# De stelling van Borsuk-Ulam

Beek, J.W.F. van

J. W. F. van Beek

# De stelling van Borsuk-Ulam

Bachelorscriptie

Scriptiebegeleider: dr. R. de Jong

Datum Bachelorexamen: 1 juli 2015

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding

De stelling van Borsuk-Ulam heeft een interessant bewijs dat gebruik maakt van theorie van singuliere homologie en overdekkingsruimten, en een aantal onverwachte toepassingen in de combinatoriek.

**Stelling 1.1** (Borsuk-Ulam)**.** *Zij $n \geq 0$ en $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ een continue functie. Dan is er een $x \in S^n$ met $f(x) = f(-x)$.*

We zullen in deze scriptie in het eerste deel een aantal combinatorische toepassingen geven en bewijzen. In paragraaf drie zullen we singuliere homologie voor algemene abelse groepen opzetten, en in paragraaf vier geven we een aantal eigenschappen van overdekkingsruimten. In paragraaf vijf zullen we de stelling van Borsuk-Ulam bewijzen. In paragraaf zes proberen we van een aantal overdekkingsruimten de homologie te berekenen, door gebruik te maken van de unieke liftingseigenschap.

# 2 Combinatorische toepassingen

In deze paragraaf behandelen we een aantal combinatorische toepassingen van Borsuk-Ulam. We volgen in grote lijnen [1].

**Probleem 2.1.** [Ketting-splits probleem] Twee dieven stelen een ketting (homeomorf met een interval) met een even aantal stenen, zeg $2n$, van $k$ verschillende soorten ($k \leq n$). Van elke soort $j$ ($1 \leq j \leq k$) zitten er $2n_j$ stenen aan de ketting ($n_j \geq 1$). We willen de ketting op zo'n manier in stukken knippen dat het mogelijk is elke dief precies $n_j$ stenen te geven van elke soort $j$. Hoeveel knippen zijn er minimaal nodig voor een dergelijke eerlijke verdeling?

Het is makkelijk om configuraties van de stenen te maken waarin $k$ knippen nodig zijn, en we zullen uiteindelijk zien dat $k$ knippen altijd genoeg zijn.

**Definitie 2.2.** Zij $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ het Borel sigma-algebra in $\mathbb{R}^n$. We noemen een maat $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \sqcup \infty$ *niet-gedegenereerd* als $\mu(H) = 0$ voor elk $(n-1)$-dimensionaal affien hypervlak $H \subset \mathbb{R}^n$.

**Stelling 2.3** (Ham-Sandwich stelling)**.** *Zij $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \sqcup \infty$ een niet-gedegenereerde maat en $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ die $\mu$-meetbaar zijn van eindige maat. Dan is er een affien hypervlak $H \subset \mathbb{R}^n$ dat de $A_i$ door midden snijdt in maat.*

*Bewijs.* Het bewijs dat we hier geven is in essentie het bewijs uit [2], pp 242-243, met wat details (zoals continuïteit van $f$) ingevuld.

Vat $\mathbb{R}^n$ op als deelverzameling van $\mathbb{R}^{n+1}$ door hem te identificeren met $\mathbb{R}^n \times \{1\}$. Definieer voor elke $x \in S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ de volgende verzamelingen:

$$H_x = \mathbb{R}^n \times \{1\} \cap \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle = 0\},$$

en

$$V_x = \mathbb{R}^n \times \{1\} \cap \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle \geq 0\}.$$

Merk op dat voor alle $x \in S^n$, behalve $x = (0, \ldots, \pm 1)$, $H_x$ een hypervlak in $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ is.

Definieer nu de afbeelding $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ componentsgewijs door

$$f_i(x) = \mu(V_x \cap A_i),\ 1 \leq i \leq n.$$

Merk op dat $V_x \cap A_i$ $\mu$-meetbaar is van eindige maat aangezien $V_x$ gesloten is en dus bevat in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

We tonen nu continuïteit van $f$ aan. Wegens de universele eigenschap van producten is het hiervoor voldoende aan te tonen dat $f_i$ continu is voor elke $i$. Zij dus $i$ willekeurig en laat $(x_m)_m \subset S^n$ een rijtje zijn dat convergeert naar $x \in S^n$. Laat $z \in \mathbb{R}^n$ een punt zijn dat niet op $H_x$ ligt. Dan is het duidelijk dat $z \in V_x$ dan en slechts dan als $z \in V_{x_m}$ voor $m \geq M$ als $M$ groot genoeg is. Zij dus $\mathbb{1}$ de indicatorfunctie op $V_x \cap A_i$ en $\mathbb{1}_m$ de indicatorfunctie op $V_{x_m} \cap A_i$, dan geldt

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{1}_m(z) = \mathbb{1}(z),$$

voor alle $z$ die niet op $H_x$ liggen. Merk op dat aangezien $\mu(H_x) = 0$, het rijtje $(\mathbb{1}_m)_m$ blijkbaar bijna overal convergeert naar $\mathbb{1}$. Aangezien de $\mathbb{1}_m$ allemaal begrensd worden door de indicatorfunctie op $A_i$ kunnen we nu de gedomineerde convergentiestelling toepassen:

$$\lim_{m \to \infty} f_i(x_m) = \lim_{m \to \infty} \int \mathbb{1}_m \, d\mu = \int \mathbb{1} \, d\mu = f_i(x).$$

Nu we continuïteit hebben aangetoond krijgen we met Borsuk-Ulam een $x_0 \in S^n$ met $f(x_0) = f(-x_0)$. Merk op dat alleen in het triviale geval dat $\mu(A_i) = 0$ voor alle $i$ kan gelden dat $x_0 = (0, \ldots, \pm 1)$, omdat $f(0, \ldots, -1) = 0$. In de niet-triviale gevallen krijgen we dus een affien hypervlak $H_{x_0}$ dat de $A_i$ in maat door midden snijdt. □

We willen de Ham-Sandwich stelling in $\mathbb{R}^k$ gebruiken om onze ketting door midden te snijden. Hiervoor moeten we eerst een manier vinden om de ketting in te bedden in $\mathbb{R}^k$.

**Definitie 2.4.** De *momentcurve* $M$ in $k$ dimensies is de kromme in $\mathbb{R}^k$ geparametriseerd door $R(x) = (x, \ldots, x^k)$, $x \in \mathbb{R}$.

Merk op dat de afbeelding $f : \mathbb{R} \to M$ gegeven door $x \mapsto (x, \ldots, x^k)$ een homeomorfisme is: hij is continu vanwege de universele eigenschap van producten, en projectie op de eerste coördinaat geeft een continue inverse.

De volgende eigenschap van $M$ is in het bewijs van de ketting-splits stelling belangrijk.

**Lemma 2.5.** *Een affien hypervlak $H \subset \mathbb{R}^k$ snijdt de momentkromme $M$ in hooguit $k$ punten.*

*Bewijs.* De punten $x \in H$ voldoen aan een vergelijking van de vorm

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = b,$$

met $a_i, b \in \mathbb{R}$, waarbij de $a_i$ niet allemaal nul zijn. Substitueren we een punt $(z, \ldots, z^k) \in M$ in deze vergelijking, dan krijgen we

$$\sum_{i=1}^{k} a_i z^i = b.$$

Omdat een polynoom van graad $\leq k$ hooguit $k$ verschillende nulpunten heeft over $\mathbb{R}$, heeft deze vergelijking hooguit $k$ oplossingen. $\square$

We kunnen nu onze beginvraag beantwoorden.

**Stelling 2.6** (Ketting-splits stelling (beschadigd))**.** *We kunnen een eerlijke verdeling van de ketting (zoals gedefinieerd bij 2.1) bewerkstelligen met hooguit k knippen, al kunnen hierbij stenen beschadigd raken.*

*Bewijs.* We leggen de ketting over de momentkromme in $k$ dimensies door steen $i$ $(1 \leq i \leq 2n)$ te plaatsen op het stuk van de momentkromme corresponderend met $x \in [i-1, i]$.

Laat nu $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \sqcup \infty$ de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ zijn. Aangezien de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ gegeven door $x \mapsto (x, \ldots, x^k)$ een continue functie tussen Borel-ruimtes is (de sigma-algebra's worden voortgebracht door de open verzamelingen), is hij meetbaar: dat wil zeggen dat voor elke $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ geldt dat $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. We kunnen dus $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R} \sqcup \infty$ definiëren door

$$E \mapsto \lambda(f^{-1}(E)),$$

en het is eenvoudig in te zien dat deze afbeelding een maat is (zie stelling 7.5 in [3]).

Zij $H \subset \mathbb{R}^k$ een affien hypervlak. Dan snijdt $H$ de momentkromme in hooguit $k$ punten, dus de verzameling $S$ van snijpunten is eindig. Dus ook $f^{-1}(S)$ is eindig, dus $\lambda(f^{-1}(S)) = 0$. Hieruit volgt dat $\mu(H) = 0$ en we concluderen dat $\mu$ niet-gedegenereerd is.

Definieer nu $A_j$ $(1 \leq j \leq k)$ als het stuk van de momentkromme waar stenen van soort $j$ liggen. We passen de Ham-Sandwich stelling toe en vinden een hypervlak $H$ dat de $A_j$ in maat doormidden snijdt. Als we kijken naar de definitie van $\mu$, zien we dat deze snede een eerlijke verdeling van de stenen oplevert. Omdat $H$ de momentkromme hooguit in $k$ punten snijdt zijn we klaar. $\square$

Zoals gezegd kunnen bij de bovenstaande snede stenen beschadigd raken. We kunnen echter zulk soort sneden aanpassen, zonder het aantal knippen te vergroten, om een snede te krijgen die een eerlijke verdeling oplevert en geen enkele steen beschadigt.

