Fredholm eigenschappen van systemen met interactie over een oneindig bereik

Bos, J.M.

J.M. Bos

Fredholm eigenschappen van systemen met interactie over een oneindig bereik

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: Drs. H.J. Hupkes

Datum Bachelorexamen: augustus 2015

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

1.1 Toepassingsgebied

Vanuit de studie naar fysische structuren is er interesse in wiskundige modellen die de onderliggende ruimtelijke ordening weergeven. Om deze structuur weer te geven worden discrete rooster differentiaal vergelijkingen met een beperkt interactie gebied gebruikt, zie ook [14].

Beschouw bijvoorbeeld de Laplaciaan van een functie ϕ:

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}.$$

Discretiseren in het eendimensionale geval geeft

$$\frac{1}{h^2}\left(\phi_{j+1}(t) + \phi_{j-1}(t) - 2\phi_j(t)\right),$$

op een rooster met $j \in \mathbb{Z}$ en h de afstand tussen twee roosterpunten. Deze uitdrukking wordt gebruikt in de eendimensionale Nagumo vergelijking:

$$\phi_j'(t) = \alpha\frac{1}{h^2}\left(\phi_{j+1}(t) + \phi_{j-1}(t) - 2\phi_j(t)\right) + f(\phi_j, a), \tag{1.1}$$

met α constant en de kubische term

$$f(\phi_j; a) = 2(1-\phi_j^2)(\phi_j - a), \quad -1 < a < 1.$$

Dit model wordt gebruikt om signaalvoortplanting in zenuwen te bestuderen, [11], [4].

Modellen met beperkt interactie gebied voldoen echter niet bij het gebruik van niet homogene materialen, ze hebben bijvoorbeeld moeite om de variatie van golven in levend weefsel weer te geven. Daarom wordt er gekeken naar modellen met een oneindig interactie gebied [3], [5]. Ook in de populatiedynamica komen modellen met een oneindig interactie bereik naar voren [19].

Vaak wordt een fractionele Laplaciaan $(-\Delta)^s$ gebruikt om deze interactie over oneindig bereik te modelleren. Voor $s \in (0,1)$ wordt de s-dimensionale fractionele Laplaciaan van een n dimensionale Schwartz functie ϕ gegeven door

$$(-\Delta)^s\phi(x) = c_{n,s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy,$$

waar $c_{n,s}$ een normalisatie constante is zie [18]. Als $s = 1$ geeft dit de standaard Laplaciaan. Linearisatie en discretisering van de fractionele Laplacianen geeft systemen van de vorm (1.2), die we in deze scriptie beschouwen, [10].

1.2 Het systeem

We beschouwen lineaire functionele differentiaal vergelijkingen, zoals beschreven in [13], maar dan met een oneindig aantal verschuivingen. Deze oneindige verschuivingen komen ook voor in [7]. Dit systeem wordt gegeven door:

$$\phi'(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) + f(\xi), \tag{1.2}$$

waar voor de verschuivingen $r_j \in \mathbb{R}$ de geldt dat

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ r_j &\neq r_k \qquad \text{als } j \neq k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Deze laatste twee eisen zijn slechts eisen om de representatie van een systeem uniek te maken, ze leggen verder geen beperkingen op aan het systeem. Dit systeem is homogeen als geldt dat $f(\xi) \equiv 0$.

Verder eisen we van de matrix $A_j(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{d \times d}$ dat hij uniform begrensd is en dat voor

$$||A_j|| := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A_j(\xi)| \tag{1.4}$$

geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| e^{l|r_j|} < \infty, \tag{1.5}$$

voor een $l > 0$. Deze eis komt overeen met de eis die in [7] aan de matrices gesteld wordt.

1.3 Uitgangspunten

Alvorens de hoofdstelling te kunnen formuleren zijn eerst de volgende definities nodig

1.3.1 Operatoren

We definiëren voor $\xi \in \mathbb{R}$ de lineaire functionaal

$$L(\xi)(\phi(\xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j), \qquad \phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d), \tag{1.6}$$

en de lineaire operator Λ_L geassocieerd met dit systeem:

$$(\Lambda_L \phi)(\xi) = \phi'(\xi) - L(\xi)(\phi(\xi)) = \phi'(\xi) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j). \tag{1.7}$$

1.3.2 Constant systeem

We hebben als speciaal geval het systeem waarin de matrices niet van ξ afhangen, dat is $\mathcal{A}_j$ zijn constant. Dit constante coëfficiënten systeem wordt gegeven door:

$$\phi'(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j) + f(\xi), \tag{1.8}$$

of in het homogene geval

$$\phi'(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j). \tag{1.9}$$

De hierbij behorende lineaire functionaal noteren we met

$$\mathcal{L}(\phi(\xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j), \qquad \phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d). \tag{1.10}$$

Ten slotte definiëren we de lineaire operator $\Lambda_{\mathcal{L}}$ geassocieerd met dit systeem:

$$(\Lambda_{\mathcal{L}}\phi)(\xi) = \phi'(\xi) - \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j). \tag{1.11}$$

1.3.3 Geadjungeerde

Definitie 1.1. De geandjungeerde operator L^* van de operator L als in vergelijking (1.6) wordt gegeven door

$$L^*(\xi)(\psi(\xi)) = -\sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi - r_j)^* \psi(\xi - r_j),$$

met $A_j(\xi - r_j)^*$ de geconjungeerde getransponeerde matrix.
De geadjungeerde operator Λ_L^* van de operator Λ_L als in vergelijking (1.7) wordt gegeven door

$$(\Lambda_L^*\psi)(\xi) = -\psi'(\xi) + L^*(\xi)(\psi(\xi)) = -\psi'(\xi) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi - r_j)^* \psi(\xi - r_j).$$

Merk op dat geldt $\Lambda_L^* = -\Lambda_{L^*}$. Voor deze uitdrukking wordt de term geadjungeerde gebruikt omdat er voor $\phi \in W^{1,p}$ en $\psi \in W^{1,q}$, met $p, q \geq 1$ zodanig dat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, geldt dat

$$\langle \Lambda_L \phi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} (\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\Lambda_L^* \psi)(\xi)} \phi(\xi) d\xi = \langle \phi, \Lambda_L^* \psi \rangle,$$

zie B.2.

1.3.4 Asymptotisch hyperbolisch

Voor een lineaire functionaal $\mathcal{L}$ met constante coëfficiënten (1.10) hebben we de functie $\Delta_{\mathcal{L}} : D \to \mathbb{C}^{d\times d}$ gegeven door:

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) = sI - \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}. \tag{1.12}$$

Merk op dat (1.5) garandeert dat deze sommatie bestaat voor $|\Re(s)| < l$, dus voor een strook D rond de imaginaire as.

Definitie 1.2. We noemen een systeem met constante coëfficiënten **hyperbolisch** als voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\det(\Delta_{\mathcal{L}}(iy)) \neq 0.$$

Definitie 1.3. We noemen L **asymptotisch hyperbolisch naar** $\pm\infty$ als er een hyperbolisch systeem met constante coëfficiënten

$$\mathcal{L}_{\pm}(\phi(\xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_{j\pm}\phi(\xi + r_j), \qquad \phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d),$$

zoals in vergelijking (1.10) bestaat, zodanig dat voor bijna alle $\xi \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$L(\xi)(\phi(\xi)) = \mathcal{L}_{\pm}(\phi(\xi)) + M_{\pm}(\xi)(\phi(\xi)), \qquad \phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d),$$

met

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} ||M_{\pm}(\xi)|| = 0.$$

De term $M_{\pm}(\xi)\phi$ geeft de verstoring ten opzichte van het constante systeem en wordt gegeven door

$$M_{\pm}(\xi)(\phi(\xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} B_{j\pm}(\xi)\phi(\xi + r_j).$$

Als L asymptotisch hyperbolisch naar zowel ∞ als naar $-\infty$ is dan noemen we L **asymptotisch hyperbolisch**.

Merk op dat daar $\lim_{\xi\to\pm\infty} ||M_{\pm}(\xi)|| = 0$ geldt voor alle ϕ, er geldt dat

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} B_{j\pm}(\xi) = 0$$

en dus in het bijzonder

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} A_j(\xi) = \mathcal{A}_{j\pm} + \lim_{\xi\to\pm\infty} B_{j\pm}(\xi) = \mathcal{A}_{j\pm}.$$

1.4 Hoofdresultaat

Met toepassing van bovenstaande definities is de hoofdstelling te formuleren. In hoofdstuk 2 worden de precieze definities gegeven van de in deze stelling gebruikte begrippen uit de functionaal-analyse.

Stelling 1.4. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch zijn. Dan geldt voor alle $1 \leq p \leq \infty$ dat de operator $\Lambda_L : W^{1,p} \to L^p$ een Fredholm operator is. De kern $\mathcal{K}_L^p \subseteq W^{1,p}$ van Λ_L is onafhankelijk van p en we kunnen dus schrijven $\mathcal{K}_L^p = \mathcal{K}_L$. Hetzelfde geldt voor de geadjungeerde L^* met de bijbehorende operator Λ_{L^*}. Het bereik $\mathcal{R}_L^p \subseteq L^p$ van Λ_L wordt gegeven door*

$$\mathcal{R}_L^p = \{f \in L^p | \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} f(\xi) d\xi = 0, \ \ \forall \psi \in \mathcal{K}_{L^*}\}. \tag{1.13}$$

Verder geldt dat

$$\dim \mathcal{K}_{L^*} = codim \ \mathcal{R}_L^p, \ \ \dim \mathcal{K}_L = codim \ \mathcal{R}_{L^*}^p, \ \ ind(\Lambda_L) = -ind(\Lambda_{L^*}). \tag{1.14}$$

Als $L = \mathcal{L}$ een hyperbolische constante coëfficiënten operator is dan geldt dat

$$codim \ \mathcal{R}_{\mathcal{L}}^p = 0, \ \ \dim \mathcal{K}_{\mathcal{L}} = 0, \ \ ind(\Lambda_{\mathcal{L}}) = 0, \tag{1.15}$$

met andere woorden $\Lambda_{\mathcal{L}}$ is een isomorfisme.

Het equivalent van de stelling voor een eindig aantal verschuivingen, stelling A uit [13], is onder andere gebruikt om het bestaan van lopende golf oplossingen voor de Nagumo vergelijking in meerdere dimensies en de uniciteit van deze oplossing in het geval dat de golfsnelheid ongelijk is aan 0 te bewijzen, [14]. Verder is de stelling voor het eindige geval ook gebruikt om de niet-lineaire stabiliteit van de snelle golfoplossingen van de eendimensionale Nagumo vergelijking (1.1) vast te stellen, [12]. Voor de Nagumo vergelijking in hogere dimensies geldt met behulp van deze stelling dat de lopende golven die zich in rationale richtingen voortbewegen niet-lineair stabiel zijn onder kleine verstoring, [9].

In deze scriptie wordt het bewijs gezocht voor deze stelling die het equivalent van stelling A uit [13] is, maar dan voor een oneindig aantal verschuivingen. Ook is deze stelling verwant aan theorie 2 uit [7]. Verschil met [7] is dat daar gekeken wordt naar matrix convolutie kernels, waar zich een continue term in bevindt. Als deze continue term gelijk aan nul gesteld wordt krijg je vergelijking (1.2).

Het bewijs uit [7] gebruikt een afschatting van normen om daarna een meer abstracte operator stelling toe te passen. Deze aanpak levert echter geen expliciete uitdrukking zoals vergelijking (1.13) op voor het bereik. Daarom is voor het bewijs gekozen om grotendeels de lijn van het bewijs uit [13] te volgen. Een grote afwijking van deze lijn vindt plaats in hoofdstuk 3. In plaats van gebruik te maken van gedempte distributies om een vergelijking voor de afgeleide van de Greense functie te bepalen, wordt een directe berekening gebruikt om tot deze vergelijking te komen.

2 Toelichtingen op gebruikte definities

In dit hoofdstuk worden de definities, die gebruikt worden voor het bewijs, gegeven en toegelicht. In het bijzonder worden hyperbolische en asymptotisch hyperbolische systemen herhaald en verder uitgewerkt.

2.1 Basis definities

Ten eerste de definitie van een Fredholm Operator:

Definitie 2.1. Laat X, Y twee Banach ruimtes zijn. Een begrensde lineaire operator $T : X \to Y$ is een **Fredholm Operator** als geldt dat

- de kern $\mathcal{K}_T \subseteq X$ is eindig dimensionaal,
- het bereik $\mathcal{R}_T \subseteq Y$ is gesloten,
- $\mathcal{R}_T$ heeft eindige codimensie in Y.

De **Fredholm index** is dan gelijk aan

$$\mathrm{ind}(T) = \dim \mathcal{K}_T - \ \mathrm{codim}\ \mathcal{R}_T.$$

Nu twee definities over continuïteit, de eerste over de continuïteit van een familie van functies, de tweede over een vorm van continuïteit sterker dan gewone continuïteit:

Definitie 2.2. Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en laat (Y, d) een metrische ruimte. Een familie S van functies van X naar Y is **equicontinu in** $\xi_0 \in X$ als voor alle $\epsilon > 0$ er een open omgeving N van ξ_0 bestaat zodanig dat $d(f(\xi_0), f(\xi)) < \epsilon$ voor alle $f \in S$ en $\xi \in N$. Als S equicontinu is in alle punten van X dan is S **equicontinu**. ([16])

Definitie 2.3. Een functie f op een compact interval $[a, b]$ is **absoluut continu** als de volgende equivalente definities gelden

1. als voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle eindige rijen paarsgewijs disjuncte intervallen die voldoen aan

$$\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \delta$$

   geldt dat

$$\sum_{j=1}^{N} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon.$$

2. als er een Lebesque integreerbare functie g op $[a, b]$ bestaat zodanig dat

$$f(\xi) - f(a) = \int_a^\xi g(s)ds.$$

   In dit geval geldt dat $g = f'$ bijna overal.

Met behulp van het eerste deel van de definitie is in te zien dat elke Lipschitz-continue functie absoluut continu is.

Daar de operator Λ_L functies uit $W^{1,p}$ afbeeldt op L^p, volgen hier de definities van deze twee ruimtes.

Definitie 2.4. Laat $||\cdot||_{L^p}$ voor $1 \leq p < \infty$ en f meetbaar gegeven worden door

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Voor $p = \infty$ wordt $||\cdot||_{L^p}$ gegeven door

$$||f||_{L^\infty} = \text{esssup}|f|.$$

Definieer N als

$$N := \{f : \text{ meetbaar en } f = 0 \text{ bijna overal } \}.$$

De ruimte $\mathcal{L}^p$ wordt voor $1 \leq p \leq \infty$ gegeven door

$$\mathcal{L}^p := \{f : f \text{ is meetbaar en } ||f||_{L^p} < \infty\}.$$

De ruimte L^p wordt dan gegeven door

$$L^p = \mathcal{L}^p/N.$$

Er geldt dat $||\cdot||_{L^p}$ een norm is op L^p voor $1 \leq p \leq \infty$ en dat L^p compleet is voor deze norm en dus een Banach ruimte. ([17])

Definitie 2.5. Voor $1 \leq p \leq \infty$ wordt de **Sobolev ruimte** $W^{1,p}$ gegeven door

$$W^{1,p} := \{f \in L^p : f \text{ absoluut continu en } f' \in L^p\}.$$

De norm $||\cdot||_{W^{1,p}}$ wordt gegeven door

$$||f||_{W^{1,p}} = ||f||_{L^p} + ||f'||_{L^p}$$

Verder geldt dat er er een constante $C > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $f \in W^{1,p}$ geldt dat

$$||f||_{L^\infty} \leq C||f||_{W^{1,p}}, \tag{2.1}$$

zie [2, Thm. 8.8.]. Dus in het bijzonder geldt dat als $f \in W^{1,p}$ dat $||f||_{L^\infty} < \infty$, dus $f \in L^\infty$.

Voor deze scriptie wordt de volgende gegeneraliseerde versie van het inwendig product gebruikt:

Definitie 2.6. Het inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tussen een L^p functie f en een L^q functie g, met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wordt gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\overline{g(\xi)} d\xi.$$

Merk op dat de integraal in deze uitdrukking bestaat en eindig is vanwege Hölders ongelijkheid.

Voor de duidelijkheid van de notatie volgen de definities van twee vaak gebruikte functies.

