



Universiteit
Leiden
The Netherlands

De Sluitstelling van Poncelet

Rohrbach, H.R.

Citation

Rohrbach, H. R. (2011). *De Sluitstelling van Poncelet*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596734>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

H.R. Rohrbach
hermanrohrbach@gmail.com

De Sluitstelling van Poncelet

Bachelorscriptie, 9 juni 2011

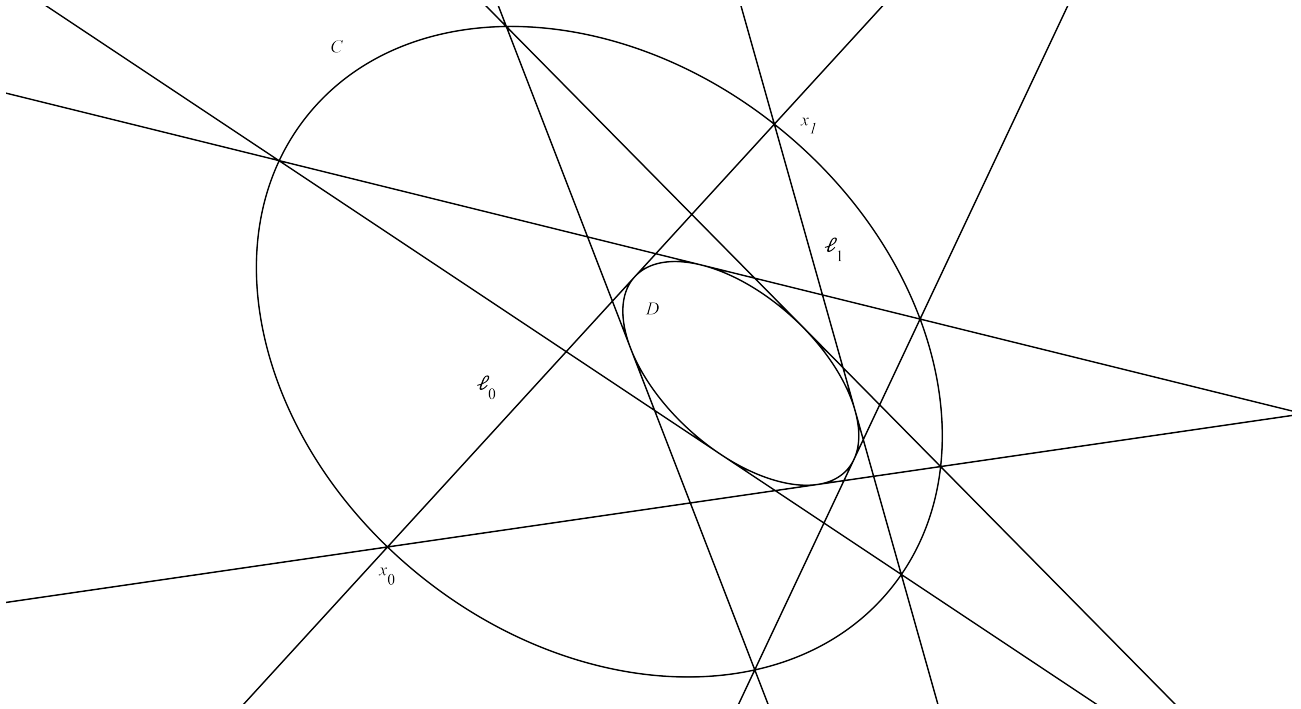
Scriptiebegeleider: dr. R. S. de Jong



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Jean-Victor Poncelet	4
3	Kegelsneden	5
4	Vorbereidend Werk	9
5	De Sluitstelling van Poncelet	13
6	Referenties	19



Figuur 1: een Poncelet constructie met $x_0 = x_8$

1 Inleiding

Deze scriptie gaat over de sluitstelling van Jean-Victor Poncelet. De stelling luidt als volgt:

Zijn C en D gladde kegelsneden in het complexe projectieve vlak met vier verschillende snijpunten. Informeel gesteld is een kegelsnede de doorsnede van een driedimensionale kegel met een vlak. Zij $x_0 \in C$. Zij D^* de verzameling raaklijnen aan D . Laat $E \subset C \times D^*$ de paren $(x, \ell) \in C \times D^*$ zijn met $x \in \ell$. Laat $\sigma : E \rightarrow E$ en $\tau : E \rightarrow E$ afbeeldingen zijn, gegeven door $\sigma(x, \ell) = (x', \ell)$ en $\tau(x, \ell) = (x, \ell')$, waarbij x' het andere snijpunt van ℓ met C is en ℓ' de andere raaklijn aan D door x . Zij $(x, \ell) \in E$. Als $x \in C \cap D$, dan geldt $\tau(x, \ell) = (x, \ell)$. Als ℓ aan C raakt, dan geldt $\sigma(x, \ell) = (x, \ell)$. Laat $\rho = \tau \circ \sigma$. Zij $(x_0, \ell_0) \in E$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$

$$\rho^n(x_0, \ell_0) = (x_0, \ell_0) \Leftrightarrow \forall (x, \ell) \in E : \rho^n(x, \ell) = (x, \ell).$$

We zullen niet alleen de stelling van Poncelet bewijzen, maar ook onderzoeken voor welke kegelsneden C en D deze constructie na $n \geq 3$ stappen sluit. [1]

2 Jean-Victor Poncelet

Jean-Victor Poncelet, zoon van Claude Poncelet en Anne-marie Perrein werd op 1 juli 1788 geboren in Metz, Lotharingen, Frankrijk. Hij was van jongs af aan zeer nieuwsgierig. In 1807 begon hij zijn studie aan de École Polytechnique in Palaiseau, waar hij les kreeg van vooraanstaande wiskundigen zoals Gaspard Monge, Lazare Carnot, Charles Brianchon en Sylvestre Lacroix. Hij studeerde in 1810 op 22-jarige leeftijd af en besloot tot een militaire carrière. Aan de École d'Application in Metz werd hij opgeleid tot ingenieur; in 1812 had hij de rang van luitenant bereikt en in juni van dat jaar werd hij weggeroepen om deel te nemen in Napoleon's veldtocht naar Rusland.

Bij de slag van Krasnoi legde Poncelet bijna het loodje, voor dood achtergelaten op het slagveld. Hij werd echter gevonden door de Russen en gevangen genomen. Van maart 1813 tot juni 1814 zat hij in de gevangenis van Saratov, waar hij een reeks aantekeningen maakte die later zeer belangrijk zouden zijn voor de ontwikkeling van de projectieve meetkunde en projectieve kegelsneden in het bijzonder. De Amerikaanse wiskundige Julian Coolidge schreef over deze aantekeningen [2]:

The fundamental problem which Poncelet sets himself is to study the graphical properties of figures which he defines as those which do not involve the magnitude either of distances or of angles. The distance of two points is not projectively invariant, but in looking for projectively invariant configurations he finds the harmonic one, and this he develops at length. ... In his second chapter Poncelet attacks the problem of imaginary points in pure geometry with a courage and thoroughness ahead of anything shown by his predecessors. ... he makes quite casually the historic statement that two coplanar circles should not be looked upon as completely independent figures, but as having two imaginary infinite points in common. Here we have the first announcement of one of the basic principles of metrical geometry. Later Poncelet allows, without careful definition, imaginary projections.

Vanaf 1815 gaf Jean-Victor les in Metz en in 1822 publiceerde hij het boek *Traité des propriétés projectives des figures* over eigenschappen die invariant blijven onder projecties. De naam *projectieve meetkunde* komt van de titel van dit boek, wat toepasselijk is aangezien Poncelet wordt gezien als een van de grondleggers van moderne projectieve meetkunde. In die tijd was men echter nog niet overtuigd van de juistheid van zijn methoden: zijn werk werd aangevallen door onder anderen Cauchy.

Hij bleef veel werk doen als ingenieur; zo ontwierp hij een efficiënt nieuw waterrad waarvoor hij een prijs ontving van de Franse regering en schreef hij enkele belangrijke artikelen op het gebied van de mechanica. Hij verwierf in zijn tijd dus vooral faam door zijn werk als ingenieur voor het leger, zoveel zelfs dat hij in april 1848 hoofd werd van de École Polytechnique en dat bleef tot 1850. Hij heeft nog veel andere posten bekleed, heroïsche dingen gedaan en boeken gepubliceerd, die in een uitgebreidere biografie gevonden kunnen worden. [3]

Poncelet stierf in Parijs in december 1867.

3 Kegelsneden

Enige voorkennis van projectieve meetkunde en lineaire algebra is nodig om deze sectie te begrijpen. Zij V een vectorruimte over een lichaam K , met $\text{char}(K) \neq 2$.

