Beeldruimten van contractieve projecties

Subramanian, W.W.

W.W. Subramanian

Beeldruimten van contractieve projecties

Bachelorscriptie, 7 juli 2010

Scriptiebegeleider: dr. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

In deze scriptie zullen projectie-afbeeldingen in genormeerde ruimten centraal staan, en in het bijzonder de beeldruimten ervan. In de jaren zestig van de vorige eeuw, is hier veel onderzoek naar gedaan. Het was R.G. Douglas [1] die als eerste een volledige karakterisatie gaf van contractieve projecties in de L^1 ruimte. Vervolgens breidde T. Andô [2] de karakterisatie uit naar de L^p ruimten, voor $p \in [1, \infty) \backslash \{2\}$. Door de jaren heen zijn er steeds meer algemenere functieruimten aan het geval van Douglas en Andô toegevoegd. In deze scriptie zal alleen de karakterisatie van de (eindig dimensionale) Euclidische ruimte gegeven worden, omdat dit geval door de jaren heen verwaterd is door a.o. de algemeenheid van de onderliggende maatruimte. Allereerst zullen enkele resultaten van de functionaalanalyse en lineaire algebra worden herhaald, om de vraagstelling te kunnen formuleren.

Definitie 1: *Zij X een genormeerde ruimte, dan is $P : X \to X$ een* ***projectie*** *als P continu en lineair is, en als geldt*

$$\forall x \in X : P^2 x = Px.$$

In deze scriptie zal onderscheid gemaakt worden tussen twee typen projecties:

Definitie 2: *Zij $P : X \to X$ een projectie op een genormeerde ruimte X, dan is P*

(a) ***contractief****, als geldt*

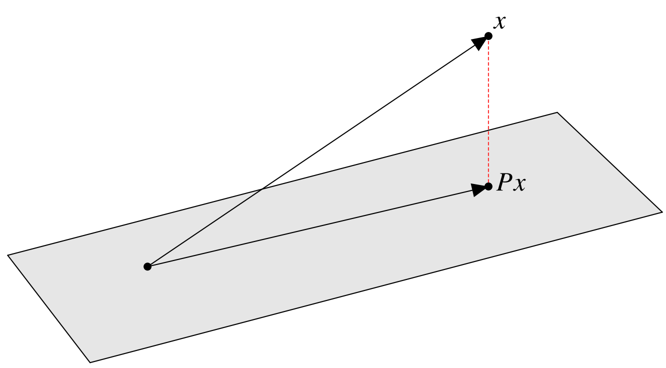
$$\|P\| \leq 1;$$

(b) ***orthogonaal****, als*

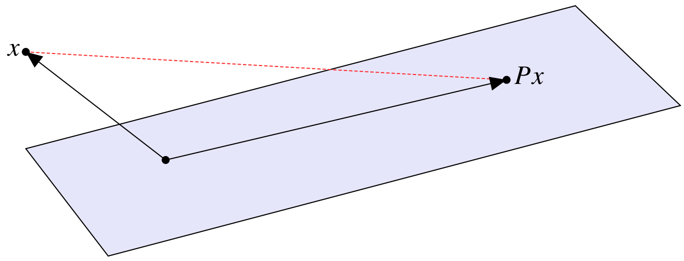
$$(x - Px) \perp x.$$

Voorbeeld 1: Beschouw ter illustratie een projectie op een vlak in $\mathbb{R}^3$.
In de onderstaande figuren worden achtereenvolgens de orthogonale, de contractieve en de niet-contractieve projectie van een vector x op het een vlak in $\mathbb{R}^3$ geïllustreerd:

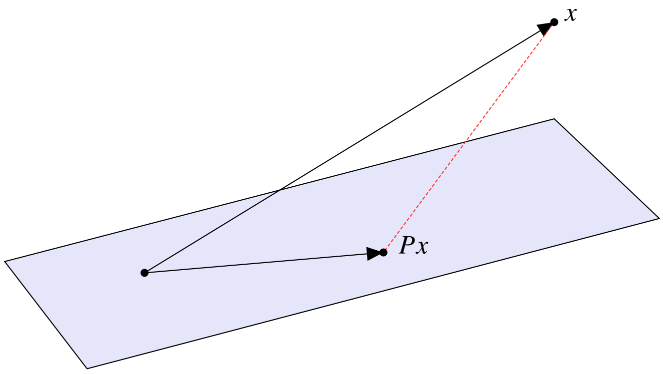
- De orthogonale projectie:



- Een niet-contractieve projectie:



- Een contractieve projectie:



Uit de definities volgt direct dat de orthogonale projectie een speciaal geval is van de contractieve projectie. De samenhang tussen deze typen projecties is te vinden in een Hilbertruimte.

Stelling 1: *Zij $\mathcal{H}$ een Hilbertruimte en $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ een projectie. Dan geldt:*

$$P \text{ is orthogonaal} \iff P \text{ is contractief.}$$

Bewijs: Zij $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ een projectie.
[$\Longrightarrow$] Neem aan dat P orthogonaal is. Merk op dat in elke Hilbertruimte geldt dat $\{0\}$ gesloten is, dus dan volgt dat

$$\text{Ker } P = P^{-1}\Big[\{0\}\Big]$$

ook gesloten is vanwege continuïteit van P.
Schrijf

$$\mathcal{H} = \text{Ker } P \oplus \text{Ran } P.$$

Dan volgt

$$\text{Ker } P \perp \text{ Ran } P.$$

Bovendien geldt

$$\forall x \in \mathcal{H} : \exists y \in \text{Ker } P \; \exists z \in \text{Ran } P : x = y + z.$$

Dan geldt voor elke $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} ||Px||^2 &= ||z||^2 \\ &\leq ||y^2|| + ||z||^2 \\ &= ||y + z||^2 \\ &= ||x||^2. \end{aligned}$$

Dit bewijst dat P contractief is.

[$\Longleftarrow$] Neem aan dat P contractief is.
Zij $x \in \mathcal{H}$ dan geldt

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : ||P(\alpha x + \beta Px)|| \leq ||\alpha x + \beta Px||.$$

Dus

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : ||(\alpha + \beta)Px||^2 \leq ||\alpha x + \beta Px||^2.$$

Nu volgt dat voor elke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 ||Px||^2 &\leq ||ax||^2 + 2\langle \alpha x, \beta Px\rangle + ||\beta Px||^2 \\ &= \alpha^2 ||x||^2 + 2\alpha\beta\langle x, Px\rangle + \beta^2 ||Px||^2. \end{aligned}$$

Dus

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha^2 + 2\alpha\beta)||Px||^2 \leq \alpha^2 ||x||^2 + 2\alpha\beta\langle x, Px\rangle.$$

Voor $\alpha > 0$ geldt

$$\forall \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + 2\beta)\|Px\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + 2\beta \langle x, Px \rangle .$$

Dan volgt voor alle $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2\beta\|Px\|^2 &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \left[(\alpha + 2\beta)\|Px\|^2\right] \\ &\leq \lim_{\alpha \downarrow 0} \left[\alpha\|x\|^2 + 2\beta \langle x, Px \rangle \right] \\ &= 2\beta \langle x, Px \rangle . \end{aligned}$$