Definitie 2.7. De Heavyside functie $H(\xi)$ wordt gegeven door

$$H(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{als } \xi < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{als } \xi = 0, \\ 1, & \text{als } \xi > 0. \end{cases} .$$

Definitie 2.8. De dirac-delta functie $\delta(\xi)$ wordt gegeven door

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{als } \xi \neq 0 \\ +\infty, & \text{als } \xi = 0. \end{cases}$$

en hiervoor geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) = 1.$$

In het bijzonder geldt voor een functie f dat

$$\int_{\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi - \xi_0)d\xi = f(\xi_0).$$

De dirac-delta functie is geen echte functie, maar definieert door middel van bovenstaande integraal een operator op de continue functies.

Voor differentiaal vergelijkingen bestaat het begrip Greense functie, waarvoor we de volgende informele definitie geven:
Voor een lineaire differentiaal operator $T : W^{1,p} \to L^p$ wordt een oplossing van

$$T(G(\xi)) = \delta(\xi),$$

de Greense functie van die operator genoemd. Deze functie heeft als eigenschap dat zijn afgeleide in 0 een discontinuïteit heeft. De oplossing $\phi \in W^{1,p}$ van de vergelijking $T(\phi(\xi)) = f(\xi)$, met $f \in L^p$ wordt dan gegeven door

$$\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi - s)f(s)ds. \tag{2.2}$$

In het bijzonder geeft een Greense functie een isomorfisme tussen $W^{1,p}$ en L^p.

Voor het bewijs van de hoofdstelling zijn we vooral geïnteresseerd in de convolutie integraal (2.2) en het isomorfisme dat daarmee te verkrijgen is.

2.2 Fouriertransformaties en distributies

De definitie van de Fouriertransformatie die gebruikt wordt in deze scriptie is de volgende

Definitie 2.9. Laat $f \in L^1$. De **Fouriertransformatie** $\mathcal{F}(f)$ van f wordt gegeven door

$$\mathcal{F}(f)(\eta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\eta\xi}d\xi.$$

De **inverse Fouriertransformatie** $\mathcal{F}^{-1}(f)$ van f wordt gegeven door

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)e^{i\eta\xi}d\eta.$$

Er geldt dat de Fouriertransformatie van een L^1 functie continu is, maar niet standaard een L^1 functie, [6, Hfst 4.1 & 4.2]. De inverse Fouriertransformatie op L^1 is dus in het bijzonder niet de inverse van de Fouriertransformatie op L^1.

De hierboven gedefinieerde Fouriertransformatie geldt echter alleen voor L^1 functies. Om de Fouriertransformatie uit te breiden zijn de volgende definities nodig:

Definitie 2.10. Een functie $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ is een **Schwartz functie** als geldt dat $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$ en als het verval van ζ en al zijn afgeleiden in oneindig groter is dan welk polynoom dan ook. Noteer de ruimte van Schwartz functies op $\mathbb{R}$ met $\mathcal{S}$.

Er geldt dat $\mathcal{S}$ een dichte deelverzameling van L^p is voor $1 \leq p < \infty$. Dit betekend dat $\mathcal{S} \subset L^1$, dus de Fouriertransformatie is gedefinieerd voor alle $\zeta \in \mathcal{S}$, er geldt zelfs dat de Fouriertransformatie $\mathcal{S}$ continu afbeeldt op zichzelf en dat zijn inverse gegeven wordt door de inverse Fouriertransformatie, zie [15, Thm 5.63, Thm 5.64].

De theorie van Plancherel geeft samen met het feit dat $\mathcal{S}$ dicht is in L^2 een uitbreiding voor de Fouriertransformatie op L^2 als een isometrisch isomorfisme, zie [6, Hfdst. 4.3] .

Merk op dat als voor een functie $f \in L^p$ de Fouriertransformatie integraal uit de definitie van de Fouriertransformatie op L^1 bestaat, dan is de Fouriertransformatie van f gelijk aan deze integraal.

Definitie 2.11. Een **gedempte distributie** $\zeta \to (f, \zeta)$ is een lineaire afbeelding van $\mathcal{S}$ naar $\mathbb{C}$ waarvoor geldt dat als ζ_n convergeert naar ζ in $\mathcal{S}$ dan geldt dat (f, ζ_n) convergeert naar (f, ζ)

In het bijzonder geldt dat als $f \in L^p$ dan is f een gedempte distributie en geldt dat

$$(f, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)f(\xi)d\xi.$$

De uitbreiding van de Fouriertransformatie naar gedempte distributies, [15, Def 5.66], wordt nu gegeven door

Definitie 2.12. Laat f een gedempte distributie de **Fouriertransformatie** $\mathcal{F}(f)$ van f wordt gegeven door

$$(\mathcal{F}(f), \zeta) = (f, \mathcal{F}(\zeta)).$$

Er geldt dat als f een Fouriertransformatie heeft als functie, dan is deze gelijk aan de Fouriertransformatie van f als gedempte distributie. Voor eigenschappen van de Fouriertransformatie van gedempte distributies zie verder Appendix A.

Verwant aan Schwartz functies en gedempte distributies zijn testfuncties en distributies:

Definitie 2.13. Een functie $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ is een **testfunctie** als geldt dat $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d)$ en er een compacte deelverzameling $K \subset \mathbb{R}$ is zodanig dat de support van ζ bevat is in K. Noteer de ruimte van testfuncties op $\mathbb{R}$ met $\mathcal{D}$.

Er geldt dat $\mathcal{D}$ een dichte deelruimte van $\mathcal{S}$ is, zie [15, paragraaf 5.1.6.].

Definitie 2.14. Een **distributie** $\zeta \to (f, \zeta)$ is een lineaire afbeelding van $\mathcal{D}$ naar $\mathbb{C}$ waarvoor geldt dat als ζ_n convergeert naar ζ in $\mathcal{D}$ dan geldt dat (f, ζ_n) convergeert naar (f, ζ)

Daar $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{S}$ is, geldt dat de ruimte van gedempte distributies een lineaire deelruimte is van de ruimte van distributies, [15]

Voor distributies en dus voor gedempte distributies geldt dat

Definitie 2.15. De **afgeleide** f' van een distributie f wordt gegeven door

$$(f', \zeta) = -(f, \zeta').$$

Zie [15, Def 5.36].

2.3 Asymptotisch Hyperbolisch

Voor een lineaire functionaal $\mathcal{L}$ met constante coëfficiënten (1.10) hebben we de volgende uitdrukking

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) = sI - \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}. \tag{2.3}$$

Merk op dat (1.5) garandeert dat deze sommatie bestaat voor $|\Re(s)| < l$, dus voor een strook rond de imaginaire as.

Definitie 2.16. We noemen een systeem met constante coëficienten **hyperbolisch** als voor alle $y \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\det(\Delta_{\mathcal{L}}(iy)) \neq 0.$$

Propositie 2.17. *De functie $\Delta_{\mathcal{L}}(s)$ is holomorfisch in de strook $|\Re(s)| < l$.*

Bewijs. Het verschil van twee holomorfe functies is een holomorfe functie dus uit (2.3) volgt dat $\Delta_{\mathcal{L}}(s)$ holomorfisch is in de strook $|\Re(s)| < l$ als sI en $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}$ holomorfisch zijn in diezelfde strook. Merk op dat sI een complexe polynoom is, dus holomorfisch in heel $\mathbb{C}$, dus ook in de strook $|\Re(s)| < l$. De exponentiële functie is holomorfisch in heel $\mathbb{C}$, dus in het bijzonder geldt dat voor alle j de functie $\mathcal{A}_j e^{sr_j}$ holomorfisch is in de strook $|\Re(s)| < l$.

Verder geldt voor alle j dat in de strook $|\Re(s)| < l$ geldt dat

$$|\mathcal{A}_j e^{sr_j}| = |\mathcal{A}_j| e^{|s||r_j|} \leq |\mathcal{A}_j| e^{l|r_j|}.$$

Merk op dat deze laatste term een constante is. Uit (1.5) volgt dat $\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| e^{l|r_j|}$ convergeert. Dus de serie van holomorfe functies $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}$ is normaal convergent (normally convergent). Dus in het bijzonder geldt dat $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}$ een holomorfe functie is, zie theorie III.1.6 van [8]. □

Voor de strook $|\Re(s)| < l$ geldt dat

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) = sI + O(1), \quad |\Im(s)| \to \pm\infty,$$

uniform en dus zijn er maar eindig veel λ zodanig dat $\det(\Delta_{\mathcal{L}}(\lambda)) = 0$ in de strook $|\Re(s)| < l$. In het bijzonder geeft dit samen met propositie 2.17):

Gevolg 2.18. *Laat $\mathcal{L}$ hyperbolisch zijn. Dan is er een $0 < k \leq l$ zodanig dat $(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1}$ holomorfisch is in de strook $|\Re(s)| < k$.*

Beschouw een systeem L. Deze kunnen we herschrijven als de som van een systeem $\mathcal{L}$ met constante coëfficiënten en een storingsterm M

$$L(\xi)(\phi(\xi)) = \mathcal{L}(\phi(\xi)) + M(\xi)(\phi(\xi)), \qquad \phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^d), \tag{2.4}$$

waar we de storingsterm M kunnen schrijven als

$$M(\xi)(\phi(\xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\xi)\phi(\xi + r_j). \tag{2.5}$$

Merk op dat we in het bovenstaande hebben dat $\mathcal{L}$ als in (1.10) bestaat, in het bijzonder betekent dit dat $\mathcal{L}$ aan de convergentie eis (1.5) voldoet. Merk op dat (2.4) geldt voor alle ϕ, dit betekend dat

$$A_j(\xi) = \mathcal{A}_j + B_j(\xi).$$

Dit geeft ons dat

$$|B_j(\xi)| = |A_j(\xi) - \mathcal{A}_j| \leq |A_j(\xi)| + |\mathcal{A}_j|,$$

dus in het bijzonder hebben we dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)| e^{l|r_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (|A_j(\xi)| + |\mathcal{A}_j|) e^{l|r_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} |A_j(\xi)| e^{l|r_j|} + \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j e^{l|r_j|}. \tag{2.6}$$

Daar we hadden dat L en $\mathcal{L}$ voldoen aan (1.5) geeft dit ons dat $M(\xi)$ voldoet aan (1.5).

3 Greense functie voor een systeem met constante coëfficiënten

Beschouw een hyperbolisch constant coëfficiënten systeem (1.8). In dit hoofdstuk construeren we een Greense functie voor zo'n systeem. Hiervoor wordt de Fouriertransformatie van $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1}$ gebruikt. Om deze te kunnen toepassen herschrijven we $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1}$ eerst. Voer hiervoor de volgende notatie in:

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) = sI - \tilde{\mathcal{L}}(s), \tag{3.1}$$

met $\tilde{\mathcal{L}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{sr_j}$. Dan kunnen we $\Delta_{\mathcal{L}}(s)$ herschrijven

Propositie 3.1. *Voor de operator $R_{\mathcal{L}}(s)$ gegeven door*

$$R_{\mathcal{L}}(s) = (\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} - \frac{1}{s+l}I - \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{(s+l)^2},$$

geldt dat $R_{\mathcal{L}}(s) = O(|\Im(s)|^{-3})$ in een strook rond de imaginaire-as ($|\Re(s)| < \alpha$, voor een $\alpha > 0$).

Bewijs. Gebruik de geometrische reeks, zie voor het volledige bewijs B.3. □

We kunnen $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1}$ dus schrijven als

$$(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1} = \frac{1}{i\eta + l}I + \frac{\tilde{\mathcal{L}}(i\eta) + lI}{(i\eta + l)^2} + R_{\mathcal{L}}(i\eta). \tag{3.2}$$

Dit betekent dat $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1} = O(|\eta|^{-1})$ als $\eta \to \pm\infty$ en dus geldt $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1} \in L^2$. Dit betekent dat we de inverse Fouriertransformatie kunnen nemen:

$$\mathcal{G}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\eta} (\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1} d\eta = \mathcal{F}^{-1}\left((\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1}\right). \tag{3.3}$$

Daar de integrand niet integreerbaar is, is de Cauchy Principal Value nodig om deze integraal betekenis te geven.

Om problemen met deze speciale integraal te voorkomen splitsen we $(\Delta_{\mathcal{L}}(i\eta))^{-1}$ op in meerdere termen, daar de inverse Fouriertransformatie van elk van deze individuele termen eenvoudiger is. Propositie 2.18 geeft dat $(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1}$ holomorfisch is in $|\Re(s)| < k$. Merk op dat de functie $\frac{1}{s+l}I$ ook holomorfisch is in diezelfde strook. Dit betekent dat $(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1}$, wegens propositie 3.1 herschreven kan worden in de vorm

$$(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} = \frac{1}{s+l}I + F_{\mathcal{L}}(s), \tag{3.4}$$

met $F_{\mathcal{L}}(s)$ holomorfisch in de strook $|\Re(s)| < k$.

Uit vergelijking (3.4) volgt dat voor een strook $|\Re(s)| \leq a < k$ geldt dat $F_{\mathcal{L}}(s) = O(|s|^{-2})$ als $|\Im(s)| \to \infty$. Dus in het bijzonder geldt $F_{\mathcal{L}}(i\eta) = O(|\eta|^{-2})$ als $\eta \to \pm\infty$ en dus $F_{\mathcal{L}}(i\eta) \in L^1$. Dit betekent dat de inverse Fouriertransformatie $\check{F}_{\mathcal{L}}(\xi)$ van $F_{\mathcal{L}}(i\eta)$ continu is.

Propositie 3.2. *De inverse Fouriertransformatie $E_1(\xi)$ van $\dfrac{1}{i\eta + l}$ wordt gegeven door*

$$E_1(\xi) = H(\xi)e^{-l\xi} = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ e^{-l\xi}, & \xi > 0. \end{cases}$$

Bewijs. Zie A.4. $\square$

Merk op dat $E_1(\xi)$ continu is voor $\xi \neq 0$. Er geldt dus dat $\mathcal{G}(\xi)$ herschreven kan worden als

$$\mathcal{G}(\xi) = E_1(\xi)I + \check{F}_{\mathcal{L}}(\xi). \tag{3.5}$$

Met behulp van deze uitdrukking kan een afschatting van $|\mathcal{G}(\xi)|$ gemaakt worden voor alle $\xi \in \mathbb{R}$:

Propositie 3.3. *Er zijn een $\alpha > 0$ en een $\beta > 0$ zodanig dat*

$$|\mathcal{G}(\xi)| \leq \beta e^{-\alpha|\xi|}.$$

Bewijs. We hebben uit (3.5)

$$\mathcal{G}(\xi) = E_l(\xi)I + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi}F_{\mathcal{L}}(i\eta)d\eta. \tag{3.6}$$

In het bijzonder hadden we dat de functie $F_{\mathcal{L}}(i\eta)$ holomorfisch is in de strook $|\Re(s)| \leq a$ en voldoet aan $F_{\mathcal{L}}(s) = O(|s|^{-2})$ als $|\Im(s)| \to \infty$. Neem aan dat $\xi < 0$. Uit de Cauchy integraal stelling (zie theorie II.2.7 [8]) volgt dat voor alle $R > 0$ geldt dat

$$\int_{-iR}^{iR} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz + \int_{iR}^{iR-a} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz + \int_{iR-a}^{-iR-a} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz + \int_{-iR-a}^{-iR} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz = 0,$$

omdat deze integralen samen een gesloten kromme beschrijven.