3.1 Definitie. Een bilineaire vorm op V is een afbeelding $\alpha : V \times V \rightarrow K$ waarvoor geldt

- $\forall v, v', w \in V : \alpha(v + v', w) = \alpha(v, w) + \alpha(v', w)$
- $\forall v, w, w' \in V : \alpha(v, w + w') = \alpha(v, w) + \alpha(v, w')$
- $\forall v, w \in V, \lambda \in K : \alpha(\lambda v, w) = \alpha(v, \lambda w) = \lambda \alpha(v, w)$

We noemen een bilineaire vorm α symmetrisch als voor alle $v, w \in V$ geldt dat $\alpha(v, w) = \alpha(w, v)$.

De verzameling der bilineaire vormen op V noteren we als $\mathbb{B}(V)$, de verzameling der symmetrische bilineaire vormen als $\mathbb{B}_s(V)$. Zij $\alpha \in \mathbb{B}(V)$. Als V eindige dimensie n heeft, dan kunnen we een basis $\mathcal{B} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ kiezen en is α bepaald door zijn beeld op alle paren basisvectoren. Er hoort dus een matrix A bij α met

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(b_0, b_0) & \alpha(b_0, b_1) & \cdots & \alpha(b_0, b_{n-1}) \\ \alpha(b_1, b_0) & \alpha(b_1, b_1) & \cdots & \alpha(b_1, b_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(b_{n-1}, b_0) & \alpha(b_{n-1}, b_1) & \cdots & \alpha(b_{n-1}, b_{n-1}) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \alpha(v, w) = v^T A w$$

voor alle $v, w \in V$, waarbij we v en w schrijven als vectoren op de basis \mathcal{B} . Dit is makkelijk na te gaan.

3.2 Definitie. Een kwadratische vorm is een afbeelding $q : V \rightarrow K$ waarvoor een bilineaire vorm α bestaat zodanig dat $q(v) = \alpha(v, v)$ voor alle $v \in V$. We noteren $\mathbb{K}(V)$ voor de verzameling der kwadratische vormen op V .

3.3 Propositie. Voor een kwadratische vorm q in V bestaat een unieke symmetrische bilineaire vorm σ_q in V zodat $q(v) = \sigma_q(v, v)$ voor alle $v \in V$.

Bewijs. Zij $q \in \mathbb{K}(V)$ met $\alpha \in \mathbb{B}(V)$ zodanig dat $\alpha(v, v) = q(v)$ voor alle $v \in V$ en definieer

$$\sigma_q(v, w) = \frac{1}{2} (\alpha(v, w) + \alpha(w, v))$$

voor alle $v, w \in V$, dan is σ_q een symmetrische bilineaire vorm met $\sigma_q(v, v) = q(v)$, waarmee de existentie bewezen is. Stel nu dat σ een symmetrische bilineaire vorm is met $\sigma(v, v) = q(v)$. Dan geldt voor alle $v, w \in V$

$$\sigma(v, w) = \frac{1}{2} (\sigma(v, w) + \sigma(w, v)) = \frac{1}{2} (q(v) + q(w) - q(v - w)) = \frac{1}{2} (\alpha(v, w) + \alpha(w, v)) = \sigma_q(v, w),$$

dus σ_q is uniek en het bewijs is af. \square

Zijn K een algebraïsch afgesloten lichaam met $\text{char}(K) \neq 2$ en V een vectorruimte van dimensie 3 over K . Laat $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ en $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$ de natuurlijke projectie zijn.

3.4 Definitie. Een kegelsnede is een deelverzameling $C \subset \mathbb{P}$ van de vorm

$$C = \pi \{v \in V \setminus \{0\} \mid q(v) = 0\},$$

waarbij q een niet-nul kwadratische vorm op V is. In plaats van $\pi \{v \in V \setminus \{0\} \mid q(v) = 0\}$ schrijven we voor het gemak ook wel $\{p \in \mathbb{P} \mid q(p) = 0\}$.

Laat vanaf nu $K = \mathbb{C}$.

3.5 Propositie. Laat $q_1, q_2 \in \mathbb{K}(V)$ met bijbehorende kegelsneden Q_1 en Q_2 , respectievelijk. Dan geldt

$$Q_1 = Q_2 \quad \longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \quad q_1 = \lambda q_2.$$

Bewijs. Laat $q_1, q'_2 \in \mathbb{K}(V)$ kwadratische vormen zijn die beiden de kegelsnede Q in \mathbb{P} definiëren. Dan geldt $\ker q_1 = \ker q'_2 = U$. Omdat q_1 en q'_2 niet-nul bestaat er een $v_0 \in V$ met $q_1(v_0) \neq 0 \neq q_2(v_0)$. Vervang q'_2 door $q_2 = \frac{q_1(v_0)}{q'_2(v_0)} q'_2$ zodat

$$q_1(v_0) = q_2(v_0) \neq 0.$$

Zij $v \in V$ met $v \neq v_0$ en definieer voor $i = 1, 2$ de functie

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto q_i(v_0 + \lambda(v - v_0)). \end{aligned}$$

Dan hebben f_1 en f_2 dezelfde nulpunten en er geldt

$$f_1(0) = q_1(v_0) = q_2(v_0) = f_2(0) \neq 0.$$

Bovendien geldt voor $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} q_i(v_0 + \lambda(v - v_0)) &= \sigma_i(v_0 + \lambda(v - v_0), v_0 + \lambda(v - v_0)) \\ &= \sigma_i(v_0, v_0) + 2\sigma_i(v_0, \lambda(v - v_0)) + \sigma(\lambda(v - v_0), \lambda(v - v_0)) \\ &= q_i(v_0) + 2\lambda\sigma_i(v_0, v - v_0) + \lambda^2 q_i(v - v_0), \end{aligned}$$

waarbij $\sigma_i = \sigma_{q_i} \in \mathbb{B}_s(V)$ de unieke bij q_i horende symmetrische bilineaire vorm is. We zien dat f_1 en f_2 polynomen in λ over \mathbb{C} van graad ≤ 2 zijn. Er zijn nu twee situaties.

(i) Stel dat $q_1(v - v_0) \neq 0$, dan geldt ook $q_2(v - v_0) \neq 0$ en zijn er $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ zodat geldt

$$f_i(\lambda) = a_i(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

We weten dat $\lambda_i \neq 0$ voor $i = 1, 2$ en $a_1\lambda_1\lambda_2 = f_1(0) = f_2(0) = a_2\lambda_1\lambda_2$, dus $a_1 = a_2$ en daarmee $f_1 = f_2$. In het bijzonder geldt

$$q_1(v) = f_1(1) = f_2(1) = q_2(v).$$

(ii) Stel nu dat $q_1(v - v_0) = 0$, dan geldt ook $q_2(v - v_0) = 0$, dus voor $i = 1, 2$ geldt dan

$$f_i(\lambda) = q_i(v_0) + 2\lambda\sigma_i(v, v - v_0).$$

Stel dat $\sigma_1(v, v_0) = 0 \neq \sigma_2(v, v_0)$, dan is $f_1 \equiv q_1(v_0) \neq 0$ zonder nulpunten en f_2 een eerstegraads polynoom met 1 nulpunt, tegenspraak. Stel dat $\sigma_1(v, v - v_0) = 0 = \sigma_2(v, v - v_0)$, dan geldt $f_1 \equiv q_1(v_0) = q_2(v_0) \equiv f_2$, dus

$$q_1(v) = f_1(1) = f_2(1) = q_2(v).$$

Stel vervolgens dat $\sigma_1(v, v - v_0) \neq 0 \neq \sigma_2(v, v - v_0)$. Dan bestaan er $a_1, a_2, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ waarvoor voor $i = 1, 2$ geldt

$$f_i(\lambda) = a_i(\lambda - \lambda_1),$$

met $\lambda_1 \neq 0$. Er geldt $-a_1\lambda_1 = f_1(0) = f_2(0) = -a_2\lambda_1$, waaruit volgt dat $a_1 = a_2$ en dus $f_1 = f_2$. Wederom geldt

$$q_1(v) = f_1(1) = f_2(1) = q_2(v).$$

Hiermee hebben we bewezen dat $q_1(v) = q_2(v)$ voor alle $v \in V$. \square

Zij C een kegelsnede met bijbehorende $q \in \mathbb{K}(V)$ en $\sigma \in \mathbb{B}_s(V)$. Zij $(x_0 : x_1 : x_2)$ homogene coördinaten in \mathbb{P}^2 , met bijbehorende basis $\mathcal{B} = (b_0, b_1, b_2)$ in V . Dan bestaat er een symmetrische matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ zodanig dat $\sigma(v, w) = v^T A w$ voor alle $v, w \in V$. Hieruit volgt dat voor $v \in V$ met coördinaten (v_0, v_1, v_2) ten opzichte van \mathcal{B} geldt dat $\sigma(v, v) = 0$ dan en slechts dan als

$$\begin{aligned} (v_0 \ v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \\ a_{00}v_0^2 + 2a_{01}v_0v_1 + 2a_{02}v_0v_2 + a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Hiermee is aangetoond dat er voor iedere kegelsnede C een homogeen polynoom $P_C \in K[X_0, X_1, X_2]$ van graad 2 bestaat zodanig dat C de nullocus is van P_C .

