**Callcenters**
Kappetein, R.B.

**R.B. Kappetein**

# Callcenters

**Bachelorscriptie, 5 juli 2011**

**Scriptiebegeleider: Dr. F.M. Spieksma**

**Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden**

# Inhoudsopgave

# 1 Inleiding: callcenters met ongeduldige klanten

Een callcenter is een afdeling of organisatie die is gespecialiseerd in het afhandelen van telefoonverkeer. Klanten, die bellen naar een callcenter, worden geholpen als er een werknemer beschikbaar is, anders komen ze in een wachtrij. Er is geen limiet voor de lengte van de wachtrij. De klanten komen aan volgens een Poisson proces met parameter $\lambda$. De gespreksduur met een werknemer is exponentieel verdeeld met parameter $\mu$ en er zijn $s$ werknemers die de gesprekken voeren. Ten slotte is het ongeduld van de klanten exponentieel verdeeld met parameter $\gamma$. Met ongeduld wordt bedoeld de tijd die klanten bereid zijn te wachten voordat ze geholpen worden. Er wordt aangenomen dat klanten niet ophangen tijdens een gesprek met een werknemer. In deze scriptie wordt verder aangenomen dat een callcenter-manager alleen invloed uit kan oefenen op het aantal werknemers $s$.

In veel callcenters wordt momenteel voor het bepalen van het aantal werknemers gezocht naar het aantal werknemers dat nodig is om meer dan tachtig procent van de klanten binnen twintig seconden te helpen. Het is niet eenvoudig te zeggen wat de negatieve gevolgen zijn voor het callcenter door het later behandelen van de overgebleven twintig procent. Ook wordt er in dit systeem geen rekening gehouden met het feit dat klanten voor het ene callcenter langer willen wachten dan voor een ander callcenter. Deze twee nadelen hebben geleid tot het zoeken naar een nieuw systeem. Het nieuwe systeem waar hier naar wordt gekeken, zoekt het aantal werknemers dat nodig is om ervoor te zorgen dat minder dan één procent van de klanten ongeduldig wegloopt. Hierdoor weet je precies wat het gevolg is van het systeem en je houdt rekening met het verschil tussen callcenters. Er zal in deze scriptie worden uitgelegd hoeveel werknemers een callcenter-manager minimaal in dienst moet nemen om ervoor te zorgen dat minder dan één procent van de klanten ongeduldig wegloopt. Hierbij wordt eerst gekeken naar het stationaire geval. Vervolgens worden de resultaten van het stationaire geval gebruikt in simulaties om te testen of ze op korte termijn ook bruikbaar zijn.

## 2 Stationaire model

Zoals in de inleiding vermeld is, komen de klanten aan volgens een Poisson proces met parameter $\lambda$, zijn er $s$ agenten en zijn de gespreksduur en het ongeduld exponentieel verdeeld met parameters $\mu$ en $\gamma$. Deze gegevens geven de volgende generator matrix Q:

$$\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\mu & -\mu-\lambda & \lambda & \ddots & & & & & & \vdots \\
0 & 2\mu & -2\mu-\lambda & \lambda & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & s\mu & -s\mu-\lambda & \lambda & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & s\mu+\gamma & -s\mu-\gamma-\lambda & \lambda & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & s\mu+2\gamma & -s\mu-2\gamma-\lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0
\end{pmatrix}$$

Voor dit systeem kun je de vergelijkingen opstellen voor de stationaire kansen, de kansen om het systeem in een bepaalde toestand te vinden als het systeem al oneindig lang loopt. De stationaire kansen zijn op een soortgelijke wijze uit te rekenen als de kansen voor een callcenter zonder ongeduldige klanten. In het systeem zonder ongeduldige klanten gebruik je het M/M/s model om de kansen uit te rekenen. Het binnenkomen en verwerken van de klanten is een geboorte-sterfteproces, waardoor de kansen op elke toestand kunnen worden uitgedrukt in de kans om een leeg systeem aan te treffen. In het systeem met ongeduldige klanten is het nog steeds mogelijk om alle kansen uit te drukken in de kans om een leeg systeem aan te treffen. De kansen lijken erg op het systeem zonder ongeduldige klanten, alleen kunnen de klanten ook het systeem verlaten door op te hangen wanneer ze ongeduldig worden. We krijgen dan

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left\{ \left(\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu+(i-s)\gamma}\right)^{-1} \right\} \\
P_n &= \left\{ \begin{array}{ll} P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} & \text{voor } n \leq s \\ P_0 \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu+(i-s)\gamma} & \text{voor } n > s \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

**Lemma 1.** *Als $\gamma > 0$, $\mu > 0$, $s \geq 0$ en $\lambda \neq \infty$ dan geldt $P_0 > 0$*

*Bewijs.* Merk op dat de volgende ongelijkheden gelden:

$$\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} > 0 \text{ voor alle } s \geq 0$$

$$\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} > 0 \text{ voor alle } s \geq 0$$

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu+(i-s)\gamma} > 0 \text{ voor alle } s \geq 0.$$

De kans op 0 klanten kan natuurlijk nooit negatief zijn, maar wat bewezen moet worden is dat die kans niet 0 kan zijn. Het enige wat daarvoor aangetoond moet worden is, dat geen van de bovenstaande termen oneindig is, waardoor $P_0$ gelijk wordt aan 0. Het is duidelijk dat alleen de oneindige som oneindig kan zijn, de rest is gewoon een constante.

Duidelijk is, $\exists i$ zodanig dat $\forall k > i$ geldt: $\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1 < k\gamma$. Dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\sum_{n=s+1}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma} &\leq \sum_{n=s+1}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{(i-s)\gamma} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} \\
&= \sum_{n=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} + \sum_{n=\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} \\
&< \sum_{n=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} + \sum_{n=\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1}^{\infty} (\prod_{i=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \frac{\lambda}{i\gamma})(\prod_{i=\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1}^{n} \frac{\lambda}{(\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1)\gamma}) \\
&= \sum_{n=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} + (\prod_{i=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \frac{\lambda}{i\gamma}) \sum_{n=\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1}^{\infty} (\prod_{i=\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1}^{n} \frac{\lambda}{(\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1)\gamma}) \\
&= \sum_{n=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{i\gamma} + (\prod_{i=1}^{\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil} \frac{\lambda}{i\gamma})(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{(\lceil \frac{\gamma}{\lambda} \rceil + 1)\gamma}}) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Alle termen zijn positief en eindig. Hieruit volgt dus direct dat de kans op $P_0$ groter is dan 0 als $\gamma > 0$.