Merk op dat als $R \to \infty$ dan gaat $F_{\mathcal{L}}(z)$ op de lijn tussen iR en $iR - a$ en op de lijn tussen $-iR - a$ en $-iR$ naar 0, want $F_{\mathcal{L}}(s) = O(|s|^{-2})$ als $|\Im(s)| \to \infty$. Dus

$$\lim_{R\to\infty} \int_{iR}^{iR-a} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-iR-a}^{-iR} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz = 0.$$

Dus er geldt dat

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz + \int_{i\infty-a}^{-i\infty-a} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz = 0,$$

ofwel

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz = \int_{-i\infty-a}^{i\infty-a} e^{z\xi}F_{\mathcal{L}}(z)dz.$$

Dit geeft ons dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta-a)\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta - a) d\eta.$$

Invullen in (3.6) geeft dat

$$\mathcal{G}(\xi) = E_l(\xi)I + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta-a)\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta - a) d\eta = E_l(\xi)I + \frac{e^{-a\xi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta - a) d\eta. \tag{3.7}$$

Neem nu aan dat $\xi < 0$, dan verkrijgen we volgens de zelfde methode als hierboven, maar dan over de rechthoek $-iR, iR, iR + a, -iR + a$ dat

$$\mathcal{G}(\xi) = E_l(\xi)I + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+a)\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta + a) d\eta = E_l(\xi)I + \frac{e^{a\xi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi} F_{\mathcal{L}}(i\eta + a) d\eta. \tag{3.8}$$

Daar $F_{\mathcal{L}}(i\eta + a)$ en $F_{\mathcal{L}}(i\eta - a)$ in L^1 zitten volgt dat de integralen in (3.7) en (3.8) absoluut convergeren. Merk op dat $a > 0$ dus als $\xi < 0$ dan geldt $e^{a\xi} = e^{-a|\xi|}$. Dus als we stellen $\alpha = a$ dan krijgen we uit (3.7) en (3.8) dat er een $\beta > 0$ is zodanig dat $|\mathcal{G}(\xi)| \leq \beta e^{-\alpha|\xi|}$. □

Om een uitdrukking voor de afgeleide $\mathcal{G}'$ te verkrijgen is de tweede term uit vergelijking (3.2) nodig. Om de Fouriertransformatie van deze term te kunnen nemen gebruiken we de volgende propositie:

Propositie 3.4. *De inverse Fouriertransformatie* $E_2(\xi)$ *van* $\dfrac{1}{(i\eta + l)^2}$ *wordt gegeven door*

$$E_2(\xi) = H(\xi)\xi e^{-l\xi} = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ \xi e^{-l\xi}, & \xi > 0. \end{cases}$$

Bewijs. Zie A.5. □

Merk op dat

$$\frac{\tilde{\mathcal{L}}(i\eta) + lI}{(i\eta + l)^2} = \frac{\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)}{(i\eta + l)^2} + \frac{l}{(i\eta + l)^2} I.$$

De inverse Fouriertransformatie van $\dfrac{l}{(i\eta + l)^2}$ is wegens propositie 3.4 gelijk aan $lH(\xi)\xi e^{-l\xi} = lE_2(\xi)$. Voor de inverse Fouriertransformatie $\mathcal{F}^{-1}(f) = \hat{f}(\xi)$ van een functie f geldt dat $F^{-1}(e^{i\eta b} f) = \hat{f}(\xi + b)$. Daar $\tilde{\mathcal{L}}(i\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}$ volgt met propositie 3.4 en Fubini samen met A.6 dat

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)}{(i\eta + l)^2}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j H(\xi + r_j)(\xi + r_j) e^{-l(\xi + r_j)}.$$

Dus we krijgen voor $\mathcal{G}(\xi)$ de volgende uitdrukking

$$\mathcal{G}(\xi) = E_1(\xi) + lE_2(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j E_2(\xi + r_j) + \mathcal{F}^{-1}(R_{\mathcal{L}}(i\eta)), \tag{3.9}$$

ofwel

$$\mathcal{G}(\xi) = H(\xi)e^{-l\xi} + lH(\xi)\xi e^{-l\xi} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j H(\xi+r_j)(\xi+r_j)e^{-l(\xi+r_j)} + \mathcal{F}^{-1}(R_{\mathcal{L}}(i\eta)). \tag{3.10}$$

Differentiëren naar ξ geeft

$$\frac{d}{d\xi} H(\xi)e^{-l\xi} = -lH(\xi)e^{-l\xi} + \delta(\xi)e^{-l\xi} = -lH(\xi)e^{-l\xi} + \delta(\xi),$$

$$\frac{d}{d\xi} lH(\xi)\xi e^{-l\xi} = lH(\xi)e^{-l(\xi)} - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi},$$

$$\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}^{-1}(R_{\mathcal{L}}(i\eta)) = \mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)).$$

Propositie 3.1 geeft dat $R_{\mathcal{L}}(i\eta)$ van orde $|\eta|^{-3}$ is, dus $i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta))$ is van orde $|\eta|^{-2}$ en dus geldt $i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)) \in L^1$ en dus kunnen we inderdaad de inverse Fouriertransformatie $\mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta))$ nemen en er geldt dat deze continu is.

Voor $\mathcal{G}'(\xi)$ levert dit de volgende uitdrukking op:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(\xi) &= -lH(\xi)e^{-l\xi} + \delta(\xi) + lH(\xi)e^{-l(\xi)} - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(1 - l(\xi + r_j)\right) H(\xi + r_j)e^{-l(\xi+r_j)} + \mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(\xi) &= \delta(\xi) - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(1 - l(\xi + r_j)\right) H(\xi + r_j)e^{-l(\xi+r_j)} + \mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hiermee krijgen we de volgende vergelijking

Propositie 3.5. *Voor $\mathcal{G}(\xi)$ als gedefinieerd hiervoor geldt dat*

$$\mathcal{G}'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi + r_k) + \delta(\xi).$$

Bewijs. Substitutie van $\mathcal{G}(\xi)$ en gebruik van

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\eta r_k} R_{\mathcal{L}}(i\eta) = \tilde{\mathcal{L}}(i\eta)R_{\mathcal{L}}(i\eta) = (i\eta I - \Delta(i\eta))R_{\mathcal{L}}(i\eta) = i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta) - \Delta(i\eta)R_{\mathcal{L}}(i\eta),$$

geeft het resultaat; zie B.4.

□

Merk op dat uit vergelijking (3.5) volgt dat voor $\xi \neq 0$ geldt dat $\mathcal{G}(\xi)$ continu is. Uit propositie 3.5 volgt dat de afgeleide $\mathcal{G}'(\xi)$ begrensd is voor $\xi \neq 0$ en dus geldt $\mathcal{G}(\xi)$ is absoluut continu voor $\xi \neq 0$. Verder volgt uit propositie 3.5 dat

$$\mathcal{G}'(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{G}(\xi + r_j) \quad \text{bijna overal.} \tag{3.12}$$

Voor $\xi = 0$ geven propositie 3.5 en vergelijking (3.5) dat

$$\lim_{\xi \uparrow 0} \mathcal{G}(\xi) - \lim_{\xi \downarrow 0} \mathcal{G}(\xi) = I. \tag{3.13}$$

Laat nu $f \in L^p$. Definieer ϕ als de convolutie van $\mathcal{G}$ en f:

$$\phi = \mathcal{G} * f. \tag{3.14}$$

Uit propositie 3.3 volgt dat $\mathcal{G} \in L^1$. Dit geeft ons met Youngs ongelijkheid dat

$$||\phi||_{L^p} \leq ||\mathcal{G}||_{L_1} \cdot ||f||_{L^p} < \infty,$$

dus $\phi \in L^p$. We kunnen zelfs aantonen dat $\phi \in W^{1,p}$:

Propositie 3.6. *De functie ϕ als gedefinieerd hierboven zit in $W^{1,p}$ en (1.8) met ϕ en f als hierboven geldt bijna overal.*

Bewijs. Beschouw ϕ als een distributie. Laat ζ een testfunctie zijn, we tonen aan dat

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \zeta'(\xi)\phi(\xi)d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\phi(\xi + r_j)d\xi + \int_{\infty}^{\infty} \zeta(\xi)f(\xi)d\xi, \tag{3.15}$$

Uit vergelijking (3.14) en het dan toepassen van propositie B.5 samen met Fubini's stelling volgt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\phi(\xi + r_j)d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)f(\eta)d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)f(\eta)d\xi d\eta.$$

Vergelijking (3.12) geeft nu dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}(\xi+r_j-\eta)f(\eta)d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}'(\xi - \eta)d\xi \right) f(\eta)d\eta.$$

Uit vergelijking (3.13) en het daarna weer toepassen van vergelijking (3.14) volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}'(\xi - \eta)d\xi \right) f(\eta)d\eta$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\zeta'(\xi)\mathcal{A}_j\mathcal{G}(\xi-\eta)d\xi\right)f(\eta)d\eta - \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\eta)f(\eta)d\eta$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\zeta'(\xi)\phi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)f(\xi)d\xi.$$

Dus we hebben

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j)d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty}\zeta'(\xi)\phi(\xi)d\eta - \int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)f(\xi)d\xi,$$

dus vergelijking (3.15) geldt. Laat q zodanig dat $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$, daar ζ een testfunctie is geldt dat $\zeta \in L^q$. Met behulp van Hölders ongelijkheid krijgen we dat

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{A}_j\zeta(\xi)\phi(\xi+r_j)|\,d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty}|\mathcal{A}_j|\cdot||\zeta||_{L^q}\cdot||\phi(\xi+r_j)||_{L^p} = \sum_{j=1}^{\infty}|\mathcal{A}_j|\cdot||\zeta||_{L^q}\cdot||\phi||_{L^p} < \infty.$$

Dus met Fubini volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\xi)\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\zeta(\xi)\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j)d\xi.$$

Dus we hebben

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j),\zeta(\xi)\right) = -(\phi(\xi),\zeta'(\xi))-(f(\xi),\zeta(\xi)) = (\phi'(\xi),\zeta(\xi))-(f(\xi),\zeta(\xi)),$$

dus er geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j) = \phi'(\xi)-f(\xi).$$

Dus ϕ voldoet aan (1.8) en dus geldt dat $\phi \in W^{1,p}$, zie B.1. $\square$

Nu kan bewezen worden dat $\mathcal{G}$ inderdaad de Greense functie voor $\Lambda_{\mathcal{L}}$ is:

Stelling 3.7. *Neem aan dat het constante coëfficiënten systeem zoals in vergelijking (1.8) met bijbehorende lineaire operatoren $\mathcal{L}$ zoals in vergelijking (1.10) en $\Lambda_{\mathcal{L}}$ uit vergelijking (1.11) hyperbolisch is. Dan geldt voor $1 \leq p \leq \infty$ dat $\Lambda_{\mathcal{L}} : W^{1,p} \to L^p$ een isomorfisme is met inverse gegeven door de convolutie*

$$(\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}f)(\xi) = (\mathcal{G}*f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(\xi-\eta)f(\eta)d\eta,$$

waar $\mathcal{G}$ als gedefinieerd in vergelijking (3.3). De functie $\mathcal{G}$ voldoet aan de vergelijking

$$\mathcal{G}(\xi)| \leq \beta e^{-\alpha|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

voor een $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. In het bijzonder geldt dat $\mathcal{G}$ de Greense functie is van vergelijking (1.9) en dat voor iedere $f \in L^p$ geldt dat er een unieke oplossing $\phi = \Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}f \in W^{1,p}$ is voor de inhomogene vergelijking (1.8).

Bewijs. Laat $f \in L^p$ en laat $\phi = \mathcal{G} * f$ dan geeft propositie 3.6 dat $\phi \in W^{1,p}$ en dat $\Lambda_{\mathcal{L}}\phi = f$ en dus geldt dat $\Lambda_{\mathcal{L}} : W^{1,p}$ surjectief is. Neem nu aan dat $\Lambda_{\mathcal{L}}\psi = 0$ voor een $\psi \in W^{1,p}$. Dan voldoet ψ bijna overal aan vergelijking (1.9). Als we ψ beschouwen als gedempte distributie dan kunnen we zijn Fouriertransformatie $\mathcal{F}(\psi)$ nemen. Hiervoor geldt dat $\mathcal{F}(\psi')(\eta) = i\eta\mathcal{F}(\psi)(\eta)$ en

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \psi(\xi + r_j)\right)(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j} \mathcal{F}(\psi)(\eta),$$

zie A.1 en A.3.

Daar ψ bijna overal voldoet aan vergelijking (1.9) geldt dat

$$i\eta\mathcal{F}(\psi)(\eta) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\right)\mathcal{F}(\psi)(\eta),$$

ofwel

$$\mathcal{F}(\psi)(\eta)\left(i\eta - \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\right) = 0.$$

Uit de definitie 2.16 van hyperbolisch volgt dat $\left(i\eta - \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\right) \neq 0$, dus $\mathcal{F}(\psi) = 0$ en dus geldt $\psi = 0$, dus $\Lambda_{\mathcal{L}}$ is injectief.

Dus $\Lambda_{\mathcal{L}}$ is een isomorfisme en daar we hadden dat voor alle $f \in L^p$ geldt dat voor $\phi = \mathcal{G} * f$ geldt dat $\Lambda_{\mathcal{L}}\phi = f$, wordt de inverse van $\Lambda_{\mathcal{L}}$ dus gegeven door de convolutie $\mathcal{G} * f$. De afschatting van de functie $\mathcal{G}$ volgt uit propositie 3.3. $\square$

4 Niet constante coëfficiënten

Met behulp van de Greense functie voor hyperbolische systemen met constante coëfficiënten, kunnen eigenschappen van de operator Λ_L van asymptotische hyperbolische systemen met niet constante coëfficiënten vastgesteld worden.

Eerst bekijken we systemen die maar een klein beetje afwijken van een hyperbolisch constante coëfficiënten systeem:

Lemma 4.1. *Neem aan dat voor een operator L als in vergelijking (1.7) geldt dat er een hyperbolische operator met constante coëfficiënten $\mathcal{L}$ is zodanig dat $L(\xi) = \mathcal{L} + M(\xi)$ als in vergelijking (2.4), met M als in vergelijking (2.5). Dan bestaan er constanten $\epsilon > 0$, $\tilde{\alpha} > 0$ en $\hat{\beta} > 0$ zodanig dat als voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ geldt dat*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)| e^{l|r_j|} \leq \epsilon \tag{4.1}$$

dan geldt voor $1 \leq p \leq \infty$ dat $\Lambda_L : W^{1,p} \to L^p$ een isomorfisme is en er is een functie $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^{d\times d}$ die voldoet aan de puntsgewijze begrenzing

$$|G(\xi,\eta)| \leq \tilde{\beta} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}, \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.2}$$

zodanig dat

$$(\Lambda_L^{-1} h)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,\eta) h(\eta) d\eta \tag{4.3}$$

voor alle $h \in L^p$.

Bewijs. Laat $\mathcal{G}$ als in stelling 3.7 de Greense functie behorende bij $\mathcal{L}$, dan geldt voor $h \in L^p$ dat

$$\left((M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1})^j h\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_j(\xi,\eta) h(\eta) d\eta.$$

met

$$\Gamma_1(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\xi) \mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)$$
$$\Gamma_j(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(\xi,s)\Gamma_{j-1}(s,\eta) ds, \quad j \geq 2.$$

Uit vergelijking (3.16) volgt dat

$$|\Gamma_1(\xi,\eta)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} B_j(\xi)\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)|\, \beta e^{-\alpha|\xi + r_j - \eta|}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)|\, \beta e^{-\alpha|\xi-\eta-(-r_j)|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)|\, \beta e^{-\alpha||\xi-\eta|-|-r_j||} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)|\, \beta e^{\alpha|r_j|} e^{-\alpha|\xi-\eta|}.$$

Stel nu $0 < \epsilon < \dfrac{\alpha}{2\beta}$, dan geldt dat als vergelijking (4.1) geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)| \, \beta e^{\alpha|r_j|} \leq \beta\epsilon < \frac{\alpha}{2}.$$

Voer de volgende notatie in

$$\Psi(\xi - \eta) = \epsilon\beta e^{-\alpha|\xi-\eta|}. \tag{4.4}$$

Daar $0 < \epsilon < \dfrac{\alpha}{2\beta}$ geldt dat

$$\begin{aligned} ||\Psi||_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon\beta e^{-\alpha|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^{0} \epsilon\beta e^{\alpha\xi} d\xi + \int_{0}^{\infty} \epsilon\beta e^{-\alpha\xi} d\xi \\ &= \left(\frac{\epsilon\beta e^{\alpha\xi}}{\alpha}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{\epsilon\beta e^{-\alpha\xi}}{\alpha}\right)\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{2\beta\epsilon}{\alpha} < \frac{2\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} = 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dan kunnen we $\Gamma_j(\xi, \eta)$ afschatten met

$$|\Gamma_j(\xi, \eta)| \leq \Psi^{*j}(\xi - \eta). \tag{4.6}$$

Propositie B.6 geeft nu dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Gamma_j(\xi, \eta)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{*j}(\xi - \eta) \leq \tilde{\beta} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}, \tag{4.7}$$

met $\tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 2\epsilon\beta\alpha}$ en $\tilde{\beta} = \dfrac{\epsilon\beta\alpha}{\tilde{\alpha}}$.