We noemen een kegelsnede $C = \{p \in \mathbb{P} \mid q(p) = 0\}$ met bijbehorende kwadratische vorm q glad als geldt $\text{rang}(\sigma_q) = 3$. Omgekeerd geeft een symmetrische bilineaire vorm σ in V aanleiding tot een kwadratische vorm q_σ (en dus een kegelsnede) door $q_\sigma(v) = \sigma(v, v)$ voor $v \in V$ te nemen.

Zij $C \in \mathbb{P}$ een gladde kegelsnede met bijbehorende kwadratische vorm q en symmetrische bilineaire vorm $\sigma = \sigma_q$. Beschouw de afbeelding $d_\sigma : V \rightarrow V^*$ van V naar zijn duale V^* gegeven door $v \mapsto \sigma(v, \cdot)$. Aangezien σ niet-ontaard is, is deze afbeelding een isomorfisme. Het geïnduceerde isomorfisme $D_\sigma : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}^*$ is dus ook een isomorfisme en heeft in het bijzonder een inverse D_σ^{-1} . Het duale projectieve vlak $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}(V^*)$ kan geïdentificeerd worden met de verzameling der lijnen in \mathbb{P} , dus D_σ beeldt punten af naar lijnen. Zij $\pi^* : V^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^*$ de natuurlijke projectie en $v^* : V \rightarrow K$ een lineaire afbeelding met $v^* \neq 0$ (dat wil zeggen, $v^* \in V^* \setminus \{0\}$), dan geldt $\dim(\ker v^*) = 2$. Laat $v^*, w^* \in V^* \setminus \{0\}$ zodanig dat $X = \ker v^* = \ker w^*$. Kies $y \in V$ zodat $y \notin X$, en schrijf $Y = \text{span}(y)$, dan geldt $V = X \oplus Y$. Merk op dat er een $b \in K$ bestaat zodat $v^*(y) = bw^*(y)$. Laat $v \in V$, dan bestaan er een $a \in K$ en een $x \in X$ zodanig dat $v = x + ay$. Er geldt

$$v^*(v) = v^*(x + ay) = v^*(ay) = av^*(y) = abw^*(y) = bw^*(x + ay) = bw^*(v),$$

dus v^* en w^* zijn gelijk op vermenigvuldiging met een constante na, wat betekent dat $\pi^*(v^*) = \pi^*(w^*)$. We kunnen de tweedimensionale kern van een $v^* \in V^* \setminus \{0\}$ dus opvatten als een lijn in \mathbb{P} . Voor alle $p \in \mathbb{P}$ geldt

$$D_\sigma(p) = \{r \in \mathbb{P} : \sigma(p, r) = 0\},$$

omdat deze deelverzamelingen van \mathbb{P} bijectief corresponderen met de afbeeldingen $\sigma(p, \cdot)$.

3.6 Definitie. Zij $p \in C$, dan is $T_p C := D_\sigma(p)$ de raaklijn aan C in p .

3.7 Propositie. De deelverzameling $D_\sigma(C) \subset \mathbb{P}^*$ van raaklijnen aan C is een gladde kegelsnede in \mathbb{P}^* .

Bewijs. Zij $p^* \in D_\sigma(C)$ en $v^* \in V^*$ zodanig dat $\pi^*(v^*) = p^*$, waarbij $\pi^* : V^* \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^*$ de natuurlijke projectie is. Laat $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}$ de andere natuurlijke projectie zijn. Er bestaat een $p \in C$ zodat $D_\sigma^{-1}(\pi^*(v^*)) = p$. Omdat geldt dat $\pi \circ d_\sigma^{-1} = D_\sigma^{-1} \circ \pi^*$, volgt dat $p = D_\sigma^{-1}(\pi(v^*)) = \pi(d_\sigma^{-1}(v^*))$. Dit betekent dat $\pi(d_\sigma^{-1}(v^*)) \in C$, dus

$$\sigma(d_\sigma^{-1}(v^*), d_\sigma^{-1}(v^*)) = 0.$$

We definiëren nu $\sigma^* : V^* \times V^* \rightarrow K$ door

$$\sigma^*(u^*, w^*) = \sigma(d_\sigma^{-1}(u^*), d_\sigma^{-1}(w^*)).$$

Door de lineariteit van d_σ^{-1} is σ^* een bilineaire vorm, die bovendien rang 3 heeft omdat d_σ^{-1} een isomorfisme is en σ rang 3 heeft. We kunnen concluderen dat σ^* aanleiding geeft tot een gladde kegelsnede

$$C^* = \{r^* \in \mathbb{P}^* \mid \sigma^*(r^*, r^*) = 0\}.$$

We zien dat $\sigma^*(v^*, v^*) = 0$, dus $\pi^*(v^*) = p^*$ ligt op C^* .

Zij nu $p^* \in C^*$, met $p^* = \pi^*(v^*)$ voor zekere $v^* \in V^*$, dan geldt $\sigma(d_\sigma^{-1}(v^*), d_\sigma^{-1}(v^*)) = 0$, dus $\pi(d_\sigma^{-1}(v^*)) = D_\sigma^{-1}(\pi^*(v^*)) = D_\sigma^{-1}(p^*)$ ligt op C , dus p^* ligt op $D_\sigma(C)$, waarmee de propositie bewezen is. \square

We noemen $C^* = D_\sigma(C)$ de met C duale kegelsnede.

3.8 Gevolg. Omdat D_σ een isomorfisme is, is ook de beperking van D_σ tot C een isomorfisme. In het bijzonder betekent dit dat twee verschillende punten op C verschillende raaklijnen hebben en dat elke raaklijn aan C precies één punt van C bevat.

3.9 Lemma. Voor een lijn $\ell \in \mathbb{P}$ geldt $\#(\ell \cap C) \in \{1, 2\}$, met $\#(\ell \cap C) = 1$ dan en slechts dan als ℓ een raaklijn aan C is.

Bewijs. Merk op dat $\#(\ell \cap C) \geq 2$ impliceert dat ℓ geen raaklijn is. Kies homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ zodat $\ell = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P} \mid x_2 = 0\}$. Dan bestaat er een homogeen polynoom $P_C(X_0, X_1, X_2)$ van graad 2 zodanig dat

$$C = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P} \mid P_C(x_0, x_1, x_2) = 0\}.$$

De doorsnede van C en ℓ is

$$C \cap \ell = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P} \mid P_C(x_0, x_1, x_2) = 0 \wedge x_2 = 0\}.$$

We zoeken dus de oplossingen van de vergelijking $P_C(X_0, X_1, 0) = 0$. Merk op dat geldt

$$P_C(X_0, X_1, X_2) = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

waarbij de symmetrische matrix $(a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ complex is en bij σ hoort. Schrijf $A = (a_{ij})$, dan geldt $\text{rang}(A) = 3$. Daarnaast geldt $P_C(X_0, X_1, 0) = a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + a_{11}X_1^2 = 0$. Hieruit volgt dat het niet zo kan zijn dat $a_{00} = a_{01} = a_{11} = 0$, aangezien in dat geval geldt $\text{rang}(A) < 3$.

