



Universiteit
Leiden
The Netherlands

'Pattern formation' onder veranderende omstandigheden

Postma, S.A.

Citation

Postma, S. A. (2011). *'Pattern formation' onder veranderende omstandigheden*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596716>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

S.A. Postma

**‘Pattern formation’ onder veranderende
omstandigheden**

Bachelorscriptie, 10 augustus 2011

Scriptiebegeleider: Prof. Dr. A. Doelman



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Het Klausmeier model	4
2.1	Van Klausmeier naar Gray-Scott	5
3	Afleiding van de Ginzburg-Landau vergelijking	7
3.1	Linearisatie en aannames	7
3.2	Stabiliteitsanalyse	8
3.3	De GL-equation	10
4	Discretisatie	14
4.1	Geval $N = 0$	15
4.1.1	Stabiliteitsanalyse	17
4.2	Geval $N = 1$	19
4.2.1	Geval $R_1 = 0$	21
4.2.2	Geval $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$	21
4.2.3	Geval $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$	22
4.2.4	Geval $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$	23
4.2.5	Stabiliteitsanalyse	26
4.3	Geval $N = 1$ reëel	31
4.3.1	Stabiliteitsanalyse	32
4.3.2	Simulaties	35
4.4	Geval $N = 2$	38
4.4.1	Geval $N = 2$ reëel	38
5	Conclusie	41
A	Matlabcode voor simulaties van het eendimensionale complexe systeem ($N = 0$)	43
B	Matlabcode voor simulaties van het tweedimensionale reële systeem ($N = 1$ reëel)	44
C	Matlabcode voor simulaties van het driedimensionale reële systeem ($N = 2$ reëel)	45

1 Inleiding

Overall om ons heen in de natuur komen we patronen tegen. Zo ook patronen aan de rand van woestijnen.

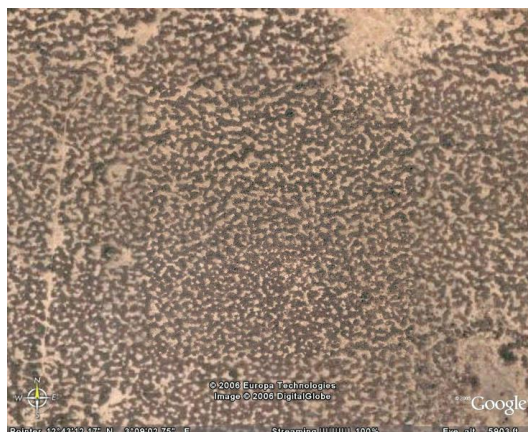
Aan de rand van woestijnen zien we soms een soort streepjespatroon ontstaan waarin clusters van tientallen meters planten worden afgewisseld met stukken woestijn. De transitie van een labyrintachtig patroon, als in Figuur 1, naar een woestijn is echter niet geleidelijk, maar zeer plotseling. De begroeiing neemt in eerste instantie langzaam af, bijvoorbeeld als functie van een afnemende regenval of toenemende begrazing, maar vanaf een zeer kritische waarde is de overgang 'catastrofaal': het labyrint verdort en het gebied verandert 'opeens' in een woestijn. Deze patronen komen namelijk vooral voor op het grensgebied tussen een woestijn en 'gezond' begroeid gebied. Een bijkomend effect is dat het proces onomkeerbaar is. Als de regenval weer toeneemt of de begrazing afneemt tot een niveau waarin voor de verwoestijning vegetatiepatronen konden bestaan, dan keert de begroeiing niet zomaar uit zichzelf terug.

Deze patroonvorming, of 'pattern formation', is een deelgebied van de wiskunde dat sterke banden heeft met andere wetenschappen. Het begrijpen van het hoe en waarom van deze 'catastrofe' is van groot belang voor ecologen en aardwetenschappers die zich met deze problematiek bezighouden, zeker in deze tijd waarin de regenval op vele plaatsen op de aarde af lijkt te nemen en de begrazing door de bevolkingsdruk zeker niet afneemt. Daarom is het begrijpen van het ontstaan en verdwijnen van deze patronen van essentieel belang voor het begrijpen van het verwoestijningsproces.

Dit project is geïnspireerd op een samenwerking met ecologen (i.h.b. Max Rietkerk) van de Universiteit Utrecht op het gebied van vegetatiepatronen. Deze patronen komen wereldwijd voor aan de rand van woestijnen en spelen een cruciale rol in het proces van verwoestijning. Verwoestijning treedt al dan niet op onder invloed van (vaak langzaam) veranderende externe omstandigheden - het klimaat, de invloed van begrazing door vee, etc.

Wat de wiskunde betreft zullen we ons richten op 'small amplitude' patronen die via de zogenaamde 'weakly nonlinear stability theory' beschreven worden door de (complexe) Ginzburg-Landau vergelijking. In deze context corresponderen de veranderende omstandigheden met een continu (en langzaam) variërende parameter in de Ginzburg-Landau vergelijking.

In deze scriptie zullen we ons bezig houden met het begrijpen van deze patronen.



Figuur 1 : Een labyrintachtig vegetatiepatroon aan de rand van een woestijn in Niger (de meer donkere gebieden zijn begroeid, de lichtere niet).

2 Het Klausmeier model

Het ontstaan en verdwijnen van onder andere labyrintachtige vegetatiepatronen, zoals in Figuur 1, kan beschreven worden met een model in termen van partiële differentiaalvergelijkingen. Het eenvoudigste model, een reactie-diffusie systeem in twee componenten, is opgesteld door Christopher Klausmeier [1].

De twee onbekende grootheden in het model voor de dynamica van vegetatiepatronen dat Klausmeier opstelde zijn $G(X, Y, T)$, de lokale concentratie van (grond)water per oppervlakte-eenheid, en $P(X, Y, T)$, de lokale concentratie van biomassa per oppervlakte-eenheid. Beide grootheden hangen af van de positie in het grondgebied (X, Y) en veranderen in de tijd T . Het model beschrijft de verandering in de tijd van $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$ als functie van de grootheden $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$ zelf.

Om nu een model op te kunnen stellen voor de veranderingen van G en P in de tijd moeten we ons afvragen waardoor deze veranderingen worden bepaald. Klausmeier heeft hierbij de volgende processen benoemd:

- $G(X, Y, T)$ neemt toe door regen, neemt af door verdamping en opname door planten en verspreidt zich door/over de grond;
- $P(X, Y, T)$ neemt toe door groei, neemt af door sterfte en verspreidt zich door/over de grond.

Een stelsel vergelijkingen voor G en P , in woorden:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial T} = & \text{regen} - \text{verdamping} - \text{opname door planten} + \text{ruimtelijke verspreiding,} \\ \frac{\partial P}{\partial T} = & - \text{sterfte} + \text{groei} + \text{ruimtelijke verspreiding.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Om nu deze 7 processen in een wiskundig model te krijgen zullen deze processen moeten worden uitgedrukt in termen van $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$:

- regen: n . De regenval wordt gerepresenteerd door een constante, de parameter n . Dit komt erop neer dat in het model het permanent regent, ook al is dit zachtjes. Dit kan gezien worden als een grove versimpeling, maar aan de andere kant verspreiden planten zich op een tijdschaal van jaren.
- verdamping: lG . Hoe natter de grond, hoe meer water er zal verdampen. Hierbij is l een parameter.
- sterfte: mP . Hoe meer planten, hoe meer planten er zullen sterven. Hierbij is m een parameter. Overigens is deze beschrijving standaard in de populatiedynamica.
- groei: rGP^2 . Hoe meer planten, hoe meer groei. Dus de groei is evenredig met een groeifactor vermenigvuldigd met P . Deze groeifactor zal natuurlijk afhangen van de hoeveelheid (grond)water. Maar ook geldt dat de aanwezigheid van begroeiing de wateropname verbetert. Of anders: de aanwezige hoeveelheid P maakt beter gebruik van G . Dus de groeifactor zal een stijgende functie zijn van G en P . In de meest simpele vorm genoteerd als rGP , waarbij r een parameter is. De plantengroei wordt dus gemodelleerd door de niet-lineaire uitdrukking rGP^2 .
- opname door planten: $jrGP^2$. Planten nemen water op om te groeien en verdampen. Omdat de verdamping al in het model is opgenomen gaat het hier alleen nog om de opname door groei. Dus de opname door planten is evenredig met een factor vermenigvuldigd met de plantengroei, ofwel $jrGP^2$, waarbij j een parameter is.
- ruimtelijke verspreiding van planten: $d_P \Delta P$. Er is aangenomen dat de verspreiding van planten over een gebied beschreven kan worden door een diffusieproces. Ofwel, er is aangenomen dat de begroeiing zich op dezelfde manier verspreidt als een druppeltje melk door thee of zoals warmte

zich verspreidt door een metalen plaat. In wiskundige termen betekent dit dat de ruimtelijke verspreiding van planten evenredig is met $d_P \Delta P$, waarbij de parameter d_P de diffusieconstante voor plantenverspreiding is, Δ de diffusie-operator en $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}$. Merk op dat het Klausmeier model nu een partiële differentiaalvergelijking is geworden, vanwege de diffusie-operator.

- ruimtelijke verspreiding van (grond)water: $d_G \Delta G$. In het oorspronkelijke model [1] wordt de vegetatie beschouwd op de helling van een heuvel en de verspreiding van het water gemodelleerd door een advectieterm. Deze term zorgt ervoor dat het water de heuvel afstroomt. Hier nemen we aan dat de grond vlak is, zodat ook de ruimtelijke verspreiding van het (grond)water gemodelleerd kan worden door $d_G \Delta G$, waarbij de diffusieconstante d_G een parameter is. Nogmaals een grove vereenvoudiging, meer realistische modellen beschrijven de verspreiding van (grond)water aan de hand van een niet-lineaire diffusie-operator. Merk op dat de aanname $d_G \gg d_P$ natuurlijk is omdat water zich vele malen sneller verspreidt dan begroeiing.

Door nu alle bovenstaande procesbeschrijvingen in te vullen in (2.1) volgt het Klausmeier model. Dit specifieke model wordt ook wel het 'horizontale' Klausmeier model genoemd, omdat Klausmeier in dit model aanneemt dat de grond vlak is, zodat de ruimtelijke verspreiding van het (grond)water gemodelleerd kan worden door de term $d_G \Delta G$.

Het 'horizontale' Klausmeier model wordt nu gegeven door

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial T} = n - lG - jrGP^2 + d_G \Delta G \\ \frac{\partial P}{\partial T} = -mP + rGP^2 + d_P \Delta P. \end{cases} \quad (2.2)$$

Merk nogmaals op dat het bij het uitdrukken van deze 7 processen in termen van $G(X, Y, T)$ en $P(X, Y, T)$ het gaat om (grove) vereenvoudingen, waarbij we te maken hebben met 7 onbekende (positieve) parameters. Door de grove vereenvoudingen die gemaakt zijn bij het opstellen van het model is het niet eenvoudig - zo niet onmogelijk - om deze parameters vanuit de praktijk te bepalen.

2.1 Van Klausmeier naar Gray-Scott

Omdat er, na de procesbeschrijvingen, in het Klausmeier model nog 7 onbekende parameters voorkomen is het schalen van de parameters een manier om het model in een eenvoudigere vorm te brengen. Op deze manier is het model geschikter voor wiskundige analyse en zullen er nog maar 3 onbekende parameters zijn. Het schalen van een vergelijking is niet een eenduidige procedure: er bestaat een zekere keuzevrijheid en het is vaak niet duidelijk waar te beginnen.

Als eerste nieuwe (geschaalde) grootheden worden U en V geïntroduceerd door middel van

$$U = \frac{l}{n} G \text{ en } V = \frac{jl}{n} P,$$

en deze grootheden worden ingevuld in (2.2),

$$\begin{cases} \frac{n}{l} \frac{\partial U}{\partial T} = n - nU - \frac{rn^3}{jl^3} UV^2 + d_G \frac{n}{l} \Delta U \\ \frac{n}{jl} \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{nm}{jl} V + \frac{rn^3}{j^2 l^3} UV^2 + d_P \frac{n}{jl} \Delta V. \end{cases}$$

Door nu met de term $\frac{jl^3}{rn^3}$ te vermenigvuldigen

$$\begin{cases} \frac{jl^2}{rn^2} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{jl^3}{rn^2} (1 - U) - UV^2 + d_G \frac{jl^2}{rn^2} \Delta U \\ \frac{jl^2}{rn^2} \frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{jml^2}{rn^2} V + UV^2 + d_P \frac{jl^2}{rn^2} \Delta V. \end{cases}$$

Nu herschalen we ook ruimte (X, Y) en tijd T door het introduceren van (x, y) voor ruimte en t voor tijd

$$t = \frac{rn^2}{jl^2}T \text{ en } (x, y) = \sqrt{\frac{r}{d_P j}} \frac{n}{l}(X, Y),$$

wat uiteindelijk het volgende stelsel geeft

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{jl^3}{rn^2}(1-U) - UV^2 + \frac{d_G}{d_P}\Delta U \\ \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{jml^2}{rn^2}V + UV^2 + \Delta V. \end{cases}$$

Er blijven nu nog 3 parameters over,

$$a = \frac{jl^3}{rn^2}, \quad b = \frac{jml^2}{rn^2}, \quad d = \frac{d_G}{d_P}.$$

Dit geeft de Gray-Scott vergelijking, die de chemici Peter Gray en Stephen Scott in de jaren '80 hebben opgesteld om ruimtelijke processen in autokatalytische reacties te beschrijven [2].

De eindimensionale Gray-Scott vergelijking, i.e. de Gray-Scott vergelijking met alleen nog afgeleiden naar een eindimensionale ruimte (in dit geval naar x), ziet er als volgt uit

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = d \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a(1-U) - UV^2 \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - bV + UV^2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Merk op dat het dus mogelijk is om een natuurlijk proces wiskundig te modelleren zoals bijvoorbeeld de veranderingen van de locale concentratie (grond)water en biomassa per oppervlakte-eenheid in de tijd. In dit geval beginnen we met de woordelijke definitie van zo'n proces om deze vervolgens uit te drukken in een gekoppeld stelsel van twee reactie-diffusie vergelijkingen.

3 Afleiding van de Ginzburg-Landau vergelijking

Zoals in de inleiding is verteld, zullen we ons richten op begrensde patronen die beschreven worden door de Ginzburg-Landau vergelijking, ook wel afgekort tot GL-vergelijking. Nu gaan we voor een algemeen tweedimensionaal stelsel van reactie-diffusie vergelijkingen, waarin een zogenaamde Turing bifurcatie plaatsvindt, de GL-vergelijking herleiden. Het proces van deze afleiding staat in meer detail beschreven in onder andere [3] en [6].

3.1 Linearisatie en aannames

Beschouw een algemeen tweedimensionaal stelsel van reactie-diffusie vergelijkingen in één ruimtelijke variable, zeg x :

$$\begin{cases} U_t &= U_{xx} + F(U, V) \\ V_t &= dV_{xx} + G(U, V). \end{cases} \quad (3.1)$$

Hierbij zijn $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ en $d \in \mathbb{R}^+$.

We bekijken een triviale oplossing $(U(x, t), V(x, t)) = (U_0, V_0)$. De afgeleide naar tijd t en de dubbele afgeleide naar plaats x van de triviale oplossing (U_0, V_0) zullen gelijk zijn aan 0. En hiermee ook de functies $F(U, V)$ en $G(U, V)$ in (U_0, V_0) , ofwel $F(U_0, V_0) = G(U_0, V_0) = 0$. Met andere woorden, (U_0, V_0) wordt bepaald door het algebraïsche stelsel $F(U, V) = G(U, V) = 0$.

De vraag is nu of de oplossing (U_0, V_0) stabiel is als oplossing van het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen (3.1). Hiertoe bekijken we de linearisatie van U en V rond de triviale oplossing (U_0, V_0) . Deze wordt gegeven door $U(x, t) = U_0 + u(x, t)$ en $V(x, t) = V_0 + v(x, t)$. Merk hierbij op dat $U_t = u_t$, $U_{xx} = u_{xx}$ en $V_t = v_t$, $V_{xx} = v_{xx}$.

