l = 1$ zijn er naast de profielen hierboven bovendien profielen waarbij de zetels eerder vol zijn voor een kandidaat die unaniem boven een ander verkozen wordt langs komt in het algoritme. In het bijzonder zijn dit de volgende profielen.

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we $P(K)_1^x = abcd$ veronderstellen. Vvoor $P(K)_2^x = abcd, abdc, acbd, acdb, adbc$ wordt de uitkomst $(\{a\}, \{b, c, d\}, \emptyset, \emptyset)$, terwijl er unanieme keuzen worden gemaakt tussen kandidaten b, c, d.
Hetzelfde geldt voor de profielen $P(K)_2^x = bcad, bcda, bdac$ (uitslag: $(\{b\}, \{acd\}, \emptyset, \emptyset)$) en $P(K)_2^x = cabd, cadb, dabc$ (uitslag: $(\{a\}, \{bcd\}, \emptyset, \emptyset)$).
In totaal zijn er twaalf profielen waarbij het 'mis' gaat, gegeven $P(K)_1^x = abcd$.

De schendingskans is dus $\frac{1}{2}$.

Voor $l = 2$ is op dezelfde manier te bepalen dat de schendingskans $\frac{1}{4}$ is.

Gegeven vier kandidaten en twee kiezers zijn de schendingskansen voor $m = 3$ en $m = 4$ als volgt:

l	1	2	3	4
$\mathbb{P}$(schending)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	0

Hoe groter dus het aantal te vullen zetels, hoe kleiner de schendingskans. Bovendien geldt: hoe groter m, met andere woorden hoe langer de beperkte lijst, hoe kleiner de schendingskans.

Algemene formule: een alternerende som

Aan de hand van de simplex-representatie worden nu een onder- en bovengrensgegeven voor kans op schending, gegeven k kandidaten, n kiezers en $l = k$ zetels.

Net als bij het meerderheidsstelsel is de algemene formule voor de schendingskans een alternerende som en op dezelfde manier is daar een onder- en bovengrens voor de bepalen. Hiertoe wordt opnieuw de simplex-representatie gebruikt.

Merk op dat wanneer we kijken naar twee lege hoekpunten, bijvoorbeeld die behorende bij kandidaten a en b, we $2m(k-1)!$ lege vlakken tellen. Daarbij worden sommige vlakken echter dubbel geteld. Het is gemakkelijker om de vlakken te tellen die niet leeg hoeven te zijn. Die corresponderen precies met de permutaties waarbij a en b niet op de eerste m plekken staan.

Voor de eerste m plaatsen zijn er $(k-2)(k-3) \cdot ... \cdot (k-m-1) = \frac{(k-2)!}{(k-m-2)!}$ mogelijke permutaties. Voor de laatste $k-m$ plaatsen zijn dat er $(k-m)!$. Alle kiezers moeten bovendien in de juiste helft zitten.

Stel dat er niet slechts twee, maar drie kandidaten nooit op de eerste m plaatsen op de ranglijsten staan.

Het aantal permutaties wordt gegeven door: $(k-3)(k-2) \cdot ... \cdot (k-m-2)(k-m)! = \frac{(k-3)!}{(k-m-3)!}(k-m)!$.

Bij elke iteratie wordt het aantal dubbel getelde gevallen van lege hoekpunten afgetrokken, waarmee ook het aantal gevallen dat $m+1$, $m+2$, ... $k-1$ lege hoekpunten worden geteld, verandert. De algemene formule voor de schendingskansis wordt daarom een alternerende som.

De dubbele gevallen die het vaakst geteld worden, zijn de gevallen waarbij alle kiezers precies dezelfde volgorde hebben voor de laatste $k-m$ kandidaten. Die worden $\binom{m}{2}$ keer geteld.

Dit samen geeft een bovengrens voor de schendingskans

$$2\binom{k}{2}\left(\frac{\frac{(k-2)!}{(k-m-2)!}(k-m)!}{2k!}\right)^n.$$

en als ondergrens

$$2\binom{k}{2}\left(\frac{\frac{(k-2)!}{(k-m-2)!}(k-m)!}{2k!}\right)^n-\binom{m}{2}\left(\frac{\frac{(k-3)!}{(k-m-3)!}(k-m)!}{2k!}\right)^n.$$

In deze formules kunnen faculteiten van negatieve getallen voorkomen. Merk op dat die als volgt gedefiniëerd zijn: $n! = \infty$ en $\frac{1}{n!} = 0$ voor $n \in \mathbb{Z}_{<0}$. In de hierboven besproken voorbeelden geeft dit de volgende grenzen.