- Als $a_{00} = a_{11} = 0$, dan geldt $X_0 = 0$ of $X_1 = 0$ en dan is $C \cap \ell = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\}$.
- Als $a_{00} = a_{01} = 0$, dan geldt $X_1 = 0$ en dan is $C \cap \ell = \{(1 : 0 : 0)\}$. Het is gemakkelijk na te gaan dat ℓ in dit geval in $(1 : 0 : 0)$ raakt aan C . Het geval $a_{11} = a_{01} = 0$ is analoog.
- Als $a_{00} = 0$, $a_{01} \neq 0$ en $a_{11} \neq 0$, dan geldt $X_1 = 0$ of $2a_{01}X_0 + a_{11}X_1 = 0$ en dan is $C \cap \ell = \{(1 : 0 : 0), (a_{11} : 2a_{01} : 0)\}$. Het geval $a_{11} = 0$, $a_{01} \neq 0$ en $a_{00} \neq 0$ is analoog.
- Als $a_{00} \neq 0$, dan geldt $X_1 \neq 0$. Kiezen we vervolgens $X_1 = 1$ dan krijgen we

$$X_0 = \frac{-2a_{01} + \sqrt{4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}}}{2a_{00}} \quad \text{of} \quad X_0 = \frac{-2a_{01} - \sqrt{4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}}}{2a_{00}},$$

dus

$$C \cap \ell = \left\{ \left(\frac{-2a_{01} + \sqrt{4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}}}{2a_{00}} : 1 : 0 \right), \left(\frac{-2a_{01} - \sqrt{4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}}}{2a_{00}} : 1 : 0 \right) \right\}.$$

Merk op dat dit inderdaad de enige twee oplossingen zijn; kiezen we $X_1 = \lambda \cdot 1$, dan zien we dat

$$X_0 = \frac{-2\lambda a_{01} \pm \sqrt{4\lambda^2 a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}\lambda^2}}{2a_{00}} = \lambda \cdot \frac{-2a_{01} \pm \sqrt{4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11}}}{2a_{00}}.$$

Als $a_{01}^2 - a_{00}a_{11} = 0$, dan is er maar één snijpunt, namelijk $p = (-a_{01}/a_{00} : 1 : 0)$. Wederom is het gemakkelijk na te gaan dat in dit geval geldt $\ell = T_p C$. Het geval $a_{11} \neq 0$ is analoog.

Hiermee hebben we alle gevallen gehad. We zien dat voor het aantal snijpunten altijd geldt dat $\#(\ell \cap C) \in \{1, 2\}$, met $\#(\ell \cap C) = 1$ dan en slechts dan als ℓ raakt aan C . \square

4 Voorbereidend Werk

Eerst volgen een paar definities die nuttig zijn bij het bestuderen van de sluitstelling van Poncelet.

4.1 Definitie. Een Riemannoppervlak is een Hausdorff topologische ruimte X met een open overdekking $\{U_\alpha\}$ van X en een familie afbeeldingen

$$f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$$

zodat

- (i) elke $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ is een homeomorfisme van U_α naar een open deelverzameling $f_\alpha(U_\alpha)$ van \mathbb{C}
- (ii) als $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, dan is de afbeelding

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

biholomorf.

4.2 Voorbeeld.

- Beschouw de complexe projectieve lijn \mathbb{P}^1 . Er geldt $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, de éénpuntscompactificatie van de complexe getallen. Dan is $\{U_0, U_1\}$ met $U_0 = \mathbb{C}$ en $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ een open overdekking van \mathbb{P}^1 . Laat $f_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven zijn door $z \mapsto z$ en $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ door $z \mapsto 1/z$ als $z \neq 0$ en $z \mapsto 0$ als $z = \infty$. Het is duidelijk dat zowel f_0 als f_1 homeomorfismen naar \mathbb{C} zijn, dus aan eigenschap (i) van de definitie van een Riemannoppervlak is voldaan. Verder geldt dat de afbeelding

$$f_1 \circ f_0^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

gegeven is door $z \mapsto 1/z$ en dat is een biholomorfe afbeelding, dus ook aan eigenschap (ii) is voldaan. Hiermee is \mathbb{P}^1 een (compact) Riemannoppervlak, de Riemannsfeer.

- Zij $C = \mathbb{C}/\Lambda$ een complexe torus met $\Lambda = \{n_1v_1 + n_2v_2 \in \mathbb{C} \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ voor zekere reëel onafhankelijke $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Er bestaat een $\delta > 0$ zodat voor alle $z \in \mathbb{C}$ en $\epsilon < \delta$ geldt dat de doorsnijding van de open bol $D(z, \epsilon)$ met een equivalentieklasse $\bar{w} \in C$ uit hooguit 1 punt bestaat. Beschouw de open overdekking $\{U_{\bar{z}_0}\}$ van C met

$$U_{\bar{z}_0} = \left(\bigcup_{z \in \bar{z}_0} D(z, \delta) \right) / \Lambda$$

voor alle $z_0 \in \mathbb{C}$. We kunnen voor alle \bar{z}_0 een representant $z'_0 \in \mathbb{C}$ kiezen zodat $c_0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2$ met $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$. Merk op dat $U_{\bar{z}_0}$ beschouwd als deelverzameling van \mathbb{C} niets anders is dan de vereniging van disjuncte open bollen met straal δ rond punten $z \in \bar{z}_0$. Voor $U_{\bar{z}_0}$ definiëren we dan de afbeelding $f_{\bar{z}_0} : U_{\bar{z}_0} \rightarrow \mathbb{C}$ door de bol rond c_0 als representant van $U_{\bar{z}_0}$ te kiezen en deze in \mathbb{C} in te bedden. Het is nu gemakkelijk na te gaan dat dit voldoet aan de voorwaarden van een Riemannoppervlak (de afbeelding $f_{\bar{z}_1} \circ f_{\bar{z}_0}^{-1}$ is een translatie van $f_{\bar{z}_0}(U_{\bar{z}_0} \cap U_{\bar{z}_1})$ en dat is zeker een biholomorfe afbeelding).

De complexe torus speelt een sleutelrol in het bewijs van de sluitstelling van Poncelet.

4.3 Definitie. Het geslacht van een compact en samenhangend Riemannoppervlak \mathcal{R} is het maximaal aantal simpele uitsnedes langs simpele gesloten krommes op \mathcal{R} zodanig dat het resulterende oppervlak samenhangend is. Gemakkelijker gesteld is het geslacht van een compact Riemannoppervlak het aantal gaten in dat oppervlak.

Merk op dat elk compact Riemannoppervlak een geslacht heeft en dat dit geslacht goed gedefinieerd is. Dit volgt uit de classificatie van gesloten oppervlakken. In feite is elk compact samenhangend Riemannoppervlak van geslacht g een bol met g handvatten.

4.4 Voorbeeld.

- De projectieve lijn $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ is een compact Riemannoppervlak zonder gaten, dus van geslacht 0.
- De complexe torus is een compact Riemannoppervlak van geslacht 1, omdat het lokaal op \mathbb{C} lijkt en je hooguit 1 keer langs een simpele gesloten kromme kan knippen zonder dat het oppervlak uit elkaar valt. Gelukkig is ook het aantal gaten in een torus 1.

4.5 Lemma. Een gladde kegelsnede C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zijn isomorf als Riemannoppervlakken.

Bewijs. Zijn C een gladde kegelsnede in het complexe projectieve vlak $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $p \in C$ een punt op C en $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de complexe projectieve lijn. Kies homogene coördinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ zodanig dat $p = (0 : 0 : 1)$. Zij $\ell = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_2 = 0\}$ een lijn in \mathbb{P}^2 en laat $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$, dan geldt $r = (\lambda : \mu : 0) \in \ell$. Merk op dat $\ell \neq T_p C$, aangezien $p \notin \ell$. Bovendien geldt duidelijk $\ell \cong \mathbb{P}^1$. Er bestaat een symmetrische matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ met coëfficiënten in \mathbb{C} zodat de definiërende homogene vergelijking van C gegeven is door

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

De lijn \overline{pr} door p en r wordt geparametriseerd door $(\lambda t : \mu t : s)$ met $(t, s) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Op $\overline{pr} \cap C$ geldt

$$a_{00}\lambda^2 t^2 + 2a_{01}\lambda\mu t^2 + 2a_{02}\lambda t s + a_{11}\mu^2 t^2 + 2a_{12}\mu t s = 0.$$

De oplossing $t = 0$ kennen we al, dus stel $t \neq 0$. Er geldt

$$t(a_{00}\lambda^2 t + 2a_{01}\lambda\mu t + 2a_{02}\lambda s + a_{11}\mu^2 t + 2a_{12}\mu s) = 0.$$

Hieruit volgt

$$(a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda\mu + a_{11}\mu^2) t = -(2a_{02}\lambda + 2a_{12}\mu) s.$$

Neem $t = -(2a_{02}\lambda + 2a_{12}\mu)$ en $s = (a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda\mu + a_{11}\mu^2)$, dan ligt het punt

$$(t\lambda : t\mu : s) = (-2a_{02}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda\mu : -2a_{02}\lambda\mu - 2a_{12}\mu^2 : a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda\mu + a_{11}\mu^2)$$

op C . Beschouw de afbeelding $\phi : \ell \rightarrow C$ gegeven door

$$(\lambda : \mu : 0) \mapsto (-2a_{02}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda\mu : -2a_{02}\lambda\mu - 2a_{12}\mu^2 : a_{00}\lambda^2 + 2a_{01}\lambda\mu + a_{11}\mu^2).$$

Deze afbeelding heeft door de hierboven gegeven constructie een duidelijke meetkundige interpretatie: ϕ stuurt een punt $r \in \ell$ naar het snijpunt ongelijk aan p van de verbindingslijn \overline{rp} en C , tenzij $\overline{rp} = T_p C$, dan gaat r naar p . Omdat elk paar punten in \mathbb{P}^2 een unieke lijn definieert en elke lijn C hooguit tweemaal snijdt is deze afbeelding injectief. Andersom geldt dat er door elk paar punten $x, p \in C$ een unieke lijn \overline{xp} gaat en dat \overline{xp} en de inbedding $\ell \subset \mathbb{P}^2$ van \mathbb{P}^1 in \mathbb{P}^2 een uniek snijpunt hebben, dus ϕ is ook surjectief en daarmee bijectief. Aangezien zowel ϕ als ϕ^{-1} polynomiaal zijn in alle variabelen (voor ϕ^{-1} is dit makkelijk na te gaan), dan is ϕ een isomorfisme, dus C is isomorf met ℓ en dus ook met \mathbb{P}^1 . \square

Een algemener resultaat geldt, dat we niet hier zullen bewijzen. Zie de eerste twee hoofdstukken van het boek [4] voor een excellente uiteenzetting.