Het invullen van de genoemde linearisatie voor U en V in functies F en G geeft

$$\begin{aligned} F(U_0 + u, V_0 + v) &= F(U_0, V_0) + u \frac{\partial F}{\partial U}(U_0, V_0) + v \frac{\partial F}{\partial V}(U_0, V_0) + N(u, v), \\ G(U_0 + u, V_0 + v) &= G(U_0, V_0) + u \frac{\partial G}{\partial U}(U_0, V_0) + v \frac{\partial G}{\partial V}(U_0, V_0) + M(u, v). \end{aligned}$$

Hieruit volgt het algemene tweedimensionale stelsel van reactie-diffusie vergelijkingen rond de (verschoven) triviale 'background state' $(u, v) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} + a_{11}u + a_{12}v + M(u, v) \\ v_t &= dv_{xx} + a_{21}u + a_{22}v + N(u, v), \end{cases} \quad (3.2)$$

waarbij

$$a_{11} = \frac{\partial F}{\partial U}(U_0, V_0), \quad a_{12} = \frac{\partial F}{\partial V}(U_0, V_0), \quad a_{21} = \frac{\partial G}{\partial U}(U_0, V_0), \quad a_{22} = \frac{\partial G}{\partial V}(U_0, V_0),$$

en M en N analytische niet-lineaire uitdrukkingen zijn.

Om stelsel (3.2) zoveel mogelijk voor onze doeleinden te versimpelen maken we de volgende keuze:

$$a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad M(u, v) = -Pu^3, \quad N(u, v) = -Qv^3.$$

Gegeven is dat de uitdrukkingen M en N niet-lineair zijn, ofwel de uitdrukkingen zijn kwadratisch of van hogere orde. De keuze om hier gebruik te maken van kubische termen, en niet kwadratisch, is voornamelijk

van technische aard: het zal zorgen voor minder technisch rekenwerk. Daarnaast introduceren we de parameters: $r = a_{11}$, $s = a_{22}$.

Substitutie van deze aannames in stelsel (3.2) geeft het volgende stelsel van reactie-diffusie vergelijkingen:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + ru + v - Pu^3 \\ v_t = dv_{xx} - u + sv - Qv^3, \end{cases} \quad (3.3)$$

waarbij d, r, s hoofdparameters zijn en P, Q parameters voor niet-lineaire effecten.

3.2 Stabiliteitsanalyse

Voor de lineaire stabiliteit van de triviale oplossing bekijken we eerst het stelsel met lineaire vergelijkingen, ofwel het stelsel waarbij $P = Q = 0$, op een onbegrensd domein, dus $x \in \mathbb{R}$, zonder randvoorwaarden:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + ru + v \\ v_t = dv_{xx} - u + sv. \end{cases} \quad (3.4)$$

Voor eenzelfde stelsel met lineaire vergelijkingen waarbij alleen afgeleiden naar de tijd t aanwezig zijn, i.e. voor een gewone differentiaalvergelijking, zouden we u en v introduceren van de vorm $e^{\lambda t}$ met $\lambda \in \mathbb{C}$. Analoog geldt dat voor eenzelfde stelsel met lineaire vergelijkingen waarbij alleen afgeleiden naar de plaats x aanwezig zijn, we u en v zouden introduceren van de vorm $e^{\kappa x}$ met $\kappa \in \mathbb{C}$. Omdat we hier te maken hebben met een stelsel lineaire vergelijkingen met afgeleiden naar tijd t en plaats x , zou een logische keuze zijn om u en v te introduceren van de vorm $e^{\lambda t + \kappa x}$ met $\lambda, \kappa \in \mathbb{C}$.

Als we de term $e^{\kappa x}$ bekijken, dan kan er, voor onze situatie, een probleem ontstaan. Dit in het geval wanneer $\kappa = 1$. Dan zullen u en v , als we kijken naar de plaatsafhankelijkheid, van de vorm e^x zijn. Maar deze vorm heeft de mogelijkheid om zeer groot te worden als x groot wordt, en omdat we geïnteresseerd zijn in het begrijpen van begrensde patronen die plaatsafhankelijk zijn, dus afhankelijk zijn van x , is het van belang om te zorgen dat voor de plaatsafhankelijkheid geldt $|e^{\kappa x}| < C$, waarbij C constant. Omdat we $x \in \mathbb{R}$ kiezen, volgt hieruit $\kappa = ik$. Voor de tijdsafhankelijkheid is geen eis van dit soort nodig, omdat we geïnteresseerd zijn in patronen in de ruimte ofwel plaatsafhankelijke (begrensde) patronen.

Voor het expliciet oplossen van dit stelsel lineaire vergelijkingen introduceren we daarom:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{\lambda t + ikx} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2. \quad (3.5)$$

Nu willen we de stabiliteit van de $(0,0)$ -oplossing van systeem (3.3) onderzoeken. Merk hierbij op dat het bestuderen van de lineaire stabiliteit van de triviale oplossing, ofwel het triviale patroon, $(U, V) = (U_0, V_0)$ in stelsel (3.1) volledig equivalent is met het bestuderen van de lineaire stabiliteit van de triviale basispatroon $(0,0)$ in stelsel (3.3).

Substitutie van vergelijking (3.5) voor u en v in (3.4) en het delen door $e^{\lambda t + ikx}$ geeft het volgende eigenwaardenprobleem:

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t + ikx} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -k^2 \\ -dk^2 \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikx} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ -1 \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikx} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} e^{\lambda t + ikx} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r - k^2 & 1 \\ -1 & s - dk^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Het bestuderen van de gelineariseerde stabiliteit van $(0, 0)$ komt nu overeen met het bestuderen van de eigenwaarden van dit 2×2 -eigenwaardenprobleem. De oplossing $(0, 0)$ is stabiel zolang de reële delen van beide eigenwaarden λ_1 en λ_2 negatief zijn voor alle $k \in \mathbb{R}$ en wordt instabiel als het reële deel van een van de eigenwaarden positief wordt, voor een zekere $k \in \mathbb{R}$.

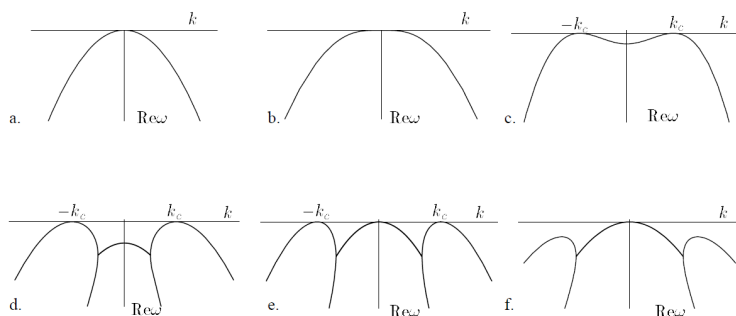
Het eigenwaardenprobleem geeft de volgende tweedegraadsvergelijking, ook wel bekend als het karakteristieke polynoom:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} r - k^2 & 1 \\ -1 & s - dk^2 \end{vmatrix} &= (\lambda - (r - k^2))(\lambda - (s - dk^2)) + 1 \\ &= \lambda^2 - [(s + r) - k^2(1 + d)]\lambda + [(rs + 1) - k^2(rd - s) + dk^4] = 0. \end{aligned}$$

Deze tweedegraadsvergelijking leidt tot de twee eigenwaarden λ_1 en λ_2 , waarbij we aannemen $Re(\lambda_2) \leq Re(\lambda_1)$. Het is nu mogelijk om voor vaste s , r en d het reële deel van $\lambda_{1,2}$ te plotten als functie van k . Omdat we hebben aangenomen $Re(\lambda_2) \leq Re(\lambda_1)$ kunnen we ons beperken tot $Re(\lambda_1)$. Als $Re(\lambda_1) < 0$, dan zullen beide eigenwaarden negatief zijn en is de oplossing $(0, 0)$ stabiel. En dan zullen alle verstoringen uitdempen. Als $Re(\lambda_1(k)) > 0$ voor zekere k , dan zullen sommige verstoringen niet meer uitdempen, maar juist groter worden. We zijn geïnteresseerd waar de grens ligt tussen het uitdempen en het groeien van deze verstoringen, ofwel wanneer $Re(\lambda_1) = 0$ voor een zekere geïsoleerde k . We definiëren daarom voor vaste s en d de kromme $\{Re\lambda_1(k, r) = 0\}$. Hierbij kiezen we ervoor om r als belangrijkste parameter te variëren.

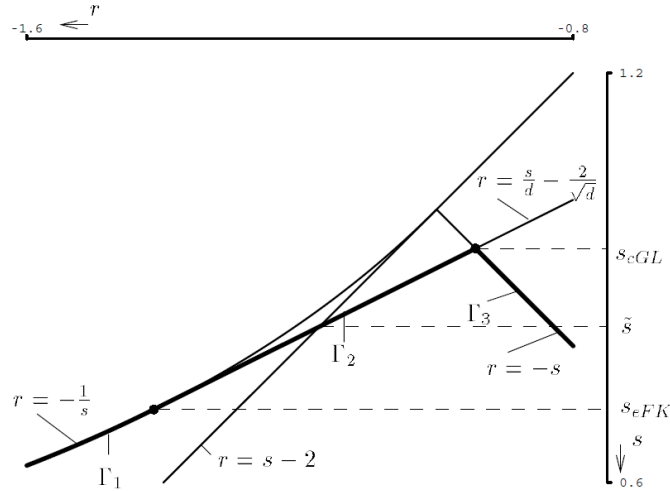
Om nu de kromme $\{Re\lambda_1(k, r) = 0\}$ te bestuderen willen we meer weten over de reële delen van de twee eigenwaarden λ_1 en λ_2 . Om te beginnen zijn we op zoek naar de kritieke punten (k_c, r_c) van de kromme $\{Re\lambda_1(k, r) = 0\}$, waarbij r_c nog steeds van s afhangt. Hierbij is r_c gedefinieerd als kritische waarde waarop $Re(\lambda_1(k))$ voor één speciale waarde van k , de k_c , gelijk is aan 0.

Het is ook mogelijk om naar de eigenwaardenkromme te kijken, waarbij $Re(\lambda_1) = 0$ gegeven is als een functie van k voor vaste (r, s) .



Figuur 3.1: De reële delen van de eigenwaardenkrommes gegeven als een functie van k voor verschillende keuzes van het paar (r, s) .

Aan de hand van figuur 3.1 zijn er verschillende delen van de bifurcatiekromme Γ te onderscheiden voor verschillende waarden van het paar (r, s) voor $0 < d < 1$. De keuze $0 < d < 1$ kan gemaakt worden zonder verlies van algemeenheid. Hierdoor staan de tekens van r en s ook vast, namelijk $r < 0$ en $s > 0$. In figuur 3.2 is het tweede kwadrant van het (r, s) -vlak geplot met de bifurcatiekrommes die ontstaat voor het geval $0 < d < 1$.



Figuur 3.2: Het (r, s) -vlak voor $0 < d < 1$. De bifurcatiekrommes Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 zijn de dikkere lijnen.

De bifurcatiekromme Γ bestaat uit drie delen Γ_1 , Γ_2 en Γ_3 waarvoor geldt $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Γ_1 ontstaat als de reële delen van de eigenwaardenkrommes gegeven wordt door de figuren 3.1ab, Γ_2 voor 3.1cd en Γ_3 voor 3.1ef. De verschillende eigenwaardenkrommes vinden plaats op deze drie delen. Op Γ_1 heeft de eigenwaardenkromme één maximum en op Γ_2 twee maxima.

Wanneer Γ wordt gesneden zal of een deel van het reële deel van λ_1 positief worden, waardoor de oplossing $(0, 0)$ instabiel wordt, of een deel van het reële deel van λ_1 en λ_2 negatief worden, waardoor de oplossing $(0, 0)$ stabiel wordt, voor alle k .

De bifurcaties die plaatsvinden op Γ_1 en Γ_3 genereren structuren met (in leidende orde) golfgetal $k = 0$, i.e. homogeen in x . Ondanks dat de instabiliteit zich voordoet voor $k = 0$ is deze bifurcatie niet minder interessant (in tegendeel, vooral voor de niet-lineaire analyse is deze bifurcatie interessant). Maar het grootste gedeelte van de (mathematische) biologen focussen zich op Γ_2 . De bifurcatie die hier plaatsvindt wordt de Turing bifurcatie genoemd. Wanneer de Turing bifurcatie plaatsvindt ontstaan er begrensde patronen, en dit is precies hetgene waar we geïnteresseerd in zijn. Daar zullen we ons richten op Γ_2 . Door ons hierop te richten is het mogelijk om de reële GL-vergelijking te herleiden.

Op Γ_2 geldt $r_c = r_c(s) = \frac{s}{d} - \frac{2}{\sqrt{d}}$ en $k_c = k_c(s) = \sqrt{\frac{s-\sqrt{d}}{d}}$ met $s \in \left(\sqrt{d}, \frac{2\sqrt{d}}{1+d}\right)$ [3].

3.3 De GL-equation

Het eigenwaardenprobleem wordt als volgt gegeven

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - k^2 & 1 \\ -1 & s - dk^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Door de kritieke waarden $r_c = \frac{s}{d} - \frac{2}{\sqrt{d}}$ en $k_c = \sqrt{\frac{s-\sqrt{d}}{d}}$ in de 2×2 -matrix in te vullen geeft dit de matrix

$$M_c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{d}} & 1 \\ -1 & \sqrt{d} \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van de matrix M_c zijn gelijk aan $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = -\frac{1-d}{\sqrt{d}} < 0$ en de bijbehorende eigenvectoren zijn $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix}$ resp. $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d}} \\ 1 \end{pmatrix}$. Met behulp van lineaire algebra weten we dat

$$\text{Ker}(M_c) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Im}(M_c) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{d} \end{pmatrix} \right\}.$$

We zullen zien dat er een modulatievergelijking ontstaat als een gevolg van een bepaalde 'solvability condition', ofwel een voorwaarde voor het oplossen van de vergelijking. In dit geval ontstaat de solvability condition uit het feit dat we lineaire vergelijking $M_c x = b$ moeten oplossen (voor een gegeven b). De vergelijking kan alleen worden opgelost als $b \in \text{Span}\{v_2\} = \text{Im}(M_c)$. Ofwel, als b wordt geschreven als $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dan is de solvability condition gelijk aan

$$b_1 - \frac{1}{\sqrt{d}} b_2 = \sqrt{d} b_1 - b_2 = 0.$$

Voor de afleiding van de GL-vergelijking, nemen we r dicht bij r_c : $r = r_c - \tilde{r}\varepsilon^2$ waarbij $0 < \varepsilon \ll 1$. Deze waarde van r zit dicht in de buurt van Γ_2 , maar in de instabiele regio. In de niet-lineaire stabiliteitsanalyse modelleren we perturbaties van de oplossing $(0, 0)$ als een langzame modulatie van de golf met het golfgetal $k = k_c = \sqrt{\frac{s-\sqrt{d}}{d}}$.

De 'meest instabiele golf' en de (formele) ansatz zien er dan ook als volgt uit

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_c x} + c.c. + h.o.t.$$

waarbij $c.c.$ de complex geconjugeerde is van de eerste term en $h.o.t.$ hogere orde termen in ε .

De term $A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)$ is een onbekende complexe amplitude die langzaam varieert in tijd en ruimte. De term $\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_c x}$ is de dominante term die voorspeld is door de lineaire analyse, ofwel de term die zorgt voor de 'meest instabiele golven' - de vector $\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix}$ is de kritieke eigenvector waarbij $r = r_c$, $k = k_c$ voor $\lambda = \lambda_1 = 0$.

De langzame tijd- en ruimtevariabelen ξ en τ worden als volgt geschaald

$$\xi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon^2 t,$$

zodat

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon A(\xi, \tau) \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_c x} + c.c. + h.o.t. \quad (3.7)$$

Het doel is nu om het gedrag van $A(\xi, \tau)$ te bepalen, want het gedrag van deze term bepaalt hoe de oplossing $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ zich gedraagt.

Het substitueren van ansatz (3.7), met schaling, in de reactie-diffusie vergelijking (3.3) geeft

$$\begin{cases} u &= \varepsilon A \sqrt{d} e^{ik_c x} + c.c. + h.o.t. \\ v &= \varepsilon A e^{ik_c x} + c.c. + h.o.t. \end{cases}$$

In stelsel (3.3) bevinden zich nu een aantal verschillende termen. Zoals:

- een niet-lineaire term

$$\begin{aligned} u^3 &= \varepsilon^3 d\sqrt{d} (Ae^{ik_c x} + \bar{A}e^{-ik_c x})^3 + \dots \\ &= \varepsilon^3 d\sqrt{d} (A^3 e^{3ik_c x} + 3A|A|^2 e^{ik_c x} + 3\bar{A}|A|^2 e^{-ik_c x} + \bar{A}^3 e^{ik_c x}) + \dots \end{aligned}$$

- een diffusieterm

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \varepsilon\sqrt{d} \frac{\partial}{\partial x} (ik_c A e^{ik_c x} + \varepsilon A_\xi e^{ik_c x}) + \dots \\ &= \varepsilon\sqrt{d} e^{ik_c x} (-k_c^2 A + 2i\varepsilon k_c A_\xi + \varepsilon^2 A_{\xi\xi}) + \dots, \end{aligned}$$

waarbij de term $2i\varepsilon k_c A_\xi$ in totaal van $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ is en $\varepsilon^2 A_{\xi\xi}$ van $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$, omdat $\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}$.