Als $\beta = \pm 1$, dan geldt

$$\pm\|Px\|^2 \leq \pm \langle x, Px \rangle .$$

Dus

$$\|Px\|^2 = \langle x, Px \rangle ,$$

en dus geldt

$$\langle Px, Px \rangle = \langle x, Px \rangle .$$

Nu volgt direct

$$\langle x - Px, Px \rangle = 0.$$

□

Beschouw nu de ruimte $\mathbb{R}^n_p := \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)$, waarbij de p-norm gedefinieerd is als:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty).$$

Onderscheid nu twee gevallen, namelijk $p = 2$ en $p \neq 2$:

- Als $p = 2$ geldt, dan is de norm $\|\cdot\|_2$ afkomstig van het standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$. Uit stelling 1 volgt dat de verzamelingen van contractieve- en orthogonale projecties op deze ruimte gelijk aan elkaar zijn. Ook is er uit lineaire algebra bekend dat elke lineaire deelruimte $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ beeld is van een orthogonale projectie.
- Als geldt $p \neq 2$, dan is de norm $\|\cdot\|_p$ niet afkomstig van een inproduct op $\mathbb{R}^n$ (dit is een bekend resultaat van de functionaalanalyse). In deze situatie zijn contractieve- en orthogonale projecties niet hetzelfde.

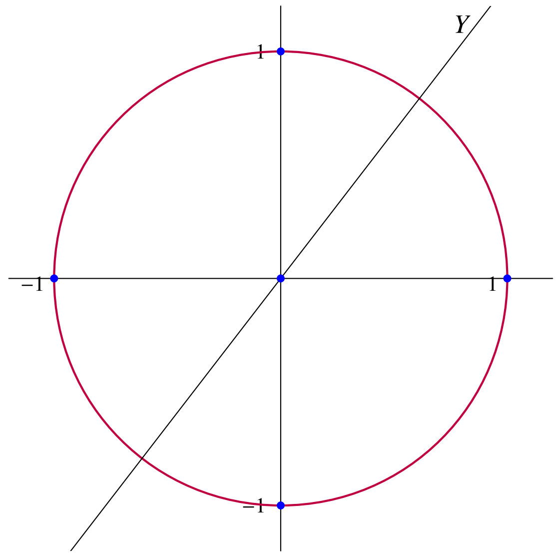
Dit laatste geval zal in deze scriptie centraal staan, en de volgende vraag zal beantwoord worden:

VRAAG: Welke deelruimten $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ zijn beeld van een contractieve projectie in $\mathbb{R}^n_p$, voor $p \neq 2$?

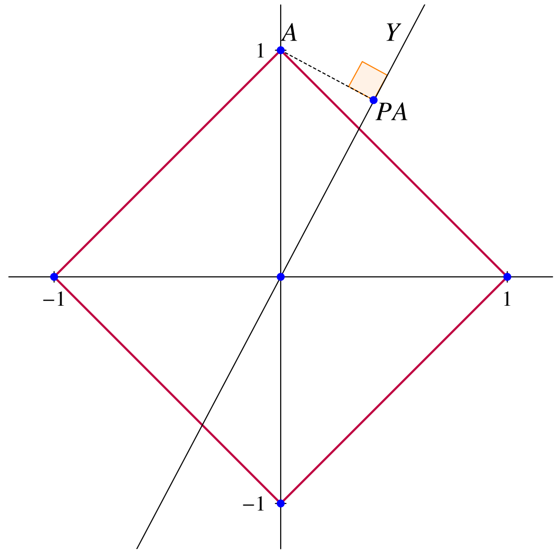
Men zou kunnen opmerken dat deze vraag niet gesteld hoeft te worden, want in $\mathbb{R}^n_p$ is elke norm (topologisch gezien) equivalent aan de Euclidische norm $\|\cdot\|_2$. Dus zelfs in het geval dat $p \neq 2$, geldt dat de p-norm equivalent is met een norm die geïnduceerd wordt door een inproduct. Maar deze opmerking is wat subtieler van aard, beschouw namelijk het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 2: Beschouw de eenheidsbol $B_p = \left\{x \in \mathbb{R}^2_p : \|x\|_p \leq 1\right\}$ voor $p = 1, 2$.
Laat $Y \subseteq \mathbb{R}^2_p$ een willekeurige lijn door de oorsprong zijn, dan geldt dat Y een deelruimte van $\mathbb{R}^2_p$ is.
Nu geldt dat normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ equivalent zijn, ondanks het feit dat $\|\cdot\|_1$ niet door een inproduct geïnduceerd wordt. Beschouw de orthogonale projectie P van B_p op de lijn Y.

- Als geldt $p = 2$, dan is het beeld van P altijd bevat in B_2, onafhankelijk van de keuze van Y. Er geldt namelijk $\|P\| \leq 1$ (zie de onderstaande figuur);



- Als geldt $p = 1$, dan is het beeld van P alleen bevat in B_1 als de lijn Y een coördinaat as is of als Y gelijk aan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm x\}$ is. B_1. Neem bijvoorbeeld het punt $A = (0, 1)$. M.b.v. Pythagoras is na te gaan dat geldt $\|A - PA\|_1 \nleq 1$ (zie de onderstaande figuur).



In de literatuur zijn er meerdere manieren te vinden om de vraag te beantwoorden, elk met dezelfde conclusie. Er zullen in deze scriptie twee onder de loep genomen worden. Allereerst zal de hoofdvraag vertaald worden tot een stelling. Het eerste bewijs wordt gegeven door de functionaalanalyse, terwijl het andere argument gebruik maakt van maattheoretische kansrekening.

2 Bewijs 1

Vanaf nu zal de ruimte $\mathbb{R}_p^n$ opgevat worden als de verzameling $\{x : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}\}$, voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Deze aanname voorkomt mogelijke problemen en verwarring qua notatie. Het ligt voor de hand om eerst de basis van de beeldruimte te bekijken.

Definitie 3: *Zij $R \subseteq \mathbb{R}^n$ een deelruimte van dimensie $m \leq n$ met basis $B = \{b_1, \dots, b_m\}$.*
*Dan is B een **blokbasis** van R, als er voor elke $k \in \{1, \dots, m\}$ hoogstens één $j \in \{1, \dots, n\}$ is zodat geldt*

$$b_k(j) \neq 0.$$

Voorbeeld 3:

(a) Beschouw de deelruimte $R \subseteq \mathbb{R}^4$, met basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dan is B een blokbasis, want in elke rij is er hoogstens één entry ongelijk aan nul.

(b) Beschouw nu de deelruimte $S \subseteq \mathbb{R}^4$, met basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nu is B geen blokbasis, want er geldt dat $b_1(1) = b_2(1) = 1$.

Nu reist de volgende vraag:

Zij $R \subseteq \mathbb{R}^n$ een deelruimte. Bestaat er een algoritme dat verifieerd of R een blokbasis heeft?

Een dergelijk criterium bestaat, maar voordat deze gegeven kan worden moeten er eerst wat definities behandeld worden.