- $\mathbb{P}(\text{mis} \mid k=3, m=2, n=2) = 0$, met
  ondergrens $2\binom{3}{2}\left(\frac{\frac{(3-2)!}{(3-2-2)!}(3-2)!}{2\cdot 3!}\right)^2-\binom{2}{2}\left(\frac{\frac{(3-3)!}{(3-2-3)!}(3-2)!}{2\cdot 3!}\right)^2=0$
  en bovengrens $2\binom{3}{2}\left(\frac{\frac{(3-2)!}{(3-2-2)!}(3-2)!}{2\cdot 3!}\right)^2=0.$
- $\mathbb{P}(\text{mis} \mid k=4, m=2, n=2) = 0$, met
  ondergrens $2\binom{4}{2}\left(\frac{\frac{(4-2)!}{(4-2-2)!}(4-2)!}{2\cdot 4!}\right)^2-\binom{2}{2}\left(\frac{\frac{(4-3)!}{(4-2-3)!}(4-2)!}{2\cdot 4!}\right)^2=\frac{1}{12}$
  en bovengrens $2\binom{4}{2}\left(\frac{\frac{(4-2)!}{(4-2-2)!}(4-2)!}{2\cdot 4!}\right)^2=\frac{1}{12}.$

Monotoon

Een paar profielen schendt het criterium monotoon wanneer geldt: $a_i^x \leq a_i^y$ $\forall i \in V$ en $a_{\phi_G(x)} > a_{\phi_G(y)}$. Deze profielen doen zich op dezelfde manieren voor als bij het meerderheidsstelsel, behalve dat we nu uitgebreide hoekpunten beschouwen: hoekpunten en de m aanliggende lagen vlakken, zoals uitgelegd in de voorgaande paragraaf over sterke unanimiteit.

Voorbeeld 5.19 (Geval $|K| = 3$, $n = 2$, $m = 2$, $m = 3$)**.** We bekijken het geval $l = 3$ of $l = 2$. De enige profielen $x \in P(K)^2$ die mogelijk voor een schending kunnen zorgen zijn de profielen met twee kandidaten op een gedeelde tweede plaats. Eén van hen kan door herschikking op de derde plaats eindigen.

Stel, $P(K)_1^x = abc$. Dan zijn onderstaande profielen een schending van monotonie.

x	$\phi(x)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi()$	y	$\phi(y)$
aa	a	ac	a	ca	c	ab	b	ba	a
bc	bc	ba	c	bc	a	bc	a	ac	b
cb	$\emptyset$	cb	b	ab	b	ca	c	cb	c

De schendingskans is $\frac{24}{1296}$.

In het geval $l = 1$ wordt monotonie geschonden voor precies die gevallen waarbij er onder x een gedeelde tweede plaats is en onder y een gedeelde eerste plaats, of als onder x alle drie de kandidaten op een gedeelde eerste plaats komen en onder y niet.

Stel, $P(K)_1^x = abc$. Dan zijn onderstaande profielen een schending van monotonie.

x	$\phi(x)$	y		$\phi(y)$
aa	a	ab	ba	ab
bb	bc	ba	ab	$\emptyset$
cc	$\emptyset$	cc	cc	c

x	$\phi(x)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$	y	$\phi(y)$
ac	abc	bc	b	ac	a	ac	c	ab	b	aa	a	cc	c
bb	$\emptyset$	ab	ac	ba	bc	cb	ab	bc	ac	bb	bc	bb	ab
ca	$\emptyset$	ca	$\emptyset$	cb	$\emptyset$	ba	$\emptyset$	ca	$\emptyset$	cc	$\emptyset$	aa	$\emptyset$

De schendingskans is $\frac{48}{1296}$.