□

Uit dit lemma volgt dus dat het systeem altijd stabiel is ongeacht hoeveel werknemers je in dienst neemt. Als de klanten ongeduldig zijn, dan is de kans op volledige leegloop altijd positief. Zelfs geldt, binnen eindige tijd loopt het systeem altijd leeg. Dit betekent dat de gemiddelde verblijftijd in het systeem eindig is. De gemiddelde verblijftijd en de toestroom aan klanten is eindig, dus de formule van Little geldt.

**Lemma 2.** *$P_0$ is stijgend als functie van $\gamma$.*

*Bewijs.* Het is intuïtief duidelijk dat het systeem sneller leegraakt als klanten eerder ongeduldig weglopen. Dit zal nu formeel worden aangetoond.
Stel: $\gamma > \gamma' \geq 0$

$$\begin{aligned}
\alpha(n) = \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma} &< \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma'} = \alpha'(n) \\
\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha(n) &< \sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha'(n) \\
\Big(\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha(n)\Big)^{-1} &> \Big(\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha'(n)\Big)^{-1} \\
P_0 &> P_0'.
\end{aligned}$$

□

Door Lemma 2 kun je altijd de kans op een leeg systeem naar onder begrenzen door de stationaire kans een leeg systeem als er geen ongeduld is.

## 2.1 Benadering stationaire kansen

De stationaire kans op 0 klanten is niet eenvoudig exact uit te rekenen. Hieronder wordt een methode gegeven om de stationaire kans te benaderen, waardoor je met de computer een nauwkeurige benadering van de kans kunt geven. Laat $P_0$ de kans op een leeg systeem zijn en $P_0'$ de benadering van $P_0$. Voor de benadering worden minder termen uitgerekend en er zal worden aangetoond dat de resterende termen verwaarloosbaar klein zijn.

**Lemma 3.** *Als* $\lambda \leq 1000$*,* $\gamma \geq 1$*,* $s \leq 1000$ *en* $s\mu \geq \lambda$ *dan* $|P_0 - P_0'| \leq 10^{-9000}$

*Bewijs.*

$$P_0 = \Big(\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma}\Big)^{-1}$$

$$= \Big(\sum_{n=0}^{s} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{10000+s+1} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=s+2+10000}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma}\Big)^{-1}$$

Als de derde term erg klein is ten op zichte van de eerste twee termen dan zal het mogelijk zijn de derde term te verwaarlozen ten opzichte van de eerste termen. Bekijk de derde term:

$$\begin{aligned}
\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=10000+s+2}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + (i-s)\gamma} &\leq \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{n=10000+s+2}^{\infty} \prod_{i=s+1}^{n} \frac{\lambda}{s\mu + 10000} \\
&= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{s\mu + 10000})^{10000+2+k} \\
&< \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \sum_{k=1}^{\infty} (1/11)^{10000+2+k} \\
&= \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} \frac{1}{1-(\frac{1}{11})^{10000+2}} - 1 \\
&< \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^s}{s!} 10^{-10000} \\
&< (\frac{\lambda}{\mu})^s 10^{-10000} \\
&\leq 1000^s 10^{-10000} \\
&< 1000^{1000} 10^{-10000} \\
&= 10^{-9000}
\end{aligned}$$

De derde term is dus kleiner dan $10^{-9000}$ en de eerste term bevat een term die gelijk is aan één, dus de derde term valt te verwaarlozen. Door het verwaarlozen van de derde term geldt: $P_0' > P_0$. $P_0$ en $P_0'$ zijn kansen en is dus zeker niet groter dan één. We krijgen

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{P_0' - P_0}{P_0 P_0'}\Big| < 10^{-9000} &\Leftrightarrow |P_0 - P_0'| < 10^{-9000} P_0 P_0' \\
&\Rightarrow |P_0 - P_0'| < 10^{-9000}
\end{aligned}$$

□

De stationaire kans op een leeg systeem kan dus heel erg nauwkeurig benaderd worden door de eerste tienduizend termen uit te rekenen. Dit is hetzelfde als de wachtruimte beperken tot tienduizend in plaats van een oneindig grote wachtruimte. Als $\lambda$ groter wordt dan duizend kan de som nog steeds op analoge manier nauwkeurig worden benaderd, maar dan moeten er mogelijk meer termen worden uitgerekend om dezelfde benadering te kunnen maken.

## 2.2 Kans op wegloop

Als een klant aankomt en hij komt niet in een wachtrij dan is de kans dat deze klant wegloopt gelijk aan nul. Als de klant aankomt en hij is de eerste klant in de wachtrij dan loopt hij alleen weg als zijn ongeduld groter is dan de tijd die het duurt tot er een klant is afgehandeld. De individuele gespreksduur is exponentieel verdeeld met parameter $\mu$ en er zijn $s$ werknemers. De tijdsduur tot het eerste gesprek van de $s$ werknemers is afgehandeld, is weer exponentieel verdeeld met parameter $s\mu$. Als er $n$ klanten in de wachtrij staan dan is de minimale tijd tot er iemand ongeduldig wegloopt exponentieel verdeeld met parameter $n\gamma$. Laat nu

$f(x) = (n\gamma)e^{-x(n\gamma)}$, de kansdichtheid op de tijdsduur tot de eerste van n klanten ongeduldig wegloopt;
$g(y) = (s\mu)e^{-y(s\mu)}$, de kansdichtheid tot beëindiging van het eerste gesprek.

Dan geldt

$$\begin{aligned} p(X < Y) &= \int_0^\infty (s\mu)e^{-y(s\mu)} \int_0^y (n\gamma)e^{-x(n\gamma)} dxdy \\ &= \int_0^\infty (s\mu)e^{-y(s\mu)}(1 - e^{-y(n\gamma)} dy \\ &= \Big[ - e^{-y(s\mu)} + \frac{s\mu}{s\mu + n\gamma} e^{-y(n\gamma + s\mu)} \Big]_0^\infty \\ &= 1 - \frac{s\mu}{s\mu + n\gamma} \\ &= \frac{n\gamma}{s\mu + n\gamma}. \end{aligned}$$