Definitie 4: *Zij $x \in \mathbb{R}^n$, dan wordt de **support** van x gegeven door*

$$\operatorname{supp}(x) = \{k : x(k) \neq 0\}.$$

Definitie 5: *Zij $x \in \mathbb{R}^n$ en definieer de **indicator** van* $\operatorname{supp}(x)$ *als de afbeelding $\mathbb{1}_{\operatorname{supp}(x)} : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$, gedefinieerd door*

$$\mathbb{1}_{\operatorname{supp}(x)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{als } k \in \operatorname{supp}(x); \\ 0 & \text{als } k \notin \operatorname{supp}(x). \end{cases}$$

Lemma 2: *Zij $R \subseteq \mathbb{R}^n$ een deelruimte, dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

(a) *R heeft een blokbasis;*

(b) $\forall x, y \in R\ \exists z \in R : \operatorname{supp}(z) = \operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y)$;

(c) $\forall x, y \in R : \mathbb{1}_{\operatorname{supp}(x)} y \in R$.

Bewijs:
$[(b) \implies (a)]$ Definieer de volgende relatie op de verzameling $\{1, \dots, n\}$:

$$i \sim j \iff \forall x \in R : x(i) \neq 0 \text{ en } x(j) \neq 0 \text{ of } x(i) = 0 \text{ en } x(j) = 0.$$

Merk op dat deze relatie reflexief, symmetrisch en transitief is, dus het is een equivalentierelatie.

Laat $J_1, \ldots, J_m$ voor $m \leq n$ de equivalentieklassen zijn, d.w.z. $J_i = \{j : i \sim j\}$ voor $i \in \{1, \ldots, m\}$. Daarnaast geldt per definitie:

$$J_i \cap J_j = \emptyset, \qquad \text{als } i \neq j.$$

Bekijk $k \in \{1, \ldots, m\}$. Het is mogelijk dat voor elke $i \in J_k$ en elke $x \in R$ geldt $x(i) = 0$. Bekijk een k waarvoor dit niet geldt, m.a.w.

$$\exists i \in J_k \; \exists x \in R : x(i) \neq 0.$$

In dat geval geldt

$$\exists b_k \in R : b_k(i) \neq 0 \text{ voor alle } i \in J_k \text{ en } b_k(i) = 0 \text{ voor alle } i \notin J_k.$$

Laat namelijk $i \in J_k$ en $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash J_k$, dan zijn i en j niet equivalent. Er is dus een $y \in R$ zodat geldt $y(i) = 0$ en $y(j) \neq 0$ of $y(i) \neq 0$ en $y(j) = 0$. Onderscheid nu twee gevallen:

- Als $x(j) = 0$, neem dan $z = x$;
- Als $x(j) \neq 0$, bekijk dan y. Als geldt $y(i) \neq 0$ en $y(j) = 0$, dan is er een $z \in R$ zodat geldt

  $$\text{supp}(z) = \text{supp}(x) \cap \text{supp}(y),$$

  dus geldt

  $$i \in \text{supp}(z) \text{ en } j \notin \text{supp}(z).$$

In beide gevallen bestaat er een $z \in R$ zodat geldt

$$z(i) \neq 0 \text{ en } z(j) = 0,$$

en dan geldt

$$z(l) \neq 0 \text{ voor alle } l \in J_k.$$

Herhaal dit totdat $z(j) = 0$ voor alle $j \notin J_k$. Op deze manier is er k zodat niet geldt

$$\forall i \in J_k : x(i) = 0.$$

Er is dus een $b_k \in R$ gevonden met

$$b_k(i) \neq 0 \text{ voor alle } i \in J_k \text{ en } b_k(i) = 0 \text{ voor alle } i \notin J_k.$$

Merk op dat deze $b_k \in R$ met elkaar een blokbasis vormen. Er geldt namelijk

$$\text{supp}(b_k) = J_k,$$

dus geldt

$$\text{supp}(b_k) \cap \text{supp}(b_l) = \emptyset \text{ voor } k \neq l.$$

Zij $x \in R$, en laat $i \in \{1, \ldots, n\}$ zodat $x(i) \neq 0$. Nu is er exact één k met $i \in J_k$, en dan geldt $b_k(i) \neq 0$. Definieer namelijk

$$\alpha_k = \frac{x(i)}{b_k(i)},$$

dan geldt

$$x(i) = \alpha_k b_k(i).$$

Ook geldt dat

$$\forall j \in J_k : x(j) = \alpha_k b_k(j).$$

Stel niet, dan geldt

$$\Big(x - \alpha_k b_k\Big)(i) = 0 \text{ en } \Big(x - \alpha_k b_k\Big)(j) \neq 0 \text{ en } (x - \alpha_k b_k) \in R.$$

Dit houdt in dat i en j niet equivalent zijn, tegenspraak. Dus geldt

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k.$$

$[(c) \Longrightarrow (b)]$ Laat $x, y \in R$ en definieer $z = \mathbb{1}_{\mathrm{supp}(x)} y$. Dan geldt

$$z(i) \neq 0 \text{ als } x(i) \neq 0 \text{ en } y(i) \neq 0, \text{ en } z(i) = 0 \text{ als } x(i) = 0 \text{ of } y(i) = 0.$$

Dus dan volgt

$$\mathrm{supp}(z) = \mathrm{supp}(x) \cap \mathrm{supp}(y).$$

$[(a) \Longrightarrow (c)]$ Zij $x, y \in R$, en schrijf

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k, \text{ en } y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k b_k,$$

voor $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ en b_k vectoren uit de blokbasis.
Laat $J_k = \mathrm{supp}(b_k)$, dan geldt

$$\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(x)} y = \sum_{k:\alpha_k \neq 0} \beta_k b_k.$$

Er geldt namelijk voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ dat als geldt $\alpha_k = 0$, dat

$$\begin{aligned} x(i) &= \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \right)(i) \\ &= \alpha_k b_k(i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dus geldt

$$\left(\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(x)} y \right)(i) = 0,$$

en ook

$$\left(\sum_{l:\alpha_l \neq 0} \alpha_l b_l \right)(i) = 0.$$

Als $\alpha_k \neq 0$, dan geldt

$$\begin{aligned} x(i) &= \alpha_k b_k(i) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Dus

$$\left(\mathbb{1}_{\mathrm{supp}(x)} y \right)(i) = y(i)$$

en ook geldt

$$\left(\sum_{l:\alpha_l \neq 0} \beta_k b_l \right)(i) = y(i).$$

□

Het voorgaande lemma geeft in feite een algoritme dat een blokbasis voor de deelruimte $R \subseteq \mathbb{R}_p^n$ construeert. Voordat de hoofdstelling van deze sectie behandeld wordt, zullen er eerst enkele resultaten uit de functionaalanalyse herhaald worden. Voordat deze stelling kan worden gegeven, is het noodzakelijk dat er enkele eigenschappen van de (norm)duale ruimte van $\mathbb{R}_p^n$ helder naast elkaar worden gezet. De duale ruimte van $\mathbb{R}_p^n$ zal genoteerd worden als $\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$.