Voorbeeld 5.20 ($|K| = 3$, $n = 3$)**.**
Geval $m = 2$.
Voor $l = 2$ en $l = 3$ is de schendingskans $\frac{432}{46656}$. Dit zijn de gevallen waarbij (1) de kandidaat op de tweede plaats in $\phi(x)$ op de derde plaats staat in $\phi(y)$ $(6 \cdot 12)$; (2) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde tweede plek staan, in $\phi(y)$ op de derde plaats eindigt$(6 \cdot 18)$; (3) één van de twee of drie kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde eerste plek staat, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eindigt $(6 \cdot 42)$.

Voor $l = 1$ is de schendingskans $\frac{504}{46656}$. Dit zijn de gevallen waarbij (1) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde tweede plek staat, in $\phi(y)$ op de derde plaats eindigt doordat de twee andere kandidaten de eerste plaats delen in $\phi(y)$ $(6 \cdot 42)$; (2) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde eerste plek staat, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eidigt $(6 \cdot 6)$; (3) één van de drie kandidaten die in $\phi(x)$ de eerste plaats delen, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eindigt $(6 \cdot 36)$.

Geval $m = 3$.
Voor $l = 2$ en $l = 3$ is de schendingskans $\frac{480}{46656}$.Dit zijn de gevallen waarbij (1) de kandidaat op de tweede plaats in $\phi(x)$ op de derde plaats staat in $\phi(y)$ $(6 \cdot 12)$; (2) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde tweede plek staan, in $\phi(y)$ op de derde plaats eindigt$(6 \cdot 26)$; (3) één van de twee of drie kandidaten die in $\phi(x)$ de eerste plaats delen, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eindigt $(6 \cdot 42)$.

Voor $l = 1$ is de schendingskans $\frac{432}{46656}$. Dit zijn de gevallen waarbij (1) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde tweede plek staat, in $\phi(y)$ op de derde plaats eindigt doordat de twee andere kandidaten de eerste plaats delen in $\phi(y)$ $(6 \cdot 54)$; (2) één van de twee kandidaten die in $\phi(x)$ op een gedeelde eerste plek staat, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eindigt $(6 \cdot 6)$; (3) één van de drie kandidaten die in $\phi(x)$ de eerste plaats delen, in $\phi(y)$ op de tweede plaats eindigt $(6 \cdot 12)$.

Conclusie kwantitatieve vergelijking

Op basis van de gevallen die in dit hoofdstuk zijn uitgewerkt kunnen we de drie kiessystemen vergelijken. Voor een overzicht van de resultaten, zie onderstaande tabellen.

Tabel 5.1 Schendingskans sterk unaniem

	M	EOS				GBL							
m						2				3			
l		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
$k=3$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	0	0		$\frac{4}{24}$	0	0		$\frac{4}{24}$	0	0	
$k=4$	$\frac{14}{24}$	$\frac{14}{24}$	$\frac{10}{24}$	0	0	$\frac{12}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{4}{24}$	0	0

Tabel 5.2 Schendingskans monotoon

	M			EOS		
l	1	2	3	1	2	3
$n=2$	$0,080$	$0,080$	$0,080$	$0,080$	$0,046$	$0,046$
$n=3$	$0,028$	$0,049$	$0,049$	$0,025$	$0,028$	$0,028$

	GBL					
m	2			3		
l	1	2	3	1	2	3
$n=2$	$0,037$	$0,019$	$0,019$	$0,037$	$0,019$	$0,019$
$n=3$	$0,011$	$0,009$	$0,009$	$0,009$	$0,010$	$0,010$

Eén manier om een 'beste' kiessysteem te bepalen, is door naar de schendingskansen te kijken. Op basis van de hier bekeken criteria kan dan geconcludeerd worden dat de gewogen beperkte lijst het beste kiessysteem is.

6 Onderzoek

De drie hierboven besproken kiessystemen hebben elk hun voor- en nadelen. In het vorige hoofdstuk bleek dat ze in verschillende mate voldoen aan de eerlijkheidscriteria die zijn opgesteld in hoofdstuk 2.

Los van hoe ze scoren op de eerlijkheidscriteria verschillen de drie systemen. Ze genereren elk een eigen uitslag voor een gegeven profiel en de uitslagen kunnen flink verschillen.