**Stelling 2.7** (Ketting-splits stelling (onbeschadigd))**.** *We kunnen een eerlijke verdeling van de ketting (zoals gedefinieerd bij 2.1) bewerkstelligen met hooguit k knippen, waarbij we de stenen niet beschadigen, door de snede van stelling 2.6 aan te passen. Bij deze aanpassing wordt een knip door een steen verplaatst naar direct rechts of direct links van deze steen.*

*Bewijs.* We bewijzen de uitspraak met inductie naar $n$.

Voor de basis $n = k$ zijn er van elke soort precies twee stenen. Als dus van soort $j$ een steen beschadigd is, dan is de andere van het paar dat ook omdat de snede de stenen eerlijk verdeelt. We kunnen deze knippen direct links of rechts van deze stenen zetten, zodat elk van deze stenen een andere dief als eigenaar krijgt. De stenen van de andere soorten veranderen hierbij niet van eigenaar, dus houden we een eerlijke verdeling. We kunnen dit voor elke soort doen, totdat uiteindelijk geen enkele steen beschadigd is en we nog steeds een eerlijke verdeling hebben.

Zij nu $N > k$ en stel dat de stelling waar is voor $n = N - 1$. We tonen aan dat er twee onbeschadigde stenen zijn van dezelfde soort die elk een andere eigenaar hebben.

Stel dat dit niet zo is. Dan is van elke soort minimaal één steen beschadigd en dus zelfs van elke soort precies één steen beschadigd, omdat er $k$ soorten zijn en ook $k$ knippen. Omdat echter $N > k$ is er een soort $j$ waarvan minimaal $2n_j \geq 4$ stenen aan de ketting zitten en dus $2n_j - 1 \geq 3$ stenen onbeschadigd zijn. Bij een eerlijke verdeling kunnen deze niet allemaal van één dief zijn: tegenspraak.

Er zijn dus twee stenen van dezelfde soort met elk een andere eigenaar. Als we deze stenen verwijderen uit de ketting, komen we in de situatie van de inductiehypothese. We kunnen dus deze stenen verwijderen, met inductie de snede aanpassen, en vervolgens de stenen op dezelfde plaats weer terugstoppen. Omdat bij het aanpassen van de snede geen extra knippen worden gemaakt en elke knip door een steen direct links of direct rechts van die steen wordt geplaatst, veranderen de twee stenen bij het terugstoppen niet van eigenaar, dus krijgen we een snede die de stenen eerlijk verdeelt en niet beschadigt. □

# 3 Homologie met coëfficiënten

In deze paragraaf volgen we hoofdstuk 2 van [4], waar singuliere homologie voor de coëfficiëntengroep $G = \mathbb{Z}$ wordt ontwikkeld.

## 3.1 Definitie en lang exact rijtje van paren

In ons bewijs van de stelling van Borsuk-Ulam maken we gebruik van homologie met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. We geven een aantal definities en resultaten die we later zullen gebruiken.

**Definitie 3.1.** Een *$n$-simplex* is de kleinste convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^m$ ($n \leq m$) die $n + 1$ punten $v_0, \ldots, v_n$ bevat, die niet in een $n$-dimensionaal hypervlak liggen. We noteren zo'n $n$-simplex door $[v_0, \ldots, v_n]$ (waarbij we dus een ordening van de hoekpunten aannemen). Een *gezicht* van zo'n $n$-simplex $[v_0, \ldots, v_n]$ is een subsimplex $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$, met hoekpunten een niet-lege deelverzameling van de hoekpunten van de originele simplex; de ordening op de hoekpunten wordt overgenomen. De *standaard $n$-simplex* is de verzameling

$$\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ en } t_i \geq 0 \text{ voor } i = 0, \ \ldots, \ n\},$$

met als hoekpunten de standaard eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Gegeven een $n-$simplex $[v_0, \ldots, v_n]$, dan is de afbeelding $f : \Delta^n \to [v_0, \ldots, v_n]$ gegeven door

$$(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$$

een kanoniek homeomorfisme dat de ordening van de hoekpunten bewaart.

Een continue afbeelding $\sigma : \Delta^n \to X$ noemen we een $n$-simplex in $X$.

**Definitie 3.2.** Zij $X$ een topologische ruimte en $G$ een abelse groep. Dan definiëren we voor $n \geq 0$ de *ketengroepen*

$$C_n(X; G) = \left\{ \sum_{\sigma} c_\sigma \sigma | \sigma : \Delta^n \to X \text{ continu}, c_\sigma \in G, \text{ voor bijna alle } \sigma \text{ geldt } c_\sigma = 0 \right\},$$

en voor $n < 0$ stipuleren we $C_n(X; G) = 0$.

We leggen nu een groep $G$ vast, en schrijven in het vervolg verkort $C_n(X)$ in plaats van $C_n(X; G)$.

We definiëren nu voor een $n$-simplex $\sigma$ in $X$

$$\delta_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n],$$

waarbij de notatie $\hat{v_i}$ betekent dat deze coördinaat wordt weggelaten. We identificeren de simplices $[v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n]$ op de kanonieke manier met $\Delta^{n-1}$, zodat de lineaire voortzetting van $\delta_n$ tot $C_n(X)$ een homomorfisme $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ geeft. We zullen in het vervolg de afbeeldingen $d_n$ aanduiden met $d$ als dit niet voor verwarring zorgt.

Een eenvoudige verificatie laat zien dat $d^2 = 0$. Dit betekent dat de ketengroepen van een topologische ruimte $X$ een ketencomplex $(C_\bullet(X), d)$ vormen.

**Definitie 3.3.** Een *ketencomplex* $(A_\bullet, d)$, verkort aangeduid met $A_\bullet$, is een rij abelse groepen $A_n$ met daartussen homomorfismen $d$,

$$\ldots \xrightarrow{d} A_n \xrightarrow{d} A_{n-1} \xrightarrow{d} \ldots$$

zodat $d^2 = 0$. Een morfisme $f$ tussen ketencomplexen $(A_\bullet, d_A)$ en $(B_\bullet, d_B)$ is een verzameling afbeeldingen $f : A_n \to B_n$ zodat $fd_B = d_A f$, wat we zullen aangeven door $fd = df$.

**Definitie 3.4.** Voor een ketencomplex $A_\bullet$ definiëren we voor elke $n$ de *homologiegroep*

$$H_n(A_\bullet) = \ker d_n / \mathrm{im}\ d_{n+1}.$$

Voor een topologische ruimte $X$ noteren we $H_n(X) = H_n(C_\bullet(X))$, waarbij $C_\bullet(X)$ het ketencomplex is van ketengroepen $C_n(X)$ van $X$, en we noemen deze groepen de homologiegroepen van $X$.

Voor niet-lege $X$ zijn de *gereduceerde homologiegroepen* $\tilde{H}_n(X)$ per definitie de homologiegroepen van het verlengde complex

$$\ldots \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} G \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

met $\varepsilon(\sum_\sigma c_\sigma \sigma) = \sum_\sigma c_\sigma$. Uit $\varepsilon d_1 = 0$ volgt dat dit ook echt een ketencomplex is. We moeten eisen dat $X$ niet-leeg is om te garanderen dat $\varepsilon$ surjectief is en dus $\tilde{H}_{-1}(X) = 0$

Merk op dat $\tilde{H}_0(X) = \ker \varepsilon / \mathrm{im}\ d_1 \subset C_0(X)/\mathrm{im}\ d_1 = H_0(X)$ en dat de geïnduceerde afbeelding $\varepsilon_* : H_0(X) \longrightarrow G$ (ook surjectief) precies kern $\tilde{H}_0(X)$ heeft. Er geldt dus $H_0(X)/\tilde{H}_0(X) = G$. We krijgen het exacte rijtje

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{\varepsilon_*} G \longrightarrow 0.$$

Zij nu $\sigma \in C_0(X)$ een 0-simplex (en dus in feite een punt $x_0 \in X$). Dan geldt voor elke $g \in G$ dat $\varepsilon(g\sigma) = g$. De afbeelding $s : G \longrightarrow H_0(X)$ gegeven door $s(g) = \overline{g\sigma}$ is een injectief homomorfisme zodat $\varepsilon_* s = \mathrm{id}$ en dus een sectie, dus dit rijtje splitst en we hebben $\tilde{H}_0(X) \cong H_0(X) \oplus G$. Voor $n \neq 0$ geldt evident $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$. Merk op dat een punt dus triviale gereduceerde homologiegroepen heeft in alle dimensies (propositie 3.16).

Beschouw een morfisme $f$ tussen ketencomplexen $A_\bullet$ en $B_\bullet$. Als $a \in \ker d_A$, dan geldt $d_B(f(a)) = f(d_A(a)) = 0$, dus $a \in \ker d_B$. Als $b \in \mathrm{im}\ d_A$ en dus $b = d_A(c)$, dan volgt $f(b) = f(d_A(b)) = d_B(f(b)) \in \mathrm{im}\ d_B$. Een morfisme $f$ van ketencomplexen induceert dus homomorfismen $f_* : H_n(A_\bullet) \longrightarrow H_n(B_\bullet)$. Voor morfismen $f$ en $g$ tussen respectievelijk $A_\bullet$ en $B_\bullet$, en $B_\bullet$ en $C_\bullet$ geldt evident $(gf)_* = g_* f_*$. Bovendien geldt voor de identiteitsafbeelding id dat $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$.

Beschouw nu een continue afbeelding $f$ tussen topologische ruimten $X$ en $Y$. Dan induceert $f$ een morfisme $f_\sharp : C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(Y)$ door

$$f_\sharp\left(\sum_\sigma c_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma c_\sigma f \circ \sigma,$$

want het is evident dat $df_\sharp = f_\sharp d$. Hebben we een tweede afbeelding $g : Y \longrightarrow Z$, dan geldt wegens $(g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma)$ dat $(gf)_\sharp = g_\sharp f_\sharp$. Bovendien geldt voor de identiteitsafbeelding (voor een topologische ruimte of groep) dat $(\mathrm{id})_\sharp = \mathrm{id}_\sharp$.