Stelling 3: *Zij $p \in (1,\infty)$ en beschouw $\mathbb{R}^n_p$. Laat $q \in (1,\infty)$ zodat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan geldt*

$$\left(\mathbb{R}^n_p\right)^* = \mathbb{R}^n_q.$$

Bewijs: Laat $f \in \left(\mathbb{R}^n_p\right)^*$, dan heeft f een matrix representatie.
Dus geldt

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha \bullet x.$$

Nu geldt

$$\|f\| = \|\alpha\|_q.$$

Merk namelijk op dat $\mathbb{R}^n_p$ eindigdimensionaal is, dus iedere norm op deze ruimte is equivalent met de 2-norm. Er geldt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\alpha x| \\ &\leq \|\alpha\|_2 \|x\|_2 \\ &\leq \|\alpha\|_2 \cdot c \cdot \|x\|_p \\ &\leq C \cdot \|x\|_p. \end{aligned}$$

Het voldoet nu om een zo klein mogelijk C te vinden waarvoor de bovenstaande ongelijkheid geldt.
Schrijf f als lineaire combinatie van α en x, en laat $q > 1$ zodat geldt$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Nu volgt uit de Hölder ongelijkheid:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\alpha\|_q \|x\|_p. \end{aligned}$$

Dus er geldt dat

$$\|f\| \leq \|\alpha\|_q.$$

Nu moet er een $y \in \mathbb{R}^n_p$ gevonden worden zodat

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Laat

$$x_k = |\alpha_k|^{q-1}, \text{ voor } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Nu geldt dat

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q,$$

en

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q \right)^{1-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Kies nu

$$y = \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} x,$$

dan volgt $\|y\|_p = 1$ en vanwege lineariteit geldt:

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} f(x) \\ &= \frac{1}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{1-\frac{1}{q}}} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Dus dan geldt

$$\|f\| = \|\alpha\|_q.$$

Tenslotte moet er aangetoond worden dat $\mathbb{R}^n_q$ isometrisch isomorf is met $\left(\mathbb{R}^n_p\right)^*$.
Beschouw nu de afbeelding

$$\begin{array}{lcl} J \;:\; \mathbb{R}^n_q & \to & \left(\mathbb{R}^n_p\right)^* \\ J_\alpha(x) & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \qquad \alpha, x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Nu volgt dat J een isometrisch isomorfisme is. Er is zojust bewezen dat geldt

$$J(\alpha) \in \left(\mathbb{R}^n_p\right)^* \quad \text{en} \quad \|J(\alpha)\| = \|\alpha\|_q.$$

Dus J is een isometrie. De lineariteit van J volgt direct uit de definitie.
Laat $f \in \left(\mathbb{R}^n_p\right)^*$, dan is f lineair. Daarnaast heeft f een matrixrepresentatie, dus is er per constructie van J een $\alpha \in \mathbb{R}^n$ zodat $J_\alpha(x) = f(x)$. Dus J is surjectief. Merk op dat J van nature injectief is, dus J is een isometrisch isomorfisme. □

Voor de classificatie van de beeldruimten van contractieve projecties is er een dualiteitsafbeelding nodig tussen $\mathbb{R}^n_p$ en $\mathbb{R}^n_q$. Het is echter niet gemakkelijk om de juiste afbeelding te construeren. In de rest van deze sectie zal er slechts een schets gegeven worden, voor de details wordt de lezer naar de literatuur verwezen.

Stelling 4: *Zij X een Banachruimte en $x \in X\backslash\{0\}$, dan geldt*

$$\exists \phi_x \in X^* : \phi_x(x) = \|x\| \;\; en \;\; \|\phi\| = 1.$$

Bewijs: De bovenstaande stelling is een gevolg van Hahn-Banach. Het voert te ver om op dit moment op het bewijs in te gaan. Het bewijs is te vinden in [3, p.108] □

Definitie 6: *Zij X een Banachruimte en $x \in X$ en laat $\psi \in X^*$, met*

$$\psi_x(x) := \|x\|\phi_x(x).$$

De afbeelding

$$\Psi : X \to X^* : x \mapsto \psi_x$$

*heet de **duality map**.*

De constructie van de duality map is te vinden in [3, p.447]

Met behulp van de duality map volgt een classificatie van de beeldruimten van contractieve projecties op $\mathbb{R}^n_p$. In dit geval is de duality map uit te rekenen. Laat $\phi_{x_0} \in \mathbb{R}^n_p$, dan volgt

$$\Big(\psi(x)\Big)(k) = |x(k)|^{p-1}\,\mathrm{sgn}\Big(x(k)\Big).$$

Uit het bewijs van stelling 3 kan men de bovenstaande uitdrukking reproduceren, zie [4] voor de uitwerking.

Stelling 5: *(Calvert[5]) Laat Ψ de duality map zijn op $\mathbb{R}^n_p$. Zij P een projectie op $\mathbb{R}^n_p$ zodat geldt $\|P\| = 1$, en laat Y het beeld van P zijn. Er geldt dan dat*

$$\{\phi_a : a \in Y\}$$

een gesloten lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n_p$ is.

Bewijs: Zie [5]. □

Stelling 6: *(Lindenstrauss & Tzafriri[4]) Zij $X = \mathbb{R}^n_p$ voor $p \neq 2$ en $P : X \to X$ een projectie met $\|P\| = 1$. Als geldt*

$$Y = \mathrm{Ran}(P) = \{Px : x \in X\},$$

dan is Y gesloten en Y heeft een blokbasis.

Bewijs: Merk op dat het beeld Y gelijk is aan de verzameling $\{y \in X : y = Py\}$.
Als $x \in X$, dan geldt $Px = P(Px)$. Neem dan $y = Px$ en de inclusie van links naar recht volgt.
Als $y \in X$ zodat geldt $y = Py$, dan volgt $y \in \mathrm{Ran}(P)$. Dit geeft de andere inclusie.
In het bijzonder geldt dan:

$$Y = \{y \in X : (I - P)y = 0\} = (I - P)^{-1}\Big[\{0\}\Big].$$

Omdat $\{0\}$ gesloten is in X, volgt uit continuïteit van $(I - P)$ dat Y gesloten is.

Voor het tweede deel van het bewijs voldoet het volgende te bewijzen:

$$\forall z, y \in Y\ \exists a \in Y : \mathrm{supp}(a) = \mathrm{supp}(z) \cap \mathrm{supp}(y).$$

Uit lemma 2 volgt dan dat Y een blokbasis heeft.