- de term $r = r_c - \varepsilon^2$

$$ru = (r_c - \tilde{r}\varepsilon^2)u = \varepsilon\sqrt{d} e^{ik_c x} (r_c A - \tilde{r}\varepsilon^2 A) + \dots$$

De niet-lineaire termen in (3.3) genereren 'harmonics' van de simpele lineaire golf $e^{ik_c x}$. Dus de hogere orde termen in de expansie van de perturbatie worden geconstrueerd uit een product van deze meest instabiele golf met zichzelf. Hiervoor dient de ansatz te worden uitgebreid,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} A e^{ik_c x} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \end{pmatrix} e^{ik_c x} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \end{pmatrix} e^{ik_c x} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} X_{33} \\ Y_{33} \end{pmatrix} e^{3ik_c x} + c.c. + h.o.t. \quad (3.8)$$

Hierbij zijn X_{ij} en Y_{ij} onbekende functies van ξ en τ voor iedere $i, j \in \mathbb{N}$. Substitutie van deze uitdrukking in (3.3) en het ordenen van termen van de vorm $\varepsilon^\alpha e^{ik_c \beta x}$ voor $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ zullen leiden tot de GL-vergelijking.

De solvability condition voor $\begin{pmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \end{pmatrix}$ op het $\alpha = 3$, $\beta = 1$ -niveau leidt tot de GL-vergelijking voor A . De vergelijkingen op het $\alpha = 2$ -niveau kunnen worden opgelost: de functies in expansie (3.8) kunnen allen worden uitgedrukt in termen van A , de onbekende amplitude.

Op het $\alpha = 3$, $\beta = 1$ -niveau wordt, door substitutie van de uitgebreide ansatz, de vergelijking

$$M_c \begin{pmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix} A_\tau} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{r} A}_{r=r_c - \tilde{r}\varepsilon^2} - \underbrace{\begin{pmatrix} u_{xx} \\ dv_{xx} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ d \end{pmatrix} A_{\xi\xi} - 2ik_c \begin{pmatrix} X_{12,\xi} \\ dY_{12,\xi} \end{pmatrix}} + 3 \underbrace{\begin{pmatrix} -Pu^3 \\ -Qv^3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} Pd\sqrt{d} \\ Q \end{pmatrix}}. \quad (3.9)$$

Merk hierbij dat vergelijking (3.9) inderdaad een vergelijking van het type $M_c x = b$ is.

Door het toepassen van de solvability condition ontstaan een relatie tussen $A_\tau, A, A_{\xi\xi}$ en $|A|^2 A$: de GL-vergelijking voor A . [4]

$$A_\tau = \frac{d}{1-d} \tilde{r} A + \frac{3(Pd^2 - Q)}{1-d} |A|^2 A + \frac{4\sqrt{d}(s-d)}{1-d} A_{\xi\xi}. \quad (3.10)$$

Vergelijking (3.10) kan in standaardvorm worden gebracht door het schalen van ξ, τ en A . Hierbij introduceren we $\tau = \frac{r(1-d)}{d} \tilde{\tau}$, $\xi = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{d}}(s-\sqrt{d})} \tilde{\xi}$ en $A = \frac{d}{3|Pd^2-Q|} \tilde{A}$. Vergelijking (3.10) in deze schaling geeft, na weglating van alle tildes, de GL-vergelijking in de volgende standaardvorm

$$A_\tau = rA - |A|^2 A + A_{\xi\xi}.$$

Merk op dat de eendimensionale Gray-Scott vergelijking (2.3) een stelsel van reactie-diffusie vergelijkingen is waarbij het ook mogelijk is om de GL-vergelijking af te leiden. Echter de keuze om de GL-vergelijking niet aan de hand van deze vergelijking af te leiden heeft hoofdzakelijk te maken met de grote hoeveelheid (nauwkeurigheds)werk te maken. Het evenwicht dat hoort bij dit systeem (\bar{U}, \bar{V}) representeert een homogeen grasland.

Bij de afleiding aan de hand van de Gray-Scott vergelijking, die terug te vinden is in het artikel van Morgan, Doelman en Kaper [5], wordt de GL-vergelijking tot

$$A_\tau = \frac{2}{\sqrt{b}}A - \frac{2}{9}(10\sqrt{2} - 7)|A|^2A + 2\sqrt{2}A_{\xi\xi}$$

afgeleid. De afleiding van de GL-vergelijking voor de Gray-Scott vergelijking is ook in de standaardvorm te brengen.

4 Discretisatie

In de vorige sectie hebben we de GL-vergelijking voor A herleid: $A_\tau = rA - |A|^2 A + A_{\xi\xi}$. Wanneer τ wordt vervangen door t en ξ door z wordt deze herleide GL-vergelijking gegeven door

$$A_t = rA - |A|^2 A + A_{zz}. \quad (4.1)$$

Deze vergelijking is oneindig dimensionaal, omdat A een onbekende complexe amplitude is die langzaam varieert in tijd t en ruimte z . Om de vergelijking beter te kunnen begrijpen willen we daarom de vergelijking discretiseren op een eindig interval, zeg $\left[0, \frac{2\pi}{q}\right]$.

De GL-vergelijking is vooral gebruikt om de stabiliteit van periodieke oplossingen van de amplitude vergelijking te bestuderen. Daarom bekijken we dan ook een speciale klasse van oplossingen: de tijd-periodieke, even oplossingen. We ontwikkelen $A(t, z)$ daarom in de Fourierreeks

$$A(t, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(t) e^{inqz},$$

voor $q > 0$ en met $Z_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

De afgeleide van de functie A naar z wordt gegeven door

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inq Z_n(t) e^{inqz}.$$

De randvoorwaarden van A corresponderen met de zogenaamde 'no-flux' randvoorwaarden, ofwel $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ op de uiteinden van het interval $\left[0, \frac{2\pi}{q}\right]$. Op $z = 0$ moet dan gelden

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z=0} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} inq Z_n(t) \\ &= iq[(Z_1 - Z_{-1}) + 2(Z_2 - Z_{-2}) + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Uit de randvoorwaarden van A , op $z = 0$, volgt $Z_1 - Z_{-1} = 0$, $Z_2 - Z_{-2} = 0$, \dots . Ofwel er geldt $Z_n(t) = Z_{-n}(t)$ voor alle n .

Substitutie van de Fourierreeks in de GL-vergelijking (4.1) geeft voor de verschillende termen

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{Z}_n(t) e^{inqz}, \\ |A|^2 A &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(t) e^{ikqz} \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} Z_l(t) e^{ilqz} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{Z}_m(t) e^{-imqz} \\ &= \sum_{k+l+m=n=-\infty}^{\infty} Z_k(t) \cdot Z_l(t) \cdot \bar{Z}_m(t) e^{i(k+l-m)qz}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (inq)^2 Z_n(t) e^{inqz} = -q^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 Z_n(t) e^{inqz}. \end{aligned}$$

Het invullen van deze termen in (4.1) geeft

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{Z}_n(t) e^{inqz} &= r \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n(t) e^{inqz} - \sum_{k+l+m=n=-\infty}^{\infty} Z_k(t) \cdot Z_l(t) \cdot \bar{Z}_m(t) e^{i(k+l-m)qz} \\ &\quad - q^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 Z_n(t) e^{inqz}. \end{aligned}$$

Fourierreeksen zijn aan elkaar gelijk dan en slechts dan als ze term voor term aan elkaar gelijk zijn. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \dot{Z}_n(t) &= r Z_n(t) - \sum_{k+l+m=n} Z_k(t) \cdot Z_l(t) \cdot \bar{Z}_m(t) - n^2 q^2 Z_n(t) \\ &= (r - n^2 q^2) Z_n(t) - \sum_{k+l+m=n} Z_k(t) \cdot Z_l(t) \cdot \bar{Z}_m(t). \end{aligned}$$

Hier bekijken we de eindigdimensionale reductie van bovenstaand, oneindig-dimensionaal systeem:

$$\dot{Z}_n^{(N)} = (r - n^2 q^2) Z_n^{(N)} - \sum_{\substack{k+l+m=n \\ |k|, |l|, |m| \leq N}} Z_k^{(N)} \cdot Z_l^{(N)} \cdot \bar{Z}_m^{(N)} \quad (4.2)$$

voor $n = 0, 1, \dots, N$ en $Z_m^{(N)} = Z_{-m}^{(N)}$ voor alle m, N .

Merk op dat voor de eindigdimensionale reductie (4.2) er twee transformaties S_σ en T_ϕ zijn die oplossingen van (4.2) overdragen op andere oplossingen

$$\begin{aligned} S_\sigma(Z_0^{(N)}, \dots, Z_N^{(N)}) &= ((-1)^{0+\sigma} Z_0^{(N)}, \dots, (-1)^{N+\sigma} Z_N^{(N)}), & \sigma &\in \{0, 1\}, \\ T_\phi(Z_0^{(N)}, \dots, Z_N^{(N)}) &= (e^{i\phi} Z_0^{(N)}, \dots, e^{i\phi} Z_N^{(N)}) = e^{i\phi} (Z_0^{(N)}, \dots, Z_N^{(N)}), & \phi &\in [0, 2\pi), i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Het is altijd belangrijk om naar transformaties in een systeem te kijken die oplossingen overdragen in andere oplossingen, zodat hiermee rekening gehouden kan worden bij het zoeken naar oplossingen.

Nu gaan we deze eindigdimensionale reductie (4.2) bekijken voor verschillende waarde van N , namelijk voor $N = 0, 1, 2$. Voor grotere waarden van N zal de reductie steeds nauwkeuriger worden en, naar verwachting, een betere weergave zijn van het werkelijke gedrag van de GL-vergelijking.

Omdat voor $N = 0$ het systeem eendimensionaal complex en tweedimensionaal reëel zal zijn en voor $N = 1$ het systeem tweedimensionaal complex en vierdimensionaal reëel is de de analyse hiervoor nog doenbaar. Voor de gevallen $N \gg 1$ zal er veel rekentijd aan de analyse vastzitten (zelfs met de computer), maar voor de gevallen $N > 1$ is de computer een goede manier om hiernaar te kijken. Voor het geval $N = 2$ zullen we dit dan ook doen.

4.1 Geval $N = 0$

We bekijken eerst de eindig-dimensionale reductie (4.2) voor het geval $N = 0$. In dit geval zullen er geen plaatsafhankelijke patronen ontstaan. Voor $N = 0$ (en $n = 0, \dots, N = 0$) is de Fourierreeks waarin we ontwikkelen gelijk aan

$$A(t, z) = \sum_{n=0}^0 Z_n(t) e^{inqz} = Z_0(t).$$

De amplitude A zal dus alleen variëren in tijd en niet in plaats, omdat er geen z -afhankelijkheid is.

De reductie (4.2) wordt voor $N = 0$ gegeven door

$$\dot{Z}_n^{(0)} = (r - n^2 q^2) Z_n^{(0)} - \sum_{\substack{k+l+m=n \\ |k|, |l|, |m| \leq 0}} Z_k^{(0)} \cdot Z_l^{(0)} \cdot \bar{Z}_m^{(0)}. \quad (4.3)$$

Hierbij wordt het geval $n = 0$ gegeven door

$$\dot{Z}_0^{(0)} = r Z_0^{(0)} - Z_0^{(0)} |Z_0^{(0)}|^2 \quad (n = 0). \quad (4.4)$$

Voor het geval $N = 0$ geeft de reductie dus één complexe differentiaalvergelijking

$$\left\{ \dot{Z}_0 = r Z_0 - Z_0 |Z_0|^2. \quad (4.5) \right.$$

Voor het vinden van kritieke punten van het complexe stelsel (4.5) is het handig om over te gaan op poolcoördinaten, dus $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ met $R_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Substitutie van $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ in (4.5) geeft voor de verschillende termen

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 e^{i\theta_0} \\ \dot{Z}_0 &= \dot{R}_0 e^{i\theta_0} + i\dot{\theta}_0 R_0 e^{i\theta_0} \\ |Z_0|^2 &= R_0 e^{i\theta_0} \cdot R_0 e^{-i\theta_0} = R_0^2. \end{aligned}$$

Het invullen van deze termen in (4.5) geeft

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 e^{i\theta_0} + i\dot{\theta}_0 R_0 e^{i\theta_0} &= r R_0 e^{i\theta_0} - R_0^3 e^{i\theta_0} \\ \dot{R}_0 + i\dot{\theta}_0 R_0 &= r R_0 - R_0^3 = R_0(r - R_0^2). \end{aligned}$$

Omdat $R_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$ kan de vergelijking $\dot{R}_0 + i\dot{\theta}_0 R_0 = R_0(r - R_0^2)$ gesplitst in een reële en imaginaire vergelijking. Aan de linkerkant van het gelijkheidsteken wordt het reële deel gegeven door \dot{R}_0 en het imaginaire deel door $\dot{\theta}_0 R_0$ en aan de rechterkant het reële deel door $R_0(r - R_0^2)$ en er is geen imaginair deel.

De reële vergelijking wordt gegeven door

$$\dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2),$$

en de imaginaire vergelijking wordt, na deling door R_0 , gegeven door

$$\dot{\theta}_0 = 0.$$

Merk op dat we hier hebben aangenomen dat $R_0 \neq 0$. Dit is mogelijk omdat we het geval $R_0 = 0$ niet nodig is om te beschouwen. Het geval $R_0 = 0$ geeft het triviale geval $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0} = 0$.

Dit geeft ons het volgende stelsel reële vergelijkingen

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2) \\ \dot{\theta}_0 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

Voor het stelsel vergelijkingen (4.6) kunnen we naar de kritieke punten kijken, in termen van (R_0, θ_0) . Hiervoor willen we de twee vergelijkingen gelijkstellen aan 0, en daarna alle mogelijke combinaties nemen met deze oplossingen.

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2) = 0 & \quad \text{geeft} \quad R_0 = 0 \vee R_0 = \sqrt{r}, \\ \dot{\theta}_0 = 0 & \quad \text{geeft} \quad \theta_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen (4.6) volgen, in termen van (R_0, θ_0) en Z_0 , de twee kritieke punten

$$(R_0, \theta_0) = (0, \theta_0), Z_0 = 0; \quad (R_0, \theta_0) = (\sqrt{r}, \theta_0), Z_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0}.$$

Merk op dat het kritieke punt $Z_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0}$ een ' θ_0 -familie' van kritieke punten is omdat $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Nu is het mogelijk een lijst op te stellen van de kritieke punten. Merk hierbij nogmaals op dat $R_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ en $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$.

Kritieke punt (R_0, θ_0)	Kritieke punt Z_0
$(0, \theta_0)$	0
(\sqrt{r}, θ_0)	$\sqrt{r}e^{i\theta_0}$

Tabel 4.1: Kritieke punten van het eendimensionale complexe systeem (4.5) ($N = 0$).

4.1.1 Stabiliteitsanalyse

Nu de kritieke punten gevonden zijn is het van belang om meer te weten over hun stabiliteit. Hiertoe bekijken we differentiaalvergelijking gegeven in het complexwaardige stelsel (4.5):

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{Z}_0 &= rZ_0 - Z_0|Z_0|^2, \end{aligned} \right.$$

en niet het reëelwaardige stelsel differentiaalvergelijkingen (4.6). Nu lineariseren we stelsel (4.5) rond de kritieke punten en bepalen de eigenwaarden van het gelineariseerde stelsel.