We kunnen het bovenstaande samenvatten in de volgende stelling.

**Stelling 3.5.** *Zij* $\underline{\textbf{Top}}$ *de categorie van topologische ruimten,* $\underline{\textbf{KetComp}}$ *de categorie van ketencomplexen en* $\underline{\textbf{AbRij}}$ *de categorie van rijen abelse groepen, waarbij de morfismen rijen van homomorfismen tussen abelse groepen zijn. Dan zijn er natuurlijke functoren*

$$\mathcal{F} : \underline{\textbf{Top}} \longrightarrow \underline{\textbf{KetComp}}$$

*gegeven door*

$$X \mapsto C_\bullet(X),$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f_\sharp : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)),$$

*en*

$$\mathcal{G} : \underline{\textbf{Ketcomp}} \longrightarrow \underline{\textbf{AbRij}}$$

*gegeven door*

$$A_\bullet \mapsto (H_n(A_\bullet))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$(f : A_\bullet \to B_\bullet) \mapsto (f_* : H_n(A_\bullet) \to H_n(B_\bullet))_{n\in\mathbb{N}}.$$

*De samenstelling van bovenstaande functoren geeft een functor*

$$\mathcal{H} : \underline{\mathbf{Top}} \longrightarrow \underline{\mathbf{AbRij}}$$

*gegeven door*

$$X \mapsto (H_n(X))_{n\in\mathbb{N}},$$
$$(f : X \to Y) \mapsto (f_* : H_n(X) \to H_n(Y))_{n\in\mathbb{N}}$$

*Bewijs.* □

**Definitie 3.6.** Zij $X$ een topologische ruimte en $A \subset X$ een deelruimte. Dan heet $(X, A)$ een *ruimtepaar*. Zij $(X, A)$ en $(Y, B)$ twee ruimteparen, dan is een continue afbeelding $f : X \longrightarrow Y$ zodat $f(A) \subset B$ een morfisme van paren. Voor een ruimtepaar $(X, A)$ definiëren we de *relatieve ketengroepen* als het quotiënt

$$C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A).$$

Omdat de randafbeelding $d$ van het ketencomplex $C_\bullet(X)$ voor elke $n$ $C_n(A)$ afbeeldt op $C_{n-1}(A)$, induceert hij afbeeldingen $\overline{d} : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$ en vormen de $C_n(X, A)$ samen met $\overline{d}$ een ketencomplex $C_\bullet(X, A)$. De homologiegroepen $H_n(X, A) = H_n(C_\bullet(X, A))$ van dit complex noemen we de *relatieve homologiegroepen*. Merk op dat net zoals bij niet-relatieve homologie morfismen van paren $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homomorfismen $f_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ induceren.

Het volgende resultaat uit de homologische algebra is in het vervolg erg belangrijk.

**Stelling 3.7.** *Zij*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

*een korte exacte rij ketencomplexen. Dan is er een lange exacte rij*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{j_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A_\bullet) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

*Bewijs.* Zie stelling 2.17, pp 117 in [4]. □

Zijn $(X, A)$ nu een ruimtepaar en $i : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$ de inclusie (geïnduceerd door de inclusie $i : A \longrightarrow X$). Zij $j : C_n(X) \longrightarrow C_n(X, A)$ de quotiëntafbeelding. Dan commuteren $i$ en $j$ met de randafbeeldingen en hebben we dus een exact rijtje

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{i} C_\bullet(X) \xrightarrow{j} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

Met stelling 3.7 geeft dit het *lange exacte rijtje van paren*

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Er is een analoog exact rijtje voor gereduceerde homologiegroepen als $A \neq \emptyset$: door voor $n = -1$ het exacte rijtje

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\text{id}} G \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

toe te voegen krijgen we weer een kort exact rijtje van ketencomplexen, en stelling 3.7 geeft dan het *gereduceerde lange exacte rijtje van paren*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \dots$$

Nemen we $A = \{x_0\}$ een punt in $X$, dan krijgen we met propositie 3.16 (waaruit volgt dat $\tilde{H}_n(x_0) = 0$ voor alle $n$) uit het bovenstaande gereduceerde rijtje dat $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ voor alle $n$. Merk ook op dat voor niet lege $A$ geldt $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$ voor alle $n$.

Zijn nu $X, A, B$ ruimtes die voldoen aan $B \subset A \subset X$. Dan hebben we het exacte rijtje van ketencomplexen

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A, B) \xrightarrow{i_*} C_\bullet(X, B) \xrightarrow{j_*} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

met $i : (A, B) \longrightarrow (X, B)$ en $j : (X, B) \longrightarrow (X, A)$ de inclusies van paren. We krijgen met stelling 3.7 het *lange exacte rijtje van tripels*

$$\dots \xrightarrow{\partial} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \dots$$

## 3.2 Homotope afbeeldingen, excisie en het lange exacte rijtje voor quotiënten

Een belangrijke eigenschap van homologiegroepen is dat homotope afbeeldingen dezelfde afbeeldingen op homologie induceren.

**Stelling 3.8** (Homotopie-invariantie). *Zij $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ morfismen van paren die homotopie-equivalent zijn (dat wil zeggen, er is een homotopie $F : X \times I \longrightarrow Y$ zodanig dat $F(x, t) \in B$ voor alle $(x, t) \in I \times A$.). Dan geldt $f_* = g_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B)$.*

*Bewijs.* Zie propositie 2.19, pp 118 in [4]. □

Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $X$. Zij $C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_n(X)$ de ondergroep voortgebracht door $n$-simplices $\sigma$ in $X$ met $\sigma(\Delta^n) \subset U$, met $U \in \mathcal{U}$. Als $\sigma(\Delta^n) \subset U$ dan volgt $\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n](\Delta^n) \subset U$ en dus geldt $d(C_n^{\mathcal{U}}(X)) \subset C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. De groepen $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ samen met $d$ vormen dus een ketencomplex, met homologiegroepen $H^{\mathcal{U}}(X)$.

**Stelling 3.9.** *De inclusies $i : C_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_n(X)$ induceren isomorfismen $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_n(X)$.*

*Bewijs.* Zie propositie 2.21, pp 119 in [4]. □

Het bewijs van bovenstaande stelling is lang en technisch, en laten we hier weg. Het bewijs van deze stelling heeft het volgende gevolg.

**Stelling 3.10** (Excisie). *Zij $(X, A)$ een ruimtepaar en $Z \subset X$ een open zodanig dat $\overline{Z} \subset A^\circ$. Dan induceert de inclusie $i : (X \backslash Z, A \backslash Z) \longrightarrow (X, A)$ isomorfismen $i_* : H_n(X \backslash Z, A \backslash Z) \longrightarrow H_n(X, A)$.*

*Bewijs.* Zie stelling 2.20, pp 119, [4]. □

Met behulp van homotopie-invariantie en excisie kunnen we in bepaalde gevallen de relatieve homologiegroepen $H_n(X, A)$ in het lange exacte rijtje van paren vervangen door de gereduceerde homologiegroepen $\tilde{H}_n(X/A)$. We hebben hiervoor nog één lemma nodig.

**Lemma 3.11.** *Zijn $X, A, V$ ruimtes die voldoen aan $A \subset V \subset X$. Neem aan dat $A$ een deformatieretract is van $V$. Dan induceert de inclusie $i : (X, A) \longrightarrow (X, V)$ isomorfismen $i_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, V)$ voor alle $n$.*

*Bewijs.* Merk op dat de deformatiertractie van $V$ op $A$ een homotopie-equivalentie van paren geeft tussen $(V, A)$ en $(A, A)$, waaruit volgt $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$ voor alle $n$. Het lange exacte rijtje van tripels geeft nu dat $i_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, V)$ een isomorfisme is voor elke $n$. □

**Stelling 3.12.** *Zij $(X, A)$ een ruimte paar met $A$ een niet-lege, gesloten deelruimte van $X$. Stel dat er een open $U \subset X$ is zodat $A$ een deformatieretract is van $U$ (en dus geldt $A \subset U$). Dan induceert de quotiënt afbeelding $q : (X, A) \longrightarrow (X/A, A/A)$ isomorfismen*

$$H_n(X, A) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A)$$

*en we hebben dus het* lange exacte rijtje van quotiënten

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{q_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

*Bewijs.* Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X,U) & \xleftarrow{k_*} & H_n(X-A, U-A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X/A, U/A) & \xleftarrow{k_*} & H_n(X/A - A/A, U/A - A/A) \end{array}$$

Dit diagram commuteert omdat op het niveau van paren al telkens geldt $iq = qi$. Met lemma 3.11 volgt dat $i_*$ linksboven een isomorfisme is. Het deformatieretract van $U$ op $A$ induceert deformatieretract van $U/A$ op $A/A$, dus om dezelfde reden is de afbeelding $i_*$ linksonder een isomorfisme. De afbeeldingen $k_*$ zijn isomorfismen wegens excisie. De beperking van $q$ tot $X - A$ is een homeomorfisme, dus is de afbeelding $q_*$ aan de rechterkant een isomorfisme. Er volgt dat de middelste afbeelding $q_*$ een isomorfisme is, en dus volgt dat de rechterafbeelding $q_*$ een isomorfisme is.

We krijgen nu het lange exacte rijtje door het gereduceerde lange exacte rijtje van paren te nemen en $H_n(X/A, A/A) = H_n(X/A, x_0)$ te vervangen $\tilde{H}_n(X/A)$, waarvan we al hadden aangetoond dat ze isomorf waren bij het gereduceerde lange exacte rijtje van paren. □

## 3.3 Natuurlijkheid

Een belangrijke eigenschap van de lange exacte rijtjes is de zogenaamde *natuurlijkheid*. Deze eigenschap is het onderwerp van de volgende stelling.