Voorbeeld 6.1.
Bekijk het volgende profiel: $K = \{a, b, c, d, e\}$, $|V| = 6$, $l = 5$

1	*abecd*
2	*abecd*
3	*abecd*
4	*cebda*
5	*cebda*
6	*dcbea*

Dit geeft de volgende uitslagen, onder de verschillende kiessystemen:

$$\begin{aligned}\phi_M(x) &= \{\{a\}, \{c\}, \{d\}, \{b, e\}, \emptyset\}\\ \phi_{EOS}(x) &= \{\{a\}, \{b\}, \{e\}, \{c\}, \{d\}\}\\ \phi_G(x) &= \{\{b\}, \{c\}, \{e\}, \{a\}, \{d\}\}\end{aligned}$$

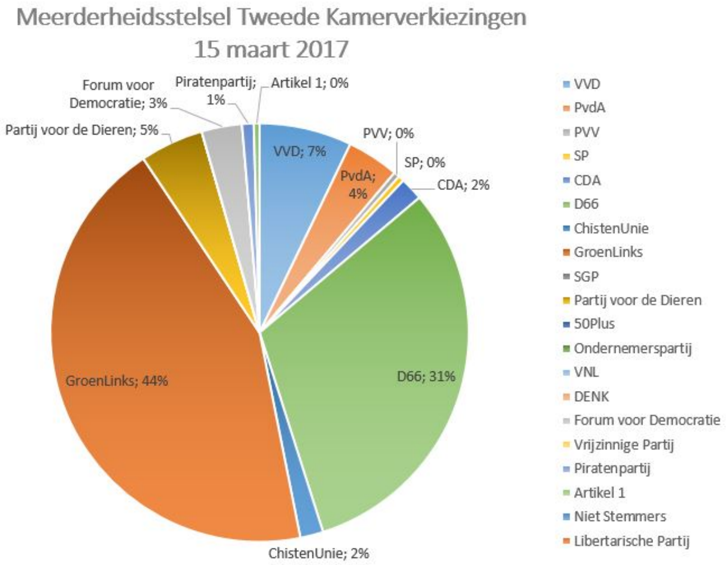
Kiessystemen wijzen niet alleen verschillende uitslagen toe aan dezelfde profielen, ze kunnen er ook voor zorgen dat kiezers hun stem anders uitbrengen.

Om de verschillende systemen te testen heb ik een enquête gehouden onder studenten van de Universiteit Leiden en inwoners van Leiden. Op 15 maart 2017 werden er Tweede Kamerverkiezingen gehouden in Nederland. 28 partijen waren nationaal verkiesbaar, waarvan er 24 in Leiden op het stembiljet stonden. Wegens het grote aantal partijen en de grote aantallen verkiesbare kandidaten per partij, is er gekozen om partijen de functie van kandidaten te laten vervullen. Een respondent kon dus stemmen op D66, maar niet op Stientje van Veldhoven van D66.

De respondenten werd gevraagd om hun stem uit te brengen in drie verschillende scenario's. In het eerste verliep de verkiezing volgens het meerderheidsstelsel. Gevraagd werd om één stem uit te brengen, zoals dat ook in het stemhokje gedaan werd. Het tweede scenario was de gewogen beperkte lijst. Respondenten konden een top drie opgeven, met weging 3-2-1. Als laatste konden respondenten de partijen rangschikken voor de enkelvoudig overdraagbare stem.

Het was ook mogelijk geweest om de respondenten alleen alle partijen te laten rangschikken, en op basis daarvan de uitkomsten met de verschillende kiessystemen te bepalen. Dan wordt echter de mogelijkheid genegeerd dat kiezers hun stem aanpassen wanneer zij weten welk kiessysteem gebruikt wordt. De meeste kiezers hielden een eigen ranglijst aan, maar sommige pasten hun voorkeur aan, afhankelijk van het kiessysteem.