We bekijken het kritieke punt $Z_0 = 0$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $Z_0 = z_0$. Invullen in stelsel (4.5) geeft

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= rZ_0 - Z_0|Z_0|^2 \\ \dot{z}_0 &= rz_0 + h.o.t. \end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt 0 wordt gegeven door

$$\{\dot{z}_0 = rz_0.$$

Laat $z = u + iv$, ofwel $z_0 = u_0 + iv_0$. Dit gegeven invullen in het gelineariseerde stelsel geeft

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= rz_0 \\ &= r(u_0 + iv_0) = \dot{u}_0 + i\dot{v}_0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt het reële stelsel

$$\begin{cases} \dot{u}_0 &= ru_0 \\ \dot{v}_0 &= rv_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.7) worden gegeven door

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = r.$$

We bekijken het kritieke punt $Z_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0}$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $Z_0 = \sqrt{r} + z_0$. De keuze voor deze linearisatie is erg natuurlijk, omdat we bij de introductie van de eindigdimensionale reductie (4.2) hebben verteld dat er de transformatie T_ψ van toepassing is. Daarbij geldt $Z_i^{(N)} = e^{i\phi} Z_j^{(N)}$

voor alle $i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq j \leq N$ en $\phi \in [0, 2\pi)$. Het is daarom ook mogelijk om de linearisatie $Z_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0} + z_0$ te kiezen, maar zal zorgen voor extra rekenwerk. Dus de keuze voor $\theta_0 = 0$ is een prettige. Merk op dat voor komende linearisaties de keuze voor $\theta_0 = 0$ vanzelf spreekt. Invullen in stelsel (4.5) geeft

$$\begin{aligned}\dot{Z}_0 &= rZ_0 - Z_0|Z_0|^2 \\ \dot{z}_0 &= r(\sqrt{r} + z_0) - (\sqrt{r} + z_0)^2 \overline{(\sqrt{r} + z_0)} \\ &= -rz_0 - r\bar{z}_0 + h.o.t.\end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt $\sqrt{r}e^{i\theta_0}$ wordt gegeven door

$$\{\dot{z}_0 = -rz_0 - r\bar{z}_0.$$

Laat weer $z = u + iv$, ofwel $z_0 = u_0 + iv_0$. Dit gegeven invullen in het gelineariseerde stelsel geeft

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -rz_0 - r\bar{z}_0 \\ &= -r(u_0 + iv_0) - r(u_0 - iv_0) \\ &= -2ru_0 = \dot{u}_0 + i\dot{v}_0.\end{aligned}$$

Hieruit volgt het reële stelsel

$$\begin{cases} \dot{u}_0 &= -2ru_0 \\ \dot{v}_0 &= 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.8) worden gegeven door

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2r.$$

Merk op dat we hier een eigenwaarde vinden die gelijk is aan 0, namelijk $\lambda_1 = 0$. Deze eigenwaarde is te verklaren omdat het kritieke punt $Z_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0}$ een θ_0 -familie is van kritieke punten met $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Nu is het mogelijk een lijst op te stellen van de twee kritieke punten met de twee bijbehorende eigenwaarden van de Jacobiaan van het gelineariseerde stelsel rond de kritieke punten. Merk op dat we dus te maken hebben met twee eigenwaarden, vanwege het tweedimensionale reële stelsel.

Kritieke punt Z_0	Reële eigenwaarden	
	λ_1	λ_2
0	r	r
$\sqrt{r}e^{i\theta_0}$	0	$-2r$

Tabel 4.1.1: Kritieke punten en de bijbehorende reële eigenwaarden ($N = 0$).

Voor stabiliteit van een kritiek punt moet gelden dat het reële deel van alle eigenwaarden horende bij het kritieke punt negatief zijn, ofwel $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$. Aan de hand van deze eis voor stabiliteit kan een eventuele eis voor r worden afgeleid. En kan er ook worden geconcludeerd of een kritiek punt (on)voowaardelijk (in)stabil is. Merk hierbij nogmaals op $r > 0$. Omdat de eigenwaarden alleen afhangen van r , en dus reëel zijn, willen we dat voor stabiliteit geldt $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Als er dan ook maar één eigenwaarde positief is, dan is het kritieke punt, horende bij deze eigenwaarde, al instabil.

Merk op dat voor het punt $\sqrt{r}e^{i\theta_0}$ er ook een eigenwaarde gelijk is aan 0. Deze eigenwaarde $\lambda_1 = 0$ hoort bij de θ_0 -familie en is hiermee dus niet van belang.

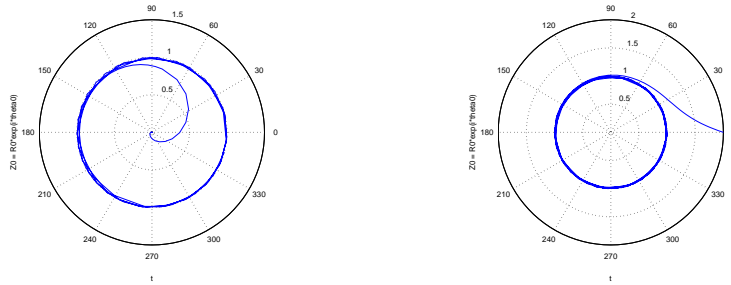
Voor het punt 0 geldt $\lambda_1 = \lambda_2 = r > 0$, dus het kritieke punt 0 is instabil. Voor het punt $\sqrt{r}e^{i\theta_0}$ geldt $\lambda_2 = -2r < 0$, dus het kritieke punt $\sqrt{r}e^{i\theta_0}$ is stabil.

Hieruit kunnen we concluderen:

Kritieke punt Z_0	Stabiliteit
0	Instabiel
$\sqrt{r}e^{i\theta_0}$	Stabiel

Tabel 4.1.1: Kritieke punten met de stabiliteit ($N = 0$).

Om de stabiliteit te illustreren kunnen we het gedrag van Z_0 in de tijd simuleren aan de hand van vergelijking (4.5) met behulp van het programma Matlab.¹



Figuur 4.1.1: Z_0 als functie van tijd t met links een beginvoorwaarde dicht bij 0, namelijk $Z_0 = 1 \cdot 10^{-10}$ en rechts een beginvoorwaarde van $Z_0 = 2$ voor $r = 1$.

Bovenstaande figuren bevestigen de analyse: het kritieke punt 0 is instabiel en $\sqrt{r}e^{i\theta_0}$, met $r = 1$, stabiel.

4.2 Geval $N = 1$

We bekijken nu de eindig-dimensionale reductie (4.2) voor het geval $N = 1$. In dit geval zullen er *wel* plaatsafhankelijke patronen ontstaan. Dit zien we terug in de Fourierreeks waarin we ontwikkelen: hierin zal de z -afhankelijkheid nu wel te zien zijn. Voor $N = 1$ (en $n = 0, 1$) is de Fourierreeks waarin we ontwikkelen gelijk aan

$$\begin{aligned}
 A(t, z) &= \sum_{n=0}^1 Z_n(t) e^{inqz} \\
 &= Z_0(t) e^0 + Z_1(t) e^{iqz} + \underbrace{Z_{-1}(t) e^{-iqz}}_{=Z_1(t) e^{-iqz}} \\
 &= Z_0(t) + Z_1(t) (e^{iqz} + e^{-iqz}) \\
 &= Z_0(t) + Z_1(t) \cdot 2 \cos(qz).
 \end{aligned}$$

Door de term $Z_1(t) \cdot 2 \cos(qz)$ zal er een ruimtelijke periodieke structuur ontstaan in de amplitude A , wat zal resulteren in plaatsafhankelijke patronen.

De reductie (4.2) wordt voor $N = 1$ gegeven door

$$\dot{Z}_n^{(1)} = (r - n^2 q^2) Z_n^{(1)} - \sum_{\substack{k+l+m=n \\ |k|, |l|, |m| \leq 1}} Z_k^{(1)} \cdot Z_l^{(1)} \cdot \overline{Z_m^{(1)}}. \quad (4.9)$$

¹Zie A voor de gebruikte code.

Hierbij worden de gevallen $n = 0$ en $n = 1$ onderscheiden:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_0^{(1)} &= rZ_0^{(1)} - \left[Z_0^{(1)}|Z_0^{(1)}|^2 + 2(Z_1^{(1)})^2\bar{Z}_0^{(1)} + 4Z_0^{(1)}|Z_1^{(1)}|^2 \right] & (n = 0) \\ \dot{Z}_1^{(1)} &= (r - q^2)Z_1^{(1)} - \left[(Z_0^{(1)})^2\bar{Z}_1^{(1)} + 2Z_1^{(1)}|Z_0^{(1)}|^2 + 3Z_1^{(1)}|Z_1^{(1)}|^2 \right] & (n = 1).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Voor het geval $N = 1$ geeft de reductie dus een stelsel van twee complexe differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2], \\ \dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2]. \end{cases}\quad (4.11)$$

Om kritieke punten te vinden van het complexe stelsel (4.11) gaan we weer over op poolcoördinaten, dus $Z_0 = R_0e^{i\theta_0}$ en $Z_1 = R_1e^{i\theta_1}$ met $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$. Substitutie van $Z_0 = R_0e^{i\theta_0}$ en $Z_1 = R_1e^{i\theta_1}$ in (4.11) geeft

$$\begin{aligned}\text{voor } n = 0 : \quad \dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\ \dot{R}_0e^{i\theta_0} + i\dot{\theta}_0R_0e^{i\theta_0} &= rR_0e^{i\theta_0} - [R_0^3e^{i\theta_0} + 2R_0R_1^2e^{i(2\theta_1-\theta_0)} + 4R_0R_1^2e^{i\theta_0}] \\ \dot{R}_0 + i\dot{\theta}_0R_0 &= rR_0 - R_0 [R_0^2 + 2R_1^2e^{2i(\theta_1-\theta_0)} + 4R_1^2] \\ &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2(e^{2i(\theta_1-\theta_0)} + 2)], \\ \text{voor } n = 1 : \quad \dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2] \\ \dot{R}_1e^{i\theta_1} + i\dot{\theta}_1R_1e^{i\theta_1} &= (r - q^2)R_1e^{i\theta_1} - [R_0^2R_1e^{i(2\theta_0-\theta_1)} + 2R_0^2R_1e^{i\theta_1} + 3R_1^3e^{i\theta_1}] \\ \dot{R}_1 + i\dot{\theta}_1R_1 &= (r - q^2)R_1 - [R_0^2R_1e^{2i(\theta_0-\theta_1)} + 2R_0^2R_1 + 3R_1^3] \\ &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2(e^{2i(\theta_0-\theta_1)} + 2) - 3R_1^2].\end{aligned}$$

Omdat $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ kunnen de bovenstaande twee vergelijkingen gesplitst worden in twee reële en twee imaginaire vergelijkingen. De vergelijkingen voor de reële en imaginaire vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\text{voor } n = 0 : \quad \text{reële deel } \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2(\text{Re}(e^{2i(\theta_1-\theta_0)}) + 2)] \\ &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2(\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] \\ \text{imaginaire deel } \dot{\theta}_0R_0 &= -2R_0R_1^2 \text{Im}(e^{2i(\theta_1-\theta_0)}) = -2R_0R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) \\ \dot{\theta}_0 &= -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) \quad \text{met } R_0 \neq 0, \\ \text{voor } n = 1 : \quad \text{reële deel } \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2(\text{Re}(e^{2i(\theta_0-\theta_1)}) + 2) - 3R_1^2] \\ &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2(\cos(2(\theta_0 - \theta_1)) + 2) - 3R_1^2] \\ \text{imaginaire deel } \dot{\theta}_1R_1 &= -R_0^2R_1 \text{Im}(e^{2i(\theta_0-\theta_1)}) = -R_0^2R_1 \sin(2(\theta_0 - \theta_1)) \\ \dot{\theta}_1 &= -R_0^2 \sin(2(\theta_0 - \theta_1)).\end{aligned}$$

Voor de $\dot{\theta}_1$ -vergelijking geldt de volgende gelijkheid vanwege een eigenschap van de sinus:

$$\dot{\theta}_1 = -R_0^2 \sin(2(\theta_0 - \theta_1)) = R_0^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)).$$

Dit geeft ons het volgende stelsel reële vergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2(\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] \\ \dot{\theta}_0 &= -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)), \\ \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2(\cos(2(\theta_0 - \theta_1)) + 2) - 3R_1^2] \\ \dot{\theta}_1 &= R_0^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)). \end{cases}\quad (4.12)$$

Voor het stelsel vergelijkingen (4.12) kunnen we naar de kritieke punten kijken, in termen van $(R_0, \theta_0, R_1, \theta_1)$. Hiervoor willen we naar een van de vier vergelijkingen van stelsel (4.12) gelijkstellen aan

0, en de oplossingen die hieruit volgen invullen in de andere drie vergelijkingen. Daarna worden deze drie andere vergelijkingen weer gelijk gesteld aan 0. Merk hierbij op dat het niet uitmaakt naar welke vergelijking we als eerste kijken.

We kiezen ervoor om te beginnen met de $\dot{\theta}_0$ -vergelijking gelijk te stellen aan 0.

$$\dot{\theta}_0 = -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0 \quad \text{geeft } R_1 = 0 \vee \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0.$$

Nu zullen we twee gevallen bekijken die zijn ontstaan, namelijk $R_1 = 0$ en $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$.

4.2.1 Geval $R_1 = 0$

Stel $R_1 = 0$, dan volgt uit de andere drie vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] |_{R_1=0} = R_0(r - R_0^2), \\ \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2) - 3R_1^2] |_{R_1=0} = 0, \\ \dot{\theta}_1 &= R_0^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)). \end{aligned}$$

Nu kunnen deze drie vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0. Merk hierbij op dat de \dot{R}_1 -vergelijking buiten beschouwing wordt gelaten, omdat uit deze vergelijking volgt $R_1 \in \mathbb{R}$ maar al is gekozen voor $R_1 = 0$. Wanneer de andere twee vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0 volgt

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2) = 0 & \quad \text{geeft } R_0 = 0 \vee R_0 = \sqrt{r}, \\ \dot{\theta}_1 = 0 & \quad \text{geeft } R_0 = 0 \vee \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0. \end{aligned}$$

Met de mogelijkheden die zijn ontstaan kunnen er vier combinaties gemaakt worden. Herinner dat $R_1 = 0$.

- De optie $R_0 = 0$ en $R_0 = 0$ geeft het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$.
- De optie $R_0 = 0$ en $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$ geeft ook het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$.
- De optie $R_0 = \sqrt{r}$ en $R_0 = 0$ geeft ook het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$. Dit is namelijk alleen mogelijk als $r = 0$.
- De optie $R_0 = \sqrt{r}$ en $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$ geeft het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$. Omdat $R_1 = 0$ en $Z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ maakt de keuze voor θ_1 niet meer uit en is vrij te kiezen. Hierdoor kan θ_1 altijd zo gekozen $(R_0, \theta_0, R_1, \theta_1) = (\sqrt{r}, \theta_0, 0, \theta_1)$, ofwel $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$.

Uit de vergelijkingen $\dot{\theta}_0 = -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$ en $R_1 = 0$ volgen, in termen van (Z_0, Z_1) , de twee kritieke punten

$$(Z_0, Z_1) = (0, 0), \quad (Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0).$$

Merk op dat het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$ een ' θ_0 '-familie van kritieke punten is omdat $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

4.2.2 Geval $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$

Stel $\sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$, dan geldt

$$\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = \cos(2(\theta_0 - \theta_1)) = \begin{cases} -1 & \pi + 2k\pi \\ 1 & 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Voor θ_0 en θ_1 geldt dan

$$\begin{aligned} \cos(2(\theta_1 - \theta_0)) &= -1 & \cos(2(\theta_1 - \theta_0)) &= 1 \\ 2(\theta_1 - \theta_0) &= \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} & 2(\theta_1 - \theta_0) &= 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta_1 - \theta_0 &= \frac{\pi}{2} + k\pi & \theta_1 - \theta_0 &= k\pi \\ \theta_1 &= \theta_0 + \frac{\pi}{2} + k\pi, & \theta_1 &= \theta_0 + k\pi. \end{aligned}$$

Dan zijn er twee mogelijkheden, namelijk $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$ en $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$.

4.2.3 Geval $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$

Stel $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$, dan volgt uit de andere vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] |_{\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1} = R_0(r - R_0^2 - 2R_1^2), \\ \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2) - 3R_1^2] |_{\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1} = R_1((r - q^2) - R_0^2 - 3R_1^2), \\ \dot{\theta}_1 &= R_0^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)). \end{aligned}$$

Nu kunnen we deze drie vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0. Merk hierbij op dat de $\dot{\theta}_1$ -vergelijking buiten beschouwing wordt gelaten, omdat uit deze vergelijking volgt $\theta_1 \in \mathbb{R}$ maar al vast ligt door $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$. Wanneer de andere twee vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0 volgt

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2 - 2R_1^2) = 0 & \text{ geeft } R_0 = 0 \vee R_0^2 + 2R_1^2 = r, \\ \dot{R}_1 = R_1((r - q^2) - R_0^2 - 3R_1^2) = 0 & \text{ geeft } R_1 = 0 \vee R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2. \end{aligned}$$

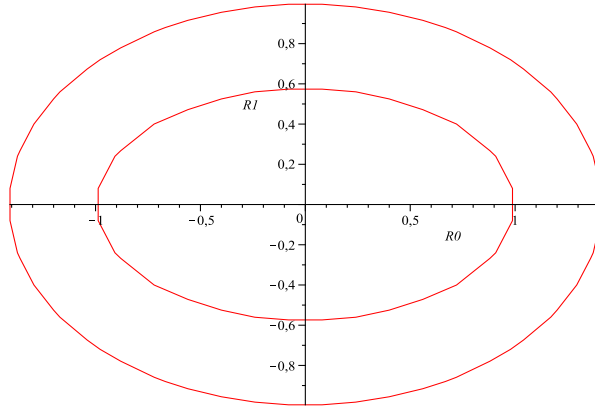
Met de mogelijkheden die zijn ontstaan zijn kunnen er vier combinaties gemaakt worden. Herinner dat $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$.