**Stelling 3.13.** *Zijn*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{i} B_\bullet \xrightarrow{j} C_\bullet \longrightarrow 0$$

*en*

$$0 \longrightarrow A'_\bullet \xrightarrow{i'} B'_\bullet \xrightarrow{j'} C'_\bullet \longrightarrow 0$$

*twee korte exacte rijtjes van ketencomplexen. Zij $f : A_\bullet \longrightarrow A'_\bullet$, $g : B_\bullet \longrightarrow B'_\bullet$ en $h : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ morfismen van complexen, zodat voor alle $n$ het diagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & B_n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "i'"] & B'_n \arrow[r, "j'"] & C'_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*commuteert. Dan commuteert het diagram*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(B) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_n(C) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A') \arrow[r, "i'_*"] & H_n(B') \arrow[r, "j'_*"] & H_n(C') \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Bewijs.* Zie pp 127 in [4]. □

De natuurlijkheid van het lange exacte rijtje van paren en het lange exacte rijtje van tripels volgt direct uit deze stelling.

**Stelling 3.14.** *Zij $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ een morfisme van ruimteparen. Dan is het diagram*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_n(X/A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & \tilde{H}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_n(B) \arrow[r, "i_*"] & \tilde{H}_n(Y) \arrow[r, "q_*"] & \tilde{H}_n(Y/B) \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*waarbij de rijen komen van de lange exacte rijtjes van quotienten, commutatief.*

*Bewijs.* De eerste twee vierkanten commuteren wegens $fi = if$ en $\bar{f}q = qf$. Voor commutativiteit van het rechtervierkant tonen we commutativiteit van het diagram

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(X/A) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_n(X/A, A/A) \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_n(X, A) \arrow[l, "q_*"'] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & \tilde{H}_n(A) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_n(Y/B) \arrow[r, "j_*"] & H_n(Y/B, B/B) & H_n(Y, B) \arrow[l, "q_*"'] \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(B)
\end{tikzcd}$$

aan. Commutativiteit van het eerste en derde vierkant volgt uit stelling 3.13. Het middelste diagram commuteert wegens $\bar{f}q = qf$. □

## 3.4 Enkele standaardberekeningen en graden

**Propositie 3.15.** *Zij $X$ een wegsamenhangende topologische ruimte. Dan geldt $H_0(X;G) = G$.*

*Bewijs.* Merk ten eerste op dat geldt $H_0(X;G) = C_0(X;G)/\text{im } \partial_1$. Merk op dat we 0-simplices kunnen opvatten als punten in $X$. Merk op dat voor $x_0, x_1 \in C_0(X;G)$ er een pad $\gamma$ is van $x_0$ naar $x_1$, en dat geldt $d_1\gamma = x_1 - x_0$. Dus $x_0 - x_1 \in \text{im } d_1$.

Beschouw de afbeelding $\varepsilon : C_0(X;G) \longrightarrow G$ gegeven door $\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{i \in I} c_i$, waarbij de $x_i$ 0-simplices zijn en dus punten in $X$. Dan is $\varepsilon$ surjectief, en er geldt evident $\text{im } d_1 \subset \ker \varepsilon$. Zij namelijk $\sigma$ een 1-simplex, dan geldt $\varepsilon d_1 \sigma = \varepsilon(\sigma|v_1 - \sigma|v_0) = 1 - 1 = 0$.

Stel dat $\varepsilon(\sum_{i\in I} c_i x_i) = 0$. Neem $y_0 \in X$ vast, dan geldt $y_0 - x_i \in \text{im } d_1$, dus

$$\sum_{i\in I} c_i x_i = \sum_{i\in I} c_i x_i - \left(\sum_{i\in I} c_i\right) y_0 = \sum_{i\in I} c_i (x_i - y_0) \in \text{im } d_1.$$

Er volgt $\ker \varepsilon = \text{im } d_1$.

Dus $\varepsilon$ induceert een isomorfisme tussen $H_0(X)$ en $G$. □

**Propositie 3.16.** *Als $X$ een punt is, geldt $H_n(X;G) = 0$ voor $n > 0$ en $H_0(X;G) = G$.*

*Bewijs.* Als $X$ een punt is, dan is er voor elke $n$ precies één $n$-simplex, dus het randhomomorfisme $d_n$ is de nulafbeelding voor oneven $n$ en een isomorfisme voor even $n$, $n \neq 0$. Hieruit volgt direct de propositie. □

**Propositie 3.17.** *Als* $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$*, met* $X_i$ *de samenhangscomponenten van* $X$*, dan is er een natuurlijk isomorfisme*

$$H_n(X;G) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i;G)$$

*voor alle* $n$*.*

*Bewijs.* Voor elke $n$-simplex $\sigma$ geldt im $\sigma \subset X_i$ voor een zekere $i$, omdat $\Delta^n$ samenhangend is. Dus er is een natuurlijke afbeelding $f : C_n(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i)$. Als im $\sigma \subset X_i$, dan geldt heeft elke beperking van $\sigma$ natuurlijk ook beeld in $X_i$, dus $d\sigma \in C_n(X_i)$. Dus $f$ commuteert met $d$, dus induceert $f$ een isomorfisme

$$H_n(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$$

□

**Propositie 3.18.** *Er geldt* $\tilde{H}_n(S^n;G) = G$ *en* $\tilde{H}_k(S^n;G) = 0$ *voor* $k \neq n$*.*

*Bewijs.* Beschouw het ruimtepaar $(X, A) = (B^n, S^{n-1})$. Merk op dat $B^n/S^{n-1} = S^n$. Aangezien $(B^n, S^n)$ voldoet aan de eisen van stelling 3.12, hebben we het exacte rijtje van quotiënten

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_k(A;G) \longrightarrow \tilde{H}_k(X;G) \longrightarrow \tilde{H}_k(X/A;G) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{k-1}(A;G) \longrightarrow \cdots$$

Er geldt $\tilde{H}_k(B^n) = 0$ voor alle $k$ aangezien $B^n$ samentrekbaar is. Met exactheid volgt voor $k > 0$ dat $\tilde{H}_k(S^n;G) \overset{\partial}{\to} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1};G)$ een isomorfisme is. Voor $n = 0$, wanneer $S^0$ een uit twee punten bestaat, geldt inderdaad $\tilde{H}_0(S^0) = G$ met 3.15 en 3.17. De propositie volgt nu met inductie. □

**Voorbeeld 3.19.** Neem coëfficientengroep $G = \mathbb{Z}$, dus $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Merk op dat voor een $n$-simplex $\Delta^n$ geldt$(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong (D^n, \partial D^n)$. Bovendien kunnen we $S^n$ maken door twee kopieën $D_1^n, D_2^n$ te nemen en $\partial D_1^n$ met $\partial D_2^n$ te identificeren. Zo kunnen we $S^n$ identificeren met het quotiënt van twee $n$-simplices $\Delta_1^n$ en $\Delta_2^n$ waarbij $\partial\Delta_1^n$ geïdentificeerd is met $\partial\Delta_2^n$, en we we zorgen dat onder de quotiëntafbeelding $r : \Delta_1^n \sqcup \Delta_2^n \longrightarrow S^n$ geldt dat $r(\partial\Delta_i^n) = S^{n-1}$ de equator in het $x_0$-vlak is (hiermee bedoel ik het vlak gegeven door $x_0 = 0$). We gaan te werk als op pagina 125 van [4], en identificeren $\partial\Delta_2^n$ met $\partial\Delta_2^n$ volgens de ordening van de hoekpunten (dus $v_i \in \Delta_1^n$ wordt geïdentificeerd met $v_i' \in \Delta_2^n$). Op pagina 125 van [4] wordt bewezen dat $[\Delta_1^n - \Delta_2^n]$ nu een voortbrenger is van $H_n(S^n)$, waarbij we $\Delta_i^n$ nu opvatten als element van $C_n(X;G)$.

**Definitie 3.20.** Zij $f : S^n \longrightarrow S^n$. Dan induceert $f$ een homomorfisme $f_* : \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z})$. Het element $m \in \mathbb{Z}$ geassocieerd met $f$ onder het kanonieke automorfisme van $\mathrm{End}(\tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}))$ met $\mathbb{Z}$ heet de *graad* van $f$.

Merk op dat homotope afbeeldingen dezelfde graad hebben, omdat ze dezelfde afbeeldingen op homologie induceren. Een tweede observatie is dat niet-surjectieve afbeeldingen graad nul hebben. Neem namelijk $x_0 \in S^n$ zodat $x_0$ niet in het beeld van $f$ zit. Dan factoriseert $f$ via $S^n - x_0$, dus factoriseert $f_*$ via $\tilde{H}_n(S^n - x_0)$, wat de triviale groep is.

Laat nu $\phi : G \to H$ een homomorfisme zijn tussen abelse groepen. Dan induceert $\phi$ afbeeldingen $\phi_\sharp : C_n(X, A; G) \to C_n(X, A; H)$ die commuteren met de randafbeeldingen. Dus $\phi_\sharp$ is een morfisme van ketencomplexen, dus induceert $\phi$ afbeeldingen $\phi_* : H_n(X, A; G) \to H_n(X, A; H)$, die commuteren met de randafbeeldingen in het lange exacte rijtje van paren. Bovendien commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(A;G) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_\sharp"] & C_n(X;G) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi_\sharp"] & C_n(X,A;G) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_\sharp"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(A;H) \arrow[r, "i"] & C_n(X;H) \arrow[r, "j"] & C_n(X,A;H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dus heeft $\phi_\sharp$ met stelling 3.13 de natuurlijkheidseigenschappen uit paragraaf 3.3 ten opzichte van het lange exacte rijtje van paren.