Definieer nu de functie

$$G(\xi, \eta) = \mathcal{G}(\xi - \eta) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi - s) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j(s, \eta)\right) ds. \tag{4.8}$$

Merk op dat als (4.1) geldt, dan volg uit vergelijking (4.7) en vergelijking (3.16) dat voor een punt $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ geldt dat

$$\begin{aligned} |G(\xi, \eta)| &= \left| \mathcal{G}(\xi - \eta) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi - s) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j(s, \eta)\right) ds \right| \\ &\leq |\mathcal{G}(\xi - \eta)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi - s)| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Gamma_j(s, \eta)|\right) ds \\ &\leq \beta e^{-\alpha|\xi-\eta|} + \int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-\alpha|\xi-s|} \tilde{\beta} e^{-\tilde{\alpha}|s-\eta|} ds \end{aligned}$$

$$\beta e^{-\alpha|\xi-\eta|} + \tilde{\beta}\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi-s|-\tilde{\alpha}|s-\eta|} ds \tag{4.9}$$

Daar $\tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 2\epsilon\beta\alpha}$ geldt dat $0 < \tilde{\alpha} < \alpha$ en dus geldt

$$e^{-\alpha|\xi-\eta|} \leq e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}.$$

Lemma 4.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-s|-\tilde{\alpha}|s-\eta|} ds \leq \frac{2\alpha\left(e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} - e^{-\alpha|\xi-\eta|}\right)}{\alpha^2 - \tilde{\alpha}^2} \leq \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \tilde{\alpha}^2} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}.$$

Bewijs. Zie B.7 □

Invullen in vergelijking (4.9) geeft

$$|G(\xi,\eta)| \leq \beta e^{-\alpha|\xi-\eta|} + \beta\tilde{\beta}\frac{2\alpha}{\alpha^2 - \tilde{\alpha}^2} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} \leq \left(\beta + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \tilde{\alpha}^2}\right) e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} = \hat{\beta} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}. \tag{4.10}$$

Laat nu $h \in L^p$ zijn. Definieer ϕ_k als

$$\phi_k(\xi) = \left(\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \sum_{j=0}^{k} \left(M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}\right)^j h\right)(\xi).$$

Dan kunnen we schrijven

$$\phi_k(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\xi,\eta) h(\eta) d\eta,$$

met

$$G_k(\xi,\eta) = \mathcal{G}(\xi-\eta) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi-s)\left(\sum_{j=1}^{k} \Gamma_j(s,\eta)\right) ds.$$

Neem nu

$$\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi,\eta) h(\eta) d\eta.$$

Dan geldt voor $\xi \in \mathbb{R}$ dat

$$\begin{aligned}
|\phi_k(\xi) - \phi(\xi)| = &\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{G}(\xi-\eta) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi-s)\left(\sum_{j=1}^{k} \Gamma_j(s,\eta)\right) ds\right) h(\eta) d\eta \right.\\
&\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{G}(\xi-\eta) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi-s)\left(\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j(s,\eta)\right) ds\right) h(\eta) d\eta \right|\\
= &\left| - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi-s)\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j(s,\eta)\right) ds\right) h(\eta) d\eta \right|.
\end{aligned}$$

Uit vergelijking (4.6) volgt dat

$$\left| -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi - s) \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \Gamma_j(s,\eta) \right) ds \right) h(\eta) d\eta \right|$$

$$\leq \left| -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(\xi - s) \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j}(\xi - \eta)) \right) ds \right) h(\eta) d\eta \right|$$

$$= \left| \left(\left(\mathcal{G} * \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j} \right) \star h \right) (\xi) \right|.$$

Daar dit voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ geldt volgt dat

$$||\phi_k - \phi||_{L^p} \leq || \left(\mathcal{G} * \sum_{j=k+1}^{\infty} \psi^{*j} \right) \star h||_{L^p}.$$

Merk op dat uit vergelijking (3.16) volgt dat $\mathcal{G} \in L^1$ en uit (4.4) dat $\Psi \in L^1$. Young's ongelijkheid geeft dat

$$||\phi_k - \phi||_{L^p} \leq ||\mathcal{G}||_{L^1} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} ||\psi||_{L^1}^j \right) ||h||_{L^p}.$$

Uit vergelijking (4.5) volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} ||\psi||_{L^1}^j \right) = 0,$$

dus

$$\lim_{k\to\infty} ||\phi_k - \phi||_{L^p} \leq ||\mathcal{G}||_{L^1} ||h||_{L^p} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} ||\psi||_{L^1}^j \right) = 0.$$

Dus de reeks ϕ_k convergeert naar ϕ, dus de partiële sommen

$$\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \sum_{j=0}^{k} \left(M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \right)^j h = \phi_k$$

convergeren naar ϕ. Dit geeft samen met de Neuman-series dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_k(\xi,\eta) h(\eta) d\eta = \left(\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \right)^j \right) h(\xi)$$

$$= \left(\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1} \left(1 - M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}\right)^{-1} h \right)(\xi) = \left(\left(1 - M\Lambda_{\mathcal{L}}^{-1}\right) \Lambda_{\mathcal{L}} \right)^{-1} h(\xi) = \left((\Lambda_L)^{-1} h \right)(\xi).$$

Dus

$$\left(\Lambda_L^{-1} h\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(\xi, \eta) h(\eta) d\eta.$$

□

Met dit Lemma kunnen nu afschattingen voor asymptotisch hyperbolische systemen gevonden worden:

Lemma 4.3. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch in ∞ zijn. Dan bestaan er $K_1, K_2 > 0$ en een $\tilde{\alpha} > 0$ zodanig dat als $\Lambda_L \phi = h$ voor een $\phi \in W^{1,p}$ en een $h \in L^p$, dan geldt voor $\xi \geq 0$ dat*

$$|\phi(\xi)| \leq K_1 e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} ||\phi||_{L^\infty} + K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta \leq K_1 e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} ||\phi||_{L^\infty} + K_2 ||h||_{L^p}. \tag{4.11}$$

Als L bovendien ook nog asymptotisch hyperbolisch is in $-\infty$ dan geldt bovenstaande uitdrukking voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ en bestaat er een $K_3 > 0$ zodanig dat

$$||\phi||_{W^{1,p}} \leq K_3 \left(||\phi||_{L^\infty} + ||h||_{L^p}\right). \tag{4.12}$$

Bewijs. Daar L asymptotisch hyperbolisch is in ∞ kunnen we L herschrijven als

$$L(\xi) = \mathcal{L}_+ + M_+(\xi),$$

met $\mathcal{L}_+$ hyperbolisch. Laat $\epsilon, \tilde{\alpha}, \hat{\beta}$ zoals in lemma 4.1. Dan is er een $\tau > 0$ zodanig dat voor alle $\xi \geq \tau$ geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)| e^{l|r_j|} \leq \epsilon.$$

Definieer

$$L_1(\xi) = \mathcal{L}_+ + H(\xi - \tau) M_+(\xi),$$
$$M_1(\xi) = H(\tau - \xi) M_+(\xi).$$

Merk op dat geldt

$$H(\xi - \tau) M_+(\xi) = H(\xi - \tau) \sum_{j=1}^{\infty} |B_j(\xi)| e^{l|r_j|} \leq \epsilon,$$

dus $L_1(\xi)$ voldoet aan de eisen van lemma 4.1. Dit geeft ons een functie $G_1(\xi)$ voor Λ_{L_1}. Laat $\phi \in W^{1,p}$ en $h \in L^p$ zodanig dat $\Lambda_L u = h$ dan geldt dat

$$\phi'(\xi) = L_1(\xi)\phi_\xi + M_1(\xi)\phi_\xi + h(\xi)$$

en dus geldt voor alle $\xi \in \mathbb{R}$ dat

$$\phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\xi, \eta) \left(M_1(\eta)\phi_\eta + h(\eta)\right) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\xi,\eta)H(\tau-\eta)M_+(\eta)\phi_\eta d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\xi,\eta)h(\eta)d\eta$$
$$= \int_{-\infty}^{\tau} G_1(\xi,\eta)M_+(\eta)\phi_\eta d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\xi,\eta)h(\eta)d\eta.$$

Dit geeft ons voor $\xi \in \mathbb{R}$ dat

$$|\phi(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{\tau} G_1(\xi,\eta)M_+(\eta)\phi_\eta d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\xi,\eta)h(\eta)d\eta \right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{\tau} |G_1(\xi,\eta)M_+(\eta)\phi_\eta|\, d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(\xi,\eta)h(\eta)|\, d\eta.$$

Uit lemma 4.1 hebben we dat $|G_1(\xi,\eta)| \leq \hat{\beta}^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}$, dus we krijgen dat

$$\int_{-\infty}^{\tau} |G_1(\xi,\eta)M_+(\eta)\phi_\eta|\, d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(\xi,\eta)h(\eta)|\, d\eta$$
$$\leq \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} ||M_+(\xi)|| ||\phi||_{L^\infty} d\eta + \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} |h(\eta)| d\eta.$$

Daar de $B_j(\xi)$ uniform begrensd zijn, is er een $K_M > 0$ zodanig dat $||M_+(\xi)|| < K_M$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$. Dus we krijgen

$$|\phi(\xi)| \leq \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} ||M_+(\xi)|| ||\phi||_{L^\infty} d\eta + \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} |h(\eta)| d\eta$$
$$\leq \hat{\beta} K_M ||\phi||_{L^\infty} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} d\eta + \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} |h(\eta)| d\eta. \tag{4.13}$$

Propositie 4.4.

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} d\eta = \begin{cases} \dfrac{2 - e^{\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}}, & \xi < \tau \\ \dfrac{e^{\tilde{\alpha}\tau}}{\tilde{\alpha}} e^{-\tilde{\alpha}\xi}, & \xi > \tau. \end{cases}$$

Bewijs. Zie B.8. □

Merk op dat τ constant is en dat $\dfrac{2 - e^{\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}}$ begrensd is op $[0,\tau]$, dus voor $\xi > 0$ is er een $K_0 > 0$ zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} d\eta \leq K_0 e^{-\tilde{\alpha}\xi} = K_0 e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}.$$

Invullen in vergelijking (4.13) geeft voor $K_1 = \max\{\hat{\beta}, \hat{\beta} K_M K_0\}$ dat

$$|\phi(\xi)| \leq \hat{\beta} K_M ||\phi||_{L^\infty} K_0 e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + \hat{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta$$

$$= K_1||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta.$$

Er geldt dat $e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} \in L^p$ voor alle $1 \leq p \leq \infty$, dus in het bijzonder $e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} \in L^q$ met q zodanig dat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Uit Hölders ongelijkheid volgt dat

$$K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta \leq K_1 ||e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}||_{L^q} ||h||_{L^p} = K_2 ||h||_{L^p},$$

met $K_2 = K_1||e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}||_{L^q}$. Dus er geldt

$$|\phi(\xi)| \leq K_1||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta \leq K_1||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + K_2||h||_{L^p}.$$

Als L asymptotisch hyperbolisch is in $-\infty$ dan kunnen we op dezelfde manier vergelijking (4.3) voor $\xi \leq 0$ krijgen, dus als L asymptotisch hyperbolisch is in zowel ∞ en $-\infty$ geldt vergelijking (4.3) voor alle $\xi \in \mathbb{R}$. Dit betekent dat we de L^p norm van

$$|\phi(\xi)| \leq K_1||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta$$

kunnen nemen, dit geeft

$$\begin{aligned} ||\phi||_{L^p} &\leq \left|\left| K_1||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} + K_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} h(\eta) d\eta \right|\right|_{L^p} \\ &\leq K_1||\phi||_{L^\infty} \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^p} + K_1 \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} * h(\eta) \right|\right|_{L^p}. \end{aligned}$$

Young's ongelijkheid geeft nu dat

$$||\phi||_{L^p} \leq K_1||\phi||_{L^\infty} \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^p} + K_1 \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^1} ||h||_{L^p}. \tag{4.14}$$

Het nemen van de L^p norm van vergelijking (1.2) geeft met B.1 dat

$$||\phi'||_{L^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^p} + ||h||_{L^p}.$$

Optellen van vergelijking en (4.14) en (B.1) geeft dat

$$||\phi||_{W^{1,p}} = ||\phi||_{L^p} + ||\phi'||_{L^p}$$

$$\leq K_1||\phi||_{L^\infty} \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^p} + K_1 \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^1} ||h||_{L^p} + \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^p} + ||h||_{L^p}.$$

Toepassen van vergelijking (4.14) aan de rechterkant van de ongelijkheid geeft

$$K_1||\phi||_{L^\infty} \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^p} + K_1 \left|\left| e^{-\tilde{\alpha}|\xi|} \right|\right|_{L^1} ||h||_{L^p} + \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^p} + ||h||_{L^p}$$

$$\leq K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^p} ||\phi||_{L^\infty} + \left(K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^1} + 1\right) ||h||_{L^p}$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \left(K_1 ||\phi||_{L^\infty} \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^p} + K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^1} ||h||_{L^p}\right)$$

$$= \left(K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^p} + \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^p}\right) ||\phi||_{L^\infty} +$$

$$\left(K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^1} + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| + K_1 \left|\left|e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}\right|\right|_{L^1}\right) ||h||_{L^p}.$$

Daar de termen voor de $||\phi||_{L^\infty}$ en $||h||_{L^p}$ positieve constanten zijn die alleen van L afhangen is er een $K_3 > 0$ zodanig dat

$$||\phi||_{W^{1,p}} \leq K_3 \left(||\phi||_{L^\infty} + ||h||_{L^p}\right).$$

□

Uit dit Lemma volgt meteen een onderdeel van stelling 1.4, namelijk dat de Kern niet afhangt van p:

Corollary 4.5. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch zijn. Dan is de kern $\mathcal{K}_L$ onafhankelijk van p.*

Bewijs. Laat $\phi \in W^{1,p}$ in de kern $\mathcal{K}_L^p$ van Λ_L zitten. Uit vergelijking (4.11) met $h = 0$ volgt dat $|\phi(\xi)| \leq K_1 ||\phi||_{L^\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}$, dus $\phi \in W^{1,q}$ en dus $\phi \in \mathcal{K}_L^q$ voor alle $1 \leq q \leq \infty$.

□

Nu kan een belangrijk lemma over het bestaan van convergente deelrijen bewezen worden. Uit dit lemma volgt straks vrij snel het bewijs dat de kern $\mathcal{K}_L$ eindig dimensionaal is en het bewijs dat het bereik gesloten is.

Om dit lemma te kunnen bewijzen is meer werk nodig dan voor het overeenkomende lemma [13] voor het eindig aantal verschuivingen, daar we hier te maken hebben met een oneindig bereik en dus met een sommatie over een oneindig aantal termen. In het bijzonder is er extra voorzichtigheid geboden met het gebruik van Arzela-Ascoli, daar deze alleen geldt op compacte intervallen.

Lemma 4.6. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch zijn. Laat er voor een $1 \leq p \leq \infty$ een reeks $\phi_n \in W^{1,p}$ begrensd in $W^{1,p}$ en een reeks $f_n \in L^p$ met $f_n \to f$ in L^p zijn zodanig dat $\Lambda_L \phi_n = f_n$. Dan bestaat er een convergente deelrij ϕ_{n_k}, die convergeert naar een $\phi \in W^{1,p}$ met $\Lambda_L \phi = f$.*

Bewijs. Definieer

$$F_n(\xi) = \int_0^\xi f_n(\eta) d\eta, \quad F(\xi) = \int_0^\xi f(\eta) d\eta.$$

Daar f_n convergeert naar f in L^p geldt op compacte intervallen C dat $1_C f_n$ convergeert in L^1 naar $1_C f$ (zie [1, Theorem 15.9]) en dus geldt (zie [1, Theorem 15.1]) dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\xi} 1_C f_n(\eta) d\eta = \int_0^{\xi} 1_C f(\eta) d\eta,$$

op compacte intervallen C. Merk op dat als $(0,\xi) \subseteq C$ dan geldt dat $\int_0^{\xi} 1_C f_n(\eta) d\eta = \int_0^{\xi} f_n(\eta) d\eta$ en $\int_0^{\xi} 1_C f(\eta) d\eta = \int_0^{\xi} f(\eta) d\eta$, dus op compacte intervallen C convergeert $F_n(\xi)$ naar $F(\xi)$. Op compacte intervallen is convergentie gelijk aan uniforme convergentie, dus F_n convergeert uniform naar F op compacte intervallen, in het bijzonder betekent dit dat de reeks F_n equicontinu is op compacte intervallen.