- De optie $R_0 = 0$ en $R_1 = 0$ geeft wederom het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$.
- De optie $R_0 = 0$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ geeft het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_0})$.
Door $R_0 = 0$ in te vullen in de vergelijking $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ volgt $R_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}$. Omdat $R_0 = 0$ en $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ maakt de keuze voor θ_0 niet meer uit en is vrij te kiezen. Hierdoor kan θ_0 altijd zo gekozen worden, bij een keuze van θ_1 , dat aan de voorwaarde $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$ wordt voldaan. Merk op dat de voorwaarde $r > q^2$ opgelegd moet worden voor het bestaan van dit punt.
- De optie $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_1 = 0$ geeft wederom het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$.
Door $R_1 = 0$ in te vullen in $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ volgt $R_0 = \sqrt{r}$. Omdat $R_1 = 0$ en $Z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$ maakt de keuze voor θ_1 niet meer uit en is vrij te kiezen. Hierdoor kan θ_1 altijd zo gekozen worden, bij een keuze van θ_0 , dat aan de voorwaarde $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$ wordt voldaan.
- De optie $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ geeft geen kritiek punt.
We beschouwen de verzameling $(R_0^2 + 2R_1^2 = r) \cap (R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2)$ in het (R_0, R_1) -vlak om te zien of de twee ellipsen elkaar snijden. Wanneer de twee ellipsen elkaar snijden, dan ontstaan er kritieke punten. Als we de ellips $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ bekijken in het eerste kwadrant, omdat $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dan worden de R_0 - en R_1 -as gesneden in de punten $(\sqrt{r}, 0)$ respectievelijk $(0, \sqrt{\frac{1}{2}r})$. Als we nu de ellips $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ bekijken in het eerste kwadrant, dan worden de R_0 - en R_1 -as gesneden in de punten $(\sqrt{r - q^2}, 0)$ respectievelijk $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$.
Door nu de punten $(\sqrt{r}, 0)$ en $(\sqrt{r - q^2}, 0)$, de punten waar de ellipsen $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$

$r - q^2$ de positieve R_0 -as snijden, te vergelijken kunnen we concluderen dat het punt $(\sqrt{r}, 0)$ zich altijd rechts van het punt $(\sqrt{r - q^2}, 0)$ zal bevinden, omdat $\sqrt{r} > \sqrt{r - q^2}$ voor alle $q, r > 0$.

Door nu de punten $(0, \sqrt{\frac{1}{2}r})$ en $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$, de punten waar de ellipsen $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ de positieve R_1 -as snijden, te vergelijken kunnen we concluderen dat het punt $(0, \sqrt{\frac{1}{2}r})$ zich altijd boven het punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ zal bevinden, omdat $\sqrt{\frac{1}{2}r} > \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}$ voor alle $q, r > 0$.

Hieruit kunnen we concluderen dat de twee ellipsen, $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$, elkaar nooit snijden.



Figuur 4.2.3 : De twee ellipsen $R_0^2 + 2R_1^2 = r$ en $R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ voor $q = 1$ en $r = 2$.

Uit de vergelijkingen $\dot{\theta}_0 = -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$ en $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$ volgt, in termen van (Z_0, Z_1) , één nieuw kritieke punt

$$(Z_0, Z_1) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1}).$$

Merk op dat het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$ een ' θ_1 -familie' is van kritieke punten omdat $\theta_1 \in \mathbb{R}$.

De kritieke punten $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$ en $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$ worden ook uit deze vergelijkingen gevonden, maar reeds bekend zijn.

4.2.4 Geval $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$

Stel $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$, dan volgt uit de andere vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] |_{\cos(2(\theta_1 - \theta_0))=1} = R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2), \\ \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2) - 3R_1^2] |_{\cos(2(\theta_1 - \theta_0))=1} = R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2), \\ \dot{\theta}_1 &= R_0^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)). \end{aligned}$$

Nu kunnen we deze drie vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0. Merk hierbij op dat de $\dot{\theta}_1$ -vergelijking buiten beschouwing wordt gelaten, omdat uit deze vergelijking volgt $\theta_1 \in \mathbb{R}$ maar al vast ligt door

$\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = -1$. Wanneer de andere twee vergelijkingen gelijk worden gesteld aan 0 volgt

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) = 0 & \quad \text{geeft} \quad R_0 = 0 \vee R_0^2 + 6R_1^2 = r, \\ \dot{R}_1 = R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2) = 0 & \quad \text{geeft} \quad R_1 = 0 \vee 3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2. \end{aligned}$$

Met de mogelijkheden die zijn ontstaan zijn kunnen er vier combinaties gemaakt worden. Herinner dat $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$.

- De optie $R_0 = 0$ en $R_1 = 0$ geeft wederom het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$.
- De optie $R_0 = 0$ en $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ geeft wederom het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$.
- De optie $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en $R_1 = 0$ geeft wederom het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$.
- De optie $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ geeft het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}e^{i(\theta_0 + \pi)})$.

We beschouwen de verzameling $(R_0^2 + 6R_1^2 = r) \cap (3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2)$ in het (R_0, R_1) -vlak om te zien of de ellips en cirkel elkaar snijden, dan ontstaan er kritieke punten. Als we de ellips $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ bekijken in het eerste kwadrant, dan worden de R_0 - en R_1 -as gesneden in de punten $(\sqrt{r}, 0)$ respectievelijk $(0, \sqrt{\frac{1}{6}r})$. Als we nu de cirkel $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ bekijken in het eerste kwadrant, dan worden de R_0 - en R_1 -as gesneden in de punten $(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}, 0)$ respectievelijk $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$.

Door nu de punten $(\sqrt{r}, 0)$ en $(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}, 0)$, de punten waar de ellips $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en cirkel $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ de positieve R_0 -as snijden, te vergelijken kunnen we concluderen dat het punt $(\sqrt{r}, 0)$ zich altijd rechts van het punt $(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}, 0)$ zal bevinden, omdat $\sqrt{r} > \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}$ voor alle $q, r > 0$.

Door nu de punten $(0, \sqrt{\frac{1}{6}r})$ en $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$, de punten waar de ellips $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en cirkel $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ de positieve R_1 -as snijden, te vergelijken kunnen we concluderen dat het punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ zich niet altijd boven het punt $(0, \sqrt{\frac{1}{6}r})$ zal bevinden voor alle $q, r > 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} &> \sqrt{\frac{1}{6}r} \\ \frac{1}{3}(r - q^2) &> \frac{1}{6}r \\ -\frac{1}{3}q^2 &> -\frac{1}{6}r \\ r &> 2q^2. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we concluderen dat de cirkel en ellips, $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$, elkaar zullen snijden als $r > 2q^2$.

Stel nu $r > 2q^2$, nu is de vraag in welke punten de cirkel en ellips elkaar snijden. De vergelijkingen voor de cirkel en ellips kunnen als volgt worden herschreven $R_0^2 + 6R_1^2 - r = 0$ en $3R_0^2 + 3R_1^2 - (r - q^2) = 0$. De vraag in welke punten de cirkel en ellips elkaar snijden kan worden beantwoord door de twee herschreven vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen. Ofwel door de vergelijking $R_0^2 + 6R_1^2 - r = 3R_0^2 + 3R_1^2 - (r - q^2) = 0$ op te lossen. Laat hierbij $R_0^2 + 6R_1^2 - r = 0$ vergelijking (i) zijn en $3R_0^2 + 3R_1^2 - (r - q^2) = 0$ vergelijking (ii).

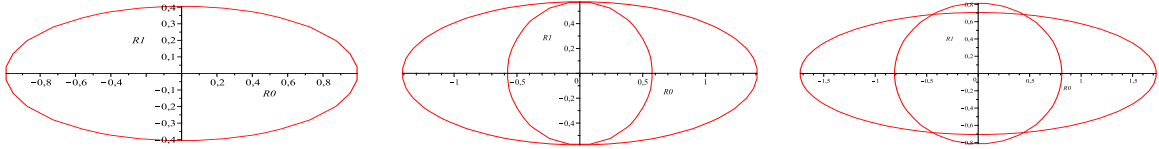
Vergelijking (ii) twee maal van vergelijking (i) afhalen geeft

$$\begin{aligned}
(i) - 2(ii) &= R_0^2 + 6R_1^2 - r - 2[3R_0^2 + 3R_1^2 - (r - q^2)] = 0 \\
&= -5R_0^2 + r - 2q^2 = 0 \\
5R_0^2 &= r - 2q^2 \\
R_0 &= \sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}.
\end{aligned}$$

Vergelijking (ii) van drie maal vergelijking (i) afhalen geeft

$$\begin{aligned}
3(i) - (ii) &= 3[R_0^2 + 6R_1^2 - r] - [3R_0^2 + 3R_1^2 - (r - q^2)] = 0 \\
&= 15R_1^2 - 2r - q^2 = 0 \\
15R_1^2 &= 2r + q^2 \\
R_1 &= \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}.
\end{aligned}$$

Herinner omdat $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$ dat $\theta_1 = \theta_0 + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.



Figuur 4.2.4: De ellips $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ en de cirkel $3R_0^2 + 3R_1^2 = r - q^2$ voor $q = 1$ en respectievelijk $r = 1$, $r = 2$ en $r = 3$.

Uit de vergelijkingen $\dot{\theta}_0 = -2R_1^2 \sin(2(\theta_1 - \theta_0)) = 0$ en $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$ volgt, in termen van (Z_0, Z_1) , één nieuw kritieke punt

$$(Z_0, Z_1) = \left(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} e^{i(\theta_0 + k\pi)} \right).$$

Merk op dat het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = \left(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} e^{i(\theta_0 + k\pi)} \right)$ twee families van kritieke punten heeft omdat $\theta_0 \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{Z}$.

De kritieke punten $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$ en $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r} e^{i\theta_0}, 0)$ worden ook uit deze vergelijkingen gevonden, maar reeds bekend zijn.

Nu is het mogelijk om een lijst op de stellen van de kritieke punten en eventuele voorwaarden voor het bestaan van het kritieke punt. Merk hierbij nogmaals op dat $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}$, $q, r > 0$ en $Z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$, $Z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$.

Kritieke punt $(R_0, \theta_0, R_1, \theta_1)$, $k \in \mathbb{Z}$	Kritieke punt (Z_0, Z_1)	Voorwaarde
$(0, \theta_0, 0, \theta_1)$	$(0, 0)$	-
$(\sqrt{r}, \theta_0, 0, \theta_1)$	$(\sqrt{r} e^{i\theta_0}, 0)$	-
$(0, \theta_0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}, \theta_1)$	$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} e^{i\theta_1})$	$r > q^2$
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \theta_0, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}, \theta_0 + k\pi)$	$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} e^{i(\theta_0 + k\pi)})$	$r > 2q^2$

Tabel 4.2.4: Kritieke punten van het tweedimensionale complexe systeem (4.11) met eventuele voorwaarden ($N = 1$).

4.2.5 Stabiliteitsanalyse

Nu de kritieke punten gevonden zijn is het van belang om weer meer te weten over hun stabiliteit. Hiertoe bekijken we het stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven in het complexwaardige stelsel (4.11)

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\ \dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2], \end{cases}$$

en niet het stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven in stelsel (4.12). Nu lineariseren we stelsel (4.11) rond de kritieke punten en bepalen de eigenwaarden van de Jacobiaan van het gelineariseerde stelsel.

We bekijken het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (0, 0)$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $Z_0 = z_0$, $Z_1 = z_1$. Invullen in stelsel (4.11) geeft

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\ \dot{z}_0 &= rz_0 + h.o.t., \\ \dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2] \\ \dot{z}_1 &= (r - q^2)z_1 + h.o.t. \end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt $(0, 0)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= rz_0 \\ \dot{z}_1 &= (r + q^2)z_1. \end{cases}$$

Laat $z = u + iv$, ofwel $z_0 = u_0 + iv_0$ en $z_1 = u_1 + iv_1$. Deze gegevens invullen in het gelineariseerde stelsel geeft

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= rz_0 \\ &= r(u_0 + iv_0) = \dot{u}_0 + i\dot{v}_0, \\ \dot{z}_1 &= (r - q^2)z_1 \\ &= (r - q^2)(u_1 + iv_1) = \dot{u}_1 + i\dot{v}_1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt het reële stelsel

$$\begin{cases} \dot{u}_0 &= ru_0 \\ \dot{v}_0 &= rv_0, \\ \dot{u}_1 &= (r - q^2)u_1 \\ \dot{v}_1 &= (r - q^2)v_1. \end{cases} \quad (4.13)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.13) worden gegeven door

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = r, \lambda_3 = r - q^2, \lambda_4 = r - q^2.$$

We bekijken het kritieke punt $(Z_0, Z_1) = (\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door

$Z_0 = \sqrt{r} + z_0$, $Z_1 = z_1$. Invullen in stelsel (4.11) geeft

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\
\dot{z}_0 &= r(\sqrt{r} + z_0) - [(\sqrt{r} + z_0)^2(\sqrt{r} + z_0) + 2(z_1)^2(\sqrt{r} + z_0) + 4(\sqrt{r} + z_0)|z_1|^2] \\
&= rz_0 - [r\bar{z}_0 + 2rz_0] + h.o.t. \\
&= -rz_0 - r\bar{z}_0 + h.o.t., \\
\dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2] \\
\dot{z}_1 &= (r - q^2)z_1 - [(\sqrt{r} + z_0)^2z_1 + 2z_1(\sqrt{r} + z_0)(\sqrt{r} + z_0) + 3z_1|z_1|^2] \\
&= (r - q^2)z_1 - [r\bar{z}_1 + 2rz_1] + h.o.t. \\
&= -(r + q^2)z_1 - r\bar{z}_1 + h.o.t.
\end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt $(\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= -rz_0 - r\bar{z}_0 \\ \dot{z}_1 &= -(r + q^2)z_1 - r\bar{z}_1. \end{cases}$$

Laat $z = u + iv$, ofwel $z_0 = u_0 + iv_0$ en $z_1 = u_1 + iv_1$. Deze gegevens invullen in het gelineariseerde stelsel geeft

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= -rz_0 - r\bar{z}_0 \\
&= -r(u_0 + iv_0) - r(u_0 - iv_0) \\
&= -2ru_0 = \dot{u}_0 + i\dot{v}_0, \\
\dot{z}_1 &= -(r + q^2)z_1 - r\bar{z}_1 \\
&= -(r + q^2)(u_1 + iv_1) - r(u_1 - iv_1) \\
&= -(2r + q^2)u_1 - q^2iv_1 = \dot{u}_1 + i\dot{v}_1.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het reële stelsel

$$\begin{cases} \dot{u}_0 &= -2ru_0 \\ \dot{v}_0 &= 0, \\ \dot{u}_1 &= -(2r + q^2)u_1 \\ \dot{v}_1 &= -q^2v_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.14) worden gegeven door

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2r, \lambda_3 = -(2r + q^2), \lambda_4 = -q^2.$$

We bekijken het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door

$Z_0 = z_0, Z_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1$. Invullen in stelsel (4.11) geeft