4.6 Stelling. Voor alle gladde irreducibele algebraïsche krommen $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ bestaat er een compact Riemannoppervlak \tilde{C} en een holomorfe afbeelding

$$\sigma : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

zodanig dat $\sigma(\tilde{C}) = C$ en σ injectief is.

We zullen nu bewijzen dat de automorfismen $\text{Aut}(\mathbb{C})$ van \mathbb{C} als Riemannoppervlak gegeven worden door $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$. Hierbij zullen we gebruik maken van twee bekende stellingen uit de complexe analyse en een tweetal lemmata.

4.7 Stelling (Cauchy afschattingen). Zijn $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie op U , $z_0 \in U$ en $\bar{D}(z_0, r) \subset U$ een gesloten schijf bevat in U voor zekere $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Laat

$$M = \sup_{z \in \bar{D}(z_0, r)} |f(z)|,$$

dan geldt voor alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) \right| \leq \frac{Mk!}{r^k}.$$

We zullen stelling 4.7 niet bewijzen. Raadpleeg het boek [5], hoofdstuk 3, paragraaf 4 voor een bewijs.

4.8 Stelling (Liouville). Zijn $M \in \mathbb{R}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie zodanig dat $|f(z)| \leq M|z|^k$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Dan is f een polynoom in z van graad hoogstens k .

Bewijs. Zijn f , M en k zoals in de stelling. Laat $r \in \mathbb{R}_{>0}$, dan is

$$\sup_{z \in \bar{D}(0, r)} |f(z)| \leq Mr^k$$

en uit stelling 4.7 volgt dan dat voor alle $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ geldt

$$\left| \frac{\partial^l f}{\partial z^l}(0) \right| \leq \frac{Mr^k l!}{r^l}.$$

In het bijzonder geldt dan voor alle $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\left| \frac{\partial^{k+l} f}{\partial z^{k+l}}(0) \right| \leq \frac{Mr^k (k+l)!}{r^{k+l}} = \frac{M(k+l)!}{r^l}.$$

Daar bovenstaande ongelijkheid voor alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt, volgt dat voor alle $l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ geldt

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial z^{k+l}}(0) = 0,$$

dus de machtreeksontwikkeling van f rond 0 heeft alleen termen in z van graad hoogstens k . Omdat f holomorf is op heel \mathbb{C} , kunnen we hieruit concluderen dat f een polynoom in z van graad hoogstens k is. \square

Zij nu $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ biholomorf.

4.9 Lemma. Voor iedere $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat er een $C \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat

$$|z| > C \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\epsilon}.$$

Bewijs. Zij $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. De verzameling $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1/\epsilon\}$ is compact in \mathbb{C} , dus $V = f^{-1}(U)$ is compact omdat het continue beeld van een compacte deelverzameling van \mathbb{C} compact is. Wegens Heine-Borel bestaat er een $C \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat $V \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq C\}$. Zij nu $w \in \mathbb{C}$ met $|w| > C$, dan geldt $w \notin V$, dus $f(w) \notin U$, dus $|f(w)| > 1/\epsilon$. Het gewenste resultaat volgt. \square

Merk op dat lemma 4.9 in het bijzonder stelt dat

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

4.10 Lemma. Er bestaan $B, D \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat

$$|z| > D \Rightarrow |f(z)| < B|z|.$$

Bewijs. Definieer voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq 0$ en $f(1/z) \neq 0$ een functie $g(z) = 1/f(1/z)$. Wegens lemma 4.9 is er een $C \in \mathbb{R}_{>0}$ zodanig dat $|f(z)| > 1$ als $|z| > C$. Dan volgt dat g holomorf is op

$U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1/C\}$ en g is op U begrensd door 1. Het singuliere punt $z = 0$ is een ophefbare singulariteit, zodat g holomorf is op de open schijf $D(0, 1/C)$ met $g(0) = 0$ wegens lemma 4.6. Uit het feit dat $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bijectief is volgt dat g bijectief is op $D(0, 1/C)$, dus $g'(0) \neq 0$. Er geldt

$$0 \neq |g'(0)| = \lim_{|z| \rightarrow 0^+} \left| \frac{g(z) - g(0)}{z} \right| = \lim_{|z| \rightarrow 0^+} \left| \frac{g(z)}{z} \right|,$$

dus er is een constante $A \in \mathbb{R}_{>0}$ zodat $|g(z)| \geq A|z|$ als $|z| < \delta$ voor een zekere $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Zij $|z| > 1/\delta$, dan geldt

$$|f(z)| = \frac{1}{|g(1/z)|} \leq \frac{1}{A|1/z|} = \frac{1}{A}|z|.$$

We kunnen dus $B = 1/A$ en $D = 1/\delta$ nemen, waarmee het lemma bewezen is. \square

Eindelijk kan het hoofdresultaat bewezen worden.

4.11 Stelling. Een functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is biholomorf dan en slechts dan als er $a, b \in \mathbb{C}$ bestaan zodanig dat $a \neq 0$ en

$$f(z) = az + b$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$.

Bewijs. Zijn $a, b \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$, dan is de functie $f(z) = az + b$ holomorf met inverse $f^{-1}(z) = (z - b)/a$. Het is duidelijk dat f bijectief is, dus f is biholomorf. Dat is het makkelijke deel van het bewijs.

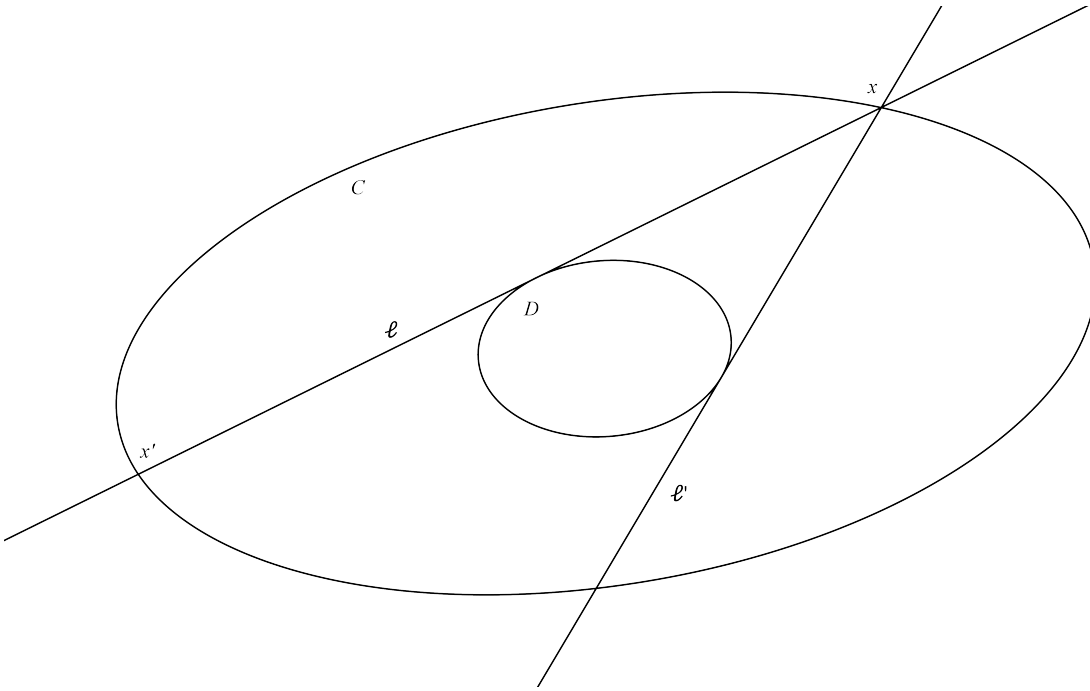
Zij $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ biholomorf. Dan bestaan er wegens lemma 4.10 constanten $B, D \in \mathbb{R}_{>0}$ zodanig dat

$$|z| > D \Rightarrow |f(z)| < B|z|.$$

Stelling 4.5 verzekert ons dan dat f een polynoom van graad hoogstens 1 is. Dus geldt $f(z) = az + b$ met $a, b \in \mathbb{C}$. Als $a = 0$, dan is f niet bijectief, dus $a \neq 0$ en de stelling is bewezen. \square