De kans dat er eerder iemand ongeduldig wegloopt voordat een gesprek klaar is, is dus $\frac{n\gamma}{s\mu+n\gamma}$. We gaan nu kijken vanuit het perspectief van een specifieke klant in de rij. Klanten die achter onze gegeven klant staan zijn hiervoor niet relevant en je bekijkt nu alsof de deur achter onze klant dicht is. Stel dat een klant aankomt en hij is de $n^{de}$ in de wachtrij, dan is de kans dat er één van de $n$ klanten in de rij wegloopt totdat een gesprek klaar is $\frac{n\gamma}{s\mu+n\gamma}$. Elke klant heeft evenveel kans de eerste wegloper te zijn. De kans dat hij ditzelf is, is gelijk aan $\frac{1}{n}\frac{n\gamma}{s\mu+n\gamma}$. Er moet op een moment een klant het systeem verlaten en de kans dat hij dit is, is dus $\frac{\gamma}{s\mu+n\gamma}$. Er zijn twee scenario's mogelijk of hij blijft in het systeem of hij loopt weg. Als je de kans op weglopen weet kun je dus uitrekenen wat de kans op blijven is. De kans dat hij nog in het systeem is wanneer de eerste persoon is weggegaan is gelijk aan $\frac{s\mu+(n-1)\gamma}{s\mu+n\gamma}$. De exponentiele verdeling is geheugenloos, dus je kunt nu naar een rij met $n-1$ klanten. De kans dat onze klant nu in het systeem blijft tot dat een persoon weggaat is $\frac{s\mu+(n-2)\gamma}{s\mu+(n-1)\gamma}$. Door te blijven herhalen kun je uitrekenen hoe groot de kans is dat iemand blijft als hij de $n^{de}$ in de rij is.

$$\begin{aligned} p(\text{klant blijft}) = \frac{s\mu + (n-1)\gamma}{s\mu + n\gamma}\frac{s\mu + (n-2)\gamma}{s\mu + (n-1)\gamma} \cdots \frac{s\mu}{s\mu + \gamma} = \frac{s\mu}{s\mu + n\gamma} &= 1 - p(\text{klant loopt weg}) \Leftrightarrow \\ p(\text{klant loopt weg}) &= \frac{n\gamma}{s\mu + n\gamma} \end{aligned}$$

Het is nu mogelijk uit te rekenen hoe groot de kans dat iemand wegloopt als hij de $n^{de}$ in de rij is, ook is het mogelijk de stationaire kans op 0 klanten in het systeem precies te benaderen en met hulp hiervan elke willekeurige stationaire kans precies te benaderen. Uit de PASTA eigenschap volgt dat de kans dat een klant de $n^{de}$ in de wachtrij is gelijk is aan de stationaire kans dat er $s+n-1$ klanten in het systeem waren op het moment van aankomst. Met de stationaire kansen en de kans dat een klant ongeduldig wegloopt kan het percentage dat wegloopt worden uitgerekend.

**Lemma 4.** $\gamma W_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\gamma}{s\mu+n\gamma} P_{n+s-1}$

Dit lemma zegt dat de gemiddelde wachttijd maal de wegloopsnelheid tijd gelijk is aan het percentage van de klanten dat ongeduldig wegloopt

*Bewijs.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\gamma}{s\mu+n\gamma} P_{n+s-1} &= \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(n-s)\gamma}{s\mu+(n-s)\gamma} P_{n-1} \\
&= \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(n-s)\gamma}{s\mu+(n-s)\gamma} \frac{s\mu+(n-s)\gamma}{\lambda} P_n \\
&= \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(n-s)\gamma}{\lambda} P_n \\
&= \gamma \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(n-s)}{\lambda} P_n \\
&= \gamma W_q
\end{aligned}$$

□

## 2.3 Algoritme

Met het volgende algoritme kan een benadering van de stationaire kansen worden berekend en het percentage van de klanten dat ongeduldig wegloopt. Hierbij worden het ongeduld van de klanten, het aantal werknemers, het aantal aankomsten per uur en de gemiddelde gespreksduur allemaal constant genomen. Om uit te rekenen hoeveel werknemers er nodig zijn om ervoor te zorgen dat minder dan één procent van de klanten ongeduldig wegloopt, kan de hoeveelheid werknemers aangepast worden.

**Stap 1**

- Bereken met behulp van de benadering de stationaire kans op 0 klanten in het systeem.

**Stap 2**

- Bereken de benadering van de eerste $s + 10000$ stationaire kansen.

**Stap 3**

- Bereken de kans dat een persoon blijft als er $n$ klanten in de rij staan ($n < 1000$).

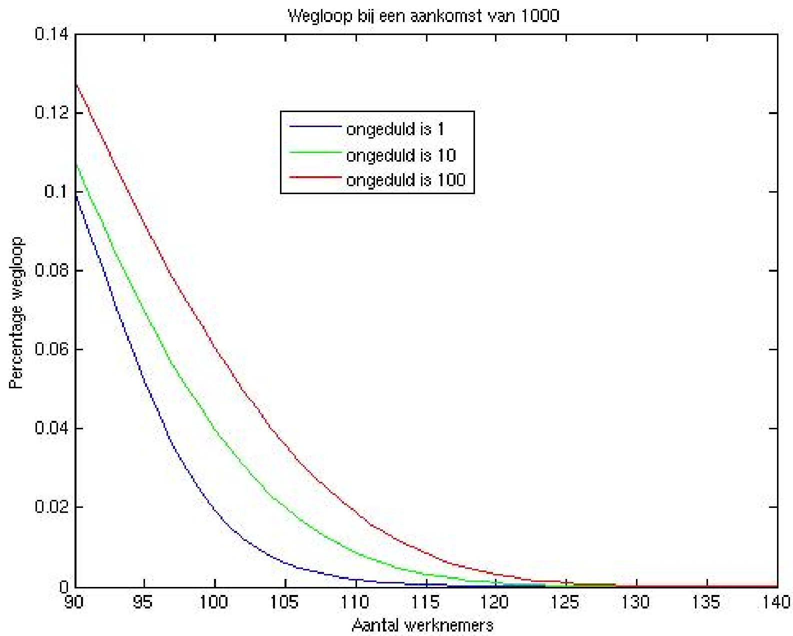
**Stap 4**

- Bereken voor alle stationaire kansen het percentage dat wegloopt.

**Stap 5**

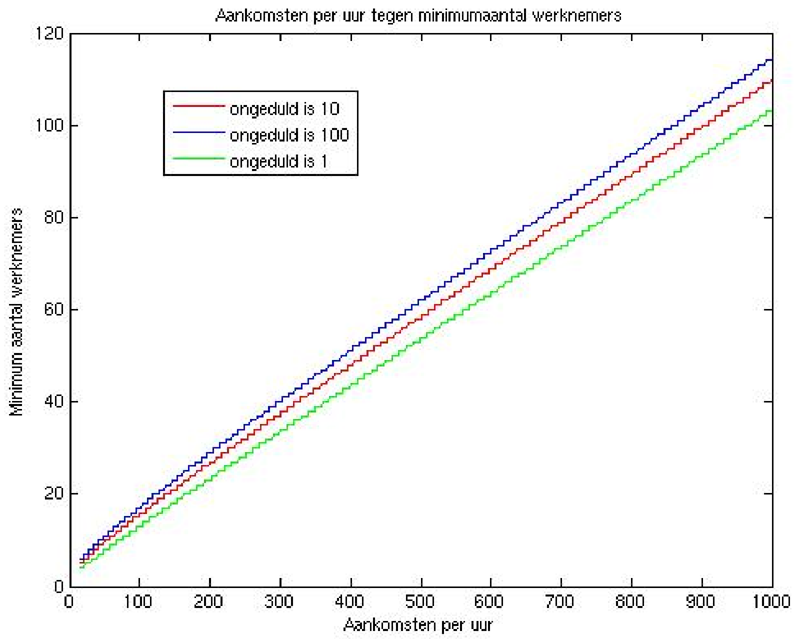
- Bereken het totale percentage dat wegloopt.