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\
\dot{z}_0 &= rz_0 - \left[(z_0)^2\bar{z}_0 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)^2\bar{z}_0 + 4z_0\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)\overline{\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)} \right] \\
&= rz_0 - \left[\frac{2}{3}(r - q^2)\bar{z}_0 + \frac{4}{3}(r - q^2) \right] + h.o.t. \\
&= -\frac{1}{3}(r - 4q^2)z_0 - \frac{2}{3}(r - q^2)\bar{z}_0 + h.o.t., \\
\dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2] \\
\dot{z}_1 &= (r - q^2)\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right) - \left[(z_0)^2\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right) + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)|z_0|^2 \right. \\
&\quad \left. + 3\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)^2\overline{\left(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + z_1\right)} \right] \\
&= (r - q^2)z_1 - [(r - q^2)\bar{z}_1 + 2(r - q^2)z_1] + h.o.t. \\
&= -(r - q^2)z_1 - (r - q^2)\bar{z}_1 + h.o.t.
\end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{z}_0 &= -\frac{1}{3}(r - 4q^2)z_0 - \frac{2}{3}(r - q^2)\bar{z}_0 \\ \dot{z}_1 &= -(r - q^2)z_1 - (r - q^2)\bar{z}_1. \end{cases}$$

Laat $z = u + iv$, ofwel $z_0 = u_0 + iv_0$ en $z_1 = u_1 + iv_1$. Deze gegevens invullen in het gelineariseerde stelsel geeft

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= -\frac{1}{3}(r - 4q^2)z_0 - \frac{2}{3}(r - q^2)\bar{z}_0 \\
&= -\frac{1}{3}(r - 4q^2)(u_0 + iv_0) - \frac{2}{3}(r - q^2)(u_0 - iv_0) \\
&= (2q^2 - r)u_0 + \frac{1}{3}(2q^2 + r)iv_0 = \dot{u}_0 + i\dot{v}_0, \\
\dot{z}_1 &= -(r - q^2)z_1 - (r - q^2)\bar{z}_1 \\
&= -(r - q^2)(u_1 + iv_1) - (r - q^2)(u_1 - iv_1) \\
&= 2(q^2 - r)u_1 = \dot{u}_1 + i\dot{v}_1.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het stelsel

$$\begin{cases} \dot{u}_0 &= (2q^2 - r)u_0 \\ \dot{v}_0 &= \frac{1}{3}(2q^2 + r)v_0, \\ \dot{u}_1 &= 2(q^2 - r)u_1 \\ \dot{v}_1 &= 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.15) worden gegeven door

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2q^2 - r, \lambda_3 = \frac{1}{3}(2q^2 + r), \lambda_4 = 2(q^2 - r).$$

We bekijken het kritieke punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)}e^{i(\theta_0+k\pi)})$. Laat $Z = U + iV$, ofwel $Z_0 = U_0 + iV_0$ en $Z_1 = U_1 + iV_1$. Invullen in stelsel (4.11) geeft

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0|Z_0|^2 + 2(Z_1)^2\bar{Z}_0 + 4Z_0|Z_1|^2] \\
\dot{U}_0 + i\dot{V}_0 &= r(U_0 + iV_0) - [(U_0 + iV_0)(U_0^2 + V_0^2) + 2(U_1^2 + 2iU_1V_1 - V_1^2)(U_0 - iV_0) \\
&\quad + 4(U_0 + iV_0)(U_1^2 + V_1^2)] \\
&= r(U_0 + iV_0) - [U_0(U_0^2 + V_0^2) + iV_0(U_0^2 + V_0^2) + 2U_1^2(U_0 + iV_0) + 4iU_1V_1(U_0 - iV_0) \\
&\quad - 2V_1^2(U_0 - iV_0) + 4U_0(U_1^2 + V_1^2) + 4iV_0(U_1^2 + V_1^2)] \\
&= r(U_0 + iV_0) - [U_0(U_0^2 + V_0^2) + iV_0(U_0^2 + V_0^2) + 2U_0U_1^2 - 2iV_0U_1^2 + 4iU_0U_1V_1 \\
&\quad + 4V_0U_1V_1 - 2U_0V_1^2 + 2iV_0V_1^2 + 4U_0(U_1^2 + V_1^2) + 4iV_0(U_1^2 + V_1^2)], \\
\dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [(Z_0)^2\bar{Z}_1 + 2Z_1|Z_0|^2 + 3Z_1|Z_1|^2] \\
\dot{U}_1 + i\dot{V}_1 &= (r - q^2)(U_1 + iV_1) - [(U_0^2 + 2iU_0V_0 - V_0^2)(U_1 - iV_1) + 2(U_1 + iV_1)(U_0^2 + V_0^2) \\
&\quad + 3(U_1 + iV_1)(U_1^2 + V_1^2)] \\
&= (r - q^2)(U_1 + iV_1) - [U_0^2(U_1 - iV_1) + 2iU_0V_0(U_1 - iV_1) - V_0^2(U_1 - iV_1) \\
&\quad + 2(U_1 + iV_1)(U_0^2 + V_0^2) + 3(U_1 + iV_1)(U_1^2 + V_1^2)] \\
&= (r - q^2)(U_1 + iV_1) - [U_0^2U_1 - iU_0^2V_1 + 2iU_0U_1V_1 + 2U_0V_0V_1 - V_0^2U_1 + iV_0^2V_1 \\
&\quad + 2(U_1 + iV_1)(U_0^2 + V_0^2) + 3(U_1 + iV_1)(U_1^2 + V_1^2)].
\end{aligned}$$

Hieruit volgt het reële stelsel

$$\begin{cases}
\dot{U}_0 &= rU_0 - U_0(U_0^2 + V_0^2) - 2U_0(U_1^2 - V_1^2) - 4V_0U_1V_1 - 4U_0(U_1^2 + V_1^2) \\
\dot{V}_0 &= rV_0 - V_0(U_0^2 + V_0^2) + 2V_0(U_1^2 - V_1^2) - 4U_0U_1V_1 - 4V_0(U_1^2 + V_1^2) \\
\dot{U}_1 &= (r - q^2)U_1 - U_1(U_0^2 - V_0^2) - 2U_0V_0V_1 - 2U_1(U_0^2 + V_0^2) - 3U_1(U_1^2 + V_1^2) \\
\dot{V}_1 &= (r - q^2)V_1 + V_1(U_0^2 - V_0^2) - 2U_0V_0U_1 - 2V_1(U_0^2 + V_0^2) - 3V_1(U_1^2 + V_1^2).
\end{cases} \quad (4.16)$$

Voor de linearisatie rond het kritieke punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)}e^{i(\theta_0+k\pi)})$ kiezen we $\theta_0 = 0$ (vanwege de fase-invariantie), en aan de hand van de keuze van k zijn er twee kritieke punten mogelijk: voor k even geeft dit het punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)})$ en voor k oneven geeft dit het punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}, -\sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)})$, in termen van (Z_0, Z_1) . In termen van (U_0, V_0, U_1, V_1) is dit gelijk aan $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)}, 0)$. Voor de stabiliteit van deze twee punten willen we naar de Jacobiaan van stelsel (4.16) kijken, ingevuld met het punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)}, 0)$. Hierbij zijn zowel V_0 als V_1 gelijkgesteld aan 0, en voor U_0 en U_1 zijn hun waarden niet ingevuld om het overzicht van de matrix niet te verliezen.

$$\begin{aligned}
&J(U_0, V_0, U_1, V_1) = \\
&\begin{pmatrix} r - 3U_0^2 - 6U_1^2 & 0 & -12U_0U_1 & 0 \\ 0 & r - U_0^2 - 2U_1^2 & 0 & -4U_0U_1 \\ -6U_0U_1 & 0 & (r - q^2) - 3U_0^2 - 9U_1^2 & 0 \\ 0 & -2U_0U_1 & 0 & (r - q^2) - U_0^2 - 3U_1^2 \end{pmatrix} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Herinner dat $U_0 = \sqrt{\frac{1}{5}(r-2q^2)}$ en $U_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{15}(2r+q^2)}$. De eigenwaarden van de Jacobiaan (4.17), met

deze waarden voor U_0 en U_1 ingevuld, worden gegeven door

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= r - \frac{q^2}{2} - U_0^2 - \frac{5U_1^2}{2} + \frac{\sqrt{32U_0^2U_1^2 + q^4 + 2q^2U_1^2 + U_1^4}}{2} = 0 \\
\lambda_2 &= r - \frac{q^2}{2} - U_0^2 - \frac{5U_1^2}{2} - \frac{\sqrt{32U_0^2U_1^2 + q^4 + 2q^2U_1^2 + U_1^4}}{2} = \frac{8r + 4q^2}{15} \\
\lambda_3 &= -3U_0^2 - \frac{15U_1^2 + q^2}{2} + \frac{\sqrt{288U_0^4U_1 + 9U_1^4 + 6q^2U_1 + q^4}}{2} \\
&= \frac{q^2 - 3r}{5} + \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^2}}{5} \\
\lambda_4 &= -3U_0^2 - \frac{15U_1^2 + q^2}{2} - \frac{\sqrt{288U_0^4U_1 + 9U_1^4 + 6q^2U_1 + q^4}}{2} \\
&= \frac{q^2 - 3r}{5} - \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^2}}{5}.
\end{aligned}$$

Nu is het mogelijk om een lijst op te stellen van de vier kritieke punten met de vier bijbehorende eigenwaarden van de Jacobiaan van het gelineariseerde stelsel rond de kritieke punten. Merk op dat we dus te maken hebben met vier eigenwaarden, vanwege het vierdimensionale stelsel.

Kritieke punt (Z_0, Z_1) , $k \in \mathbb{Z}$	Eigenwaarden				Voorwaarde
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	
$(0, 0)$	r	r	$r - q^2$	$r - q^2$	-
$(\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$	0	$-2r$	$-(2r + q^2)$	$-q^2$	-
$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$	0	$2q^2 - r$	$\frac{1}{3}(2q^2 + r)$	$2(q^2 - r)$	$r > q^2$
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}e^{i(\theta_0 + k\pi)})$	0	$\frac{8r + 4q^2}{15}$	$\frac{q^2 - 3r}{5} \pm \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}$		$r > 2q^2$

Tabel 4.2.5: Kritieke punten en de bijbehorende eigenwaarden ($N = 1$).

Voor stabiliteit van een kritiek punt moet gelden dat het reële deel van alle eigenwaarden horende bij het kritieke punt negatief zijn, ofwel $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) < 0$. Aan de hand van deze eis voor stabiliteit kan een eventuele eis voor q en r worden afgeleid. En kan er ook worden geconcludeerd of een kritiek punt (on)voorwaardelijk (in)stabiel is. Merk hierbij nogmaals op $q, r > 0$. Omdat de eigenwaarden alleen afhangen van q en r , en dus reëel zijn, willen we voor stabiliteit dat geldt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$. Als er dan ook maar één eigenwaarde positief is, dan is het kritieke punt, horende bij deze eigenwaarde, al instabiel.

Merk ook op dat voor drie van de vier punten er ook een eigenwaarde gelijk is aan 0. Deze eigenwaarde $\lambda_1 = 0$ hoort bij de θ_0 - of θ_1 -familie en is dus niet van belang.

Voor het punt $(0, 0)$ geldt al dat $\lambda_1 = \lambda_2 = r > 0$, dus het kritieke punt $(0, 0)$ is instabiel. Voor het punt $(\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$ geldt $\lambda_2 = -2r < 0$, $\lambda_3 = -(2r + q^2) < 0$, $\lambda_4 = -q^2 < 0$, dus het kritieke punt is stabiel.

Voor het punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$ geldt al dat $\lambda_3 = \frac{1}{3}(2q^2 + r) > 0$, dus het kritieke punt is instabiel.

Voor het punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}e^{i(\theta_0 + k\pi)})$ geldt al dat $\lambda_2 = \frac{8r + 4q^2}{15} > 0$, dus het kritieke punt is instabiel.

Hieruit kunnen we concluderen:

Kritieke punt $(Z_0, Z_1), k \in \mathbb{Z}$	Stabiliteit
$(0, 0)$	Instabiel
$(\sqrt{r}e^{i\theta_0}, 0)$	Stabiel
$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}e^{i\theta_1})$	Instabiel
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}e^{i\theta_0}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}e^{i(\theta_0 + k\pi)})$	Instabiel

Tabel 4.2.5: Kritieke punten met de stabiliteit ($N = 1$).

4.3 Geval $N = 1$ reëel

Het is mogelijk lastig om een voorstelling te maken van een tweedimensionaal complex of een vierdimensionaal reëel systeem, zoals systeem (4.11). Hierbij is een fout makkelijk gemaakt, omdat we niet meer in één, twee of drie dimensies werken.

Een voorbeeld van zo'n fout is om bij het simuleren de beginvoorwaarden $Z = (Z_0, Z_1)$ reëel te laten zijn, en dus niet complexwaardig. Herinner $Z = (Z_0, Z_1) = (R_0e^{i\theta_0}, R_1e^{i\theta_1})$. Door de beginvoorwaarden reëel te kiezen stellen we het complexe deel van Z_0 en Z_1 gelijk aan 1, ofwel $e^{i\theta_0} = e^{i\theta_1} = 1$ en dus $\theta_0 = \theta_1 = 0$. De beginvoorwaarden worden nu gelijk aan $Z = (Z_0, Z_1) = (R_0, R_1)$. Omdat $\theta_0 = \theta_1 = 0$ geldt ook $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_1 = 0$. Hierdoor wordt het vierdimensionale reële systeem (4.12) een tweedimensionaal reëel systeem, waarbij $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_1 = 0$. Merk op $\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) = 1$, omdat $\theta_0 = \theta_1 = 0$.

Dus het tweedimensionale complexe stelsel (4.11) wordt nu een tweedimensionaal reëel stelsel:

$$\begin{cases} \dot{R}_0 &= R_0 [r - R_0^2 - 2R_1^2 (\cos(2(\theta_1 - \theta_0)) + 2)] &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) \\ \dot{R}_1 &= R_1 [(r - q^2) - R_0^2 (\cos(2(\theta_0 - \theta_1)) + 2) - 3R_1^2] &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2). \end{cases} \quad (4.18)$$

Voor het stelsel vergelijkingen (4.18) kunnen we naar kritieke punten kijken, in termen van (R_0, R_1) . Hiervoor willen we een van de twee vergelijkingen gelijkstellen van stelsel (4.18) gelijkstellen aan 0, en de oplossingen die hieruit volgen invullen in de andere vergelijking. Daarna wordt deze vergelijking weer gelijk gesteld aan 0. Merk hierbij op dat het niet uitmaakt naar welke vergelijking we als eerste kijken.

We kiezen ervoor om te beginnen met de \dot{R}_0 -vergelijking gelijk te stellen aan 0.

$$\dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) = 0 \quad \text{geeft } R_0 = 0 \vee R_0^2 + 6R_1^2 = r.$$

Stel nu $R_0 = 0$, dan volgt voor de \dot{R}_1 -vergelijking:

$$\dot{R}_1 = R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2)|_{R_0=0} = R_1((r - q^2) - 3R_1^2).$$

Door nu deze vergelijking gelijk aan 0 te stellen volgt

$$\dot{R}_1 = R_1((r - q^2) - 3R_1^2) = 0 \quad \text{geeft } R_1 = 0 \vee R_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}.$$

Uit de vergelijkingen $\dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) = 0$ en $R_0 = 0$ volgen de twee kritieke punten

$$(R_0, R_1) = (0, 0), (R_0, R_1) = (0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}).$$

Merk op dat de voorwaarde $r > q^2$ opgelegd moet worden voor het bestaan van het tweede punt.

Stel nu $R_0^2 + 6R_1^2 = r$, dan volgt voor de \dot{R}_1 -vergelijking:

$$\dot{R}_1 = R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2)|_{R_0^2+6R_1^2=r} = R_1((r - q^2) - 3(r - 6R_1^2 + R_1^2)) = R_1(15R_1^2 - (2r + q^2)).$$

Door nu deze vergelijking gelijk aan 0 te stellen volgt

$$\dot{R}_1 = R_1(15R_1^2 - (2r + q^2)) = 0 \quad \text{geeft } R_1 = 0 \vee R_1 = \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}.$$

Door de vergelijkingen $R_1 = 0$ respectievelijk $R_1 = \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}$ in de vergelijking $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ volgt $R_0 = \sqrt{r}$ respectievelijk $R_0 = \sqrt{r - 6R_1^2} = \sqrt{r - 6(\frac{1}{15}(2r + q^2))} = \sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}$.

Uit de vergelijkingen $\dot{R}_0 = R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) = 0$ en $R_0^2 + 6R_1^2 = r$ volgen de twee kritieke punten

$$(R_0, R_1) = (\sqrt{r}, 0), (R_0, R_1) = (\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)}).$$

Merk op dat de voorwaarde $r > 2q^2$ opgelegd moet worden voor het bestaan van het tweede punt.

Nu is het mogelijk een lijst op te stellen van de kritieke punten en eventuele voorwaarden voor het bestaan van het kritieke punt. Merk hierbij nogmaals op dat $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $q, r > 0$.