Laat $y, z \in Y$ zodat $y, z \neq 0$. Laat $V = \{\phi_a : a \in Y\}$, dan is V een lineaire deelruimte vanwege stelling 5.
Er geldt dus

$$\forall t \in \mathbb{R} : z + ty \in Y,$$

dus

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi_{z+ty} \in V.$$

Dan geldt ook

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi_{z+ty} - \phi_z \in V,$$

en

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \frac{1}{t}\Big(\phi_{z+ty} - \phi_z\Big) \in V.$$

Uit stelling 5 volgt dat V gesloten is. Dus als

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big(\phi_{z+ty} - \phi_z\Big)$$

bestaat, dan geldt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big(\phi_{z+ty} - \phi_z\Big) \in V.$$

Bekijk nu de k^e coordinaat, dan geldt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big[\phi_{z+ty} - \phi_z\Big](k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\Big[\Big|z(k) + ty(k)\Big|^{p-1}\,\mathrm{sgn}\Big(z(k) + ty(k)\Big) - \Big|z(k)\Big|^{p-1}\,\mathrm{sgn}\Big(z(k)\Big)\Big].$$

Er volgt (m.b.v. het differentiequotiënt):

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left(\left[z(k)+ty(k)\right]^{p-1} - z(k)^{p-1}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(z(k)+ty(k)\Big)^{p-1}\Big|_{t=0} \\
&= \begin{cases} (p-1)\Big|z(k)\Big|^{p-2} y(k) & \text{als } z(k) > 0; \\ -(p-1)\Big|z(k)\Big|^{p-2} y(k) & \text{als } z(k) < 0; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dus

$$\Big|z(k)\Big|^{p-2} y(k)\,\mathrm{sgn}\,\Big(z(k)\Big) \in V.$$

Merk op:

$$\mathrm{supp}(\phi_a) = \mathrm{supp}(a).$$

Er bestaat dus per definitie van V:

$$\exists a \in Y : \phi_a = |z|^{p-2} y\,\mathrm{sgn}(z).$$

Nu volgt:

$$\mathrm{supp}(a) = \mathrm{supp}(\phi_a) = \mathrm{supp}\left(|z|^{p-2} y\,\mathrm{sgn}(z)\right) = \mathrm{supp}(z) \cap \mathrm{supp}(y)$$

Dus m.b.v. stelling 2 volgt dat Y een blokbasis heeft. □

De voorgaande stelling geeft het antwoord op de hoofdvraag:

De deelruimte $Y \subseteq \mathbb{R}_p^n$ is het beeld van een contractieve projectie alleen als Y een blokbasis heeft.

3 Projecties en Conditionele verwachtingen

In deze sectie zal er een verband worden gelegd tussen (contractieve) projecties en conditionele verwachtingsoperatoren. Zodoende onstaat er een inleiding voor het tweede bewijs. Er zal worden bewezen dat deze begrippen op de kansruimte $L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ samenvallen. Voor het gemak zal de notatie $L^p(\Sigma)$ worden gebruikt in plaats van $L^p(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Deze ruimte zal zoals gebruikelijk worden opgevat als de maatruimte die uit equivalentieklassen van p-integreerbare functies bestaat.
Er wordt aangenomen dat Ω een eindige verzameling is, zeg $\Omega = \{1, \dots, n\}$, voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.
Laat Σ gelijk zijn aan de machtsverzameling 2^Ω en zij $\# : 2^\Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de telmaat op de machtsverzameling van Ω. Definieer dan de kansmaat $\mathbb{P}$, gegeven door

$$\mathbb{P} : 2^\Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{n}.$$

Allereerst zal er een verband gelegd worden tussen $L^p(\Sigma)$ en $\mathbb{R}^n_p$ in het volgende lemma:

Lemma 7: *$L^p(\Sigma)$ is isomorf met $\mathbb{R}^n_p$.*

Bewijs: Zij $f \in L^p(\Sigma)$ en definieer

$$T : L^p(\Sigma) \to \mathbb{R}^n : T(f) = \left(\sqrt[p]{\mathbb{P}\big(\{1\}\big)} f(1), \dots, \sqrt[p]{\mathbb{P}\big(\{n\}\big)} f(n) \right),$$

dan is T per definitie lineair en injectief.
Laat

$$R = \{T(f) : f \in L^p(\Sigma)\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

en beschouw de restrictie van T tot R, dan is T een bijectie.
Daarnaast is T isometrisch t.o.v. de p-norm op $\mathbb{R}^n$, voor $f \in L^p(\Sigma)$ geldt namelijk

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_\Omega |f(s)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(s) \\
&= \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^n f(k) \mathbb{1}_{\{k\}} \right|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^n |f(k)|^p \mathbb{1}_{\{k\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^n |f(k)|^p \, \mathbb{P}\big(\{k\}\big) \\
&= \sum_{k=1}^n \left| \sqrt[p]{\mathbb{P}\big(\{k\}\big)} f(k) \right|^p \\
&= \sum_{k=1}^n |T(f)_k|^p \\
&= \|T(f)\|_p.
\end{aligned}$$

Merk op dat elke Σ-meetbare $f : \Omega \to \mathbb{R}$ een element van $L^p(\Sigma)$ is, dus als vectorruimte is $L^p(\Sigma)$ gelijk aan $L^r(\Sigma)$ onafhankelijk van de keuze van p en r. □

Vanwege dit lemma zijn alle resultaten die nu volgen direct te transporteren naar de ruimte $\mathbb{R}^n_p$. Er zal echter in de tekst met $L^p(\Sigma)$ worden gewerkt. Het voordeel van deze keuze is dat het algemene idee voor het geval van een willekeurige Ω en kansmaat $\mathbb{P}$ nog te herkennen is, en dat de notatie consistent blijft.

3.1 Definitie conditionele verwachtingsoperator

Definitie 7: *Zij $f \in L^p(\Sigma)$ en neem aan dat $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ bestaat. Laat $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra van Σ zijn, dan is de operator $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) : L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$ een* ***conditionele verwachting van f gegeven $\mathcal{A}$***[1] *als*

- *(a)* $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *$\mathcal{A}$-meetbaar is en*
- *(b)* $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A f \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Nu er een definitie van conditionele verwachtingen is, moet de existentie en uniciteit worden aangetoond. Voordat het bewijs gegeven kan worden, moet er wat maattheorie gedaan worden.

Definitie 8: *Zij (Ω, Σ) een meetbare ruimte en μ, ν twee maten op deze ruimte. Dan is ν* ***absoluut continu*** *t.o.v. μ als*

$$\forall A \in \Sigma : \mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0.$$

<u>Notatie:</u> $\nu \ll \mu$.

Stelling 8: *(Radon-Nikodym) Zij (Ω, Σ) een meetbare ruimte en laat μ, ν twee σ-eindige maten op deze ruimte zijn met $\nu \ll \mu$. Dan*

$$\exists! h^{2} : \Omega \to [0, \infty) : \nu(a) = \int_A h \, \mathrm{d}\mu.$$

Bewijs: Zie [6]. □

Nu kan de existentie en uniciteit van de conditionele verwachting gegeven worden, het is namelijk een gevolg van de vorige stelling.