Daar de ϕ_n begrensd zijn in $W^{1,p}$ is er een constante $K > 0$ zodanig dat

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{W^{1,p}} \leq K$$

en wegens vergelijking (2.1) geldt er dat

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} C||\phi_n||_{W^{1,p}} \leq CK.$$

Dus de ϕ_n zijn begrensd in L^∞ en dus geldt voor alle ξ dat

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||L(\xi)(\phi_n(\xi))|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left|\sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi_n(\xi + r_j)\right|\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty} \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| < \infty.$$

Dus $L(\xi)(\phi_n(\xi))$ is uniform begrensd.

Beschouw nu vergelijking (1.2), deze kunnen we herschrijven als

$$\frac{d\left(\phi_n(\xi) - F_n(\xi)\right)}{d\xi} = L(\xi)(\phi_n(\xi)),$$

met $L(\xi)(\phi_n(\xi))$ als in vergelijking (1.6). Daar $L(\xi)(\phi_n(\xi))$ uniform begrensd is, is ook

$$\frac{d\left(\phi_n(\xi) - F_n(\xi)\right)}{d\xi}$$

uniform begrensd en dus is $\phi_n(\xi) - F_n(\xi)$ equicontinu. Daar $F_n(\xi)$ equicontinu is op compacte intervallen volgt dat $\phi_n(\xi)$ equicontinu is op compacte intervallen.

Daar de ϕ_n begrensd zijn in L^∞ zijn ze uniform begrensd en equicontinu op compacte intervallen. Uit de Arzela-Ascoli volgt dat er een deelrij ϕ_{n_k} is die uniform convergeert op compacte intervallen naar een functie ϕ. Daar geldt dat $\phi_{n_k} \in W^{1,p}$ geldt dat de ϕ_{n_k} continu zijn en dus is ϕ continu. Merk op dat daar de ϕ_n begrensd zijn in L^p en L^∞ dat $\phi \in L^p$ en $\phi \in L^\infty$.

Integreren van 0 naar ξ van vergelijking (1.2) geeft voor de ϕ_{n_k} dat

$$\phi_{n_k}(\xi) - \phi_{n_k}(0) = \int_0^{\xi} \left(L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta)) + f_{n_k}(\eta)\right) d\eta.$$

De limiet nemen van n_k naar ∞ geeft:

$$\lim_{n_k\to\infty} (\phi_{n_k}(\xi) - \phi_{n_k}(0)) = \lim_{n_k\to\infty} \int_0^\xi (L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta)) + f_{n_k}(\eta))\, d\eta.$$

Convergentie van de ϕ_{n_k} naar ϕ geeft

$$\phi(\xi) - \phi(0) = \left(\lim_{n_k\to\infty} \int_0^\xi L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta))d\eta\right) + \lim_{n_k\to\infty} \int_0^\xi f_{n_k}(\eta)d\eta.$$

Uit de convergentie in L^p van de f_n naar f volgt

$$\phi(\xi) - \phi(0) = \left(\lim_{n_k\to\infty} \int_0^\xi L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta))d\eta\right) + \int_0^\xi f(\eta)d\eta.$$

Laat $\epsilon > 0$. Daar $\sum_{j=1}^\infty ||A_j(\xi)||$ absoluut convergeert is er een N_ϵ zodanig dat geldt dat

$$\sum_{j=N_\epsilon+1}^\infty ||A_j|| \leq \frac{\epsilon}{3|\xi| \left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi||_{L^\infty}\right)}. \tag{4.15}$$

Definieer r_- en r_+ als

$$r_- = \min_{1\leq j\leq N_\epsilon} \{r_j\},$$
$$r_+ = \max_{1\leq j\leq N_\epsilon} \{r_j\}.$$

Merk op dat daar $r_1 = 0$ geldt dat $r_- \leq 0 \leq r_+$. Laat C_ϵ het compacte interval gegeven door $[0+r_-, \xi+r_+]$, dan geldt voor alle $\eta \in (0,\xi)$ dat voor alle $1 \leq j \leq N_\epsilon$ dat $(\eta + r_j) \in C_\epsilon$. Dan geldt dat

$$\left|\int_0^\xi L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta))d\eta - \int_0^\xi L(\eta)(\phi(\eta))d\eta\right|$$

$$= \left|\int_0^\xi \sum_{j=1}^{N_\epsilon} A_j(\eta)\left(\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)\right) + \sum_{j=N_\epsilon+1}^\infty A_j(\eta)\left(\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)\right) d\eta\right|$$

$$\leq \int_0^\xi \left|\sum_{j=1}^{N_\epsilon} A_j(\eta)\left(\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)\right)\right| d\eta + \int_0^\xi \left|\sum_{j=N_\epsilon+1}^\infty A_j(\eta)\left(\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)\right)\right| d\eta$$

$$\leq \int_0^\xi \sum_{j=1}^{N_\epsilon} ||A_j||\, |\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)|\, d\eta + \int_0^\xi \sum_{j=N_\epsilon}^\infty ||A_j|| \left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty}\right) d\eta.$$

Daar ϕ_{n_k} uniform convergeert naar ϕ op compacte intervallen is er voor iedere $1 \leq j \leq N_\epsilon$ een M_j zodanig dat voor alle $n_k > M_j$ geldt dat

$$|\phi_{n_k}(\eta + r_j) - \phi(\eta + r_j)| \leq \frac{\epsilon}{3|\xi| N_\epsilon ||A_j||}.$$

Definieer $M = \max_{1\leq j\leq N_\epsilon}\{M_j\}$. Dan krijgen we samen met vergelijking (4.15) dat voor alle $n_k > M$ geldt dat

$$\int_0^\xi \sum_{j=1}^{N_\epsilon} ||A_j||\,|\phi_{n_k}(\eta+r_j) - \phi(\eta+r_j)|\,d\eta + \int_0^\xi \sum_{j=N_\epsilon}^{\infty} ||A_j|| \left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty}\right) d\eta$$

$$\leq \int_0^\xi \sum_{j=1}^{N_\epsilon} ||A_j|| \frac{\epsilon}{3|\xi|N_\epsilon||A_j||} d\eta + \int_0^\xi \left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty}\right) \frac{\epsilon}{3|\xi|\left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi||_{L^\infty}\right)} d\eta$$

$$= \int_0^\xi \frac{\epsilon}{3|\xi|} d\eta + \int_0^\xi \frac{\epsilon}{3|\xi|} d\eta = |\xi|\frac{\epsilon}{3|\xi|} + |\xi|\frac{\epsilon}{3|\xi|} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Dus voor alle $\epsilon > 0$ is er een $M > 0$ zodanig dat voor alle $n_k > M$ geldt dat

$$\left|\int_0^\xi L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta))d\eta - \int_0^\xi L(\eta)(\phi(\eta))d\eta\right| < \epsilon,$$

dus

$$\lim_{n_k\to\infty} \int_0^\xi L(\eta)(\phi_{n_k}(\eta))d\eta) = \int_0^\xi L(\eta)(\phi(\eta))d\eta.$$

Dus

$$\phi(\xi) - \phi(0) = \int_0^\xi L(\eta)(\phi(\eta)) + f(\eta)d\eta,$$

dus ϕ is absoluut continu en

$$\phi'(\xi) = L(\xi)(\phi(\xi)) + f(\xi) \tag{4.16}$$

geldt bijna overal. Samen met vergelijking (B.1) geeft dit dat $\phi' \in L^p$, dus $\phi \in W^{1,p}$ en $\Lambda_L\phi = f$. Ongelijkheid (4.12) geeft dat

$$||\phi_{n_k} - \phi||_{W^{1,p}} \leq K_3\left(||\phi_{n_k} - \phi||_{L^\infty} + ||f_{n_k} - f||_{L^p}\right).$$

Merk op dat f_{n_k} convergeert in L^p naar f, dus $||f_{n_k} - f||_{L^p} \to 0$ als $n_k \to \infty$. Dus als $||\phi_{n_k} - \phi||_{L^\infty} \to 0$ als $n_k \to \infty$ dan geldt dat $||\phi_{n_k} - \phi||_{W^{1,p}} \to 0$ als $n_k \to \infty$, ofwel de ϕ_{n_k} convergeren naar ϕ in $W^{1,p}$.

Uit vergelijking (4.11) volgt dat

$$|\phi_{n_k}(\xi) - \phi(\xi)| \leq K_1 e^{-\tilde{\alpha}|\xi|}||\phi_{n_k} - \phi||_{L^\infty} + K_2||f_{n_k} - f||_{L^p}.$$

In het bijzonder geldt voor elke $\tau > 0$ dat

$$\sup_{|\xi|\geq\tau} |\phi_{n_k}(\xi) - \phi(\xi)| \leq K_1 e^{-\tilde{\alpha}\tau}\left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty}\right) + K_2||f_{n_k} - f||_{L^p}.$$

Daar $[-\tau, \tau]$ een compact interval is geldt dat ϕ_{n_k} uniform naar ϕ convergeert op $[-\tau, \tau]$. Verder geldt dat als $n_k \to \infty$ dan geldt dat $K_2||f_{n_k} - f||_{L^p} \to 0$. Dus we krijgen dat

$$0 \leq \limsup_{n_k\to\infty} ||\phi_{n_k} - \phi||_{L^\infty} \leq K_1 e^{-\tilde{\alpha}\tau}\left(||\phi||_{L^\infty} + \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_{L^\infty}\right) + 0,$$

voor elke willekeurige τ, dus

$$||\phi_{n_k} - \phi||_{L^\infty} \to 0$$

als $n_k \to \infty$. Dus de ϕ_{n_k} convergeren naar ϕ in $W^{1,p}$.

$\square$

Nu kan bewezen worden dat de kern van Λ_L eindig dimensionaal is en dat het bereik gesloten is.

Lemma 4.7. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch zijn. Dan is de kern $\mathcal{K}_L$ van Λ_L eindig dimensionaal.*

Bewijs. Voor $p \in [1, \infty]$ wordt de eenheidsbol in $\mathcal{K}_L$ gegeven door

$$\mathcal{B}_L = \{\phi \in W^{1,p} | \phi \in \mathcal{K}_L \text{ en } ||\phi||_{W^{1,p}} \leq 1\}.$$

Laat $p \in [1, \infty]$ en laat $\phi_n \in \mathcal{K}_L$ een reeks in $\mathcal{B}_L$ zijn, ofwel $||\phi_n||_{W^{1,p}} \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Daar $\phi_n \in \mathcal{K}_L$ geldt dat $\Lambda_L \phi_n = 0$. Neem nu de reeks $f_n = 0$, dan volgt uit Lemma 4.6 dat er een deelrij ϕ_{n_k} is die convergeert in $W^{1,p}$ naar een $\phi \in W^{1,p}$ met $\Lambda_L \phi = 0$. Dus elke reeks in $\mathcal{B}_L$ heeft een convergente deelrij, dus $\mathcal{B}_L$ is compact. De eenheidsbol in $\mathcal{K}_L$ is compact dus $\mathcal{K}_L$ is eindig dimensionaal (zie [17, Theorem 2.26]). $\square$

Lemma 4.8. *Laat L als in vergelijking (1.6) asymptotisch hyperbolisch zijn. Dan geldt voor $p \in [1, \infty]$ dat het bereik $\mathcal{R}_L^p \subseteq L^p$ van Λ_L gesloten is.*

Bewijs. Laat $p \in [1, \infty]$ zijn. Laat f_n een reeks in $\mathcal{R}_L^p$ zijn, zodanig dat f_n convergeert naar f in L^p. Uit lemma 4.7 volgt dat $\mathcal{K}_L$ een eindig dimensionale deelruimte van $W^{1,p}$ is. Dit betekent dat er een gesloten deelruimte $Y \subseteq W^{1,p}$ bestaat zodanig dat $W^{1,p} = \mathcal{K}_L \oplus Y$, m.a.w. $\mathcal{K}_L$ en Y zijn topologisch complementair, zie [17, Lemma 5.56]. In het bijzonder geeft dit dat dat $\Lambda_L|_Y : Y \to \mathcal{R}_L^p$ surjectief is, dus er bestaat een reeks $\phi_n \in Y$ zodanig dat $\Lambda_L \phi_n = f_n$.

Claim: De reeks ϕ_n is begrensd in $W^{1,p}$.

Bewijs Claim. Neem aan dat de reeks ϕ_n niet begrensd is in $W^{1,p}$. Dan is er een deelrij ϕ_{n_k} zodanig dat $||\phi_{n_k}||_{W^{1,p}} \to \infty$ als $n_k \to \infty$. Definieer $\psi_{n_k} = \dfrac{\phi_{n_k}}{||\phi_{n_k}||_{W^{1,p}}}$ en $g_n = \dfrac{f_{n_k}}{||\phi_{n_k}||_{W^{1,p}}}$. Dan geldt dat $\Lambda_L \psi_{n_k} = g_{n_k}$. Verder geldt dat $\psi_{n_k} \in Y$ en $||\psi_{n_k}||_{W^{1,p}} = 1$. Er geldt dat $f \in L^p$, dus $||f||_{L^p} < \infty$. Daar $f_{n_k} \to f$ als $n_k \to \infty$ en $||\phi_{n_k}||_{W^{1,p}} \to \infty$ als $n_k \to \infty$ geldt dat $||g_{n_k}||_{L^p} \to 0$. Uit lemma 4.6 volgt dat er een deelrij $\psi_{n_{k_m}}$ is zodanig dat $\psi_{n_{k_m}} \to \psi$ met $\Lambda_L \psi = 0$. Daar Y gesloten is betekent dit dat $\psi \in Y \cap \mathcal{K}_L$, dus $\psi = 0$ en dus $||\psi||_{W^{1,p}} = 0$. Daar geldt dat $||\psi_{n_{k_m}}||_{W^{1,p}} = 1$, moet gelden dat $||\psi||_{W^{1,P}} = 1$, een tegenspraak, dus ϕ_n is begrensd in $W^{1,p}$. $\square$

De rij ϕ_n is dus begrensd in $W^{1,p}$, dus uit lemma 4.6 volgt dat er een deelrij ϕ_{n_k} is die convergeert naar een $\phi \in W^{1,p}$, met ϕ zodanig dat $\Lambda_L \phi = f$. Daar Y gesloten is en de ϕ_{n_k} allemaal in Y zitten geldt dat $\phi \in Y$, dus $f \in \mathcal{R}_L^p$, dus de limiet van een rij die in $\mathcal{R}_L^p$ ligt en convergeert in L^p ligt in $\mathcal{R}_L^p$, dus $\mathcal{R}_L^p$ is gesloten. $\square$

5 Bewijs hoofdstelling

Met het behulp van het voorgaande werk kan nu de hoofdstelling bewezen worden:

Bewijs van stelling 1.4. Stelling 3.7 geeft dat $\Lambda_{\mathcal{L}}$ een isomorfisme is en dus de vergelijkingen (1.15). Uit corollary 4.5 volgt dat de kern $\mathcal{K}_L^p = \mathcal{K}_L$ van Λ_L onafhankelijk van p is en uit lemma 4.7 volgt dat hij eindig dimensionaal is. Lemma 4.8 geeft dat het bereik $\mathcal{R}_L^p$ gesloten is. Dus om te bewijzen dat Λ_L een Fredholm operator is moet alleen nog bewezen worden dat de codimensie van $\mathcal{R}_L^p$ eindig dimensionaal is.

Merk eerst op dat als L asymptotisch hyperbolisch is, dan is ook zijn geadjungeerde L^* asymptotisch hyperbolisch. Dit betekent in het bijzonder $\mathcal{K}_{L^*} \subseteq W^{1,q}$, voor alle $1 \leq q \leq \infty$ eindig dimensionaal is.

Definieer nu de deelruimte $\mathcal{Q}_L^p \subseteq L^p$ als

$$\mathcal{Q}_L^p = \{f \in L^p | \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} f(\xi) d\xi = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{K}_{L^*}\}. \tag{5.1}$$

Daar $\mathcal{K}_{L^*}$ eindig dimensionaal is, bestaat er een basis k_i, $i = 1, \cdots, N$ voor $\mathcal{K}_{L^*}$, ofwel $\text{span}(k_i) = \mathcal{K}_{L^*}$. Dan kunnen we functies q_j, $j = 1, \cdots N$ kiezen zodanig dat $\int_{-\infty}^{\infty} q_j(\xi)\overline{k_i(\xi)} d\xi = \delta_{ij.}$ Definieer $M = \text{span}(q_j)$, dan geldt $\dim M = \dim \mathcal{K}_{L^*}$. We kunnen elke functie $f \in L^p$ schrijven als

$$f = f - \langle f, k_i \rangle q_j + \langle f, k_i \rangle q_j.$$

Dan geldt dat $\langle f, k_i \rangle q_j \in M$ en

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f - \langle f, k_i \rangle q_j) \overline{k_i(\xi)} d\xi = 0,$$

ofwel $f - \langle f, k_i \rangle q_j \in \mathcal{Q}_L^p$, dus $L^p = \mathcal{Q}_L^p \oplus M$.