Kritieke punt (R_0, R_1)	Voorwaarde
$(0, 0)$	-
$(\sqrt{r}, 0)$	-
$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$	$r > q^2$
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$	$r > 2q^2$

Tabel 4.3: Kritieke punten van het tweedimensionale reële systeem (4.18) met eventuele voorwaarden ($N = 1$ reëel).

4.3.1 Stabiliteitsanalyse

Nu de kritieke punten gevonden zijn is het weer van belang om meer te weten over hun stabiliteit. Hiertoe lineariseren we stelsel (4.18) rond de kritieke punten en bepalen de eigenwaarden van de Jacobiaan van het gelineariseerde stelsel.

We bekijken het kritieke punt $(0, 0)$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $R_0 = r_0, R_1 = r_1$. Invullen in stelsel (4.18) geeft

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) & \dot{R}_1 &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2) \\ \dot{r}_0 &= rr_0 + h.o.t & \dot{r}_1 &= (r - q^2)r_1 + h.o.t. \end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het kritieke punt $(0, 0)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{r}_0 &= rr_0 \\ \dot{r}_1 &= (r - q^2)r_1. \end{cases} \quad (4.19)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.19) worden gegeven door

$$\lambda_1 = r, \lambda_2 = r - q^2.$$

We bekijken het kritieke punt $(\sqrt{r}, 0)$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $R_0 = \sqrt{r} + r_0$, $R_1 = r_1$. Invullen in stelsel (4.18) geeft

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) & \dot{R}_1 &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2) \\ \dot{r}_0 &= (\sqrt{r} + r_0)(r - (\sqrt{r} + r_0)^2 - 6r_1^2) & \dot{r}_1 &= r_1((r - q^2) - 3(\sqrt{r} + r_0)^2 - 3r_1^2) \\ &= -2rr_0 + h.o.t. & &= (r - q^2)r_1 - 3rr_1 + h.o.t. = -(2r + q^2)r_1 + h.o.t \end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het punt $(\sqrt{r}, 0)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{r}_0 &= -2rr_0 \\ \dot{r}_1 &= -(2r + q^2)r_1. \end{cases} \quad (4.20)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.20) worden gegeven door

$$\lambda_1 = -2r, \lambda_2 = -(2r + q^2).$$

We bekijken het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven door $R_0 = r_0$, $R_1 = \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + r_1$. Invullen in stelsel (4.18) geeft

$$\begin{aligned} \dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) \\ \dot{r}_0 &= r_0(r - r_0^2 - 6(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + r_1)^2) = (2q^2 - r)r_0 + h.o.t. \\ \dot{R}_1 &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2) \\ \dot{r}_1 &= (\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + r_1)((r - q^2) - 3r_0^2 - 3(\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + r_1)^2) = 2(q^2 - r)r_1 + h.o.t. \end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het punt $((0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{r}_0 &= (2q^2 - r)r_0 \\ \dot{r}_1 &= 2(q^2 - r)r_1. \end{cases} \quad (4.21)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.21) worden gegeven door

$$\lambda_1 = 2q^2 - r, \lambda_2 = 2(q^2 - r).$$

We bekijken het kritieke punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$. De linearisatie rond dit punt wordt gegeven

door $R_0 = \sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} + r_0$, $R_1 = \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} + r_1$. Invullen in stelsel (4.18) geeft

$$\begin{aligned}
\dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2) \\
\dot{r}_0 &= \left(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} + r_0\right)\left(r - \left(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} + r_0\right)^2 - 6\left(\sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} + r_1\right)^2\right) \\
&= -\frac{2}{5}(r - 2q^2)r_0 - 12\sqrt{\frac{1}{75}(r - 2q^2)(2r + q^2)} + rr_0 - \frac{1}{5}(r - 2q^2)r_0 - \frac{6}{15}(2r + q^2)r_0 + h.o.t. \\
&= \left(r - \frac{3}{5}(r - 2q^2) - \frac{6}{15}(2r + q^2)\right)r_0 - \frac{4\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_1 + h.o.t. \\
&= \frac{1}{5}(4q^2 - 2r)r_0 - \frac{4\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_1 + h.o.t. \\
\dot{R}_1 &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2) \\
\dot{r}_1 &= \left(\sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} + r_1\right)\left((r - q^2) - 3\left(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)} + r_0\right)^2 - 3\left(\sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)} + r_1\right)^2\right) \\
&= -6\sqrt{\frac{1}{75}(r - 2q^2)(2r + q^2)} - \frac{6}{15}(2r + q^2)r_1 + (r - q^2)r_1 - \frac{3}{5}(r - 2q^2)r_1 \\
&\quad - \frac{3}{15}(2r + q^2)r_1 + h.o.t. \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_0 + \left((r - q^2) - \frac{3}{5}(r - 2q^2) - \frac{9}{15}(2r + q^2)\right)r_1 + h.o.t. \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_0 + -\frac{1}{5}(4r + 2q^2)r_1 + h.o.t.
\end{aligned}$$

Het gelineariseerde stelsel rond het punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \dot{r}_0 &= \frac{1}{5}(4q^2 - 2r)r_0 - \frac{4\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_1 \\ \dot{r}_1 &= -\frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{(r - 2q^2)(2r + q^2)}r_0 + -\frac{1}{5}(4r + 2q^2)r_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

De eigenwaarden van de Jacobiaan van stelsel (4.22) worden gegeven door

$$\lambda_1 = \frac{q^2 - 3r}{5} + \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}, \lambda_2 = \frac{q^2 - 3r}{5} - \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}.$$

Nu is het mogelijk om een lijst op te stellen van de vier kritieke punten met de twee bijbehorende eigenwaarden van de Jacobiaan van het gelineariseerde stelsel rond de kritieke punten. Merk op dat we dus te maken hebben met twee eigenwaarden, vanwege het tweedimensionale stelsel.

Kritieke punt (R_0, R_1)	Eigenwaarden		Voorwaarde
	λ_1	λ_2	
$(0, 0)$	r	$r - q^2$	-
$(\sqrt{r}, 0)$	$-2r$	$-(2r + q^2)$	-
$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$	$2q^2 - r$	$2(r - q^2)$	$r > q^2$
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$	$\frac{q^2 - 3r}{5} + \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}$	$\frac{q^2 - 3r}{5} - \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}$	$r > 2q^2$

Tabel 4.3.1: Kritieke punten met de bijbehorende eigenwaarden ($N = 1$ reëel).

Merk op dat de twee eigenwaarden die hier gevonden zijn voor systeem (4.18) ook twee van de vier eigenwaarden zijn die gevonden zijn bij het tweedimensionale complexe systeem (4.11) en vierdimensionale reële systeem (4.12). In systeem (4.18) zijn de punten (R_0, R_1) reëel en in systeem (4.11) $(Z_0, Z_1) = (R_0 e^{i\theta_0}, R_1 e^{i\theta_1})$ complex. Merk nogmaals op dat voor de keuze $\theta_0, \theta_1 = 0$ de kritieke punten die gevonden zijn voor systeem (4.11) gelijk zijn aan de kritieke punten gevonden in systeem (4.18).

Voor stabiliteit van een kritiek punt moet dus gelden dat het reële deel van alle eigenwaarden negatief is, ofwel $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$. Aan de hand van deze eis voor stabiliteit kan een eventuele eis voor q en r worden afgeleid. En kan er ook worden geconcludeerd of een kritiek punt (on)voorwaardelijk (in)stabiel is. Merk hierbij nogmaals op dat $q, r > 0$. Omdat de eigenwaarden alleen afhangen van q en r , en dus reëel zijn, willen we voor stabiliteit dat geldt $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Als er dan ook maar één eigenwaarde positief is, dan is het kritieke punt, horende bij deze eigenwaarde, al instabiel.

Voor het punt $(0, 0)$ geldt $\lambda_1 = r > 0$, dus het kritieke punt $(0, 0)$ is instabiel. Voor het punt $(\sqrt{r}, 0)$ geldt $\lambda_1 = 2r > 0$, dus het kritieke punt $(\sqrt{r}, 0)$ is instabiel. Voor het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ geldt $\lambda_1 = 2q^2 - r < 0$ als $r > 2q^2$ en $\lambda_2 = 2(q^2 - r) < 0$ als $r > q^2$, dus het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ is stabiel als $r > 2q^2$.

Voor het kritieke punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$ geldt $\lambda_1 = \frac{q^2 - 3r}{5} + \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5}$. Als $\lambda_1 < 0$, dan moet gelden

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \frac{q^2 - 3r}{5} + \frac{\sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4}}{5} &< 0 \\ q^2 - 3r + \sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4} &< 0 \\ \sqrt{49r^2 - 66rq^2 - 39q^4} &< 3r - q^2 \\ 49r^2 - 66rq^2 - 39q^4 &< (3r - q^2)^2 = 9r^2 - 6rq^2 + q^4 \\ 40r^2 - 60rq^2 - 40q^4 &< 0. \end{aligned}$$

De vergelijking $40r^2 - 60rq^2 - 40q^4 = 0$ heeft als oplossingen $r = \frac{3 \pm 5}{4}q^2$. Dus de oplossing voor de vergelijking $40r^2 - 60rq^2 - 40q^4 < 0$ is $-\frac{1}{2}q^2 < r < 2q^2$. Maar omdat de voorwaarde van het bestaan van dit kritieke punt $r > 2q^2$ kan nooit aan de stabiliteitseis $-\frac{1}{2}q^2 < r < 2q^2$ worden voldaan. Dus het kritieke punt $(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$ is instabiel.

Hieruit kunnen we concluderen:

Kritieke punt (R_0, R_1)	Stabiliteit
$(0, 0)$	Instabiel
$(\sqrt{r}, 0)$	Stabiel
$(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$	voor $r > 2q^2$
$(\sqrt{\frac{1}{5}(r - 2q^2)}, \sqrt{\frac{1}{15}(2r + q^2)})$	Instabiel

Tabel 4.3.1: Kritieke punten met de stabiliteit ($N = 1$ reëel).

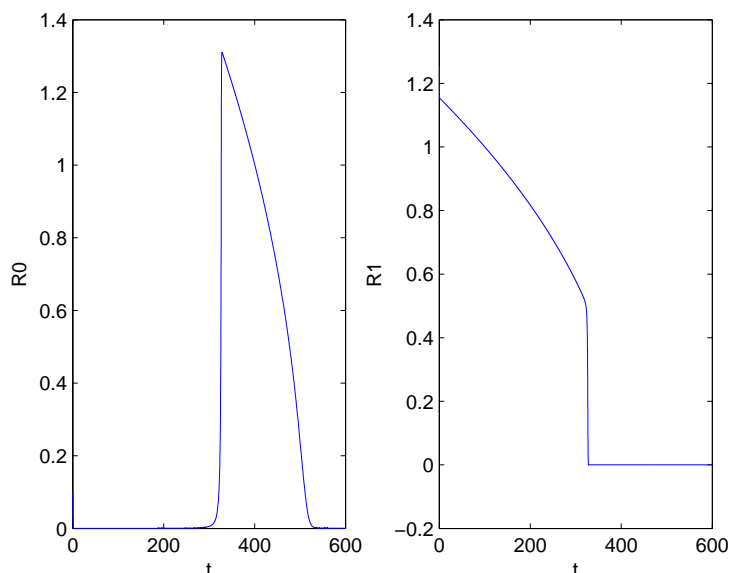
4.3.2 Simulaties

Het is nu interessant om aan de hand van simulaties, met behulp van Matlab, de stabiliteitsanalyse voor het tweedimensionale reële systeem (4.18) te verifiëren. Zeker omdat dit systeem tweedimensionaal is kan hier een goed beeld bij worden gevormd.

Wat het vooral interessant maakt, is dat er nu een kritiek punt is waarbij de stabiliteit verandert voor verschillende waarden van r . Het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ is stabiel voor $r > 2q^2$, maar voor $0 < r \leq 2q^2$ is het instabiel. Dit was niet het geval voor de andere systemen. Hierbij waren de kritieke punten óf altijd stabiel óf altijd instabiel.

Omdat het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ voor grote waarden van r altijd stabiel is en voor kleinere waarden van r instabiel, is het boeiend om de parameter r te laten variëren in tijd t . De parameter r wordt vervangen door de term $r(t) = r - \frac{t}{100}$ in de differentiaalvergelijking. Door nu een vaste waarde van r te kiezen en de tijd t te laten lopen, zal $r(t)$ afnemen. En door in de simulaties t te laten lopen zal het omslaan van de stabiliteit bij $r = 2q^2$ te zien moeten zijn.

Omdat we juist geïnteresseerd zijn in dit kritieke punt kiezen we de beginvoorwaarden gelijk aan $(0 + 0, 1; \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)} + 0, 1)$. Voor de parameter q wordt de vaste waarde $q = 1$ gekozen. Hierdoor ligt het omslagpunt bij $r = 2$. Om deze reden kiezen we $r = 5$. De tijd t laten we lopen van $t_0 = 0$ tot $t_1 = 600$. We verwachten dat rond $t = 300$ ($r = 2q^2$) er een duidelijk omslagpunt is.²



Figuur 4.3.2: Simulaties van R_0 en R_1 als functie van t met parameter $r(t)$ voor systeem (4.18).

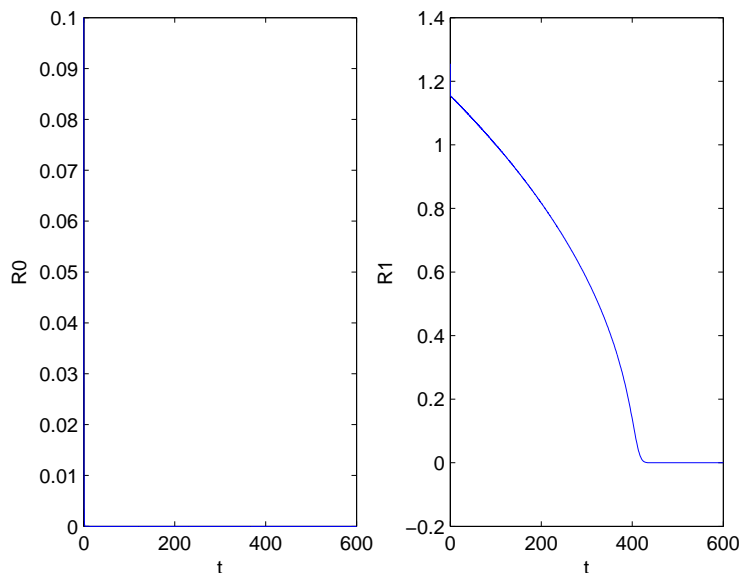
Uit Figuur 4.3.2 mogen we concluderen dat stabiliteisanalyse voor het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ correct is.

Voor $t = 0, \dots, 300$ is het punt stabiel. We zien de waarde van R_1 afnemen, maar dit komt doordat deze waarde afhangt van q en r , namelijk $\sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)}$, en zal afnemen naar mate r afneemt - de waarde van q is vast. De waarde van R_0 blijft bij 0. Rond $t = 300$ zien we een grote verandering optreden. Het punt wordt instabiel, en het systeem gaat naar het enige andere stabiele kritieke punt namelijk $(\sqrt{r}, 0)$. Na $t = 300$ vindt er geen significante verandering in stabiliteit meer plaats, waardoor het systeem bij het punt $(\sqrt{r}, 0)$ zal blijven. De waarde van R_0 hangt nu alleen af van r , namelijk \sqrt{r} , dus naar mate r afneemt en naar 0 gaat zal dit voor de waarde van R_0 ook gebeuren. Dit keer blijft de waarde van R_1

²Zie B voor de gebruikte code.

bij 0.

Merk op dat in de simulaties gebruikt is gemaakt van een random term in de vergelijking voor \dot{R}_0 . Als dit niet gedaan zou zijn, dan zouden de simulaties van de functies R_0 en R_1 er als volgt uitzien.



Figuur 4.3.2: Simulaties van R_0 en R_1 als functie van t met parameter $r(t)$ voor systeem (4.18), zonder random term.

De verklaring voor het verschil in simulaties zonder de random term komt vanwege de stabiliteit van het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$. De waarde van R_0 van $t = 0, \dots, 300$ is gelijk aan 0. Bij $t = 300$ zou deze waarde moeten veranderen in \sqrt{r} . Maar doordat het systeem te lang te dicht bij 0 heeft gezeten voor R_0 kost het tijd om de waarde te veranderen van 0 naar \sqrt{r} . Door geen random term toe te voegen zal dit echter te lang duren en zal de waarde van R_0 gelijk blijven aan 0, wat dan ook blijkt uit de simulaties. Door de random term krijgt de \dot{R}_0 -vergelijking voor iedere t een zeer kleine verstoring waardoor R_0 bij $t = 300$ niet bij 0 blijft, maar de mogelijkheid heeft om naar de waarde \sqrt{r} te gaan.