## 2.4 Resultaten stationair model



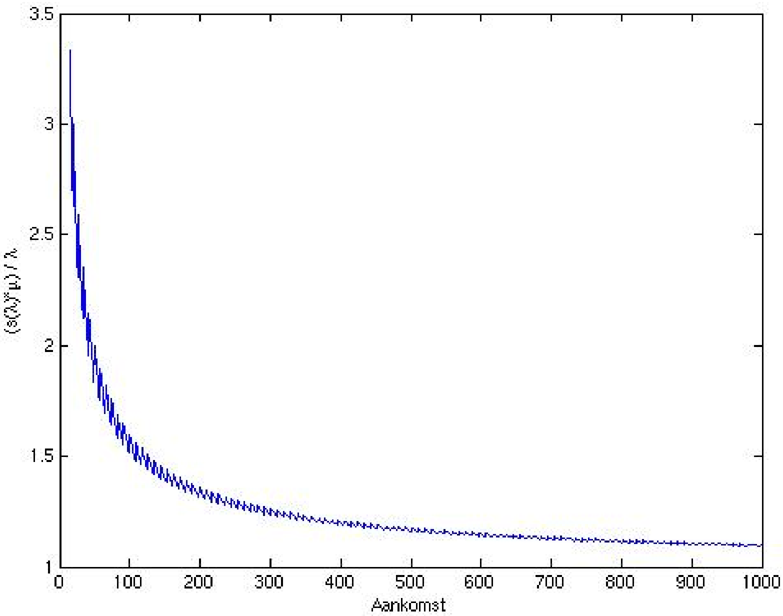

Figuur 1: De wegloop van klanten voor verschillende hoeveelheden werknemers. Hier geldt dat $\mu = 10$

De grafiek komt overeen met de verwachting. Als de hoeveelheid werknemers toeneemt, dan neemt het percentage klanten dat ongeduldig wegloopt af. Verder valt er te zien dat er meer klanten weglopen als ze ongeduldiger zijn. Het percentage klanten dat ongeduldig wegloopt neemt aan het begin sterk af en vlakt daarna af. Als er genoeg werknemers in dienst zijn dan gaat het percentage naar nul.



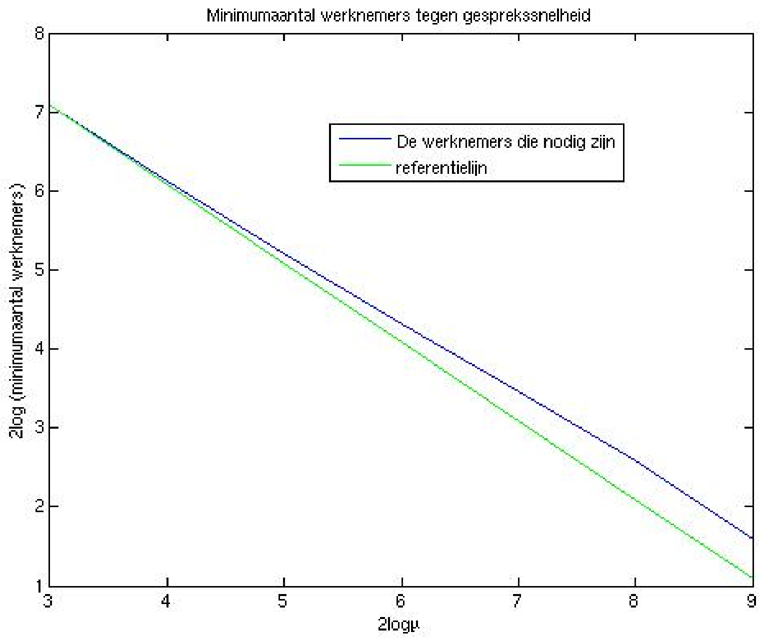

Figuur 2: De hoeveelheid werknemers die nodig zijn voor verschillende aankomsten. Hier geldt dat $\mu = 10$

De grafiek laat onder andere zien dat er meer werknemers nodig zijn als klanten ongeduldiger zijn. Dit komt overeen met wat hiervoor geconstateerd is. De grafiek laat duidelijk een trapstructuur zien. Deze structuur valt eenvoudig te verklaren door het feit dat er lang niet altijd meer werknemers in dienst hoeven te komen als er een persoon extra per uur komt, want werknemers kunnen er meerdere per uur aan. Het lijkt alsof de grafiek een constante hellling heeft. Dit zou betekenen dat dat er vrijwel geen sprake is van schaalvoordeel.



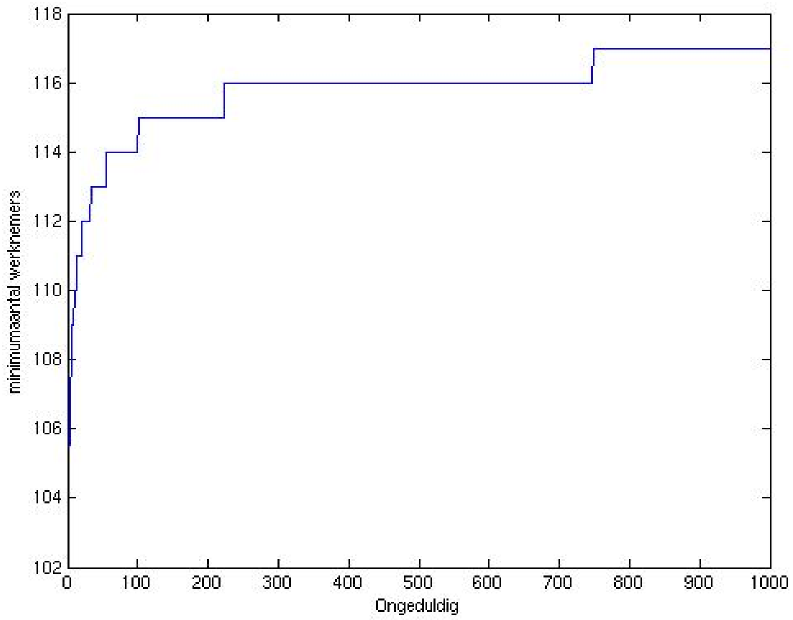

Figuur 3: Het percentage extra werkkracht dat nodig is. Hier geldt dat $\mu = 10$, $\gamma = 10$ en s is het optimaal aantal werknemers voor een gegeven $\lambda$.