**Stelling 3.21.** *Zij $f : S^n \to S^n$ een continue afbeelding met graad $m$. Dan is $f_* : H_n(S^n; G) \to H_n(S^n; G)$ vermenigvuldiging met $m$.*

*Bewijs.* Dit is in feite het bewijs van lemma 2.19, pp 154 in [4], met details ingevuld.

Zij $f : S^n \to S^n$ een continue afbeelding van graad $m$ en definieer voor $g \in G$ het homomorfisme $\phi : \mathbb{Z} \to G$ door $\phi(1) = g$. We bewijzen dat er isomorfismen tussen $\mathbb{Z}$ en $\tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$, respectievelijk $G$ en $\tilde{H}_n(S^n; G)$ zijn zodat het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi"] & \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\phi_*"] & \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\phi"] \\
G \arrow[r, "\sim"] & \tilde{H}_n(S^n;G) \arrow[r, "f_*"] & \tilde{H}_n(S^n;G) \arrow[r, "\sim"] & G
\end{tikzcd}$$

commuteert. Aangezien $f_*$ boven 1 naar $m$ stuurt, volgt dan uit commutativiteit dat $f_*$ beneden $g$ naar $mg$ stuurt.

De commutativiteit in het middelste vierkant volgt uit $\phi_\sharp f_\sharp = f_\sharp \phi_\sharp$. We bewijzen de commutativiteit van het rechtervierkant met inductie (commutativiteit van het linkervierkant volgt dan direct).

Voor $k = 0$ geldt (omdat im $\partial_1 = 0$) dat $\tilde{H}_0(S^0; G) = \ker \varepsilon$, waarbij

$$\varepsilon : C_0(S^0; G) \longrightarrow G$$

gegeven wordt door

$$\sum_{i \in I} c_i \sigma_i \mapsto \sum_{i \in I} c_i,$$

$c_i \in G$. Omdat $S_0 = \{x_1, x_2\}$ wordt $C_0(S^0; G)$ voortgebracht door twee simplices $\sigma_1$ en $\sigma_2$, en dus geldt $\ker \varepsilon = \langle \sigma_1 - \sigma_2 \rangle$. Uit $\phi_*(\sigma_1 - \sigma_2) = g(\sigma_1 - \sigma_2)$

volgt dat isomorfismen gegeven door $\sigma_1 - \sigma_2 \mapsto 1$ en $h(\sigma_1 - \sigma_2) \mapsto h$ voor $h \in G$ voldoen.

Neem nu aan dat de bewering waar is voor $n \in \mathbb{N}$ willekeurig en beschouw het volgende diagram (waarbij we het rijtje van propositie 3.18 gebruiken):

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1};\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\phi_*"] & \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\phi_*"] & \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi_*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\phi_*"] \\
\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1};G) \arrow[r, "f_*"] & \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1};G) \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & G
\end{tikzcd}$$

Met inductie zijn er isomorfismen zodat het rechtervierkant commuteert, en $\phi_*$ commuteert met $\partial$ wegens natuurlijkheid. Dus het bovenstaande diagram commuteert. $\square$

# 4 Overdekkingsruimten

Voor het bewijs van de stelling van Borsuk-Ulam hebben we wat theorie over overdekkingsruimten nodig.

**Definitie 4.1.** Zij $X$ een topologische ruimte. Een *overdekkingsruimte* van $X$ is een ruimte $\tilde{X}$ en een afbeelding $p : \tilde{X} \to X$ die de volgende eigenschap heeft: er bestaat een open overdekking $\{U_i\}_{i\in I}$ van $X$ zodat $p^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j\in J} V_j$ voor elke $i$ een disjuncte verzameling opens is en zodat $p|_{V_j} \longrightarrow U_i$ een homeomorfisme is voor elke $j$.

Als $p : \tilde{X} \to X$ een overdekkingsruimte is en $\{U_i\}_{i\in I}$ een daarbij horende open overdekking, dan is voor vaste $i$ en $x \in U_i$ de kardinaliteit van $f^{-1}(x)$ constant. Deze kardinaliteit is dus lokaal constant, en als we $X$ samenhangend nemen is hij constant. We noemen deze kardinaliteit het aantal *bladen* van de overdekking.

Wij zullen ons in het vervolg vooral bezighouden met overdekkingsruimten die geïnduceerd worden door bepaalde groepswerkingen.

**Definitie 4.2.** Een *werking* van een groep $G$ op een topologische ruimte $X$ is een homomorfisme

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X),$$

met $\mathrm{Homeo}(X)$ de groep van homeomorfismen van $X$ naar zichzelf. We noemen zo'n werking *even* als er voor elke $x \in X$ een open omgeving $U \subset X$ is zodanig dat voor $g_1, g_2 \in G$ geldt dat $g_1U \cap g_2U \neq \emptyset$ impliceert $g_1 = g_2$.

**Propositie 4.3.** *Zij $X$ een topologische ruimte met een even werking van een groep $G$. Geef de banenruimte $G\backslash X$ de quotiënttopologie. Dan is $X$ een overdekkingsruimte van $G\backslash X$ via de quotiëntafbeelding $p : X \longrightarrow G\backslash X$.*

*Bewijs.* Zij $U \subset X$ een open, en laat $V = q(U)$. Dan is $q^{-1}(V) = \bigcup_{g\in G} gU$ open. Uit de definitie van de quotiënttopologie volgt dat $q$ open is.

Zij nu $y \in G\backslash X$, en kies $x \in p^{-1}(y)$. Dan is er een open omgeving $U$ van $x$ zodat $g_1U = g_2U$ impliceert $g_1 = g_2$ voor $g_1, g_2 \in G$. Stel $V = p(U)$. Dan geldt $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g\in G} gU$. Bovendien zijn de beperkingen $p|_{gU} : gU \longrightarrow V$ homeomorfismen: ze zijn duidelijk bijectief, en ze zijn open en continu omdat $p$ dat al was. Dus $V$ is een open met de eigenschappen uit 4.1. $\square$

De eigenschap dat een groepswerking dekpuntsvrij is (dus voor alle $x \in X$ impliceert $gx = x$ dat $g = e$) is niet voldoende om te garanderen dat de werking even is: de werking van $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}$ gegeven door $a \mapsto (x \mapsto x + a)$ is een tegenvoorbeeld. Als $X$ Hausdorff is en $G$ eindig is dit echter wel voldoende.

**Propositie 4.4.** *Stel $G$ is eindig en $X$ is Hausdorff, en $G$ werkt dekpuntsvrij op $X$. Dan is de werking van $G$ op $X$ even.*

*Bewijs.* Zij $x \in X$. Omdat de werking van $G$ dekpuntsvrij is, volgt $g_1x \neq g_2x$ voor $g_1 \neq g_2$. Omdat $X$ Hausdorff is, zijn er opens $U_{gx}$ zodat voor $g_1 \neq g_2$ geldt $g_1x \in U_{g_1x}$ en $g_2x \in U_{g_2x}$, en $U_{g_1x} \cap U_{g_2x} = \emptyset$. Definieer nu

$$U = \bigcap_{g\in G} g^{-1}U_{gx}.$$

Dan is $U$ een open omgeving van $x$ (eindige doorsnijding) die voldoet aan de eis van definitie 4.2: voor alle $g \in G$ geldt namelijk $gU \subset U_{gx}$, dus $U \cap gU = \emptyset$ voor $g \neq e$. $\square$

We vermelden het volgende resultaat zonder bewijs.

**Stelling 4.5.** *Zijn $X, Y$ topologische ruimten en $p : \tilde{X} \to X$ een overdekkingsruimte. Zij $f : I \times Y \to X$ een homotopie en $\tilde{f_0} : Y \to \tilde{X}$ een lift van $f_0$ (dat wil zeggen, er geldt $p\tilde{f_0} = f_0$). Dan bestaat er een unieke homotopie $\tilde{f} : I \times Y \to \tilde{X}$ van $\tilde{f_0}$ die $f$ lift.*

**Propositie 4.6.** *Zij $X$ een topologische ruimte, $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ een overdekkingsruimte en $\sigma : (\Delta^n, y_0) \to (X, x_0)$ een $n$-simplex (met $y_0 = (1, 0, \cdots, 0)$). Dan is er een unieke lift $\tilde{\sigma} : (\Delta^n, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ van $\sigma$.*

*Bewijs.* We bewijzen eerst met inductie voor elke $n$ het volgende: gegeven $f : (I^n, O) \to (X, x_0)$, met $I$ het eenheidsinterval en $O$ de oorsprong, is er een unieke lift $\tilde{f} : (I^n, O) \to (\tilde{X}, \tilde{x_0})$. Voor $n = 0$ is dit triviaal.

Stel dat de uitspraak waar is voor $n = k$. We beschouwen het geval met $n = k + 1$. Beschouw de geïnduceerde afbeelding $f_0 : (\{0\} \times I^k, O) \to (X, x_0)$. Met inductie heeft deze afbeelding een unieke lift $\tilde{f_0}$. Met het liftingscriterium krijgen we nu een unieke lift $\tilde{f} : (I^{k+1}, O) \to (X, x_0)$ van $f$.

We gebruiken nu het feit dat $(\Delta^n, y_0)$ homeomorf is met $(I^n, O)$, en de propositie volgt. $\square$

## 4.1 Een lang exact rijtje voor tweebladige overdekkingsruimten

In deze en de volgende paragraaf volgen we pp 174-177 in [4].

Zij $X$ een ruimte en $p : \tilde{X} \to X$ een tweebladige overdekkingsruimte. Dan induceert $p$ de afbeelding

$$p_\# : C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow C_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Deze afbeelding is wegens propositie 4.6 surjectief, omdat elke $n$-simplex $\sigma$ een lift heeft. We kunnen uit propositie 4.6 zelfs afleiden dat elke $n$-simplex twee lifts $\tilde{\sigma_1}$ en $\tilde{\sigma_2}$ heeft, aangezien het inverse beeld $p^{-1}(y_0)$ (met $y_0 = (1, 0, \cdots, 0)$) twee elementen bevat.