4.12 Stelling (formule van Riemann-Hurwitz). Zijn X en Y compacte Riemannoppervlakken van geslacht g_X en g_Y , respectievelijk. Zij $\pi : Y \rightarrow X$ een holomorfe afbeelding van graad d . De afbeelding π heet vertakt boven een punt $p \in Y$ als er analytische coördinaten rond p zijn zodanig dat $\pi(z) = z^n$ met $n > 1$. We noemen $e_p = n$ de vertakkingsindex van p . Merk op dat $e_p = 1$ als π niet vertakt is boven p . Dan geldt

$$2 - 2g_Y = d(2 - 2g_X) + \sum_{p \in Y} (e_p - 1).$$



Figuur 2: de constructie van Poncelet

5 De Sluitstelling van Poncelet

Zijn C en D twee gladde kegelsneden in het projectieve vlak \mathbb{P}^2 over de complexe getallen \mathbb{C} . Zij D^* de duale kegelsnede van D en laat $E \subset C \times D^*$ de verzameling zijn, die bestaat uit alle paren (x, ℓ) waarvoor geldt $x \in \ell$. Het $C \times D^*$ is een algebraïsche variëteit isomorf met $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Definieer nu twee afbeeldingen $\sigma : E \rightarrow E$ en $\tau : E \rightarrow E$ door $\sigma(x, \ell) = (x', \ell)$ en $\tau(x, \ell) = (x, \ell')$, waarbij x' het andere snijpunt van ℓ met C is en ℓ' de andere raaklijn aan D door x . Zie figuur 2. De afbeeldingen σ en τ zijn beiden involuties, dat wil zeggen $\sigma^2(x, \ell) = (x, \ell)$ en $\tau^2(x, \ell) = (x, \ell)$ voor alle $(x, \ell) \in E$. Laat $\rho = \tau \circ \sigma$. We kunnen nu de sluitstelling van Poncelet formuleren. We gaan ervan uit dat $\#(C \cap D) = 4$, dus alle snijpunten van C door D hebben multipliciteit 1.

5.1 Stelling (sluitstelling van Poncelet). Zij $(x_0, \ell_0) \in E$. Dan geldt dat $\rho^n(x_0, \ell_0) = (x_0, \ell_0)$ dan en slechts dan als voor alle $(x, \ell) \in E$ geldt dat $\rho^n(x, \ell) = (x, \ell)$.

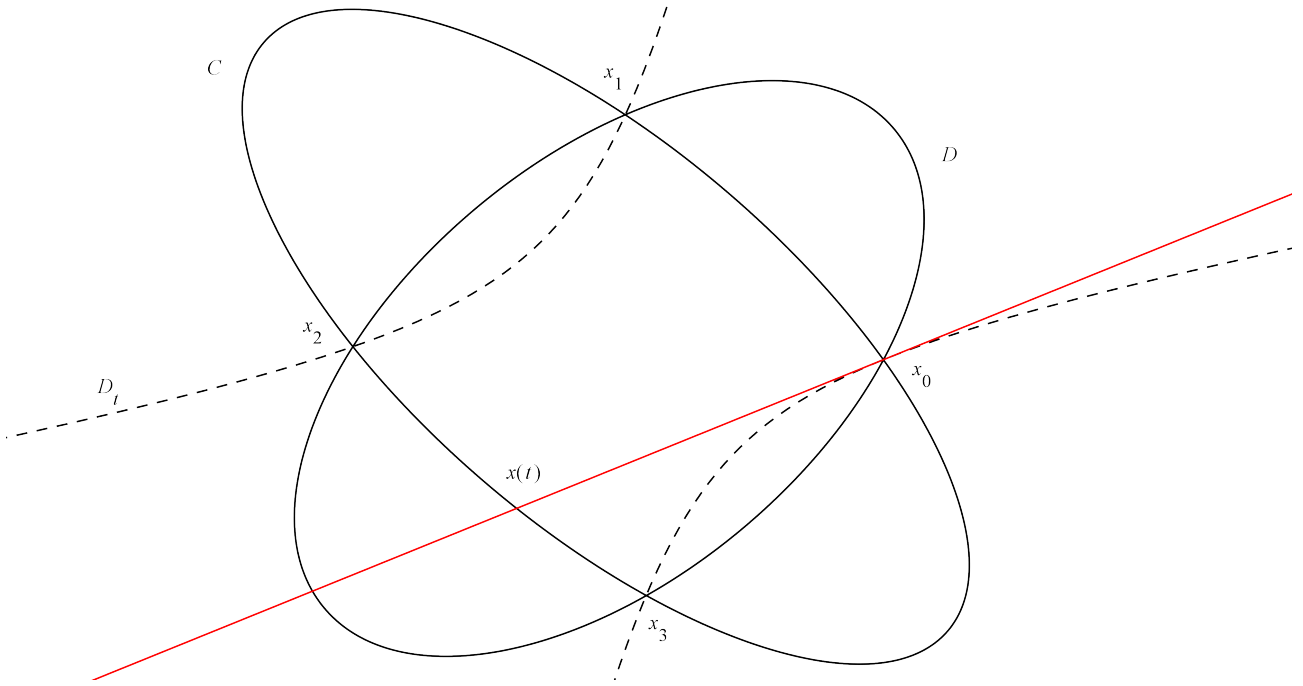
Bewijs. Zijn x_i met $i = 0, 1, 2, 3$ de snijpunten van C en D en zij $p = (x, \ell) = \rho(x_0, \ell_0)$. Bekijk de penseel van kegelsneden $D_t = tC + D$ (waarbij we C en D beschouwen als 3×3 -matrices) door de snijpunten van C en D , met $t \in \mathbb{C}$. Het zou beter zijn om met $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ te werken en te schrijven:

$$D_{(\lambda:\mu)} = \lambda C + \mu D,$$

want dan is meteen duidelijk dat $D_{(1:0)} = C$ en $D_{(0:1)} = D$. We zien echter dat $D_t \rightarrow C$ als $t \rightarrow \infty$, dus we voegen $\{\infty\}$ toe aan \mathbb{C} zodat D_t goed gedefinieerd is voor alle $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$ met $D_\infty = C$.

Merk op dat een penseel van kegelsneden door een viertal punten in algemene positie een \mathbb{P}^1 is. Een willekeurige kegelsnede heeft 6 vrijheidsgraden, daar hij wordt gegeven door een symmetrische 3×3 -matrix. De verzameling van alle kegelsneden is dus een \mathbb{P}^5 . De verzameling van alle kegelsneden door 1 gegeven punt heeft $6 - 1 = 5$ vrijheidsgraden en is dus een \mathbb{P}^4 . Zo doorredenerend komen we tot de conclusie dat de verzameling van alle kegelsneden door een gegeven viertal punten in algemene positie een \mathbb{P}^1 is. Aangezien $tC + D$ voor elke $t \in \mathbb{P}^1$ een unieke kegelsnede door x_0, x_1, x_2 en x_3 definieert, is het penseel D_t de verzameling van alle kegelsneden door x_0, x_1, x_2 en x_3 .

De determinant $\det(tC + D)$ is een polynoom in t . Kiezen we $t \in \mathbb{P}^1$ zodanig dat $\det(tC + D) = \det(D_t) = 0$, dan is D_t een ontaarde kegelsnede door 4 punten. Uit de projectieve meetkunde weten we



Figuur 3: de penseel $\{D_t\}$

dat dit aanleiding geeft tot verenigingen van twee lijnen door disjuncte paren punten uit $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. Er zijn drie van dit soort verenigingen, namelijk

$$\overline{x_0x_1} \cup \overline{x_2x_3}, \quad \overline{x_0x_2} \cup \overline{x_1x_3} \quad \text{en} \quad \overline{x_0x_3} \cup \overline{x_1x_2},$$

dus $\det(tC + D)$ heeft drie nulpunten t_1, t_2 en t_3 en er geldt

$$\det(tC + D) = a(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3),$$

waarbij $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definieer dan een afbeelding $x : \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ gegeven door

$$x(t) = (T_{x_0}D_t \cap C) \setminus \{x_0\}.$$

De functie x geeft het snijpunt van C en de raaklijn aan D_t in x_0 ongelijk aan x_0 . Er zijn nu vier ongedefinieerde gevallen: t_1, t_2, t_3 en ∞ . Kies t_1, t_2 en t_3 zodat $D_{t_1} = \overline{x_0x_1} \cup \overline{x_2x_3}$, $D_{t_2} = \overline{x_0x_2} \cup \overline{x_1x_3}$ en $D_{t_3} = \overline{x_0x_3} \cup \overline{x_1x_2}$. Laat dan $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ en $x(t_3) = x_3$. De raaklijn in x_0 aan D_∞ is de raaklijn in x_0 aan C , dus het is logisch om te stellen dat $x(\infty) = x_0$. Op deze manier is x een isomorfisme. Zie Figuur 1.