Deze grafiek laat zien hoeveel extra werkkracht er nodig is voor verschillende aankomsten. Met werkkracht wordt bedoeld het verwachte aantal klanten dat per uur verwerkt kan worden. Voor een bedrijf waar een honderd klanten per uur naartoe bellen moet er ongeveer anderhalf maal zoveel verwerkt kunnen worden dan dat er klanten binnen komen, in dit geval dus honderdvijftig. Terwijl voor een bedrijf waar duizend klanten per uur naartoe bellen er slechts $1,1$ keer zoveel werkkracht nodig is. Dit betekent dat er sprake is van schaalvoordeel, want je hebt relatief minder werknemers nodig voor een groter callcenter. Aan de grafiek valt ook te zien dat het schaalvoordeel afneemt. Er is vrijwel geen verschil tussen de relatieve werkkracht die nodig is voor een callcenter waar er negenhonderd komen of waar er duizend komen. Voor bedrijven kan er dus flink voordeel behaald worden door bijvoorbeeld het fuseren van twee kleine callcenters.
Een onderzoeksvraag voor een vervolgonderzoek kan zijn wat de limiet is van $\frac{s(\lambda)\mu}{\lambda}$ als $\lambda$ naar oneindig gaat.




Figuur 4: Het aantal werknemers dat nodig als de gesprekssnelheid verdubbelt. Hier geldt dat $\lambda = 1000$, $\gamma = 10$.

Deze grafiek laat zien dat er niet half zoveel werknemers nodig zijn als werknemers gesprekken gemiddeld tweemaal zo snel afronden. Als dit wel het geval zou zijn dan zou de blauwe lijn over de groene lijn heen moeten liggen. Dit verschil wordt veroorzaakt doordat wordt aangenomen dat klanten niet weglopen wanneer ze geholpen worden. In het geval dat er meer werknemers in dienst zijn die minder snel gesprekken afronden zijn er wel een hoop klanten, die geholpen worden, terwijl in het andere geval klanten wel snel worden geholpen maar er toch veel klanten in de wachtrij staan en die kunnen allemaal weglopen. Vanuit het perspectief van de wegloop is het dus voordeliger om twee werknemers in dienst nemen die half zo snel gesprekken afronden dan een werknemer die twee keer zo snel gesprekken afhandeldt.



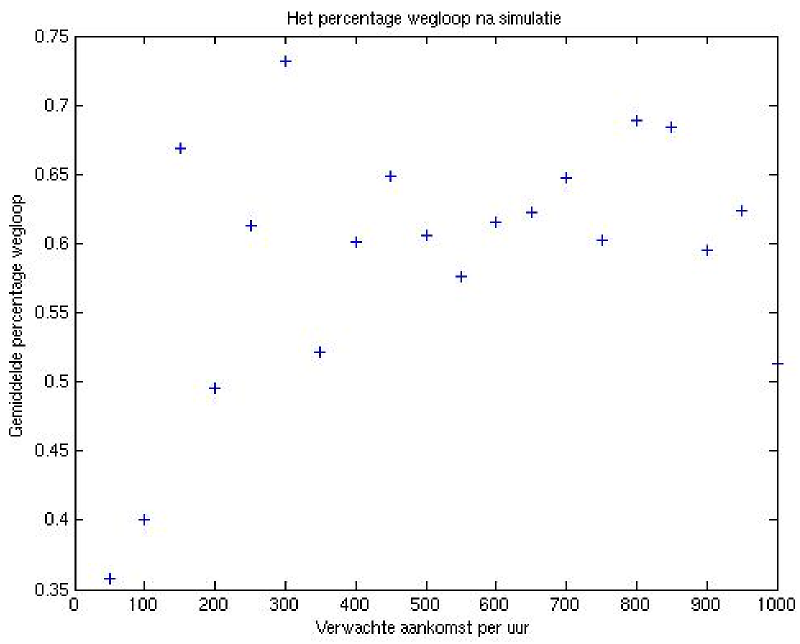

Figuur 5: Toename van het aantal werknemers die nodig zijn bij stijgende ongeduld. Hier geldt dat $\lambda = 1000$, $\mu = 10$

In deze grafiek valt te zien hoeveel meer werknemers er dienst moeten worden genomen als het ongeduld toeneemt. Aan het begin is de helling heel groot. Dit is heel logisch, want het maakt een groot verschil of klanten bereid zijn om vijf minuten of tien minuten te wachten, want de wachttijd is in diezelfde orde van grote. De helling neemt vervolgens af, omdat het niet meer uitmaakt of klanten bereid zijn vijf of tien seconden te wachten, omdat deze klanten toch weglopen. De kans dat deze mensen binnen die tijd worden geholpen is namelijk niet heel groot. Het aantal werknemers convergeert naar een waarde, omdat de ongeduld op een moment zo groot is dat iedereen die niet geholpen wordt wegloopt. Je kunt dit aantal exact uitrekenen door aan te nemen dat er geen wachtrij is en alle stationaire kansen uit te rekenen. In de praktijk is dit natuurlijk geen interessante waarde. Het is wel een bovengrens voor het aantal werknemers. De stijle helling aan het begin maakt het voor een callcenter noodzakelijk dat er een goede inschatting is van het ongeduld van de klanten.