Dit betekent dat codim $\mathcal{Q}_L^p = \dim \mathcal{K}_{L^*} < \infty$ in L^p.

Claim: $\mathcal{R}_L^p = \mathcal{Q}_L^p$.

Bewijs claim. We bewijzen eerst dat $\mathcal{R}_L^p \subseteq \mathcal{Q}_L^p$. Laat $f \in \mathcal{R}_L^p$, met andere woorden er is een $\phi \in W^{1,p}$ zodanig dat $f = \Lambda_L \phi$. Propositie B.2 geeft dat voor alle $\psi \in \mathcal{K}_{L^*}$ geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} (\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\Lambda_L^* \psi)(\xi)} \phi(\xi) d\xi.$$

Daar $\psi \in \mathcal{K}_{L^*}$ geldt dat $(\Lambda_L^* \psi)(\xi) = 0$. Dit geeft ons dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\Lambda_L^* \psi)(\xi)} \phi(\xi) d\xi = 0,$$

ofwel $f \in \mathcal{Q}_L^p$, dus $\mathcal{R}_L^p \subseteq \mathcal{Q}_L^p$.

Nu het bewijs voor $\mathcal{Q}_L^p = \mathcal{R}_L^p$ Beschouw nu eerst het geval dat $1 \leq p < \infty$. Neem aan dat $\mathcal{Q}_L^p \neq \mathcal{R}_L^p$. Dit betekent dat $\mathcal{R}_L^p$ een strikte deelruimte van $\mathcal{Q}_L^p$ is. In het bijzonder betekent dit dat er een niet triviale $\psi \in L^q$, de duaal van L^p, is zodanig dat voor alle $\phi \in W^{1,p}$ geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)}(\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = 0 \tag{5.2}$$

en zodanig dat voor een $f \in \mathcal{Q}_L^p$ geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} f(\xi) d\xi \neq 0. \tag{5.3}$$

Laat $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$ een testfunctie (een C^∞ functie met compact support) zijn en neem $\phi(\xi) = \overline{\zeta(\xi)}$. Substitutie in de complex geconjugeerde van vergelijking (5.2) geeft

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) \overline{\Lambda_L(\overline{\zeta})(\xi)} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j) d\xi.$$

Beschouw nu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j) \right| d\xi.$$

Hiervoor geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j) \right| d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)| \left|\overline{A_j}\right| |\zeta(\xi + r_j)| \, d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)\zeta(\xi + r_j)| \, d\xi.$$

Daar ζ een testfunctie is geldt $\zeta \in L^p$, dus Hölders ongelijkheid geeft dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)\zeta(\xi + r_j)| \, d\xi \leq ||\psi||_{L^q} ||\zeta(\xi + r_j)||_{L^p} = ||\psi||_{L^q} ||\zeta||_{L^p} < \infty.$$

Dus we hebben dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j) \right| d\xi \leq ||\psi||_{L^q} ||\zeta||_{L^p} \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| < \infty.$$

Dit betekent dat we Fubini kunnen toepassen, dit geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j)d\xi.$$

De coördinaten transformatie $\hat{\xi} = \xi + r_j$ geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\overline{A_j(\xi)}\zeta(\xi + r_j)d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\hat{\xi} - r_j)\overline{A_j(\hat{\xi} - r_j)}\zeta(\hat{\xi})d\hat{\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \left\langle \overline{A_j(\hat{\xi} - r_j)}\zeta(\hat{\xi}), \overline{\psi(\hat{\xi} - r_j)} \right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \left\langle \zeta(\hat{\xi}), \overline{A_j(\hat{\xi} - r_j)\psi(\hat{\xi} - r_j)} \right\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\hat{\xi})A_j(\hat{\xi} - r_j)^*\psi(\hat{\xi} - r_j)d\hat{\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\hat{\xi}) \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\hat{\xi} - r_j)^*\psi(\hat{\xi} - r_j)d\hat{\xi}.$$

Dus we hebben

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\zeta'(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\hat{\xi}) \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\hat{\xi} - r_j)^*\psi(\hat{\xi} - r_j)d\hat{\xi},$$

met andere woorden ψ voldoet aan de geadjungeerde vergelijking $(\Lambda_{L^*}(\xi))(\psi)(\xi) = 0$ als distributie. Dit betekent dat

$$(L^*\psi, \zeta) = -(\psi, \zeta') = (\psi', \zeta),$$

dus de distributie afgeleide ψ' wordt gegeven door

$$\psi'(\xi) = L^*(\xi)(\psi(\xi)).$$

Dit betekent dat $\psi'(\xi)$ een functie is in L^q en dus geldt dat $\psi \in W^{1,q}$. Dus we hebben dat $\psi \in \mathcal{K}_{L^*}$. Uit de definitie van $\mathcal{Q}_L^p$ volgt dat voor alle $f \in \mathcal{Q}_L^p$ geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} f(\xi)d\xi = 0,$$

een tegenspraak met vergelijking (5.3), dus $\mathcal{R}_L^p$ is geen strikte deelverzameling van $\mathcal{Q}_L^p$ voor $1 \leq p < \infty$, dus $\mathcal{R}_L^p = \mathcal{Q}_L^p$ als $1 \leq p < \infty$.

Beschouw nu het geval $p = \infty$. Laat $f \in L^\infty$. Daar L asymptotisch hyperbolisch is kunnen we $L_1(\xi)$ en $M_1(\xi)$ definiëren als in lemma 4.3

$$L_{1+}(\xi) = \mathcal{L}_+ + H(\xi - \tau_+)M_+(\xi),$$

$$M_{1+}(\xi) = H(\tau_+ - \xi)M_+(\xi).$$

Net zoals in het bewijs van lemma 4.3 kunnen we $\tau_+ > 0$ zodanig groot nemen dat lemma 4.1 geeft dat $L_1(\xi)$ een isomorfisme tussen $W^{1,\infty}$ en L^∞ is. Definieer ϕ_+ als

$$\phi_+ = \Lambda_{L_{1+}}^{-1} f,$$

ofwel

$$\phi'_+ = L_{1+}(\xi)x_+(\xi) + f(\xi).$$

Daar

$$L(\xi) = L_{1+}(\xi) + M_1(\xi) = L_{1+}(\xi) + H(\tau_+ - \xi)M_+(\xi),$$

geldt voor $\xi \geq \tau_+$ dat

$$\phi'_+ = L(\xi)(\phi_+(\xi)) + f(\xi).$$

Daar L asymptotisch hyperbolisch is kunnen we op dezelfde manier ϕ_- definiëren als

$$\phi_- = \Lambda_{L_-}^{-1} f.$$

Hiervoor geldt voor dezelfde redenen dat als $\xi < -\tau_-$ dan geldt

$$\phi'_- = L(\xi)(\phi_-(\xi)) + f(\xi).$$

Laat $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^1 functie zijn, zodanig dat $\varphi(\xi) = 0$ als $\xi \leq 0$ en $\varphi(\xi) = 1$ als $\xi \geq 1$. Definieer nu $\phi(\xi)$ als

$$\phi(\xi) = \varphi(\xi)\phi_+(\xi) + \varphi(-\xi)\phi_-(\xi).$$

Merk op dat $\phi(\xi) \in W^{1,\infty}$, dus er is een $f_1 \in L^\infty$ zodanig dat

$$\Lambda_L \phi = f_1.$$

Definieer f_2 als $f_2 = f - f_2$. Uit de definitie van x_+ en x_- volgt dat als $|\xi| \geq \max\{\tau_-, \tau_+\}$ dan geldt $f(\xi) = f_1(\xi)$. Dit betekent dat

$$support(f_2(\xi)) \subseteq [-\tau_-, \tau_+],$$

met andere woorden f_2 heeft compact support. Dus we hebben een willekeurige $f \in L^p$ herschreven als de som van een functie $f_1 \in \mathcal{R}_L^\infty$ en een functie f_2 met compact support. Dus elke $f \in L^\infty$ is te herschrijven als $f = f_1 + f_2$ waarvoor geldt dat $f_1 \in \mathcal{R}_L^\infty$ en dat f_2 compact support heeft.

Laat nu $f \in \mathcal{Q}_L^\infty$, daar $\mathcal{R}_L^\infty \subseteq \mathcal{Q}_L^\infty$ en $f_1 \in \mathcal{R}_L^\infty$ geldt dat $f_2 \in \mathcal{Q}_L^\infty$. Daar f_2 compact support heeft geldt dat $f_2 \in L^s$ voor een $1 \leq s < \infty$ en dus geldt $f_2 \in \mathcal{Q}_L^s$. Daar we hadden dat $\mathcal{Q}_L^t = \mathcal{R}_L^t$ voor alle $1 \leq t < \infty$ geldt dat $f_2 \in \mathcal{R}_L^s$. Dit betekent dat er een $\psi \in W^{1,s}$ is, zodanig dat $\Lambda_L \psi = f_2$. Merk op dat $\psi \in W^{1,s}$ betekent dat $\psi \in L^\infty$. Met behulp van propositie B.1 geeft dit dat $\psi' \in L^\infty$, dus $\psi \in W^{1,\infty}$ en dus geldt $f_2 \in \mathcal{R}_L^\infty$. Dit betekent dat $f \in \mathcal{R}_L^\infty$, ofwel $\mathcal{R}_L^\infty = \mathcal{Q}_L^\infty$. $\square$

Uit de claim volgt meteen vergelijking (1.13) en verder volgt dat

$$\mathit{codim}\ \mathcal{R}_L^p = \mathit{codim}\ \mathcal{Q}_L^p = \dim \mathcal{K}_{L^*} < \infty,$$

dus Λ_L is een Fredholm operator. Samen met het feit dat $L^{**} = L$ geeft dit de gelijkheden (1.14).

$\square$

Referenties

[1] Heinz Bauer. *Measure and Integration Theory.* Walter de Gruyter GmbH & Co., KG, 10785 Berlin, Germany, 2001.

[2] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer Science+Business Media, 2010.

[3] Alfonso Bueno-Orovio, David Kay, Vicente Grau, Blanca Rodriguez, and Kevin Burrage. Fractional diffusion models of cardiac electrical propagation: role of structural heterogeneity in dispersion of repolarization. *Journal of The Royal Society Interface*, 11(97), 2014.

[4] Henjin Chi, Jonathan Bell, and Brian Hassard. Numerical solution of a nonlinear advance-delay-differential equation from nerve conduction theory. *Journal of Mathematical Biology*, 24(5):583–601, 1986.

[5] Nicole Cusimano, Kevin Burrage, and Pamela Burrage. Fractional models for the migration of biological cells in complex spatial domains. *ANZIAM Journal*, 54(0):250–270, 2013.

[6] Steven B. Damelin and Willard Miller (Jr.). *The Mathematics of Signal Processing.* Cambridge Universty Press, 2012.

[7] Grégory Faye and Arnd Scheel. Fredholm properties of nonlocal differential operators via spectral flow. *Indiana University Mathematics Journal*, 63(5):1311–1348, 2014.

[8] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Complex Analyis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 2005,2009.

[9] A. Hoffman, H. J. Hupkes, and E. Van Vleck. Multidimensional Stability of Waves Travelling Through Rectangular Lattices in Rational Directions. *ArXiv e-prints*, September 2012.

[10] Yanghong Huang and Adam Oberman. Numerical methods for the fractional laplacian: A finite difference-quadrature approach. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52(6):3056–3084, 2014.

[11] H.J. Hupkes, D. Pelinovsky, and B. Sandstede. Propagation failure in the discrete nagumo equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139(10):3537–3551, 2011.

[12] H.J. Hupkes and B. Sandstede. Stability of pulse solutions for the discrete fitzhugh-nagumo system. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(1):251–301, 2013.

[13] John Mallet-Paret. The fredholm alternative for functional differential equations of mixed type. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 11(1):1–47, 1999.

[14] John Mallet-Paret. The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 11(1):49–127, 1999.

[15] Micheal Renardy and Robert C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer Science+Business Media, 1993, 2004.

[16] Volker Runde. *A Taste of Topology*. Springer Science+Business Media,LLC, 2008.

[17] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag London, second edition, 2008.

[18] J. L. Vázquez. Recent progress in the theory of Nonlinear Diffusion with Fractional Laplacian Operators. *ArXiv e-prints*, January 2014.

[19] Peixuan Wen, Huaxiong Huang, and jianhong Wu. Asymptotic speed of propagation of wave fronts in a lattice delay differential equation with global interaction. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 68(4):409–439, 2003.

A Appendix Fourier Transformaties

Propositie A.1. *Laat f een gedempte distributie zijn. Voor de Fouriertransformatie van de afgeleide f' geldt*

$$\mathcal{F}(f') = i\eta\mathcal{F}(f).$$

Bewijs. Voor een $\zeta \in \mathcal{S}$ geldt met behulp van partieel integreren dat

$$\mathcal{F}^{-1}\left((\mathcal{F}(\zeta))'\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\xi}\left(\mathcal{F}(\zeta)\right)(\xi)e^{i\eta\xi}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\mathcal{F}(\zeta)\right)(\xi)(i\eta)e^{i\eta\xi}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{F}(\zeta)\right)(\xi)e^{i\xi\eta}d\xi = -i\eta\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\zeta)\right).$$

Daar voor testfuncties geldt dat $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\zeta)\right) = \zeta$ krijgen we dat

$$\mathcal{F}^{-1}\left((\mathcal{F}(\zeta))'\right) = -i\eta\zeta,$$

dus we krijgen dat

$$((\mathcal{F}(\zeta))' = \mathcal{F}(-i\xi\zeta). \tag{A.1}$$

Er geldt dat

$$(\mathcal{F}(f'), \zeta) = (f', \mathcal{F}(\zeta)) = -(f, (\mathcal{F}(\zeta))').$$

Uit vergelijking (A.1) volgt dat

$$-(f, (\mathcal{F}(\zeta))') = -(f, (\mathcal{F}(-i\eta\zeta))) = -(\mathcal{F}(f), -i\eta\zeta) = (i\xi\mathcal{F}(f), \zeta).$$

Dus

$$(\mathcal{F}(f'), \zeta) = (i\eta\mathcal{F}(f), \zeta).$$

□

Propositie A.2. *Laat $f(\xi)$ een gedempte distributie. Voor de Fouriertransformatie van de verschoven functie $f(\xi + b)$ geldt*

$$\mathcal{F}(f(\xi + b)) = e^{ib\eta}\mathcal{F}(f).$$

Bewijs. Er geldt dat

$$(\mathcal{F}(f(\xi + b)), \zeta) = (f(\xi + b), \mathcal{F}(\zeta))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + b)\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\eta)e^{-i\xi\eta}d\eta d\xi.$$

Toepassen van de coördinaten transformatie $\tilde{\xi} = \xi + b$ geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + b)\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\eta)e^{-i\xi\eta}d\eta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{\xi})\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(\eta)e^{-i(\tilde{\xi}-b)\eta}d\eta d\tilde{\xi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{\xi}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ib\eta}\zeta(\eta)e^{-i\tilde{\xi}\eta}d\eta d\tilde{\xi} = (f, \mathcal{F}\left(e^{ib\eta}\zeta\right)) = (\mathcal{F}(f), e^{ib\eta}\zeta) = (e^{ib\eta}\mathcal{F}(f), \zeta).$$

Dus

$$(\mathcal{F}(f(\xi+b)), \zeta) = (e^{ib\eta}\mathcal{F}(f), \zeta).$$

□

Propositie A.3. *Laat $\phi \in W^{1,p}$ en beschouw hem als getemperde distributie. en laat $\mathcal{L}(\phi(\xi))$ als in 1.10 dan geldt dat*

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\mathcal{F}(\phi).$$

Bewijs. Beschouw eerst

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j)\mathcal{F}(\zeta)(\xi)|\, d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi + r_j)\mathcal{F}(\zeta)(\xi)|\, d\xi.$$

Daar $\mathcal{F}(\zeta)$ een Schwartz functie is geldt $\mathcal{F}(\zeta) \in L^q$ met $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Uit Hölders ongelijkheid en de convergentie van de $\mathcal{A}_j$ volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi + r_j)\mathcal{F}(\zeta)(\xi)|\, d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \cdot ||\phi(\xi + r_j)||_{L^p} \cdot ||\mathcal{F}(\zeta)||_{L^q}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \cdot ||\phi||_{L^p} \cdot ||\mathcal{F}(\zeta)||_{L^q} < \infty.$$