Gevolg 9: *Beschouw de kansruimte $L^p(\Sigma)$ en laat $f \in L^p(\Sigma)$. Als $\mathbb{E}(f)$ bestaat, dan is er een $\mathcal{A}$-meetbare functie $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ uniek op $\mathbb{P}$-nulverzamelingen na, zodat geldt*

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A f \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Bewijs: Merk eerst op dat elke functie in $L^p(\Sigma)$ ook in $L^1(\Sigma)$ zit. Het voldoet dus om de stelling te bewijzen voor functies in $L^1(\Sigma)$ (zonder verlies der algemeenheid).
Zij $f \in L^1(\Sigma)$ en schrijf

$$f = f^+ - f^-,$$

waarbij $f^\pm$ het positief-, resp. negatief deel is. Er volgt direct dat $f^\pm \in L^1(\Sigma)$. Vanwege het feit dat $\mathbb{P}$ een kansmaat is, volgt dat de maten gedefinieerd als

$$\mu^\pm(A) = \int_A f^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

σ-eindig zijn voor alle $A \in \mathcal{A}$ en absoluut continu t.o.v. $\mathbb{P}$. Nu volgt uit stelling 8:

$$\exists h^\pm : \Omega \to [0, \infty) \text{ zodat geldt } \forall A \in \mathcal{A} : \mu^\pm(A) = \int_A h^\pm \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Neem

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = h^+ - h^-,$$

dan volgt het gevraagde. □

---

[1] De conditionele verwachting is uniek op $\mathbb{P}$-nulverzamelingen na.
[2] Strikt genomen is deze h alleen uniek op bijna overal equivalentie na.

3.2 Eigenschappen van conditionele verwachtingsoperatoren

In deze sectie geldt voor een rij $(f_n) \subseteq L^1(\Sigma)$ met $f_n \downarrow 0$ dat

$$f_{n+1} \leq f_n$$

voor alle n en

$$\inf f_n = 0.$$

Tevens wordt er aangenomen dat elke f_n positief is en indien er een $g \in L^1(\Sigma)$ bestaat met

$$g \leq f_n$$

voor alle n, dan geldt

$$g \leq 0.$$

Lemma 10: *Zij $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra van Σ en $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) : L^1(\Sigma) \to L^1(\Sigma)$ een conditionele verwachting, dan geldt:*

- ***(a)*** *Als $f \in L^1(\Sigma)$ met $f > 0$, dan $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) > 0$ in $L^1(\mathcal{A})$;*
- ***(b)*** *Als $(f_n) \subseteq L^1(\Sigma)$ een rij dalende functies zodat $f_n \downarrow 0$ voor $n \to \infty$, dan $\mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}) \downarrow 0$ in $L^1(\mathcal{A})$ voor $n \to \infty$;*
- ***(c)*** $||\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})||_1 = 1$;
- ***(d)*** *Als $g \in L^1(\mathcal{A})$, dan $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}) = g$ en $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})^2 = \mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ en $\mathbb{E}(\mathbb{1}|\mathcal{A}) = \mathbb{1}$;*
- ***(e)*** *$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ laat $L^\infty(\Sigma)$ invariant en $||\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})||_\infty = 1$.*

M.a.w.: de conditionele verwachting $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) : L^1(\Sigma) \to L^1(\Sigma)$ is een strikt positieve continue projectie met beeld in $L^1(\mathcal{A})$.

Bewijs:

(a) Zij $f \in L^1(\Sigma)$ zodat $f > 0$. Dan geldt per definitie

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A})\ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A f\ \mathrm{d}\mathbb{P} \geq 0.$$

Dan volgt direct $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \geq 0$. Omdat geldt $f > 0$, volgt

$$\int_\Omega \mathbb{E}(f|\mathcal{A})\ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega f\ \mathrm{d}\mathbb{P} > 0.$$

Dus $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ is strikt positief in $L^1(\mathcal{A})$.

(b) Zij $(f_n) \subseteq L^1(\Sigma)$ zodat $f_n \downarrow 0$ voor $n \to \infty$ en laat $g \in L^1(\mathcal{A})$ zodat

$$\forall n : 0 < g \leq \mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}) \quad \text{in} \quad L^1(\mathcal{A}).$$

Merk op dat de $f_n \downarrow 0$, dus de rij (f_n) is dalend en $f_n \to 0$ voor $n \to \infty$.
Gebruik nu de monotone convergentie stelling, dan volgt

$$\begin{aligned} 0 &< \int_\Omega g\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \int_\Omega \mathbb{E}(f_n|\mathcal{A})\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega f_n\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\downarrow\ 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $g = 0$, dus $\mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}) \downarrow 0$.

(c) Zij $f \in L^1(\Sigma)$ zodat $\|f\|_1 \leq 1$. Uit de positiviteit van $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ volgt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 &= \int_\Omega |\mathbb{E}(f|\mathcal{A})| \, d\mathbb{P} \\
&\leq \int_\Omega \mathbb{E}(|f||\mathcal{A}) \, d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega |f| \, d\mathbb{P} \\
&= \|f\|_1 \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Dus $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : L^1(\Sigma) \to L^1(\Sigma)$ is begrensd en $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 \leq 1$.
In het bijzonder geldt dat $\|\mathbb{E}(\mathbb{1}|\mathcal{A})\|_1$, dus $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 = 1$.

(d) Laat $g \in L^1(\mathcal{A})$, dan geldt

$$\forall A \in \mathcal{A} : \int_A \mathbb{E}(g|\mathcal{A}) \, d\mathbb{P} = \int_A g \, d\mathbb{P}.$$

Merk op dat uit de stelling van Radon-Nikodym volgt, dat $\mathbb{E}(g|\mathcal{A})$ de unieke $\mathcal{A}$-meetbare functie is zodat de bovenstaande eigenschap geldt. Neem $g = \mathbb{E}(g|\mathcal{A})$, dan geldt $g \in L^1(\Sigma)$, dus $\mathbb{E}(g|\mathcal{A}) = g$, wat inhoudt dat

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}).$$

(e) Als $f \in L^\infty(\Sigma)$, dan $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \in L^\infty(\Sigma)$ en er geldt zelfs $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \in L^\infty(\mathcal{A})$. Omdat f essentieel begrensd is geldt

$$\exists M > 0 : \forall \omega \in \Omega : |f(\omega)| \leq M,$$

dus

$$\forall \omega \in \Omega : \ -M\mathbb{1}_\Omega \leq f(\omega) \leq M\mathbb{1}_\Omega.$$

Dit geeft

$$|f| \leq M\mathbb{1}_\Omega,$$

dus

$$0 \leq M\mathbb{1}_\Omega - |f|.$$

Uit de positiviteit van $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ volgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) &\leq \mathbb{E}(M\mathbb{1}_\Omega|\mathcal{A}) \\
&\leq M\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Omega|\mathcal{A}) \\
&= M\mathbb{1}_\Omega.
\end{aligned}$$

Dus geldt

$$\forall \omega \in \Omega : 0 \leq \mathbb{E}(|f||\mathcal{A})(\omega) \leq M.$$

Nu volgt $\mathbb{E}(|f||\mathcal{A}) \in L^\infty(\Sigma)$. Neem $M = \|f\|_\infty$, dan geldt

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

□

4 Bewijs 2

De conditionele verwachting is feitelijk de natuurlijke projectie-operator op $L^p(\Sigma)$. In deze sectie wordt bewezen dat het zelfs een contractieve projectie is. Daarnaast wordt er uiteengezet onder welke voorwaarden een willekeurige projectie op $L^p(\Sigma)$ een conditionele verwachting is. Ten slotte zal er een blokbasis van de beeldruimte gemaakt worden. Allereerst worden er enkele lemma gegeven, voordat de centrale stelling uit deze sectie kan worden bewezen.