# 3 Simulatie

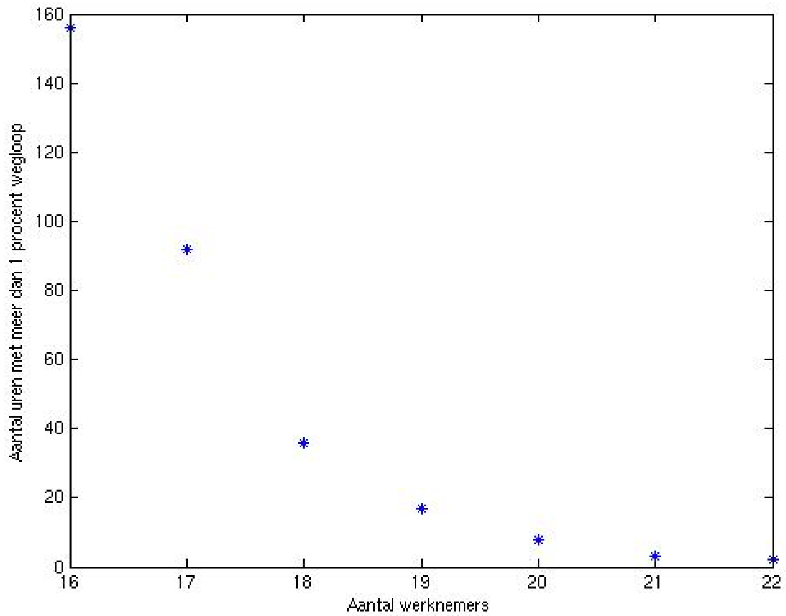
Voor het stationaire model zijn nu zeer nauwkeurige benaderingen voor het benodigde aantal werknemers. In het artikel van Roubos, Koole en Stolletz[1] komt naar voren dat uitkomsten uit een stationair model niet altijd een even goede schatting zijn voor de werkelijkheid. In het komende stuk zal worden onderzocht of het aantal werknemers dat uit het stationaire model komt een goede schatting is voor het aantal werknemers dat in werkelijkheid nodig is.
Voor alle simulaties is steeds het aantal werknemers gebruikt dat overeenkomt met $\gamma = 10$ en $\mu = 10$. Dat betekent dat de verwachte tijd die een klant bereid is om te wachten gelijk is aan zes minuten en de gemiddelde gespreksduur is gelijk genomen aan vijf minuten. Om te analyseren of het goede schattingen zijn, is voor meerdere scenario's duizend maal een uur gesimuleerd. Dat betekent dat elk punt op elke grafiek overeenkomt met een gemiddelde van duizend uur. Voor deze simulaties zijn tijdstappen van een seconde genomen. Dit heeft als gevolg dat de tijd die een klant staat te wachten in werkelijkheid gemiddeld een halve seconde langer is dan in de simulatie. De gemiddelde tijd die een klant bereid is om te wachten is zes minuten dus dit verschil valt te verwaarlozen. Voor de simulatie wordt in eerste instantie aangenomen dat het systeem leeg is aan het begin van het uur. Later wordt gekeken naar niet lege callcenters.

| |
|---|
| $\gamma = 10$ |
| $\mu = 10$ |
| Elk punt is het gemiddelde van duizend simulaties van een uur |

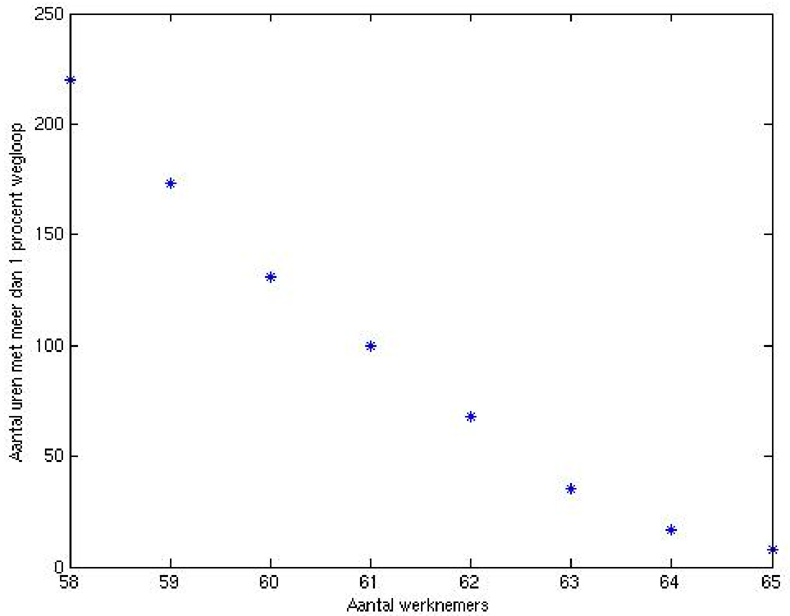



Figuur 6: simulatie

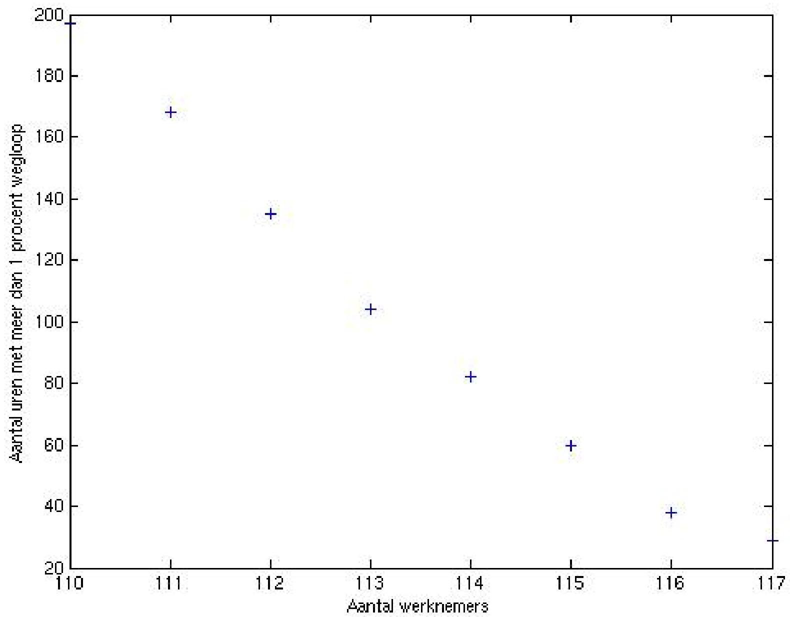
Uit de simulaties volgt dat gemiddeld gezien er minder dan één procent wegloopt. Stel je neemt het aantal werknemers in dienst dat bepaald is door het stationaire model. Dan loopt er minder dan één procent van de klanten ongeduldig weg als je kijkt over een periode duizend uur. Als je alleen aan de eis wilt voldoen dat er gemiddeld minder dan één procent ongeduldig wegloopt dan gaat dit systeem goed. Dit is wel een gemiddelde over duizend uur. Dit betekent voor een call centrum dat er over een relatief lange periode minder dan één procent wegloopt. Bij het bekijken van de data valt te zien dat er uren zijn dat er meer dan één procent ongeduldig wegloopt. De volgende plaatjes zullen laten zien voor drie verschillende callcenters laten zien hoeveel uur er meer dan één procent van de klanten ongeduldig wegloopt en hoe dat afneemt als er meer werknemers in dienst worden genomen. De startwaarde is telkens het optimale aantal werknemers dat bepaald is door het stationaire model.




Figuur 7: Het aantal uur waar er meer dan één procent wegloopt voor een callcenter waar de verwachte aankomst honderd klanten per uur is.