Samen met Fubini geeft dit dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j)\mathcal{F}(\zeta)(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi + r_j)\mathcal{F}(\zeta)(\xi) d\xi. \tag{A.2}$$

Beschouw nu

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi(\xi)\mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)(\xi)\right| d\xi$$

Daar $\mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)$ een Schwarz functie is volgt uit Hölders ongelijkheid dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi(\xi)\mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\xi)(\xi)\right| d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \cdot ||\phi||_{L^p} \cdot ||\mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)||_{L^q} < \infty.$$

Samen met Fubini geeft dit dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)(\xi) d\xi. \tag{A.3}$$

Er geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\eta r_j} \zeta(\eta) e^{-i\xi\eta} \right| d\eta \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\eta)| \, d\eta \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| \cdot ||\zeta||_{L^1} < \infty.$$

Samen met Fubini geeft dit dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{F}\left(e^{i\eta r_j}\zeta\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta r_j} \zeta(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j} \zeta(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta = \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j} \zeta\right). \tag{A.4}$$

Er geldt dat

$$\left(\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j)\right), \zeta\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j). \mathcal{F}(\zeta)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi + r_j) \mathcal{F}(\zeta)(\xi) d\xi.$$

Uit vergelijking A.2 volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \phi(\xi+r_j) \mathcal{F}(\zeta)(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi+r_j) \mathcal{F}(\zeta)(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(\phi(\xi + r_j), \mathcal{F}(\zeta)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(\phi(\xi + r_j), \mathcal{F}(\zeta)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(\mathcal{F}\left(\phi(\xi + r_j)\right), \zeta\right).$$

Uit propositie A.2 volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(\mathcal{F}\left(\phi(\xi + r_j)\right), \zeta\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(e^{i\eta r_j} \mathcal{F}(\phi), \zeta\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \left(\phi, \mathcal{F}\left(e^{i\eta r_j}\zeta\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \mathcal{F}\left(e^{i\eta r_j}\zeta\right)(\xi) d\xi.$$

Uit vergelijking A.3 volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{F}(e^{i\eta r_j}\zeta)(\xi) d\xi = \left(\phi, \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{F}\left(e^{i\eta r_j}\zeta\right)\right).$$

Uit vergelijking A.4 volgt dat

$$\left(\phi, \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{F}\left(e^{i\eta r_j}\zeta\right)\right) = \left(\phi, \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\zeta\right)\right) = \left(\mathcal{F}(\phi), \mathcal{A}_j e^{i\eta r_j}\zeta\right) = \left(\mathcal{A}_j e^{i\eta r_j} \mathcal{F}(\phi), \zeta\right).$$

Dus
$$\left(\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j)\right),\zeta\right)=\left(\mathcal{A}_je^{i\eta r_j}\mathcal{F}(\phi),\zeta\right),$$
dus
$$\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\phi(\xi+r_j)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_je^{i\eta r_j}\mathcal{F}(\phi).$$
□

Propositie A.4. *De inverse Fouriertransformatie $E_1(\xi)$ van $\dfrac{1}{i\eta+l}$ wordt gegeven door*
$$E_1(\xi)=H(\xi)e^{-l\xi}=\begin{cases}0, & \xi<0\\ e^{-l\xi}, & \xi>0.\end{cases}$$

Bewijs. De Fouriertransformatie op L^2 is een isomorfisme, dus het is voldoende om te bewijzen dat $\dfrac{1}{i\eta+l}$ de Fouriertransformatie van $E_1(\xi)$ is. De Fouriertransformatie van $E_1(\xi)$ op L^2 wordt gegeven door
$$\int_{-\infty}^{\infty}E_l(\xi)e^{-i\xi\eta}d\xi=\int_{-\infty}^{0}0e^{-i\xi\eta}d\xi+\int_0^{\infty}e^{-l\xi}e^{-i\xi\eta}d\xi=\int_0^{\infty}e^{-\xi(l+i\eta)}d\xi$$
$$=\left(-\frac{e^{-\xi(l+i\eta)}}{i\eta+l}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{i\eta+l}.$$
Dus $\dfrac{1}{i\eta+l}$ is de Fouriertransformatie van $E_1(\xi)$. □

Propositie A.5. *De inverse Fouriertransformatie $E_2(\xi)$ van $\dfrac{1}{(i\eta+l)^2}$ wordt gegeven door*
$$E_2(\xi)=H(\xi)\xi e^{-l\xi}=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \xi e^{-l\xi}, & \xi>0.\end{cases}$$

Bewijs. De Fouriertransformatie op L^2 is een isomorfisme, dus het is voldoende om te bewijzen dat $\dfrac{1}{(i\eta+l)^2}$ de Fouriertransformatie van $E_2(\xi)$ is. De Fouriertransformatie van $E_2(\xi)$ op L^2 wordt gegeven door
$$\int_{-\infty}^{\infty}E_2(\xi)e^{-i\xi\eta}d\xi=\int_{-\infty}^{0}0e^{-i\xi\eta}d\xi+\int_0^{\infty}\xi e^{-l\xi}e^{-i\xi\eta}d\xi=\int_0^{\infty}e^{-\xi(l+i\eta)}d\xi,$$

partieel integreren geeft

$$\int_0^\infty e^{-\xi(l+i\eta)} d\xi = \left(-\xi \frac{e^{-\xi(l+i\eta)}}{i\eta+l}\right)\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\xi(l+i\eta)}}{i\eta+l} d\xi$$

$$= -\left(\frac{e^{-xi(i\eta+l)}}{(i\eta+l)^2}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{(i\eta+l)^2}.$$

Dus $\dfrac{1}{(i\eta+l)^2}$ is de Fouriertransformatie van $E_2(\xi)$.

□

Propositie A.6.

$$\sum_{j=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\mathcal{A}_j||e^{i\eta(\xi+r_j)}|}{|(i\eta+l)^2|} d\eta < \infty$$

Bewijs.

$$\sum_{j=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\mathcal{A}_j||e^{i\eta(\xi+r_j)}|}{|(i\eta+l)^2|} d\eta < \infty = \sum_{j=1}^\infty |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{(l^2+\eta^2)^2+4\eta^2 l^2}} d\eta = \sum_{j=1}^\infty |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{l^2+\eta^2} d\eta$$

$$= \sum_{j=1}^\infty |\mathcal{A}_j| \left(\left(\frac{\arctan(\frac{\eta}{l})}{l}\right)\right|_{-\infty}^\infty = \sum_{j=1}^\infty |\mathcal{A}_j| \frac{\pi}{l} < \infty.$$

□

B Appendix Overige bewijzen

Propositie B.1. *Als $\phi \in L^p$, met $1 \leq p \leq \infty$ voldoet aan vergelijking (1.2), voor een $f \in L^p$ dan geldt*

$$||\phi'||_{L^p} \leq \sum_{j=1}^\infty ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^p} + ||f||_{L^p} < \infty$$

en dus geldt in het bijzonder dat $\phi' \in L^p$.

Bewijs. Het nemen van de L^p norm van vergelijking (1.2) voor $1 \leq p < \infty$ geeft

$$||\phi'||_{L^p} = \left|\left|\sum_{j=1}^\infty A_j(\xi)\phi(\xi+r_j) + f(\xi)\right|\right|_{L^p} \leq \left|\left|\sum_{j=1}^\infty A_j(\xi)\phi(\xi+r_j)\right|\right|_{L^p} + ||f||_{L^p}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^\infty \left|\sum_{j=1}^\infty A_j(\xi)\phi(\xi+r_j)\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} + ||h||_{L^p} \leq \left(\int_{-\infty}^\infty \left|\sum_{j=1}^\infty ||A_j||\phi(\xi+r_j)\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}} + ||f||_{L^p}.$$

Daar we over heel $\mathbb{R}$ integreren hebben de verschuivingen r_j geen invloed op de integraal, dus

$$||\phi'||_{L^p} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \phi(\xi) \right|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} + ||h||_{L^p}$$

$$= \left(\left| \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \right|^p \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi + r_j)|^p \, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} + ||f||_{L^p} = \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^p} + ||f||_{L^p} < \infty. \tag{B.1}$$

De laatste ongelijkheid volgt uit de convergentie van de som en het feit dat $\phi, f \in L^p$.

Beschouw nu het geval dat $p = \infty$. Het nemen van de L^p norm van vergelijking (1.2) geeft

$$||\phi'||_{L^p} = \left|\left| \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) + f(\xi) \right|\right|_{L^p} \leq \left|\left| \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) \right|\right|_{L^p} + ||f||_{L^p}$$

$$= \text{esssup} \left| \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) \right| + ||f||_{L^\infty}.$$

Het essentieel supremum van het product van twee functies is altijd kleiner dan of gelijk aan het product van de essentiële suprema van die twee functies. Samen met het feit dat het verschuiven van de functie voor het nemen van het essentieel supremum over heel $\mathbb{R}$ niets uitmaakt geeft dit

$$\text{esssup} \left| \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) \right| + ||f||_{L^\infty} \leq \text{essup} \left| \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi) \right| \text{essup} \, |\phi(\xi)| + ||f||_{L^\infty}$$

$$\leq \text{essup} \left| \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \right| \cdot ||\phi(\xi)||_{L^\infty} + ||f||_{L^\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \cdot ||\phi||_{L^\infty} + ||f||_{L^\infty} < \infty.$$

De laatste ongelijkheid volgt uit de convergentie van de som en het feit dat $\phi, f \in L^\infty$. □

Propositie B.2. *Laat $1 \leq p \leq \infty$. Neem q zodanig dat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan geldt voor $\phi \in W^{1,p}$ en $\psi \in W^{1,q}$ dat*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} (\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{(\Lambda_L^* \psi)(\xi)} \phi(\xi) d\xi.$$

Bewijs. Uitschrijven geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)}(\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \left(\phi'(\xi) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) \right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \phi'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi.$$

Beschouw nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi,$$

hiervoor geldt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{\psi(\xi)}\right| |A_j(\xi)| \, |\phi(\xi + r_j)| \, d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{\psi(\xi)}\right| ||A_j|| \, |\phi(\xi + r_j)| \, d\xi$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| \int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{\psi(\xi)}\right| |\phi(\xi + r_j)| \, d\xi.$$

Uit Hölders ongelijkheid volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{\psi(\xi)}\right| |\phi(\xi + r_j)| \, d\xi \leq ||\psi||_{L^q} ||\phi(\xi + r_j)||_{L^p} = ||\psi||_{L^q} ||\phi||_{L^p}.$$

Dus

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{\psi(\xi)}\right| |A_j(\xi)| \, |\phi(\xi + r_j)| \, d\xi \leq ||\psi||_{L^q} ||\phi||_{L^p} \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j|| < \infty,$$

dus met Fubini volgt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi.$$

Voor alle j geldt dat we op

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi$$

een coördinaten transformatie kunnen toepassen $\hat{\xi} = \xi + r_j$, dit geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\hat{\xi} - r_j)} A_j(\hat{\xi} - r_j))\phi(\hat{\xi}) d\xi.$$

Merk op dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\hat{\xi} - r_j)} A_j(\hat{\xi} - r_j))\phi(\hat{\xi}) d\hat{\xi} = \langle A_j(\hat{\xi} - r_j)\phi(\xi), \psi(\hat{\xi} - r_j) \rangle$$

$$= \langle \phi(\xi), A_j(\hat{\xi} - r_j)^* \psi(\hat{\xi} - r_j) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A_j(\hat{\xi} - r_j)^* \psi(\hat{\xi} - r_j)}, \phi(\hat{\xi}) d\hat{\xi}.$$

Dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi)\phi(\xi + r_j) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A_j(\hat{\xi} - r_j)^* \psi(\hat{\xi} - r_j)}, \phi(\hat{\xi}) d\hat{\xi}. \tag{B.2}$$

Beschouw nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \phi'(\xi) d\xi.$$

Partieel integreren geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \phi'(\xi) d\xi = \left(\overline{\psi(\xi)} \phi(\xi) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi'(\xi)} \phi(\xi) d\xi.$$

Als $1 < p < \infty$ dan geldt dat $1 < q < \infty$ en dus dat $\lim_{\xi \to \pm\infty} \phi(\xi) = 0$ en $\lim_{\xi \to \pm\infty} \overline{\psi(\xi)} = 0$, dus

$$\left(\overline{\psi(\xi)} \phi(\xi) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Als $p = 1$ dan geldt $q = \infty$ en dus geldt dat $\overline{psi(\xi)}$ begrensd is en $\lim_{\xi \to \pm\infty} \phi(\xi) = 0$, dus

$$\left(\overline{\psi(\xi)} \phi(\xi) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Als $p = \infty$ dan geldt $q = 1$ en dus geldt dat $\phi(\xi)$ begrensd is en $\lim_{\xi \to \pm\infty} \overline{\psi(\xi)} = 0$ en dus

$$\left(\overline{\psi(\xi)} \phi(\xi) \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Dus we hebben dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} \phi'(\xi) d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi'(\xi)} \phi(\xi) d\xi. \tag{B.3}$$

Vergelijkingen (B.2) en (B.3) geven dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(\xi)} (\Lambda_L \phi)(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{-\psi'(\xi) - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(\xi - r_j)^* \psi(\xi - r_j)} \right) \phi(\xi) d\xi$$

$$= \int_{-\infty} \overline{(\Lambda_L^* \psi)(\xi)} \phi(\xi) d\xi.$$

□

Propositie B.3. *Voor de operator $R_{\mathcal{L}}(s)$ gegeven door*

$$R_{\mathcal{L}}(s) = (\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} - \frac{1}{s + l} I - \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{(s + l)^2},$$

met de notatie als in vergelijking (3.1), geldt dat $R_{\mathcal{L}}(s) = O(|\Im(s)|^{-3})$ in een strook rond de imaginaire-as ($|\Re(s)| < \alpha$, voor een $\alpha > 0$.)

Bewijs. Herschrijf $(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1}$ als

$$(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} = \frac{1}{sI - \tilde{\mathcal{L}}(s)} = \frac{1}{(s+l-l)I - \tilde{\mathcal{L}}(s)} = \frac{1}{s+l} \cdot \frac{1}{I - \left(\dfrac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{s+l}\right)}.$$

Daar l constant is en $|sI| > |\tilde{\mathcal{L}}(s)|$ als $|\Im(s)| \to \infty$ geldt dat

$$\left|\frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) - lI}{s+l}\right| < 1$$

als $|\Im(s)|$ groot genoeg, dus de meetkundige reeks geeft dat

$$(\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} = \frac{1}{s+l} \cdot \frac{1}{I - \left(\dfrac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{s+l}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI\right)^n}{(s+l)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{s+l} + \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{s+l} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI\right)^n}{(s+l)^{n+1}}.$$

Daar $\tilde{\mathcal{L}}(s)$ begrensd is als $|\Im(s)| \to \infty$, is er een $K > 0$ zodanig dat

$$|\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI| \leq KI.$$

Dit geeft ons dat

$$R_{\mathcal{L}} = (\Delta_{\mathcal{L}}(s))^{-1} - \frac{1}{s+l}I - \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{(s+l)}$$

$$= \frac{1}{s+l} + \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{s+l} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI\right)^n}{(s+l)^{n+1}} - \frac{1}{s+l}I - \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s) + lI}{(s+l)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(KI)^n}{(s+l)^{n+1}},$$

dus $R_{\mathcal{L}} = O(|\Im(s)|^{-3}|$. □

Propositie B.4. *Voor $\mathcal{G}(\xi)$ als gedefinieerd in vergelijking (3.9) geldt dat*

$$\mathcal{G}'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi + r_k) + \delta(\xi).$$

Bewijs. Uit vergelijking (3.9) volgt dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \left(H(\xi + r_k) e^{-l(\xi + r_k)} + lH(\xi + r_k)(\xi + r_k) e^{-l(\xi + r_k)} \right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_jH(\xi+r_j+r_k)(\xi+r_j+r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)}+\mathcal{F}^{-1}(R_{\mathcal{L}}(i\eta))(\xi+r_j)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k\left(H(\xi+r_k)e^{-l(\xi+r_k)}+lH(\xi+r_k)(\xi+r_k)e^{-l(\xi+r_k)}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_jH(\xi+r_j+r_k)(\xi+r_j+r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)}\right)+\mathcal{F}^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_ke^{i\eta r_k}R_{\mathcal{L}}(i\eta)).$$

Merk op dat uit vergelijking (1.5) volgt dat beide sommen in

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{A}_jH(\xi+r_j+r_k)(\xi+r_j+r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)}\right)$$

absoluut convergent zijn en dus convergeert deze dubbele sommatie.