Zijn $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1$ onderling verschillende punten. Pas een coördinaattransformatie toe zodat $p_0 = \infty$, dan geldt $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$. Laat de kromme F dan gegeven zijn door

$$F : y^2 = (x - p_1)(x - p_2)(x - p_3).$$

Dan is F de op isomorfie na unieke elliptische kromme met de eigenschap dat de afbeelding $\pi_x : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ gegeven door $(x, y) \mapsto x$ twee op één is met vertakkingen boven p_1, p_2, p_3 en ∞ . Dit viertal kan natuurlijk met een projectieve transformatie naar een ander viertal gestuurd worden, wat een isomorfe elliptische kromme oplevert. Bovendien maakt de volgorde van de punten niet uit. Meestal wordt als oorsprong voor zo'n elliptische kromme het punt op oneindig gekozen ($x = \infty$).

Merk op dat x niet alleen een isomorfisme $\mathbb{P}^1 \rightarrow C$ is, maar een isomorfisme dat een gegeven viertal op \mathbb{P}^1 naar een ander gegeven viertal op C stuurt. Hieruit volgt dat de $2 : 1$ overdekking van \mathbb{P}^1 , vertakt boven p_1, p_2, p_3 en ∞ , isomorf is met $2 : 1$ overdekking van C , vertakt boven x_1, x_2, x_3 en x_0 .

Deze laatste 2 : 1 overdekking is echter precies de incidentievariëteit E en de eerste is simpelweg de elliptische kromme E_x gegeven door de vergelijking

$$E_x : y^2 = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = \det(tC + D),$$

dus E wordt ook gegeven door de vergelijking van E_x en is in het bijzonder een elliptische kromme.

Beschouw de projecties $\pi_C : E \rightarrow C$ gegeven door $(x, \ell) \mapsto x$ en $\pi_{D^*} : E \rightarrow D^*$ gegeven door $(x, \ell) \mapsto \ell$. Dit zijn holomorfe afbeeldingen van compacte Riemannoppervlakken van graad 2, dus we kunnen de formule van Riemann-Hurwitz gebruiken om het geslacht g_E van E te bepalen. Er zijn 4 punten $p \in C$ met $e_p = 2$, namelijk de snijpunten van C en D . Dan geldt

$$2g_E - 2 = 2(2g_{\mathbb{P}^1} - 2) + \sum_{p \in C} (e_p - 1) = -4 + 4 = 0.$$

Er volgt dat $g_E = 1$, dus E is een compact Riemannoppervlak van geslacht 1, een complexe torus. Kies een oorsprong $\mathfrak{o} = (x_0, \ell_0) \in E$ met $x_0 \in C \cap D$, dan is E isomorf met \mathbb{C}/Λ . De involutie σ op \mathbb{C}/Λ heeft minstens één dekpunt (namelijk de punten $(x, \ell) \in E$ waarbij ℓ ook de raaklijn door x aan C is). Aangezien \mathbb{C} de universele overdekkingsruimte van \mathbb{C}/Λ is, kunnen we σ liften naar $\tilde{\sigma} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die volgens stelling 4.11 wordt gegeven door $\tilde{\sigma}(z) = az - b$ voor zekere $a, b \in \mathbb{C}$. Omdat σ een involutie is, geldt $\tilde{\sigma}^2(z) = a(az - b) - b = a^2z - ab - b = z \pmod{\Lambda}$. Hieruit volgt dat $a^2 = 1 \pmod{\Lambda}$ en $-b(a + 1) = 0 \pmod{\Lambda}$, dus $a = 1 \pmod{\Lambda}$ of $a = -1 \pmod{\Lambda}$. Als $a = 1 \pmod{\Lambda}$, dan heeft $\tilde{\sigma}$ geen dekpunt, dus $a = -1 \pmod{\Lambda}$ en $\tilde{\sigma}(z) = -z - b \pmod{\Lambda}$. Hetzelfde argument gaat op voor τ , maar τ heeft een bijzonder dekpunt, namelijk \mathfrak{o} , dus $\tilde{\tau}(z) = -z \pmod{\Lambda}$. Hieruit volgt $\tilde{\rho}(z) = \tilde{\tau} \circ \tilde{\sigma}(z) = z + b \pmod{\Lambda}$, dus $\tilde{\rho}^n(z) = z \pmod{\Lambda}$ dan en slechts dan als $nb = 0 \pmod{\Lambda}$. Aangezien dit onafhankelijk is van z , is hiermee de stelling bewezen. \square

We zullen nu onderzoeken wat het voor een punt p op een elliptische kromme E betekent om de eigenschap te hebben dat $np = \mathfrak{o}$. Laat hiertoe E een elliptische kromme over \mathbb{C} met oorsprong \mathfrak{o} zijn. We hebben al gezien dat $E = \mathbb{C}/\Lambda$ voor een zeker rooster $\Lambda \subset \mathbb{C}$, met $\mathfrak{o} = 0$. Zij nu $p \in E$ de projectie van $z \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dan geldt $np = \mathfrak{o}$ precies dan als

$$nz = 0 \pmod{\Lambda}. \tag{1}$$

In het bijzonder zijn er precies n^2 punten van orde n in E , corresponderend met de punten van

$$\frac{1}{n} \pmod{\Lambda}.$$

Zij $z_i \in \mathbb{C}$ voor $i = 1, 2, \dots, n$ zodanig dat

$$\sum_{i=1}^n z_i = 0 \pmod{\Lambda}. \tag{2}$$

Als $z_i = z_j$ voor alle $i, j = 1, 2, \dots, n$, dan krijgen we vergelijking (1) terug.

De volgende stelling is een resultaat van Abel en zal niet hier bewezen worden. Zie hoofdstuk 5 van [4].

5.2 Stelling (Abel). Zij $z_i \in \mathbb{C}$ voor $i = 1, \dots, n$. Dan is er een gehele meromorfe functie $f(z)$ met perioderooster Λ en nulpunten in $z_i + \Lambda$ en een pool van orde n in $0 + \Lambda$ voor alle i dan en slechts dan als

$$\sum_{i=1}^n z_i = 0 \pmod{\Lambda}.$$

Hieruit volgt dat de vectorruimte $H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ over \mathbb{C} van rationale functies op E met een pool van orde n in \mathfrak{o} dimensie n heeft. Voor $f, g \in H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ kunnen we namelijk de som $f + g$ definiëren als $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$, want dan is $f + g \in H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ en de poolorde van $f + g$ is het maximum van

de poolordes van f en g . Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ definiëren we $(\lambda f)(z) = \lambda f(z)$, want dan is $\lambda f \in H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ en de poolorde blijft hetzelfde. Verder kan een gehele meromorfe functie met perioderooster Λ geen pool van orde 1 hebben. We kunnen een basis f_1, \dots, f_n voor deze vectorruimte kiezen (f_1 is een constante, verder heeft f_i een pool van orde i voor $i = 2, \dots, n$). Voor $n \geq 3$ induceert de afbeelding $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ gegeven door

$$F(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$$

een projectieve inbedding

$$E \rightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$

waarvan het beeld een gladde algebraïsche kromme van graad n is, die de normale elliptische kromme van graad n genoemd zal worden. Merk op dat $z = 0$ naar het punt $(\overline{0 : 0 : \dots : 0 : 1}) \in \overline{\mathbb{P}^{n-1}}$ gaat; rond 0 schalen met z^n maakt dit duidelijk. Doorsnijden we deze kromme met een hypervlak, dan bekijken we in feite de nulpunten van een functie $f \in H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$. Een hypervlak in \mathbb{P}^{n-1} met homogene coördinaten $(x_1 \dots : x_n)$ heeft namelijk vergelijking