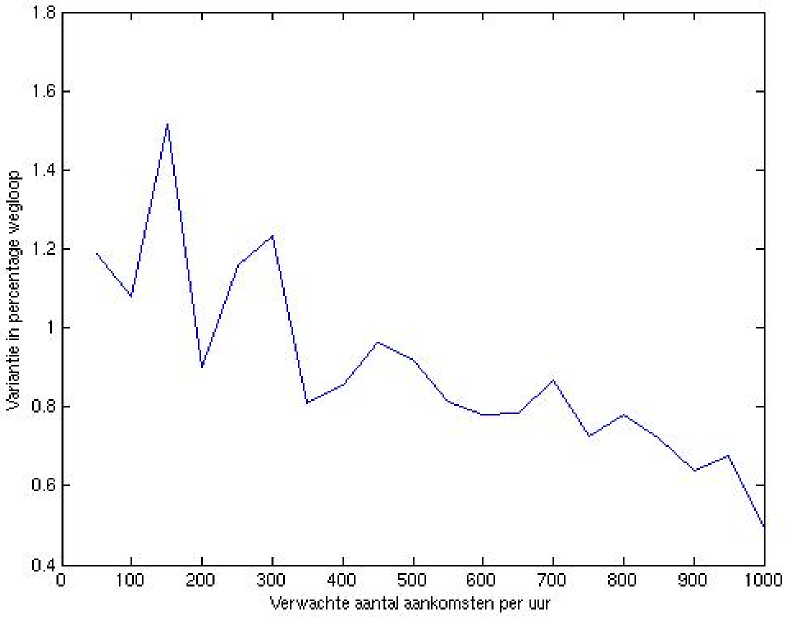

Figuur 8: Het aantal uur waar er meer dan één procent wegloopt voor een callcenter waar de verwachte aankomst vijfhonderd klanten per uur is.




Figuur 9: Het aantal uur waar er meer dan één procent wegloopt voor een callcenter waar de verwachte aankomst duizend klanten per uur is.

Er valt te zien dat de hoeveelheid uur dat er meer dan één procent wegloopt sterk daalt als het aantal werknemers stijgt. Tegelijk valt te zien dat de daling erg afvlakt. Dit betekent dat er heel veel extra werknemers in dienst moeten worden genomen om het aantal uur naar nul te krijgen. Er zijn namelijk altijd uren dat er ineens meer mensen dan verwacht komen en dat gesprekken langer duren. Een manager van een callcenter moet bepalen hoeveel procent van de uren een wegloop van meer dan één procent acceptabel is. Voor een klein callcenter zijn er relatief meer extra mensen nodig om het aantal uur dat er over de één procent wordt gegaan te reduceren. Stel dat een callcenter manager het aantal uren tot onder de honderd wilt reducren dan is voor het kleine call center één extra werknemer nodig terwijl voor een tienmaal zo groot callcenter er maar vier extra werknemers nodig zijn. Ook hier valt weer te zien dat er sprake is van schaalvoordeel bij grote callcenters. Een groot callcenter is veel beter in staat om pieken op te vangen dan een klein callcenter.

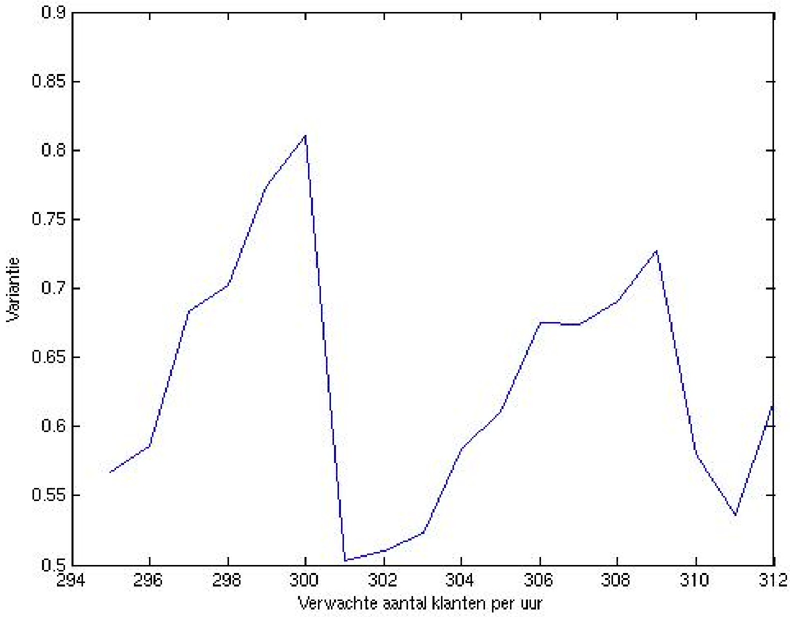
Het scannen van de data laat zien dat er voor kleine callcenters relatief vaak periodes zijn dat er niemand wegloopt en af en toe periodes waar een aantal procent van de klanten wegloopt terwijl dat grote callcenters vaak ongeveer één procent van de klanten wegloopt. Dit doet vermoeden dat er een verschil is in de variantie van de wegloop tussen de grote call centra en de kleine. De verwachting is dat dit bij een klein call center de variantie hoger ligt dan bij een groot callcenter.




Figuur 10: variantie

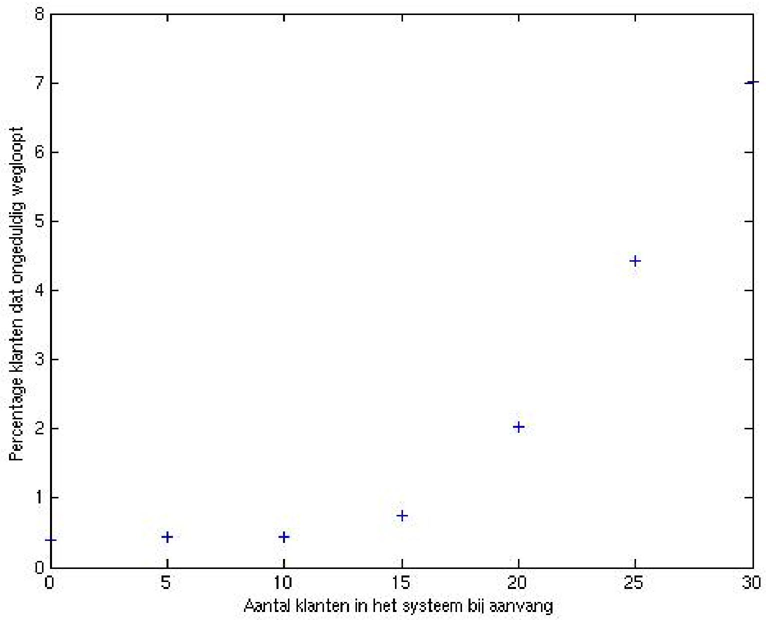
Voor deze simulatie zijn stappen van vijftig genomen en de lijn is er doorheen getrokken om het plaatje iets duidelijker te maken. Een aantal dingen valt op aan het plaatje: er lijkt een dalende lijn in het plaatje te zitten, en er zijn ook een groot aantal pieken. De dalende lijn komt overeen met wat van te voren verwacht werd maar waar de pieken vandaan komen is niet meteen duidelijk. Nader onderzoek naar de pieken wijst uit dat de pieken zich op plaatsen bevinden waar het benodigde aantal werknemers nog net niet wordt opgehoogd. Zo zijn er bij aankomstsnleheid van 300 klanten per uur 37 werknemers in dienst en bij een aankomst van driehonderdeen zijn er 38 werknemers in dienst.