Definitie 9: *Een deelruimte $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ heet een **lattice** deelruimte als*

$$\forall f, g \in Y : (f \vee g)^{3} \in Y.$$

Uit de bovenstaande definitie volgt direct dat in iedere lattice $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ geldt

$$\forall f \in Y : f^+, f^-, |f| \in Y$$

en

$$\forall f, g \in Y : (f \wedge g)^{4} \in Y.$$

Lemma 11: *Voor een lattice deelruimte $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ met $\mathbb{1} \in Y$ geldt:*

$$Y \text{ is gesloten } \implies \text{Er is een sub}-\sigma-\text{algebra } \mathcal{A} \subseteq \Sigma \text{ zodat geldt } Y = L^p(\mathcal{A}).$$

Bewijs: Neem aan dat Y gesloten is, en definieer de verzameling $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ door

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \Sigma : \mathbb{1}_A \in Y\right\} \subseteq \Omega.$$

Het bewijs bestaat uit twee stappen. Ten eerste wordt er bewezen dat $\mathcal{A}$ een sub-σ-algebra van Σ is. Vervolgens wordt er aangetoond dat voor elke functie f in Y geldt dat deze $\mathcal{A}$-meetbaar is, en dat deze te schrijven is als limiet van lineaire combinaties van indicatorfuncties uit Y.
Merk op dat $\mathcal{A}$ sub-σ-algebra is:

- De constante functie $\mathbb{1}$ zit per aanname in Y, dus dan volgt direct dat Ω in $\mathcal{A}$ zit;
- Zij $A \in \mathcal{A}$, dan volgt
$$\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A,$$
dus $A^c \in \mathcal{A}$;
- Zij $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ een aftelbare collectie, met
$$\forall k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \neq l : A_k \cap A_l = \emptyset,$$
en laat
$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} A_n.$$
Nu volgt
$$\mathbb{1}_A = \sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \mathbb{1}_{A_n}.$$
Omdat Y per aanname gesloten is volgt direct dat $\mathbb{1}_A \in Y$.

Zij $f \in Y$, dan is f per definitie $\mathcal{A}$-meetbaar als voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Merk op dat hiervoor genoeg is om aan te tonen dat geldt

$$\mathbb{1}_{\{\omega\in\Omega: f(\omega)-a>0\}} \in Y.$$

[3] $(f \vee g)$ staat voor het supremum van de functies f en g
[4] $(f \wedge g)$ staat voor het infimum van de functies f en g

Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dan volgt uit het feit dat Y een deelruimte is dat

$$\Big(f - a\mathbb{1}\Big) \in Y,$$

en

$$n\Big(f - a\mathbb{1}\Big) \in Y.$$

Dus omdat Y een lattice is, geldt

$$\Big[n\Big(f - a\mathbb{1}\Big) \wedge \mathbb{1}\Big] \in Y.$$

Definieer nu voor elke $\omega \in \Omega$ de functie

$$g_n(\omega) = \Big[\Big[n\Big(f(\omega) - a\Big)\Big]^+ \wedge \mathbb{1}\Big].$$

Zij $\omega \in \Omega$.

- Als geldt dat $f(\omega) - a \leq 0$, dan volgt $\Big[n\Big(f(\omega) - a\Big)\Big]^+ = 0$. Dus geldt $g_n(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega \in \Omega : f(\omega) - a > 0\}}$;
- Als geldt dat $f(\omega) - a > 0$, dan is er een n zodat $n\Big(f(\omega) - a\Big) > \mathbb{1}$. Dan volgt dat $g_n(\omega) = \mathbb{1}$.

□

Lemma 12: *Indien $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra is van Σ, dan heeft elke contractieve projectie $P : L^\infty(\Sigma) \to L^\infty(\Sigma)$ met beeld $L^\infty(\mathcal{A})$ de volgende eigenschap:*

$$\forall f, g \in L^\infty(\Sigma) : P\Big(fP(g)\Big) = P(f)P(g).$$

Bewijs: Merk op dat $\mathbb{1}$ essentieel begrensd is, dus $\mathbb{1} \in L^\infty(\mathcal{A})$. Er volgt $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ en $\|P\| = 1$.
Zij $x \in L^\infty(\Sigma)$ zodanig dat $x \geq 0$. Normeer x, dan volgt

$$0 \leq x \leq \mathbb{1}.$$

In het bijzonder geldt

$$0 \leq \mathbb{1} - x \leq \mathbb{1},$$

dus

$$\|\mathbb{1} - x\|_\infty \leq \mathbb{1}.$$

Toepassen van P geeft dus

$$P\Big(\mathbb{1} - x\Big) \leq \mathbb{1}.$$

Gebruik nu lineariteit van P, dan volgt

$$Px \geq 0.$$

Merk op dat voor iedere $x \in L^\infty(\mathcal{A})$ geldt dat $Px = x$, dus vanwege het feit dat $\mathcal{A}$-meetbare trapfuncties dicht in $L^\infty(\mathcal{A})$ liggen (qua norm), voldoet het te bewijzen dat voor elke positieve $f \in L^\infty(\Sigma)$ en voor alle $A \in \mathcal{A}$ geldt

$$P(f\mathbb{1}_A) = (Pf)\mathbb{1}_A.$$

Merk op dat voor voor alle $f \in L^\infty(\Sigma)$ en iedere $A \in \mathcal{A}$ geldt

$$f = f\mathbb{1}_A + f\mathbb{1}_{A^c}$$

Uit de positiviteit van P volgt voor alle positieve $f \in L^\infty(\Sigma)$ met $\|f\|_\infty \leq 1$, en iedere $A \in \mathcal{A}$ geldt

$$0 \leq P(f\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A$$

en

$$0 \leq P(f\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{1}_{A^c}.$$

Optellen geeft

$$\begin{aligned} P(f\mathbb{1}_A) + P(f\mathbb{1}_{A^c}) &= Pf \\ &= (Pf)\mathbb{1}_A + (Pf)\mathbb{1}_{A^c}. \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen met $\mathbb{1}_A$ geeft

$$P(f\mathbb{1}_A) + 0 = (Pf)\mathbb{1}_A + 0,$$

en vermenigvuldigen met $\mathbb{1}_{A^c}$ geeft

$$0 + P(f\mathbb{1}_{A^c}) = (Pf)\mathbb{1}_{A^c}.$$

Dus $P(f\mathbb{1}_A) = (Pf)\mathbb{1}_A$. $\square$

De volgende stelling is de spil van deze sectie:

Stelling 13: *(Mekler[7]) Zij $P : L^\infty(\Sigma) \to L^\infty(\Sigma)$ een operator, dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

- ***(a)*** *De operator P is een continue positieve projectie, het beeld is een deelruimte van $L^\infty(\Sigma)$ en $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$;*
- ***(b)*** *Er is een sub-σ-algebra $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ en een positieve functie $\phi \in \left(L^\infty(\Sigma)\right)^*$ zodat geldt*

$$\mathbb{E}\left(\phi|\mathcal{A}\right) = \mathbb{1} \quad \text{en} \quad \forall f \in L^p(\Sigma) : Pf = \mathbb{E}\left(\phi f|\mathcal{A}\right).$$