Beschouw nu $\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_ke^{i\eta r_k}R_{\mathcal{L}}(i\eta)$, hiervoor geldt dat

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{i\eta r_k}R_{\mathcal{L}}(i\eta)=\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)R_{\mathcal{L}}(i\eta)=(i\eta I-\Delta(i\eta))R_{\mathcal{L}}(i\eta)=i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)-\Delta(i\eta)R_{\mathcal{L}}(i\eta).$$

Verder geldt dat

$$\Delta(i\eta)R_{\mathcal{L}}(i\eta)=I-\frac{i\eta-\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)}{i\eta+l}-\frac{(i\eta-\tilde{\mathcal{L}}(i\eta))(\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)+l)}{(i\eta+l)^2}$$

$$=\frac{(i\eta+l)^2+(\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)-i\eta)(i\eta+l)+(\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)-i\eta)(\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)+l)}{(i\eta+l)^2}$$

$$=\frac{(i\eta)^2+2i\eta l+l^2+\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)i\eta+\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)l-(i\eta)^2-i\eta l+\tilde{\mathcal{L}}^2(i\eta)+\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)l-\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)i\eta-i\eta l}{(i\eta+l)^2}$$

$$=\frac{\tilde{\mathcal{L}}^2(i\eta)+2l\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)+l^2}{(i\eta+l)^2}.$$

Er geldt dat

$$\tilde{\mathcal{L}}^2(i\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\mathcal{A}_ke^{i\eta(r_j+r_k)}.$$

Dus samen met propositie 3.4 geeft dit dat

$$\mathcal{F}^{-1}(\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_ke^{i\eta r_k}R_{\mathcal{L}}(i\eta))=\mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta))-\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\tilde{\mathcal{L}}^2(i\eta)+2l\tilde{\mathcal{L}}(i\eta)+l^2}{(i\eta+l)^2}\right)$$

$$=\mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta))-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{A}_j\mathcal{A}_kH(\xi+r_j+r_k)(\xi+r_j+r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)}$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_k 2lH(\xi + r_j)(\xi + r_j)e^{-l(\xi+r_j)} - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi}.$$

Dus we hebben

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \left(H(\xi + r_k)e^{-l(\xi+r_k)} + lH(\xi + r_k)(\xi + r_k)e^{-l(\xi+r_k)} \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j H(\xi + r_j + r_k)(\xi + r_j + r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)} \right)$$

$$+\mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_j \mathcal{A}_k H(\xi + r_j + r_k)(\xi + r_j + r_k)e^{-l(\xi+r_j+r_k)}$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_k 2lH(\xi + r_j)(\xi + r_j)e^{-l(\xi+r_j)} - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k (1 - l)H(\xi + r_k)e^{-l(\xi+r_k)} + \mathcal{F}^{-1}(i\eta R_{\mathcal{L}}(i\eta)) - l^2 H(\xi)\xi e^{-l\xi}.$$

Deze uitdrukking aftrekken van $\mathcal{G}'(\xi)$ uit vergelijking (2.4) geeft

$$\mathcal{G}'(\xi) - \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k \mathcal{G}(\xi + r_j) = \delta(\xi).$$

$\square$

Propositie B.5. *Voor alle testfuncties $\zeta(\xi)$ en functies $h \in L^p$ geldt dat*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)\mathcal{A}_j \mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| \, d\eta d\xi < \infty.$$

Bewijs. Laat $\zeta(\xi)$ een testfunctie zijn. Dan geldt dat er een $0 < M_\zeta < \infty$ en een interval $[-T_\zeta, T_\zeta]$, met $0 < T_\zeta < \infty$ zodanig dat

$$|\zeta(\xi)| \leq \begin{cases} M_\zeta, & \text{als } \xi \in [-T_\zeta, T_\zeta], \\ 0, & \text{anders} . \end{cases}$$

Dit geeft dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)\mathcal{A}_j \mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| \, d\eta d\xi \leq |\mathcal{A}_j| \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta d\xi$$

$$\leq |\mathcal{A}_j| \int_{-T_\zeta}^{T_\zeta} M_\zeta \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta d\xi$$

Laat $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Uit propositie 3.3 volgt dat $|\mathcal{G}(\xi)| \leq \beta e^{-\alpha|x|}$, voor $\beta, \alpha > 0$. Verder hebben we dat $h \in L^p$. Er geldt voor alle ξ dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta = ||Gh||_1.$$

Hölders ongelijkheid geeft dat

$$||Gh||_1 \leq ||G||_q ||h||_p,$$

met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Eerst het geval $p \neq 1$ en dus $q \neq \infty$, we hebben dan voor deze q dat

$$||G(\xi + r_j - \eta)||_q^q = \int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi + r_j - \eta)|^q d\eta \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\beta e^{-\alpha|\xi + r_j - \eta|}\right)^q d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\xi + r_j} \beta^q e^{-q\alpha(\xi + r_j - \eta)} d\eta + \int_{\xi + r_j}^{\infty} \beta^q e^{q\alpha(\xi + r_j - \eta)} d\eta$$

$$= \left(\beta^q q\alpha e^{-q\alpha(\xi + r_j - \eta)}\right)\Big|_{\infty}^{\xi + r_j} + \left(-\beta^q q\alpha e^{q\alpha(\xi + r_j - \eta)}\right)\Big|_{\xi + r_j}^{\infty}$$

$$= \left(\beta^q q\alpha e^0 - \lim_{\eta \to -\infty} \beta^q q\alpha e^{-q\alpha(\xi + r_j - \eta)} - \lim_{\eta \to \infty} \beta^q q\alpha e^{q\alpha(\xi + r_j - \eta)} + \beta^q q\alpha e^0\right).$$

Merk op dat we ξ integreren van $-T_\zeta$ naar T_ζ, dus in het bijzonder geldt dat $\xi + r_j$ voor gegeven j een eindige verschuiving is dus we kunnen de limieten naar $\pm\infty$ van η nemen. Dit geeft ons dat

$$\left(\beta^q q\alpha e^0 - \lim_{\eta \to -\infty} \beta^q q\alpha e^{-q\alpha(\xi + r_j - \eta)} - \lim_{\eta \to \infty} \beta^q q\alpha e^{q\alpha(\xi + r_j - \eta)} + \beta^q q\alpha e^0\right)$$

$$= \left(\beta^q q\alpha e^0 - 0 - 0 + \beta^q q\alpha e^0\right) = 2\beta^q q\alpha.$$

In het bijzonder geeft dit dat $G(\xi + r_j - \eta) \in L^q$. Daar $h \in L^p$ geldt $||h||_p = C_h < \infty$ en dus hebben we met Hölders ongelijkheid dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta = ||G(\xi + r_j - \eta)h(\eta)||_1 \leq \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h.$$

Dit invullen in de uitdrukking die we hadden geeft

$$|\mathcal{A}_j| \int_{-T_\zeta}^{T_\zeta} M_\zeta \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta d\xi$$

$$\leq |\mathcal{A}_j| \int_{-T_\zeta}^{T_\zeta} M_\zeta \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h d\xi = |\mathcal{A}_j| 2T_\zeta M_\zeta \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h.$$

Daar de constante $2T_\zeta M_\zeta \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h$ niet van j afhangt volgt samen met (1.5) dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)\mathcal{A}_j \mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)|\, d\eta d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| 2T_\zeta M_\zeta \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h$$

$$= 2T_\zeta M_\zeta \sqrt[q]{2\beta^q q\alpha} C_h \sum_{j=-1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| < \infty.$$

Nu het geval dat $p = 1$ en dus $q = \infty$. Dan geldt

$$||G(\xi+r_j-\eta)||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\mathbb{R}} |G(\xi+r_j-\eta)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\eta\in\mathbb{R}} \beta e^{-\alpha|\xi+r_j-\eta|} = \beta e^0 = \beta < \infty.$$

In het bijzonder geeft dit dat $G(\xi + r_j - \eta) \in L^q$. Daar $h \in L^p$ geldt $||h||_p = C_h < \infty$ en dus hebben we met Hölders ongelijkheid dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta = ||G(\xi + r_j - \eta)h(\eta)||_1 \leq \beta C_h.$$

Dit invullen in de uitdrukking die we hadden geeft

$$|\mathcal{A}_j| \int_{-T_\zeta}^{T_\zeta} M_\zeta \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| d\eta d\xi$$

$$\leq |\mathcal{A}_j| \int_{-T_\zeta}^{T_\zeta} M_\zeta \beta C_h d\xi = |\mathcal{A}_j| 2T_\zeta M_\zeta \beta C_h.$$

Daar de constante $2T_\zeta M_\zeta \beta C_h$ niet van j afhangt volgt samen met (1.5) dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta(\xi)\mathcal{A}_j \mathcal{G}(\xi + r_j - \eta)h(\eta)| \, d\eta d\xi \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| 2T_\zeta M_\zeta \beta C_h$$

$$= 2T_\zeta M_\zeta \beta C_h \sum_{j=-1}^{\infty} |\mathcal{A}_j| < \infty.$$

□

Propositie B.6. *Laat $\Psi(\xi) = Ke^{-c|\xi|}$, met $K > 0$ en $c > 0$. Noteer de j-voudige convolutie van $\Psi(\xi)$ met zichzelf als $\Psi^{*j}(\xi)$, met $\Psi^{*1}(\xi) = \Psi(\xi)$. Als $K < \dfrac{c}{2}$ dan geldt dat*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{*j}(\xi) = \tilde{K}e^{-\tilde{c}|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{c} = \sqrt{c^2 - 2Kc}, \quad \tilde{K} = \frac{Kc}{\tilde{c}}.$$

Bewijs. Daar $c > 0$ hebben we dat

$$\Psi(\xi) = Ke^{-|c\xi|}.$$

De Fouriertransformatie $\mathcal{F}(\psi)(\eta)$ van deze uitdrukking is

$$\mathcal{F}(\psi)(\eta) = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|c\xi|} e^{-i\eta\xi} d\xi = K \int_{-\infty}^{0} e^{\xi(c+i\eta)} d\xi + K \int_{0}^{\infty} e^{-\xi(c-i\eta)} d\xi$$

$$= K\left(\frac{e^{\xi(c-i\eta)}}{c-i\eta}\right)\Bigg|_{-\infty}^{0} + K\left(\frac{e^{-\xi(c+i\eta)}}{-(c+i\eta)}\right)\Bigg|_{0}^{\infty} = K\left(\frac{1}{c-i\eta} - 0 - 0 + \frac{1}{c+i\eta}\right) = \frac{2Kc}{c^2+\eta^2}.$$

Daar geldt dat $K > 0$ en $c > 0$ krijgen we dat

$$|\mathcal{F}(\psi)(\eta)| = \left|\frac{2Kc}{c^2+\eta^2}\right| = \frac{2Kc}{c^2+\eta^2}.$$

Als geldt dat $K < \dfrac{c}{2}$ dan geeft dit

$$|\mathcal{F}(\psi)(\eta)| = \frac{2Kc}{c^2+\eta^2} < \frac{c^2}{c^2+\eta^2} \leq \frac{c^2}{c^2+0^2} = 1.$$

Beschouw nu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}(\psi)(\eta)^j = \mathcal{F}(\psi)(\eta) \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}(\psi)(\eta)^j.$$

Daar $|\mathcal{F}(\psi)(\eta)| < 1$ geeft de meetkundige reeks dat

$$\mathcal{F}(\psi)(\eta) \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}(\psi)(\eta)^j = \frac{\mathcal{F}(\psi)(\eta)}{1-\mathcal{F}(\psi)(\eta)} = \frac{2Kc}{c^2-2Kc+\eta^2} = \frac{2\tilde{K}\tilde{c}}{\tilde{c}^2+\eta^2}.$$

Merk op dat $\tilde{c} > 0$ daar $K < \dfrac{c}{2}$ en dus geldt dat $\tilde{c} > 0$ en $\tilde{K} > 0$. Daar $Ke^{-c|\xi|} \in L^2$ geldt dat de Fouriertransformatie een bijectie is dus

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}(\psi)(\eta)^j\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2\tilde{K}\tilde{c}}{\tilde{c}^2+\eta^2}\right) = \tilde{K}e^{-\tilde{c}|\xi|}.$$

Verder hebben we dat $\mathcal{F}(\psi)(\eta)$ positief is en dus wegens Fubini krijgen we dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^{*j}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}(\psi)(\eta)^j\right) = \tilde{K}e^{-\tilde{c}|\xi|}.$$

□

Lemma B.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-s|-\tilde{\alpha}|s-\eta|} ds \leq \frac{2\alpha\left(e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} - e^{-\alpha|\xi-\eta|}\right)}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2} \leq \frac{2\alpha}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}.$$

Bewijs. Beschouw het geval $\xi < \eta$ dan geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi-s|-\tilde{\alpha}|s-\eta|} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds + \int_{\xi}^{\eta} e^{\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds + \int_{\eta}^{\infty} e^{\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds$$

$$= \left(\frac{e^{-\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{\alpha+\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\xi} + \left(\frac{e^{\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{-\alpha+\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{\xi}^{\eta} + \left(\frac{e^{\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{-(\alpha+\tilde{\alpha})}\right)\Bigg|_{\eta}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{\alpha+\tilde{\alpha}} + \frac{e^{\alpha(\xi-\eta)}}{-\alpha+\tilde{\alpha}} + \frac{e^{\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{-\tilde{\alpha}+\alpha} + \frac{e^{\alpha(\xi-\eta)}}{-(\alpha+\tilde{\alpha})} = \frac{2\alpha\left(e^{\tilde{\alpha}(\xi-\eta)} - e^{\alpha(\xi-\eta)}\right)}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2}$$

$$= \frac{2\alpha\left(e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} - e^{-\alpha|\xi-\eta|}\right)}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2}.$$

Het geval $\xi > \eta$ geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\xi-s|-\tilde{\alpha}|s-\eta|}ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds + \int_{\eta}^{\xi} e^{-\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds + \int_{\xi}^{\infty} e^{\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}ds$$

$$= \left(\frac{e^{-\alpha(\xi-s)+\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{\alpha+\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\eta} + \left(\frac{e^{-\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{\alpha-\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{\eta}^{\xi} + \left(\frac{e^{\alpha(\xi-s)-\tilde{\alpha}(s-\eta)}}{-(\alpha+\tilde{\alpha})}\right)\Bigg|_{\xi}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-\alpha(\xi-\eta)}}{\alpha+\tilde{\alpha}} + \frac{e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{\alpha-\tilde{\alpha}} + \frac{e^{-\alpha(\xi-\eta)}}{\tilde{\alpha}-\alpha} + \frac{e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{-(\alpha+\tilde{\alpha})} = \frac{2\tilde{\alpha}\left(e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)} - e^{-\alpha(\xi-\eta)}\right)}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2}$$

$$\frac{2\tilde{\alpha}\left(e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|} - e^{-\alpha|\xi-\eta|}\right)}{\alpha^2-\tilde{\alpha}^2}.$$

□

Propositie B.8.

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}d\eta = \begin{cases} \dfrac{2-e^{\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}}, & \xi < \tau \\ \dfrac{e^{\tilde{\alpha}\tau}}{\tilde{\alpha}}e^{-\tilde{\alpha}\xi}, & \xi > \tau. \end{cases}$$

Bewijs. In het geval dat $\xi < \tau$ geeft dit

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}d\eta = \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}d\eta + \int_{\xi}^{\tau} e^{\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}d\eta$$

$$= \left(\frac{e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{\eta=-\infty}^{\xi} + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{-\tilde{\alpha}}\right)\Bigg|_{\eta=\xi}^{\tau} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} + 0 - \frac{e^{\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} = \frac{2-e^{\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}}.$$

In het geval $\xi > \tau$ krijgen we

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}|\xi-\eta|}d\eta = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}d\eta$$

$$= \left(\frac{e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\eta)}}{\tilde{\alpha}} \right) \Bigg|_{\eta=-\infty}^{\tau} = \frac{e^{-\tilde{\alpha}(\xi-\tau)}}{\tilde{\alpha}} = \frac{e^{\tilde{\alpha}\tau}}{\tilde{\alpha}} e^{-\tilde{\alpha}\xi}.$$

Tezamen geeft dit de gewenste uitdrukking. $\square$