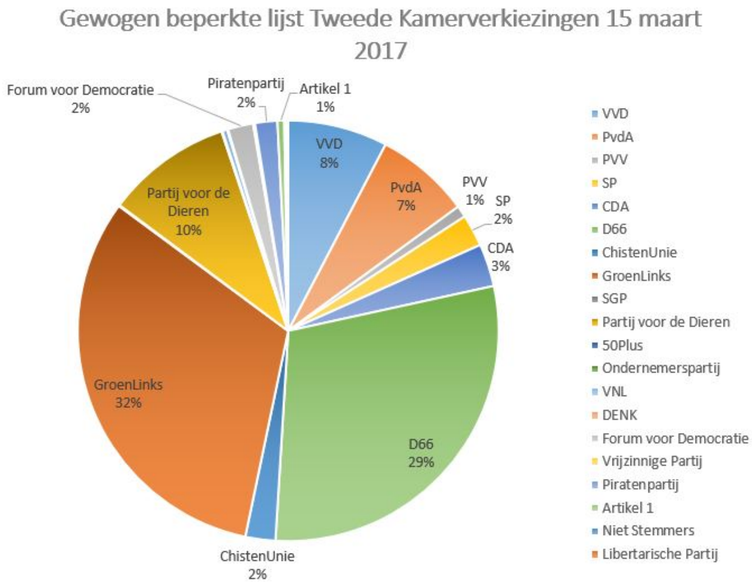
De 224 respondenten die de ennquete in zijn geheel hebben ingevuld zeiden als volgt gestemd te hebben op 15 maart:



Hier is duidelijk te zien dat de enquete is afgenomen onder studenten. D66 en GroenLinks haalden in de landelijke verkiezingen respectievelijk 19 en 14 zetels. Hadden de 224 respondenten het voor het zeggen gehad, dan hadden die twee partijen samen een ruim meerderheidskabinet kunnen vormen, met $47 + 65 = 112$ zetels.

De jonge leeftijd van de respondenten verklaart bovendien waarom partij 50Plus geen enkele stem kreeg. SGP en DENK zijn twee andere partijen die in de landelijke verkiezingen zetels behaalden, maar in deze enquête geen stemmen kregen. Daarnaast was er een groep partijen die er landelijk niet in slaagden een vertegenwoordiger in de kamer te krijgen: Ondernemerspartij, VNL, Nieuwe Wegen, De Burger Beweging, Vrijzinnige Partij, Geen Peil, Artikel 1, Niet Stemmers, Libertarische Partij, Jezus en Stem NL haalden het geen van allen. Piratenpartij en Artikel1 hadden het op basis van deze enquête wel gehaald.

De respondenten kregen ook de mogelijkheid om een top drie van partijen op te geven voor de gewogen beperkte lijst. Zij gaven aan dit een prettig systeem te vinden: ze konden meer van hun mening kwijt dan bij het meerderheidstelsel en vonden het overzichtelijker dan de enkelvoudige overdraagbare stem. Op basis van een gewogen beperkte lijst van lengte $m = 3$, was 15 maart dit de uitkomst:



Meteen valt op dat partijen D66 en GroenLinks, grote winnaars onder het meerderheidsstelsel, flink inleveren. Wel zijn zij nog steeds de grootste en halen ze samen een absolute meerderheid. Partij van de Arbeid en Partij voor de Dieren boeken de meeste winst: beide verdubbelen grofweg in zetelaantal. Deze partijen waren vaker de tweede of derde keuze en profiteren ervan wanneer deze stemmen worden meegeteld.

Tabel 6.1 Meerderheid en Gewogen beperkte lijst

Partijen	M		GBL				
		%	1	2	3	T	%
VVD	16	7,14	15	21	16	103	7,66
PvdA	9	4,02	8	17	40	98	7,29
PVV	1	0,45	1	3	3	12	0,89
SP	1	0,45	2	8	11	33	2,46
CDA	4	1,79	4	6	20	44	3,27
D66	70	31,25	73	69	38	395	29,39
ChistenUnie	4	1,79	5	3	10	31	2,31
GroenLinks	98	43,75	92	63	26	428	31,85
SGP	0	0	0	0	1	1	0,07
Partij voor de Dieren	11	4,91	14	23	42	130	9,67
50Plus	0	0	0	0	1	1	0,07
Ondernemerspartij	0	0	0	0	0	0	0
VNL	0	0	0	2	1	5	0,37
DENK	0	0	0	0	1	1	0,07
Nieuwe Wegen	0	0	0	0	0	0	0
Forum voor Democratie	7	3,13	7	2	1	26	1,93
De Burger Beweging	0	0	0	0	0	0	0
Vrijzinnige Partij	0	0	0	1	0	2	0,15
Geen Peil	0	0	0	0	0	0	0
Piratenpartij	2	0,89	2	4	9	23	1,71
Artikel 1	1	0,45	1	1	2	7	0,52
Niet Stemmers	0	0	0	0	2	2	0,15
Libertarische Partij	0	0	0	1	0	2	0,15
Jezus Leeft	0	0	0	0	0	0	0
Stem NL	0	0	0	0	0	0	0