Omdat we werken met coëfficiënten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wordt de kern van $p_\#$ voortgebracht door elementen $\tilde{\sigma_1} + \tilde{\sigma_2}$. Definiëren we nu

$$\tau : C_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

door $\tau(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$, dan is $\tau$ duidelijk injectief en geldt im $\tau = \ker p_\#$. We hebben dus het exacte rijtje

$$0 \longrightarrow C_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau} C_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_\#} C_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Aangezien $\tau$ en $p_\#$ commuteren met de randafbeeldingen en dus morfismen van ketencomplexen zijn, geeft dit rijtje met het lange exacte rijtje van homologie aanleiding tot het lange exacte rijtje

$$\cdots \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau_*} H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} H_n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

van homologiegroepen.

**Voorbeeld 4.7.** Merk op dat $S^n$ een natuurlijke werking heeft van de groep voortgebracht door de antipodale afbeelding $\rho$, gegeven door $\rho(x) = -x$. Deze werking is duidelijk dekpuntsvrij en geeft dus met lemma 4.4 aanleiding tot een overdekkingsruimte $p : S^n \longrightarrow P^n$. Hier is de banenruimte $P^n$ de reële projectieve ruimte.

We berekenen met behulp van het lange exacte rijtje voor tweebladige overdekkingsruimte de homologiegroepen $H_n(P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Eerst laten we met inductie zien dat $H_k(P^n; G) = 0$ voor $k > n$ en algemene abelse $G$. Voor $n = 0$ is dit waar omdat $P^0$ een punt is.

Laat $H \subset S^n$ een gesloten hemisfeer zijn. Dan geldt $p(\partial H) = P^{n-1}$. Er geldt $H/\partial H = S^n$, dus krijgen we via $p$ een continue bijectie $\bar{p} : S^n \longrightarrow P^n/P^{n-1}$. Nu is $\bar{p}$ open (universele eigenschap van quotiënten) omdat $p$ dat is (zie eerste regel van bewijs 4.4). Dus $\bar{p}$ is een homeomorfisme.

Bekijk nu het rijtje voor quotiënten horend bij het paar $(P^n, P^{n-1})$ voor $n > 0$. Laat $k > n$. Dan geldt $\tilde{H}_k(S^n) = 0$ (3.18), en met inductie $\tilde{H}_k(P^{n-1}) = \tilde{H}_{k-1}(P^{n-1}) = 0$, dus volgt uit

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_k(P^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_k(P^n) \longrightarrow \tilde{H}_k(S^n) \longrightarrow \cdots$$

dat $\tilde{H}_k(P^n)$ injectief op 0 wordt afgebeeld, en dus zelf 0 is.

We berekenen nu de groepen $H_k(P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ voor $k \leq n$. Merk op dat $H_0(P^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ omdat $P^n$ wegsamenhangend is als quotiënt van een wegsamenhangende ruimte (propositie 3.15). Ook geldt $H_n(S^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $H_k(S^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ voor $k \neq 0, n$ (propositie 3.18). We gebruiken het lange exacte rijtje voor tweebladige overdekkingsruimten uit paragraaf 4.1. Voor $n > 1$ krijgen we het volgende rijtje (waarbij we het $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ argument uit de notatie weglaten):

$$0 \longrightarrow H_n(P^n) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_n(P^n) \longrightarrow H_{n-1}(P^n) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_k(P^n) \longrightarrow H_{k-1}(P^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_1(P^n) \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Met exactheid volgt achtereenvolgens dat $k$ surjectief is, $j$ de nulafbeelding is en $i$ surjectief is. Ook is $i$ injectief, dus is $i$ een isomorfisme, en krijgen we $H_1(P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Vervolgens krijgen we voor $1 < k < n$ isomorfismen $H_k(P^n) \longrightarrow H_{k-1}(P^n)$, waaruit volgt $H_k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ voor $1 < k < n$. We houden het bovenste stukje over:

$$0 \longrightarrow H_n(P^n) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_n(P^n) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Er volgt dat $H_n(P^n)$ zowel injectief als surjectief naar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gestuurd wordt, dus volgt $H_n(P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Als $n = 1$ krijgen we het volgende rijtje:

$$0 \longrightarrow H_1(P^1) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow H_1(P^1) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Er volgt wederom $H_1(P^1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

# 5 Bewijs van de stelling

We leiden de stelling van Borsuk-Ulam af uit het volgende resultaat.

**Stelling 5.1.** *Elke oneven afbeelding $f : S^n \to S^n$, dat wil zeggen, $f$ voldoet aan $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in S^n$, heeft oneven graad.*

*Bewijs.* We nemen aan dat $n \geq 1$, want het geval $n = 0$ is triviaal.

Beschouw weer de overdekkingsruimte $p : S^n \longrightarrow P^n$, en neem als coëfficiëntengroep voor homologie de groep $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ voor de rest van het bewijs. Zij $f : S^n \longrightarrow S^n$ een oneven afbeelding. Dan is $f$ antipode-bewarend, dus induceert $f$ een afbeelding $\bar{f} : P^n \longrightarrow P^n$. Dus $f$ induceert een afbeelding van het lange exacte rijtje voor tweebladige overdekkingsruimten naar zichzelf. We bewijzen met lemma 3.13 dat het resulterende diagram commuteert.

Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_k(P^n) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\bar{f}_\sharp"] & C_k(S^n) \arrow[r, "p_\sharp"] \arrow[d, "f_\sharp"] & C_k(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_\sharp"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k(P^n) \arrow[r, "\tau"] & C_k(S^n) \arrow[r, "p_\sharp"] & C_k(P^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

met $\tau$ als in paragraaf 4.1. Het rechtervierkant commuteert omdat $\bar{f}p = pf$. Zij nu $\sigma$ een willekeurige $k$-simplex in $P^n$ met lifts $\tilde{\sigma}_1$ en $\tilde{\sigma}_2$. Dan geldt $pf\tilde{\sigma}_i = \bar{f}p\tilde{\sigma}_i = \bar{f}\sigma$. Bovendien zijn $f\tilde{\sigma}_1$ en $f\tilde{\sigma}_2$ verschillend omdat $f$ antipode-bewarend is. Dus $f\tilde{\sigma}_1$ en $f\tilde{\sigma}_2$ zijn de twee lifts van $\bar{f}\sigma$, waaruit commutativiteit van het linkervierkant volgt.

We bewijzen nu met inductie naar de index $k$ van de homologiegroepen dat alle afbeeldingen $f_*$ en $\bar{f}_*$ isomorfismen zijn. We maken hierbij telkens gebruik van het feit dat als drie pijlen in een commutatief vierkant isomorfismen zijn, de vierde dat ook is.

We beginnen met $k = 0$. Voor een wegsamenhangende ruimte $X$ geldt voor elke $x_0 \in X$ dat $[gx_0] = g$ onder het isomorfisme $\bar{\varepsilon}$ van lemma 3.15. Dus $f(g) = [gf(x_0)] = g$ voor elke $g \in H_0(X)$, dus $f$ is een isomorfisme. De uitspraak volgt voor $k = 0$ omdat $S^n$ en $P^n$ wegsamenhangend zijn.

Neem aan dat $0 < k < n$. Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_k(P_n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_{k-1}(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_k(P_n) \arrow[r] & H_{k-1}(P^n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dat komt van het lange exacte rijtje van voorbeeldt 4.7. Wegens exactheid zijn de middelste horizontale pijlen isomorfismen. Met inductie is $\bar{f}_*$ rechts een isomorfisme, dus is ook $f_*$ links een isomorfisme.

Neem nu aan dat $k = n$. Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} H_n(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_n(S^n) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(P^n) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_{n-1}(P^n) \arrow[d, "\bar{f}_*"] \\ H_n(P^n) \arrow[r] & H_n(S^n) \arrow[r] & H_n(P^n) \arrow[r] & H_{n-1}(P^n) \end{tikzcd}$$

dat ook weer komt van het lange exacte rijtje in voorbeeld 4.7. Uit de berekening in voorbeeld 4.7 volgt dat de horizontale pijlen helemaal rechts isomorfismen zijn. Met de inductiebasis weten we dat $\bar{f}_*$ helemaal rechts een isomorfisme is, dus is ook $\bar{f}_*$ links daarvan een isomorfisme. Dus $\bar{f}_*$ helemaal links is een isomorfisme. We weten ook uit de berekening in voorbeeld 4.7 dat de horizontale pijlen helemaal links isomorfismen zijn. Dus is ook $f_* : H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n)$ een isomorfisme.