4.4 Geval $N = 2$

We bekijken de eindig-dimensionale reductie (4.2) voor het geval $N = 2$.

Vooraf om te laten zien dat dit inderdaad mogelijk is zullen we voor dit geval de differentiaalvergelijkingen bepalen. Maar omdat de vergelijkingen voor dit systeem driedimensionaal complex en zesdimensionaal reëel zijn zullen we alleen een kleine vergelijking maken met de resultaten gevonden voor het tweedimensionale reële systeem (4.18).

De reductie (4.2) wordt voor $N = 2$ gegeven door

$$\dot{Z}_n^{(2)} = (r - n^2 q^2) Z_n^{(2)} - \sum_{\substack{k+l+m=n \\ |k|, |l|, |m| \leq 2}} Z_k^{(2)} \cdot Z_l^{(2)} \cdot \bar{Z}_m^{(2)}. \quad (4.23)$$

Hierbij worden de gevallen $n = 0$, $n = 1$ en $n = 2$ onderscheiden:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_0^{(2)} &= r Z_0^{(2)} - \left[Z_0^{(2)} \left(|Z_0^{(2)}|^2 + 4|Z_1^{(2)}|^2 + 4|Z_2^{(2)}|^2 \right) + 2\bar{Z}_0^{(2)} \left((Z_1^{(2)})^2 + (Z_2^{(2)})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(Z_1^{(2)})^2 \bar{Z}_2^{(2)} + 4Z_2^{(2)} |Z_1^{(2)}|^2 \right] \quad (n = 0) \\ \dot{Z}_1^{(2)} &= (r - q^2) Z_1^{(2)} - \left[Z_1^{(2)} \left(2|Z_0^{(2)}|^2 + 3|Z_1^{(2)}|^2 + 4|Z_2^{(2)}|^2 \right) + \bar{Z}_1^{(2)} \left((Z_0^{(2)})^2 + 2(Z_2^{(2)})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 4Z_0^{(2)} Z_1^{(2)} \bar{Z}_2^{(2)} + 4Z_1^{(2)} Z_2^{(2)} \bar{Z}_0^{(2)} + 4Z_0^{(2)} Z_2^{(2)} \bar{Z}_1^{(2)} \right] \quad (n = 1) \\ \dot{Z}_2^{(2)} &= (r - 4q^2) Z_2^{(2)} - \left[Z_0^{(2)} \left((Z_1^{(2)})^2 + 2|Z_1^{(2)}|^2 \right) + Z_2^{(2)} \left(2|Z_0^{(2)}|^2 + 4|Z_1^{(2)}|^2 + 3|Z_2^{(2)}|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{Z}_2^{(2)} \left((Z_0^{(2)})^2 + 2(Z_1^{(2)})^2 \right) \right] \quad (n = 2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Voor het geval $N = 2$ geeft de reductie dus een stelsel van drie complexe differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{Z}_0 &= r Z_0 - \left[Z_0 \left(|Z_0|^2 + 4|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 \right) + 2\bar{Z}_0 \left((Z_1)^2 + (Z_2)^2 \right) + 2(Z_1)^2 \bar{Z}_2 + 4Z_2 |Z_1|^2 \right] \\ \dot{Z}_1 &= (r - q^2) Z_1 - \left[Z_1 \left(2|Z_0|^2 + 3|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2 \right) + \bar{Z}_1 \left((Z_0)^2 + 2(Z_2)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{Z}_2 \left((Z_0)^2 + 2(Z_1)^2 \right) \right] \\ \dot{Z}_2 &= (r - 4q^2) Z_2 - \left[Z_0 \left((Z_1)^2 + 2|Z_1|^2 \right) + Z_2 \left(2|Z_0|^2 + 4|Z_1|^2 + 3|Z_2|^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{Z}_2 \left((Z_0)^2 + 2(Z_1)^2 \right) \right]. \end{cases} \quad (4.25)$$

4.4.1 Geval $N = 2$ reëel

Voor het geval $N = 1$ hebben we ook naar het tweedimensionale reële geval gekeken. Herinner hierbij dat $Z = (Z_0, Z_1) = (R_0, R_1)$ met $R_0, R_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Het geval $N = 1$ gaf een stelsel van twee complexe differentiaalvergelijkingen (4.11). Door in dit stelsel beiden Z_0 en Z_1 niet meer complexwaardig maar reëelwaardig te maken kregen we een tweedimensionaal reëel systeem (4.18):

$$\begin{cases} \dot{R}_0 &= R_0(r - R_0^2 - 6R_1^2), \\ \dot{R}_1 &= R_1((r - q^2) - 3R_0^2 - 3R_1^2). \end{cases}$$

Voor het geval $N = 2$ is het ook mogelijk om naar het reële systeem te kijken, wat in dit geval dus driedimensionaal is. Hierbij is $Z = (Z_0, Z_1, Z_2) = (R_0, R_1, R_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_0 &= rZ_0 - [Z_0(|Z_0|^2 + 4|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2) + 2\bar{Z}_0((Z_1)^2 + (Z_2)^2) + 2(Z_1)^2\bar{Z}_2 + 4Z_2|Z_1|^2] \\
\dot{R}_0 &= rR_0 - [R_0(R_0^2 + 4R_1^2 + 4R_2^2) + 2R_0(R_1^2 + R_2^2) + 2R_1^2R_2 + 4R_2R_1^2] \\
&= rR_0 - [R_0(R_0^2 + 6R_1^2 + 6R_2^2) + 6R_1^2R_2] \\
&= R_0[r - (R_0^2 + 6R_1^2 + 6R_2^2)] - 6R_1^2R_2, \\
\dot{Z}_1 &= (r - q^2)Z_1 - [Z_1(2|Z_0|^2 + 3|Z_1|^2 + 4|Z_2|^2) + \bar{Z}_1((Z_0)^2 + 2(Z_2)^2) \\
&\quad + \bar{Z}_2((Z_0)^2 + 2(Z_1)^2)] \\
\dot{R}_1 &= (r - q^2)R_1 - [R_1(2R_0^2 + 3R_1^2 + 4R_2^2) + R_1(R_0^2 + 2R_2^2) + R_2(R_0^2 + 2R_1^2)] \\
&= (r - q^2)R_1 - [R_1(3R_0^2 + 3R_1^2 + 8R_2^2) + R_0^2R_2] \\
&= R_1[(r - q^2) - (3R_0^2 + 3R_1^2 + 8R_2^2)] - R_0^2R_2, \\
\dot{Z}_2 &= (r - 4q^2)Z_2 - [Z_0((Z_1)^2 + 2|Z_1|^2) + Z_2(2|Z_0|^2 + 4|Z_1|^2 + 3|Z_2|^2) \\
&\quad + \bar{Z}_2((Z_0)^2 + 2(Z_1)^2)] \\
\dot{R}_2 &= (r - 4q^2)R_2 - [R_0(R_1^2 + 2R_1) + R_2(2R_0^2 + 4R_1^2 + 3R_2^2) + R_2(R_0^2 + 2R_1^2)] \\
&= (r - 4q^2)R_2 - [R_2(3R_0^2 + 6R_1^2 + 3R_1^2) + 3R_0R_1^2]
\end{aligned}$$

Dit geeft ons het volgende driedimensionale reële systeem:

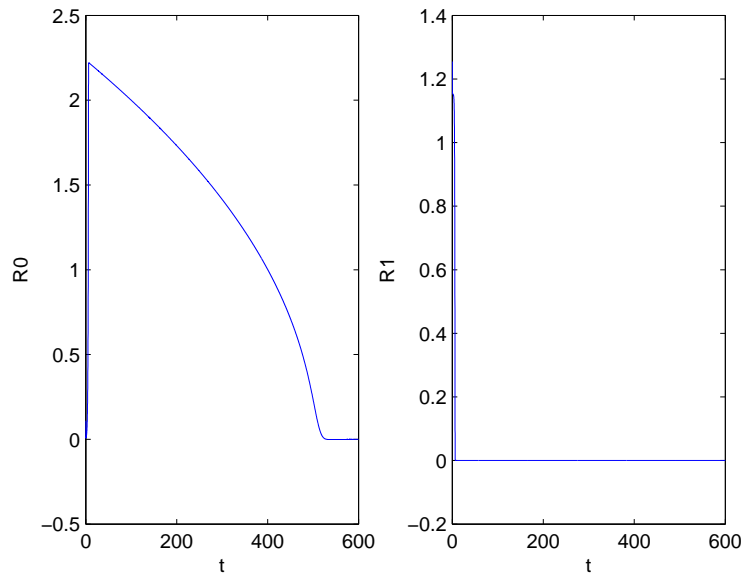
$$\begin{cases} \dot{R}_0 &= R_0[r - (R_0^2 + 6R_1^2 + 6R_2^2)] - 6R_1^2R_2, \\ \dot{R}_1 &= R_1[(r - q^2) - (3R_0^2 + 3R_1^2 + 8R_2^2)] - R_0^2R_2, \\ \dot{R}_2 &= R_2[(r - 4q^2) - (3R_0^2 + 6R_1^2 + 3R_1^2)] - 3R_0R_1^2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Merk op dat wanneer $R_2 = 0$, systeem (4.26) gelijk wordt aan het tweedimensionale reële systeem (4.18).

In theorie zou het nu mogelijk zijn om stabiliteitsanalyse te doen voor systeem (4.26), ofwel eerst kritieke punten bepalen en daarna eigenwaarden. In vergelijking met systeem (4.18) zullen er bij dit systeem meer kritieke punten worden gevonden. Herinner dat dit ook het geval was bij het $N = 0$ -systeem met twee kritieke punten en het $N = 1$ -systeem met vier kritieke punten. Ook zal het veel rekentijd in beslag nemen, zoals eerder opgemerkt.

Om toch een klein beeld te vormen is er voor gekozen om simulaties uit te voeren van het systeem. Hierbij is gekozen voor de zelfde simulaties als bij het tweedimensionale systeem (4.18). Alleen nu wordt systeem (4.26) gebruikt. De waarden van q , r , $r(t)$ en t blijven hetzelfde. Ter vergelijking zijn weer R_0 en R_1 als functie van tijd t geplot. ³

³Zie Appendix C voor de gebruikte code.



Figuur 4.4.1: Simulaties van R_0 en R_1 als functie van t met parameter $r(t)$ voor systeem (4.26).

Er is één significant verschil te zien: het kritieke punt $(0, \sqrt{\frac{1}{3}(r - q^2)})$ niet meer terug te vinden in Figuur 4.4.1. En het lijkt erop dat de waarde van R_0 gelijk is aan \sqrt{r} en de waarde van R_1 gelijk aan 0. Herinner wel dat het punt $(\sqrt{r}, 0)$ stabiel was in systeem (4.18). Maar omdat we ons zo specifiek hebben gericht op één punt kunnen we verder geen conclusies trekken uit deze simulaties.

5 Conclusie

Alhoewel het door een, op het eerste gezicht, eenvoudig model te beschrijven is, is het proces van verwoestijning ook vanuit wiskundig opzicht uiterst complex.

Hier is ervoor gekozen alleen in te zoomen op het ontstaan van vegetatiepatronen (en dus nog niet naar het 'catastrofaal verdwijnen' van deze patronen; de oorzaak van verwoestijning). Dit proces wordt beschreven door de GL-vergelijking, zoals we in deze scriptie aannemelijk hebben gemaakt.

De GL-vergelijking is een oneindig-dimensionaal dynamisch systeem, en om dit enigszins te begrijpen zijn er een aantal eindig-dimensionale reducties gemaakt. Deze reducties geven inderdaad enig inzicht in het ontstaan van (vegetatie)patronen, en hun gedrag onder veranderende omstandigheden. Echter ook hier blijkt weer dat de wiskundige analyse snel tegen haar begrenzingsen aanloopt. Het bij deze analyse horende rekenwerk leverde al snel zo goed als onoverkoombare praktische en technische problemen op.

Echter, in deze scriptie hebben we wel laten zien dat ook in gereduceerde setting van een eindig-dimensionale GL-vergelijking, een catastrofaal uitstervingsproces als verwoestijning mogelijk is, onder veranderende omstandigheden. Uit figuur 4.3.2 volgt dan ook dat er een dergelijke catastrofe plaats kan vinden wanneer de parameter r afneemt.

Referenties

- [1] C.A. Klausmeier [1999], 'Regular and irregular patterns in semiarid vegetation', *Science* **284**, 1826-1828.
- [2] P.Gray en S.K. Scott [1984], 'Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A + 2B \rightarrow 3B, B \rightarrow C$ ', *Chem. Eng. Sci.* **39**, 1087-1097.
- [3] V. Rottschäfer [1998], Co-dimension 2 phenomena in pattern formation, Ph.D.-thesis, University Utrecht.
- [4] A. Doelman: aantekeningen voor college.
- [5] D.S. Morgan, A. Doelman, T.J. Kaper [1999]: 'Stationary periodic patterns in the 1-D Gray-Scott model', *Meth. Appl. Anal.* **7**(1), 1-15.
- [6] R.B. Hoyle [2006]: 'Pattern formation: a introduction to methods', *Cambridge University Press*, 209-291.
- [7] A. Doelman [1988]: 'Low dimensional truncated models of the Ginzburg-Landau equation', Preprint no. 8.
- [8] A. Doelman [2007], 'De dynamica van patronen: wiskunde en woestijnen', Vakantiecursus 2007 Wiskunde in Beweging, *CWI syllabus* **57**, 27-45.

A Matlabcode voor simulaties van het eendimensionale complexe systeem ($N = 0$)

```
function Stefanie()
r = 1;

t0 = 0;
t1 = 50;

theta0 = 0;
Z0 = 2;

[t,Z] = ode45(@(t,Z) odefun(t,Z,r),[t0,t1],Z0);

figure(1)
polar(t,Z(:,1))
xlabel('t')
ylabel('Z0 = R0*exp(i*theta0)')

function dZdt = odefun(t,Z,r)
dZdt = zeros(1,1);
dZdt(1) = r*Z(1) - Z(1)*norm(Z(1))^2;
```

B Matlabcode voor simulaties van het tweedimensionale reële systeem ($N = 1$ reëel)

```
function Stefanie()
r = 5;
q = 1;
epsilon = 10(-3);

t0 = 0;
t1 = 600;
R0 = [0 + 0.1;sqrt(1/3*(r-q2)) + 0.1];

[t,R] = ode45(@(t,R) odefun(t,R,q,r,epsilon), [t0,t1], R0);

figure(1)
subplot(1,2,1);
plot(t,R(:,1))
xlabel('t')
ylabel('R0')

subplot(1,2,2);
plot(t,R(:,2))
xlabel('t')
ylabel('R1')

function dRdt = odefun(t,R,q,r,epsilon)
dRdt = zeros(2,1);
dRdt(1) = R(1)*((r-t/100) - (R(1))2 - 6*(R(2))2) + epsilon*rand(1,1);
dRdt(2) = R(2)*(((r-t/100) - q2) - 3*(R(1))2 - 3*(R(2))2);
```

C Matlabcode voor simulaties van het driedimensionale reële systeem ($N = 2$ reëel)

```
function Stefanie()
r = 5;
q = 1;
epsilon = 10(-3);

t0 = 0;
t1 = 600;
R0 = [0 + 0.11;sqrt(1/3*(r-q2)) + 0.1;0 + 0.1];

[t,R] = ode45(@(t,R) odefun(t,R,q,r,epsilon), [t0,t1],R0);

figure(2)
subplot(1,2,1);
plot(t,R(:,1))
xlabel('t')
ylabel('R0')

subplot(1,2,2);
plot(t,R(:,2))
xlabel('t')
ylabel('R1')

function dRdt = odefun(t,R,q,r,epsilon)
dRdt = zeros(2,1);
dRdt(1) = R(1)*((r-t/100) - ((R(1))2 + 6*(R(2))2 + 6*(R(3))2)) - 6*(R(2))2*R(3) - epsilon*rand(1,1);
dRdt(2) = R(2)*(((r-t/100) - q2) - (3*(R(1))2 + 3*(R(2))2 + 8*(R(3))2)) - (R(1))2*R(3);
dRdt(3) = R(3)*(((r-t/100) - 4*q2) - (3*(R(1))2 + 6*(R(2))2 + 3*(R(3))2)) - 3*R(1)*(R(2))2;
```