Om dit idee na te gaan is ingezoomd op de piek die correspondeert met de verwachte aankomst van driehonderd klanten per uur. Je verwacht dat de variantie stijgt tot de grens van de overgang tussen het aantal werknemers en dan in een klap flink daalt en dan weer stijgt tot de volgende grens.



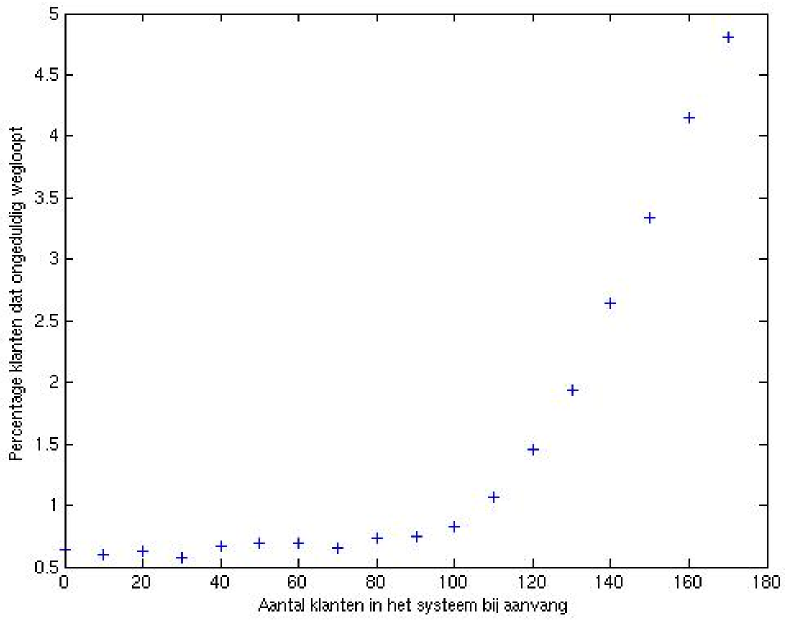

Figuur 11: De variantie rondom de piek bij een verwachte aankomst van 300 klanten per uur

Het plaatje laat precies zien wat er van te voren werd verwacht. De variantie stijgt tot de overgang van het aantal werknemers en neemt dan in één klap flink af. Als nog eens naar het vorige plaatje wordt gekeken dan is ook goed te zien dat de pieken kleiner worden. Dit komt doordat het effect van een extra werknemer relatief kleiner is voor de grotere callcenters. De variantie daalt dus maar bevat wel pieken door de spontane overgang van het aantal werknemers tussen de verschillende aankomsten.




Figuur 12: Het percentage klanten dat wegloopt als er al klanten in het systeem zijn

Dit plaatje is van een klein callcenter met een verwachte aankomst van honderd klanten per uur en zestien werknemers. Het percentage klanten dat ongeduldig wegloopt neemt, is eerst vrijwel constant en neemt hard toe als er meer klanten zijn dan werknemers om ze te woord te staan.




Figuur 13: Het percentage klanten dat wegloopt als er al klanten in het systeem zijn

Dit plaatje is van een groot callcenter met een verwachte aankomst van duizend klanten per uur en honderdtien werknemers. Het percentage klanten dat ongeduldig wegloopt neemt is hier ook vrijwel constant totdat er meer klanten zijn dan werknemers om ze te woord te staan. In beide plaatjes valt te zien dat het vrijwel niet uitmaakt als er al klanten in het systeem zijn tenzij er al een paar in de wachtrij staan. Het is dus belangrijk voor een callcenter ervoor te zorgen dat aan het begin van een uur er geen wachtrij is anders lopen er veel klanten ongeduldig weg.

# 4 Conclusie

Voor een callcenter met ongeduldige klanten kun je uitdrukkingen opschrijven voor de stationaire kansen. Je kunt deze stationaire kansen benaderen door de wachtrij te verkleinen. Als je deze kansen vermenigvuldigt met een vaste breuk, die alleen afhangt van de rijlengte, en bij elkaar optelt dan heb je het totale percentage van de mensen die ongeduldig wegloopt. Doordat dit eenvoudig is te benaderen kan het aantal werknemers worden uitgerekend waarvoor minder dan één procent van de klanten ongeduldig wegloopt.

Bij het bestuderen van de resultaten komt naar voren dat er voor grotere callcenters sprake is van schaalvoordeel ten opzichte van kleine callcenters. Je hebt in een groter callcenter relatief weinig mensen nodig. Vooral kleine callcenter kunnen veel schaalvoordeel bereiken door te fuseren.

De aantallen werknemers voor het stationaire model zijn ook bruikbaar in werkelijkheid. Als het aantal in dienst wordt genomen dat uit het stationaire model komt dan loopt er gemiddeld minder dan één procent van de klanten ongeduldig weg. Er zijn wel uren dat de wegloop significant hoger ligt dan één procent. Dit aantal kan aanzienlijk gereduceerd worden door een aantal extra werknemers maar zal nooit verdwijnen zonder zeer veel extra werknemers aan te nemen. Ook in de simulatie komt naar voren dat er sprake is van schaalvoordeel, want er is minder sprake van enorm grote uitschieters in de wegloop en de de uren met meer dan één procent wegloop dalen relatief sneller als er meer werknemers worden aangenomen.

Het advies voor een callcentermanager is dus fuseren, omdat er relatief minder werknemers nodig zijn, er zijn minder uitschieters in het percentage klanten dat wegloopt en er zijn relatief minder werknemers nodig om de uitschieters op te vangen.

# 5 Referenties


- [1]: A. Roubos, G. Koole & R. Stolletz: Service Level Variability of Unbound Call Centers, Department of Mathematics VU University Amsterdam, 2010


## Bronvermelding


- L. C. M. Kallenberg: Dictaat Besliskunde 3, Universiteit Leiden, 2008