Met lemma is deze laatste $f_*$ van de vorm $g \mapsto mg$, met $m$ de graad van $f$. Er volgt dat $m$ oneven is omdat $H_n(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

□

**Stelling 5.2** (Borsuk-Ulam)**.** *Zij $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ een continue functie. Dan is er een $x \in S^n$ met $f(x) = f(-x)$.*

*Bewijs.* Definieer $g$ door $g(x) = f(x) - f(-x)$. Dan is $g$ oneven. We moeten een punt $x \in S^n$ vinden met $g(x) = 0$. Als zo'n punt niet bestaat, kunnen we $h : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ definiëren door $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Dan is $h$ nog steeds oneven, en $h$ beperkt tot de equator $S^{n-1}$ natuurlijk ook. Nu is $h$ beperkt tot de equator een afbeelding van $S^{n-1}$ naar zichzelf, en heeft dus oneven graad. Maar

$$H(x,t) = h\left(\frac{(1-t)x + ty}{||(1-t)x + ty||}\right)$$

waarbij $y$ de top is van één van de hemisferen met als rand de bovengenoemde equator, geeft een homotopie-equivalentie tussen $h$ beperkt tot de equator en een constante afbeelding. Dit betekent dat $h$ graad nul heeft met de eigenschappen vlak na definitie 3.20. Tegenspraak. □

# 6 Berekening homologiegroepen

**Lemma 6.1.** *Zij $X$ een topologische ruimte, $A \subset X$ een deelruimte en $\mathcal{U}$ een open overdekking van $X$. Laat $\mathcal{U} \cap A = \{U \cap A | U \in \mathcal{U}\}$. Dan induceert de natuurlijke afbeelding*

$$\bar{i} : C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k^{\mathcal{U}\cap A}(A) \longrightarrow C_k(X)/C_k(A)$$

*(op zijn beurt geïnduceerd door de inclusie $i : C_k^{\mathcal{U}}(X) \to C_k(X)$) een isomorfisme op homologie.*

*Bewijs.* We hebben het exacte rijtje van ketencomplexen

$$0 \longrightarrow C_k^{\mathcal{U}\cap A}(A) \longrightarrow C_k^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k^{\mathcal{U}\cap A}(A) \longrightarrow 0$$

dat aanleiding geeft tot het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_k^{\mathcal{U}\cap A}(A) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_k^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{i}_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_k(X) \arrow[r] & H_k(A) \arrow[r] & H_k(X,A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Omdat alle afbeeldingen $i_*$ isomorfismen zijn volgt uit het vijf-lemma dat ook $\bar{i}_*$ een isomorfisme is.

□

**Stelling 6.2.** *Zij $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ een $n$-bladige overdekkingsruimte. Zij $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ een open overdekking van $X$. Veronderstel dat $U_1 \in \mathcal{U}$ voldoet aan $p^{-1}(U_1) = \coprod_{i=1}^n V_i$ met $p|V_i : V_i \to U_1$ een homeomorfisme voor alle $i$. Laat $A = \overline{U_0}$ en stel $B = p^{-1}(A)$. Dan is er isomorfisme*

$$H_k(\tilde{X}, B) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n H_k(X, A)$$

*Bewijs.* Merk op dat $\mathcal{V} = p^{-1}\mathcal{U}$ een open overdekking is van $\tilde{X}$.

Zij $\overline{\sigma} \in C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k^{\mathcal{U}\cap A}(A)$. Stel dat $\sigma(\Delta^k) \subset U_1$. Voor elk van de $n$ verschillende lifts $\tilde{\sigma}$ van $\sigma$ volgt dan $\tilde{\sigma}(\Delta^k) \subset V_i$ voor een zekere $i$, en zelfs voor alle $i$: er is precies één lift $\tilde{\sigma}$ zodat $\tilde{\sigma}(\Delta^k) \subset V_i$. Stel $\sigma^i$ de lift van $\sigma$ met $\sigma^i(\Delta^k) \subset V_i$. Als $\sigma(\Delta^k) \subsetneq U_1$ geldt $\sigma(\Delta^k) \subset A$ en dus $\overline{\sigma} = 0$. Geef in dit geval de $n$ lifts $\sigma^i$ een willekeurige nummering.

Definieer nu de afbeelding

$$f : \bigoplus_{i=1}^n C_k^{\mathcal{U}}(X)/C^{\mathcal{U}\cap A}(A) \longrightarrow C_k^{\mathcal{V}}(\tilde{X})/C_k^{\mathcal{V}\cap B}(B)$$

door (de lineaire voortzetting van)

$$(c_i\overline{\sigma_i})_i \mapsto \sum_{i=1}^n c_i\overline{\sigma_i^i}.$$

Dit is duidelijk een bijectief homomorfisme, dus moeten we alleen nog commutativiteit met de randafbeelding laten zien. Hiervoor is het voldoende om aan te tonen dat $\overline{(d\sigma)^i} = \overline{d(\sigma^i)}$. Als $\sigma(\Delta^k) \subset A$ geldt $\sigma^i(\Delta^k) \subset B$, dus staat er aan allebei de kanten van de gelijkheid 0. Neem dus aan dat $\sigma(\Delta^k) \subset U_1$, en dus $\sigma^i(\Delta^k) \subset V_i$. Er geldt nu dat $\sigma^i|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k](\Delta^k) \subset V_i$ en ook dat $p\sigma^i|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k] = \sigma|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k]$. Omdat $\sigma|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k]$ precies één lift heeft met beeld in $V_i$ volgt $\sigma^i|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k] = \sigma|[v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k]^i$, dus volgt $(d\sigma)^i = d\sigma^i$, en dus volgt $\overline{(d\sigma)^i} = \overline{d(\sigma^i)}$.

Met lemma 6.1 volgt nu de stelling.

□

Merk op dat de projectie $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ een homomorfisme

$$\bar{p}_\sharp : \bigoplus_{i=1}^n C_k^{\mathcal{U}}(X)/C^{\mathcal{U}\cap A}(A) \longrightarrow C_k^{\mathcal{U}}(X)/C_k^{\mathcal{U}\cap A}(A)$$

induceert, gegeven door $(c_j\overline{\sigma_j})_j \mapsto \sum_j c_j\overline{\sigma_j}$. De inclusie $i_\sharp$ de andere kant op gegeven door $\overline{\sigma_j} \mapsto (\overline{\sigma_j}, 0, \cdots, 0)$ voldoet nu aan $p_\sharp i_\sharp = \mathrm{id}$. Omdat alle gegeven afbeeldingen commuteren met $d$ volgt hieruit dat $\bar{p}_* : H_k(\tilde{X}, B) \longrightarrow H_k(X, A)$ surjectief is.

**Voorbeeld 6.3.** Kies $m \geq 2$ equidistante punten $a_i$, $1 \leq i \leq m$, op de cirkel $S^1$. Laat $y_0 = (-1, 0, \cdots, 0) \in S^n$. Laat $Y = S^1 \coprod_{i=1}^m S_i^n$ de disjuncte vereniging zijn van $S^1$ en $m$ kopieën van de $n$-sfeer. Laat $\tilde{X}$ het quotiënt zijn van $Y$ onder de identifcatie van $x_i$ met $y_0 \in S_i^n$.

Er is nu een natuurlijke werking van $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ op $\tilde{X}$ (rotatie van de cirkel waarbij de $n$-sferen in elkaar worden overgevoerd). Deze werking is evident dekpuntsvrij en dus wegens lemma 4.4 even. We krijgen dus een overdekkingsruimte $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, waarbij $X = \tilde{X}/G$ en $p$ de quotiëntafbeelding is.

Definieer nu $V_i \subset S_i^n \subset \tilde{X}$ door $V_i = \{x = (x_0, \cdots, x_n) \in S_i^n | \ x_0 > -\frac{1}{2}\}$, en $V_0 \ \subset \tilde{X}$ als de vereniging van $S^1$ en de verzamelingen $W_i \subset S_i^n$, waarbij $W_i = \{x \in S_i^n | \ x_0 < 0\}$. Laten we $U_0 = p(V_0)$ en $U_1 = p(V_i)$ voor $1 \leq i \leq m$, dan voldoet $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ aan de eisen van stelling 6.2.

Laat zoals in stelling 6.2 $A = \overline{U_0}$ en $B = \overline{V_0}$. Dan voldoen $(\tilde{X}, B)$ en $(X, A)$ aan de eisen van stelling 3.12. Merk op dat $\tilde{X}/B = \bigvee_{i=1}^m S^n$, en dat $X/A = S^n$. We krijgen dus door stellingen 3.12 en 6.2 te combineren dat

$$\tilde{H}_k(\bigvee_{i=1}^m S^n) = \tilde{H}_k(S^n)^m$$

Merk nu op dat $r : \tilde{X} \longrightarrow S^1$, verkregen door één voor één de sferen $S_i^n$ tot een punt samen te trekken, een retract is: dat wil zeggen, de natuurlijke inclusie $i : S^1 \longrightarrow \tilde{X}$ voldoet aan $ri = \text{id}$. Er geldt dus ook $r_* i_* = \text{id}$, dus $i_*$ is injectief. We krijgen uit het lange exacte rijtje van paren de korte exacte rijtjes

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_k(S^1) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_k(\tilde{X}) \longrightarrow \tilde{H}_k(\tilde{X}, S^1) \longrightarrow 0$$

dat splitst omdat $r_*$ een retract geeft. We krijgen dus omdat $(\tilde{X}, S^1)$ een goed paar is en $\tilde{X}/S^1 = \bigvee_{i=1}^m S^n$ dat

$$\tilde{H}_k(\tilde{X}) \cong \tilde{H}_k(\tilde{X}, S^1) \oplus \tilde{H}_k(S^1) \cong \tilde{H}_k(\bigvee_{i=1}^m S^n) \oplus \tilde{H}_k(S^1) = \tilde{H}_k(S^n)^m \oplus \tilde{H}_k(S^1).$$

**Voorbeeld 6.4.** Neem in dit voorbeeld de coëfficiëntengroep $G$ gelijk aan $\mathbb{Z}$. Beschouw de tweebladige overdekkingsruimte $p : S^n \longrightarrow P^n$, met $P^n = \mathbb{R}P^n$ de reële projectieve ruimte. Zij $V_0 = \{x \in S^n | \ |x_0| < \frac{1}{2}\}$, $V_1 = \{x \in S^n | \ x_0 > 0\}$ en $V_2 = \{x \in S^n | \ x_0 < 0\}$. Laat $\rho : S^n \longrightarrow S^n$ de antipodale afbeelding zijn. Dan geldt $\rho V_1 = V_2$, dus $p(V_1) = p(V_2)$. Laat $U_0 = p(V_0)$ en $U_1 = p(V_1) = p(V_2)$. Dan voldoet $\{U_0, U_1\}$ aan de eisen van stelling 6.2.