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0,$$

waarbij $a_i \in \mathbb{C}$ voor $i = 1, \dots, n$, en een punt op de normale elliptische kromme van graad n wordt gegeven door

$$(f_1(z) : \dots : f_n(z)),$$

met $z \in \mathbb{C}$, dus de doorsnijding van de kromme met een hypervlak wordt gegeven door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i(z) = 0$$

en het linkerlid van deze vergelijking is een functie $f \in H^0(\mathcal{O}_E([n\mathfrak{o}]))$. Als f precies n nulpunten heeft (met multipliciteit geteld) dan wordt deze doorsnijding volgens stelling 5.2 gekarakteriseerd door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n z_i = 0 \pmod{\Lambda},$$

waarbij $z_i \in \mathbb{C}$ met $i = 1, \dots, n$ de nulpunten van f zijn. Merk op dat de punten $F(z_1), \dots, F(z_n)$ in dit geval niet in algemene positie liggen, dus

$$\det \|f_i(z_j)\| = 0.$$

Laat $WF(z)$ de Wronskiaan van de functies $f_i(z)$ zijn:

$$WF(z) = \begin{vmatrix} f_1(z) & f_2(z) & \cdots & f_n(z) \\ f_1'(z) & f_2'(z) & \cdots & f_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(z) & f_2^{(n-1)}(z) & \cdots & f_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}.$$

Als nu $z_i \rightarrow z$ voor alle i , dan geldt

$$\det \|f_i(z_j)\| \rightarrow WF(z),$$

dus $WF(z) = 0$. Punten die hieraan voldoen noemen we hyperflexen. De vergelijking $WF(z) = 0$ is onafhankelijk van de basiskeuze $\{f_i\}$ en de keuze van een lokale coördinaat z op E , omdat dit allebei transformaties zijn waarvan de determinant niet-nul is.

Zij nu $p \in E$ een punt. We willen graag weten of p van eindige orde $n \geq 3$ is. Zij hiertoe $(1, f(z))$ een basis voor $H^0(\mathcal{O}_E(2\mathfrak{o}))$ zodat $f(p) = 0$. Dan induceert f een $2 : 1$ -afbeelding

$$f : E \rightarrow \mathbb{P}^1$$

met vier vertakkingspunten, waarvan eentje het punt op oneindig is. Zij x de affine coördinaat op \mathbb{P}^1 en zijn a, b, c de eindige vertakkingspunten, dan geeft de kromme in het vlak met affine vergelijking

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

een projectief model van E . Laat $x = f(z)$, dan geldt dat $2y = f'(z)$, omdat $dz = \lambda \frac{dx}{y}$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$. Hieruit volgt dat het projectief model van E gegeven wordt door de afbeelding $E \rightarrow \mathbb{P}^2$ die bij de basis $(1, f(z), f'(z))$ van $H^0(\mathcal{O}_E(3\mathfrak{o}))$ hoort. De functies $f(z)$ en $f'(z)$ zijn in essentie de Weierstrass \wp -functies.

5.3 Definitie. Zij $\Lambda = \{k_1 v_1 + k_2 v_2 \in \mathbb{C} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}$, met $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ reëel onafhankelijk. Dan is de Weierstrass \wp -functie $\wp(z, \Lambda)$ gegeven door

$$\wp(z, \Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Merk op dat \wp een pool van orde 2 in $z = 0$ heeft.

De Laurentreeksen rond $z = 0$ van f en f' zijn dus:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} + \dots \\ f'(z) &= -\frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Met behulp van deze twee functies kunnen we een basis maken voor $H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ voor alle $n \geq 3$. Zijn $x = f(z)$ en $y = f'(z)$, dan is bijvoorbeeld xy een functie met een pool van orde 5 bij \mathfrak{o} . Als $n = 2m + 1$, dan is $(1, x, \dots, x^m, y, xy, \dots, x^{m-1}y)$ een basis voor $H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$ en als $n = 2m$, dan is $(1, x, \dots, x^m, y, xy, \dots, x^{m-2}y)$ een basis voor $H^0(\mathcal{O}_E(n\mathfrak{o}))$. Dit vergemakkelijkt sterk het evalueren van de Wronskiaan, daar we x als lokale coördinaat rond p kunnen gebruiken en in de Wronskiaan naar x kunnen differentiëren. Voor $n = 2m + 1$ geldt

$$WF(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^m & y & \dots & x^{m-1}y \\ \frac{d}{dx} & \frac{dx}{dx} & \dots & \frac{dx^m}{dx} & \frac{dy}{dx} & \dots & \frac{dx^{m-1}y}{dx} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}(x)}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}(x^m)}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}(y)}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}(x^{m-1}y)}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is ook equivalent met

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} & \frac{d^{m+1}(xy)}{dx^{m+1}} & \dots & \frac{d^{m+1}(x^{m-1}y)}{dx^{m+1}} \\ \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} & \frac{d^{m+2}(xy)}{dx^{m+2}} & \dots & \frac{d^{m+2}(x^{m-1}y)}{dx^{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} & \frac{d^{2m}(xy)}{dx^{2m}} & \dots & \frac{d^{2m}(x^{m-1}y)}{dx^{2m}} \end{vmatrix} = 0,$$

omdat in de eerste m kolommen overal nullen staan, behalve op de diagonaal. Laat nu

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k$$

de machtreeks van y in x zijn, dan geldt

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} & \frac{d^{m+1}(xy)}{dx^{m+1}} & \dots & \frac{d^{m+1}(x^{m-1}y)}{dx^{m+1}} \\ \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} & \frac{d^{m+2}(xy)}{dx^{m+2}} & \dots & \frac{d^{m+2}(x^{m-1}y)}{dx^{m+2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} & \frac{d^{2m}(xy)}{dx^{2m}} & \dots & \frac{d^{2m}(x^{m-1}y)}{dx^{2m}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (m+1)!A_{m+1} & (m+1)!A_m & \dots & (m+1)!A_2 \\ (m+2)!A_{m+2} & (m+2)!A_{m+1} & \dots & (m+2)!A_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (2m)!A_{2m} & (2m)!A_{2m-1} & \dots & (2m)!A_{m+1} \end{vmatrix}$$

en hiermee hebben we laten zien dat p van eindige orde $n = 2m + 1$ is dan en slechts dan als geldt

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ A_3 & A_4 & \cdots & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0.$$

Op analoge wijze kan aangetoond worden dat p van eindige orde $n = 2m$ is dan en slechts dan als geldt

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & \cdots & A_{m+1} \\ A_4 & A_5 & \cdots & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0.$$

Dit levert ons een prachtige stelling.

5.4 Stelling Laat E een elliptische kromme met oorsprong \mathfrak{o} zijn, en laat $p \in E$. Kies rationale functies x, y op E met een pool in \mathfrak{o} van orde 2 en 3 respectievelijk en nergens anders polen, zodanig dat $x(p) = 0$. Er zijn a, b, c , paarsgewijs verschillend en niet gelijk aan de oorsprong, waarvoor (na een geschikte normalisatie voor x en y) geldt $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$. We schrijven

$$y = \sqrt{(x - a)(x - b)(x - c)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Dan geldt dat $np = \mathfrak{o}$ dan en slechts dan als

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & \cdots & A_{m+1} \\ A_3 & A_4 & \cdots & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0, \quad n = 2m + 1$$

en

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & \cdots & A_{m+1} \\ A_4 & A_5 & \cdots & A_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_{2m} \end{vmatrix} = 0, \quad n = 2m.$$

□

Keren we terug naar de situatie van de sluitstelling, dan vragen we ons af of $p = (x, \ell) = \rho(x_0, \ell_0)$ eindige orde n heeft. Merk op dat we (x_0, ℓ_0) als de oorsprong van E hebben gekozen en dat dit via x inderdaad correspondeert met de oorsprong van E_x , aangezien de oorsprong van E_x is gegeven door $t = \infty$ en $x(\infty) = x_0$. Neem $t = 0$ in de penseel $\{D_t\}$, dan is $D_t = D$, dus $x(t) = x(0) = \underline{x}$, dus p correspondeert met een punt op E_x waarvoor geldt $t = 0$. Dan volgt uit stelling 5.4 dat de constructie van Poncelet een eindige veelhoek van n zijden oplevert dan en slechts dan als p eindige orde n heeft. Hiermee hebben we een expliciete oplossing voor de sluitstelling van Poncelet gevonden. [1]

6 Referenties

Referenties

- [1] Phillip Griffiths and Joseph Harris, ON CAYLEY'S EXPLICIT SOLUTION TO PONCELET'S PORISM, *L'Enseignement Mathématique* 24 (1978), 31-40
- [2] J. L. Coolidge, The Rise and Fall of Projective Geometry, *American Mathematical Monthly* 41 (4) (1934), 217-228
- [3] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, Jean Victor Poncelet, december 2008, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poncelet.html>
- [4] Phillip Griffiths, Introduction to Algebraic Curves, American Mathematical Society, 1989, United States of America
- [5] Robert Greene and Steven Krantz, FUNCTION THEORY OF ONE COMPLEX VARIABLE, John Wiley & Sons, Inc., 1997, United States of America
- [6] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977, New York