Het grote aantal politieke partijen dat Nederland rijk is, heeft onder andere tot gevolg dat veel partijen geen zetels halen. De kiesdrempel in Nederland is zeer laag, namelijk 1 zetel, of 0,67% van de stemmen.

Een ander gevolg van het grote aantal politieke partijen is dat weinig respondenten de ranglijst voor de enkelvoudig overdraagbare stem in zijn geheel in wilden vullen. Veel kiezers hebben zelfs nooit gehoord van sommige van de kleine nieuwe partijen. Van de 224 respondenten hebben 30 wel een volldige ranglijst ingevuld. Op basis daarvan is de volgende zwak geordende uitslag bepaald:

{{D66}{GL}{PvdA}{PvvD}{Piratenpartij}{SP}{VVD}{ChristenUnie}
{CDA}{Artikel 1}{Nieuwe Wegen}{Ondernemerspartij}{SGP}
{VNL, Vrijzinnige Partij}∅{50Plus}{DENK, De Burger Beweging}∅
{Forum voor Democratie}{Libertarische Partij}{Niet Stemmers}
{Jezus Leeft, StemNL}∅{Geen Peil}{PVV}}

Met deze lijst kan in het geval van de Nederlandse parlementaire verkiezingen helaas niet veel gedaan worden. Het geeft een indicatie van de meest en minst populaire partij en van de onderlinge verhoudingen tussen partijen, maar niet van de toe te kennen zetelaantallen.

De enkelvoudig overdraagbare stem is een systeem dat zich leent voor verkiezingen met een districtenstelsel. Wanneer er, zoals bijvoorbeeld in het Verenigd Koninkrijk het geval is, per district één vertegenwoordiger naar de hoofdstad wordt gestuurd en kandidaten zich als individu aanmelden, is dit systeem zeer bruikbaar, net als wanneer er meerdere vertegenwoordigers per district gekozen worden. Er moeten kandidaten gekozen worden, niet partijen.

Wanneer Nederlanders op verkiezingsdag een volledige ranglijst van alle kandidaten van alle partijen inleveren, zou op basis van de enkelvoudig overdraagbare stem de Tweede Kamer kunnen worden samengesteld. Daartoe hadden zij in maart 2017 wel 1114 kandidaten moeten rangschikken. Dit systeem is voor de Nederlandse parlemenentaire verkiezingen daarom niet geschikt.

7 Conclusie

In deze scriptie is onderzocht welk van de drie kiessystemen, meerderheiddstelsel, enkelvoudig overdraagbare stem en gewogen beperkte lijst het meest eerlijke systeem is. Daartoe zijn eerst de begrippen keuzeruimte en keuzefunctie geïntroduceerd. Er is gekozen voor een afwijkende keuzefunctie: een waarbij een zwak geordende uitslag mogelijk is. Hierdoor konden alle mogelijke profielen mee worden genomen in de analyse, in tegenstelling tot de aanpak van bijvoorbeeld Storcken en O'Donnell.

Uit een veelheid aan eerlijkheidscriteria zijn de belangrijkste en de wiskundig te benaderen criteria gekozen. Die zijn sluitend geformuleerd, aangepast op de keuzefunctie met zwakke ordening en de verbanden tussen verschillende criteria zijn duidelijk gemaakt. In het bijzonder is gekeken naar het verband tussen sterke en zwakke unanimiteit, dictatorschap en OIA. De onmogelijkheidsstelling van Arrow is aangepast zodat die beter toepasbaar was op de kiessystemen die in deze scriptie bekeken zijn, en op andere kiessystemen die voor verkiezingen kunnen worden gebruikt.