Laat $B = \overline{V_0}$ en $A = \overline{U_0}$. Laat voor $b \in B$ het element $\pi(b) \in S_n$ de projectie van $b$ op de equator in het $x_0$-vlak zijn. Dan snijdt het lijnsegment $tb + (1-t)\pi(b)$, $t \in [0, 1]$ de oorsprong niet, dus geeft $F : B \times I \longrightarrow B$ gegeven door

$$F(b, t) = \frac{tb + (1-t)\pi(b)}{||tb + (1-t)\pi(b)||}$$

een deformatieretract van $B$ op $S^{n-1}$. Omdat $F(b, t)$ voor elke $t$ antipodebewarend is, induceert $F$ een deformatieretract van $B$ op $p(S^{n-1}) = P^{n-1}$. Merk op dat $P^n/P^{n-1} = S^n$, dus volgt met lemma 3.11 en stelling 3.12 dat $\tilde{H}_k(P^n, B) \cong \tilde{H}_k(P^n, P^{n-1}) \cong H_k(P^n/P^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(S^n)$ voor alle $k$.

**Lemma 6.5.** *Beschouw voor $n \geq 1$ de samenstelling $q_* p_*$, met $p_* : \tilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(P^n)$ (geïnduceerd door $p : S^n \longrightarrow P^n$) en $q_* : \tilde{H}_n(P^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ (geïnduceerd door de quotiëntafbeelding $q : P^n \longrightarrow P^n/P^{n-1} = S^n$). Dan geldt $\deg q_* p_* = \pm 2$ als $n$ oneven is en $\deg q_* p_* = 0$ als $n$ even is.*

*Bewijs.* Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"] & \tilde{H}_n(S^n, B) \arrow[d, "\bar{p}_*"] \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(P^n) \arrow[r, "j_*"] & \tilde{H}_n(P^n, A)
\end{tikzcd}$$

waarbij de rijen komen van het lange exacte rijtje van paren.

Bij voorbeeld 3.19 werd uitgelegd dat, na identificatie van $S^n$ met twee $n$-simplicies $\Delta_1^n$ en $\Delta_2^n$ met de randen kanoniek geïdentificeerd, dat $[\Delta_1^n - \Delta_2^n]$ een voortbrenger is van $\tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n)$ (want $n \geq 1$). Merk op dat $j_*([\Delta_1^n - \Delta_2^n]) = [\Delta_1^n] - [\Delta_2^n]$, omdat $\partial\Delta_i^n$ de equator $S^{n-1}$ is in het $x_0$-vlak (zie 3.19) en dus bevat is in $B$. Wegens injectiviteit geldt $[\Delta_1^n] - [\Delta_2^n] \neq 0$ en wegens symmetrie geldt dus $[\Delta_i^n] \neq 0$ voor beide $i$.

Met barycentrische subdivisie volgt dat dat $[\Delta_i^n] = [x_i]$ met $x_i$ een keten met support in $\{V_0, V_i\}$, en zelfs (aangezien $V_0 \subset B$) dat we $x_i$ met steun in $V_i$ kunnen kiezen.

We gebruiken nu het isomorfisme

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n, B) \longrightarrow \tilde{H}_n(P^n, A) \oplus \tilde{H}_n(P^n, A)$$

dat stelling 6.2 ons geeft. Omdat $x_1$ support heeft in $V_1$ en $x_2$ support heeft in $V_2$ volgt uit het bewijs van stelling 6.2 dat $f_*([x_1]) = (a, 0)$ en $f_*([x_2]) = (0, b)$, met $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (merk op dat $H_n(P^n, A) \oplus H_n(P^n, A) \cong \mathbb{Z}^2$). Uit het feit dat de groep $\tilde{H}_n(S^n, B)$ in het exacte rijtje van paren

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(S^n, B) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(B) \longrightarrow 0$$

past, met $\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_n(B) \cong \mathbb{Z}$, volgt bovendien $a, b \in \{\pm 1\}$ (anders zouden we torsie krijgen). Omdat voor alle $n$-simplexen $\sigma$ geldt $p(\rho\sigma) = p(\sigma)$, met $\rho$ de antipodale afbeelding, volgt met stelling 6.2 dat $f_*(\bar{\rho}_*[x_1]) = (0, a)$ en $f_*(\bar{\rho}_*[x_2]) = (b, 0)$. Merk op dat $\deg \rho = (-1)^{n+1}$, dus $\rho_*[\Delta_1^n - \Delta_2^n] = (-1)^{n+1}[\Delta_1^n - \Delta_2^n]$. Uit $j\rho = \bar{\rho}j$ volgt dus dat $(a, -b) = (-1)^{n+1}(-b, a)$. Als $n+1$ even is geldt dus dat $f_*([x_1] - [x_2]) = \pm(1, 1)$, en als $n+1$ oneven is geldt $f_*([x_1] - [x_2]) = \pm(1, -1)$. Uit het bewijs van stelling 6.2 volgt nu $\bar{p}_*([x_1] - [x_2]) = \pm 2$ als $n$ oneven is en $\bar{p}_*([x_1] - [x_2]) = 0$ als $n$ even is. Dus $\deg \bar{p}_* j_* = \pm 2$ als $n$ oneven is en $\deg \bar{p}_* j_* = 0$ als $n$ even is. Uit commutativiteit volgt dus $\deg j_* p_* = \pm 2$ als $n$ oneven is en $\deg j_* p_* = 0$ als $n$ even is.

Het lemma volgt nu uit het feit dat het isomorfisme

$$q_* : \tilde{H}_n(P^n, A) \longrightarrow \tilde{H}_n(P^n/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(S^n)$$

van de vorm $1 \mapsto \pm 1$ is.

$\square$

We bewijzen nu met inductie voor de volgende claim: voor $n \geq 1$ geldt

$$H_k(P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \text{ en } k = n \text{ oneven} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & k \text{ oneven, } 0 < k < n \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Bovendien is in het geval dat $n$ oneven de afbeelding $q_* : \tilde{H}_n(P^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(P^n/P^{n-1}) = \tilde{H}_n(S^n)$ een isomorfisme. In dat geval is dus wegens lemma 6.5 de afbeelding $p_* : \tilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(P^n)$ vermenigvuldiging met $\pm 2$.

Beschouw voor $n = 1$ het rijtje van quotiënten voor het paar $(P^1, P^0) = (P^1, \{x_0\})$. Er geldt $\tilde{H}_k(x_0) = 0$ voor alle $k$, dus volgt dat $q_* : \tilde{H}_k(P^1) \longrightarrow \tilde{H}_k(S^1)$ een isomorfisme is voor alle $k$. De claim geldt dus voor $n = 1$.

Stel nu dat $n > 1$. Beschouw het rijtje van quotiënten voor het paar $(P^n, P^{n-1})$. Voor $k > n$ geldt met inductie $\tilde{H}_k(P^{n-1}) = \tilde{H}_k(S^n) = 0$, dus blijkt uit dit rijtje dat ook $\tilde{H}_k(P^n) = 0$ voor $k > n$. Bekijk voor $k < n - 1$ het volgende stuk van het rijtje:

$$\tilde{H}_{k+1}(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_k(P^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_k(P^n) \longrightarrow \tilde{H}_k(S^n).$$

Aangezien $\tilde{H}_{k+1}(S^n) = \tilde{H}_k(S^n) = 0$ volgt voor $k < n - 1$

$$\tilde{H}_k(P^n) \cong \tilde{H}_k(P^{n-1})$$

en kunnen we weer inductie toepassen. Bekijk nu het diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "p_*"] & \tilde{H}_n(S^n/S^{n-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{p}_*"] & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}_n(P^n) \arrow[r, "q_*"] & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(P^{n-1}) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(P^n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

waarbij het bovenste rijtje komt van het rijtje van quotiënten voor het paar $(S^n, S^{n-1})$ en het onderste rijtje komt van het rijtje van quotiënten voor het paar $(P^n, P^{n-1})$. Dit diagram commuteert vanwege natuurlijkheid.

Neem eerst aan dat $n$ even is. Dan is $n - 1$ oneven en dus $p_* : \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ vermenigvuldiging met $\pm 2$. Wegens de opmerking vlak na stelling 6.2 en de afleiding van het rijtje van quotiënten uit het gereduceerde rijtje van paren volgt dat $\bar{p}_*$ surjectief is. Omdat $\partial$ boven surjectief is geldt im $p_*\partial = 2\mathbb{Z}$, dus volgt uit commutativiteit im $\partial\bar{p}_* = 2\mathbb{Z}$, en aangezien $\bar{p}_*$ surjectief is, im $\partial = 2\mathbb{Z}$.

Blijkbaar is $\partial$ beneden injectief, dus geldt $\tilde{H}_n(P^n) = 0$. Bovendien volgt met de isomorfiestelling

$$\tilde{H}_{n-1}(P^n) \cong \tilde{H}_n(P^{n-1})/\text{im } \partial = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Neem nu aan dat $n$ oneven is. Dan geldt $\tilde{H}_{n-1}(P^{n-1}) = 0$ en volgt dus met exactheid direct $\tilde{H}_{n-1}(P^n) = 0$ en $\tilde{H}_n(P^n) \cong \tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

## Referenties

[1] http://www.win.tue.nl/~nikhil/courses/2012/2W008/lecture10.pdf.. Transcript van college Graphs and algorithms door Nikhil Bansal aan de Technische Universiteit Eindhoven, gegeven op 23 maart 2012. Geraadpleegd in februari 2015.

[2] G. E. Bredon. Geometry and Topology. Springer-Verlag. 1993, New York, Verenigde Staten.

[3] H. Bauer. Measure and Integration Theory. De Gruyter Studies in Mathematics. 2001, Berlijn, Duitsland.

[4] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press. 2001, New York, Verenigde Staten.