Voor de drie gekozen kiessystemen zijn algoritmen vastgesteld en vervolgens zijn ze getest op de eerlijkheidscriteria. Dat gaf niet het gewenste resultaat: alle kiessystemen voldeden aan dezelfde criteria wel en aan dezelfde niet. Daarom is een begin gemaakt aan een kwantitatieve analyse. De schendingskansen voor verschillende criteria zouden een indicatie kunnen geven van welk kiessysteem beter is dan andere.

Op basis van de criteria sterk unaniem en monotoon en de enkele gevallen voor kleine aantallen kiezers en kandidaten kan een vermoeden geformuleerd worden: de gewogen beperkte lijst heeft de kleinste schendingskansen en is daarom het meest eerlijke kiessysteem.

Er is voor deze scriptie relatief veel tijd gaan zitten in het wiskundig formuleren van begrippen uit economie en politicologie, waardoor er minder tijd was voor de kwantitatieve analyse en om in een later stadium nog op zoek te gaan naar nieuwe eerlijkheidscriteria, waarop de kiessystemen wellicht wel verschillend zouden scoren. Als deze criteria er wel zijn, zou dit uitsluitsel kunnen geven over welk kiessysteem het 'beste' is.

Ook het vinden van algemene formules voor de schendingskansen, zodat een uitspraak kan worden gedaan over die kansen voor grote aantallen kandidaten en vooral voor grote aantallen kiezers, zou zeker nog een nuttige toevoeging zijn. Bij de verkiezingen in Nederland bijvoorbeeld hebben in maart 2017 10,4 miljoen mensen hun stem uitgebracht. Deze scriptie heeft zich veelal beperkt tot $k \leq 4$ en $n \leq 3$.

Bij die algemene formules moet nog wel een kanttekening worden geplaatst: in deze scriptie is ervan uitgegaan dat alle profielen met dezelfde waarschijnlijkheid voorkomen. Dat strookt echter niet met de realiteit. De kans dat een kiezer de VVD op de eerst plek heeft staan en $D66$ op de tweede plek is een stuk groter dan de kans dat VVD op eerste en SP op de tweede plek staat.

Daarnaast zou het interessant zijn om het proportionele stelsel met open partijlijst ook te toetsen op de criteria. Dat is namelijk het systeem dat in Nederland in gebruik is. In deze scriptie is het Nederlandse systeem versimpeld naar het meerderheidsstelsel, maar dat doet de Nederlandse verkiezing tekort.

Kortom, er is nog voldoende stof voor vervolgonderzoek van keuzefuncties met zwak geordende lijsten. In de tussentijd is het voor landen met een meerderheidsstelsel of enkelvoudig overdraagbare stem het overwegen waard om over te stappen op de gewogen beperkte lijst. Dat is wel zo eerlijk.

Bibliografie

Arrow, K.J., 'A difficulty in the concept of social welfare', *Journal of Political Economy*, Vol. 58, No 4 (Aug., 1950), The University of Chicago Press, pp. 328-346.

Droop, H.R., 'On methods of electing representatives', *Journal of the Statistical Society of London*, Vol. 44, No. 2. (June 1881), pp. 141-202.

Farell, D.M., 'The challenge of reforming a 'voter-friendly' electoral system: the debates over Ireland's singletransferable vote', *Irish Political Studies* (April 2016).

Geanakoplos, J., 'Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem', *Economic theory*, Vol. 26 (2005), pp. 211-215.

Geller, C., 'Single transferable vote with Borda elimination: proportional representation,moderation, quasi-chaos and stability', *Electoral Studies* Vol. 24 (2005), pp. 265-280.

Norris, P., 'Choosing electoral systems: proportional, majoritarian and mixed Systems', *International Political Science Review / Revue internationale de science politique*, Vol. 18, No. 3 (Juli 1997), pp. 297-312.

O'Donnell, R., *Analysis of boolean functions* (Cambridge University Press, 2014).

Saari, D.G., 'Adopting a plurality vote perspective', *Mathematics of Operations Research*, Vol. 27, No. 1, (Fe. 2002), pp. 45-64.

Storcken, A.J.A., en de Swart, H.C.M., *Verkiezingen, agenda's en manipulatie, een inleiding tot de sociale keuzetheorie* (Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1992).