Bewijs:
[$\Longrightarrow$] Zij Y het beeld van P, dan volgt uit continuïteit van P dat Y gesloten is. Bovendien geldt dat Y een lattice is (zie [8, p.218]). Dus m.b.v. lemma 11 volgt dat er een sub-σ-algebra $\mathcal{A}$ is, zodat geldt

$$Y = L^\infty(\mathcal{A}).$$

Definieer nu de functionaal

$$\Phi : L^2(\Sigma) \to \mathbb{R} : \Phi(x) = \int Px \, d\mathbb{P}.$$

Uit het feit dat P lineair en continu is, volgt dat Φ deze eigenschappen ook heeft. Nu volgt uit de Riesz representatie stelling dat er een $\phi \in L^2(\Sigma)$ is zodat

$$\Phi(x) = \int \phi x \, d\mathbb{P}.$$

Nu volgt dat

$$\mathbb{E}\left(\phi|\mathcal{A}\right) = \mathbb{1}.$$

Wegens lemma 12 geldt

$$\forall f, g \in L^\infty(\Sigma) : P\Big(fP(g)\Big) = P(f)P(g).$$

Nu geldt voor elke $A \in \mathcal{A}$

$$P\Big(\mathbb{1}_A Px\Big) = P\mathbb{1}_A Px = \mathbb{1}_A Px.$$

Dus voor iedere $A \in \mathcal{A}$ geldt

$$\begin{aligned}
\int_A \phi x \, d\mathbb{P} &= \int \phi x \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} \\
&= \Phi(x\mathbb{1}_A) \\
&= \int P(x\mathbb{1}_A) \, d\mathbb{P} \\
&= \int \mathbb{1}_A Px \, d\mathbb{P} \\
&= \int_A Px \, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Dus

$$\forall x \in L^\infty(\Sigma) : Px = \mathbb{E}\left(\phi x|\mathcal{A}\right).$$

[$\Longleftarrow$] Uit lemma 10 volgt dat P continu, lineair en positief is.
Er geldt voor elke $x \in L^\infty(\Sigma)$

$$\begin{aligned} P^2x &= P(Px) \\ &= P(\mathbb{E}(\phi x|\mathcal{A})) \\ &= \mathbb{E}\Big(\phi \mathbb{E}(\phi x|\mathcal{A}) \Big| \mathcal{A}\Big) \\ &= \mathbb{E}(\phi|\mathcal{A})\,\mathbb{E}(\phi x|\mathcal{A}) \\ &= Px. \end{aligned}$$

Laat Y het beeld van P zijn, dan rest nog er te bewijzen dat het een gesloten lattice deelruimte is. Het voldoet te bewijzen dat

$$\forall y \in Y : y^+ \in Y,$$

want dan volgt direct dat $y^- = (-y)^+ \in Y$. Dit houdt in dat $|y| = (y^+ + y^-) \in Y$.
(Immers, per definitie geldt

$$f^+ = f \vee 0$$

en

$$f^- = -(f \wedge 0),$$

waaruit volgt dat Y een lattice is.)

Definieer

$$A = \{\omega \in \Omega : y(\omega) \geq 0\},$$

dan geldt

$$y^+(\omega) = y\mathbb{1}_A(\omega)$$

Kies nu een $x \in L^\infty(\Sigma)$ zodat $y = Px = \mathbb{E}(\phi x|\mathcal{A})$, dan volgt

$$\begin{aligned} Py^+ &= P(y\mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{E}(\phi y \mathbb{1}_A|\mathcal{A}) \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{E}(\phi y|\mathcal{A}) \\ &= \mathbb{1}_A Py \\ &= \mathbb{1}_A y \\ &= y^+. \end{aligned}$$

Dus $y^+ \in Y$. □

De vorige stelling impliceert dat elke contractieve projectie die de constante functie $\mathbb{1}$ invariant laat een conditionele verwachting is, en omgekeerd. Voordat dit bewezen kan worden, is er een andere stelling nodig:

Stelling 14: *(Jensen's ongelijkheid) Zij $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra. Voor elke convexe functie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en elke $f \in L^1(\Sigma)$ waarvoor $\psi \circ f \in L^1(\Sigma)$ geldt*

$$\psi\Big(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\Big) \leq \mathbb{E}(\psi \circ f|\mathcal{A}) \quad \textit{in} \;\; L^1(\Sigma).$$

Bewijs: Merk op dat voor elk punt $c \in \mathbb{R}$ de convexe functie ψ een linker- en rechterafgeleide heeft. Laat $\psi'_L(c)$ de linkerafgeleide zijn en $\psi'_R(c)$ de rechterafgeleide, dan volgt

$$\psi'_R(c) \leq \psi'_L(c).$$

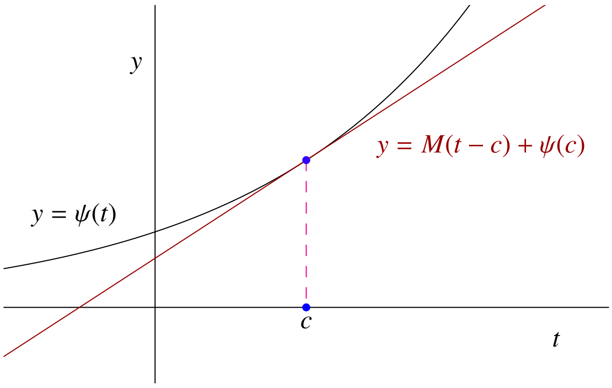
Sterker, als er een M is zodat

$$\psi'_R(c) \leq M \leq \psi'_L(c),$$

dan is de rechte lijn met richtingcoefficient M door het punt $\big(c, \psi(c)\big)$ de drager van de grafiek van ψ in het punt c, d.w.z.

$$\forall x \in \mathbb{R} : M(x - c) + \psi(c) \leq \psi(x). \tag{1}$$

Zie de onderstaande figuur voor een schets.



Zij $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra, en neem zonder verlies der algemeenheid aan dat voor elke $\omega \in \Omega$ geldt dat $f(\omega)$ en $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(\omega)$ eindig zijn.
Zij
$$C = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : at + b \leq \psi(t) \text{ voor alle } t\right\}.$$
Nu volgt uit (1) dat C niet leeg is, en voor elke $t \in \mathbb{R}$ geldt

$$\psi(t) = \sup\left\{at + b : (a,b) \in C\right\}$$

Omdat $\mathbb{R}^2$ separabel is, is er een aftelbare deelverzameling $C_0 \subseteq C$ zodat geldt $\overline{C}_0 = C$.
Dus dan geldt in het bijzonder
$$\psi(t) = \sup\left\{at + b : (a,b) \in C_0\right\}. \tag{2}$$
Neem $(a,b) \in C_0$ en substitueer $t = f(\omega)$ in de ongelijkheid $at + b \leq \psi(t)$, dan geldt

$$\forall \omega \in \Omega : af(\omega) + b \leq \psi\big(f(\omega)\big) = (\psi \circ f)(\omega).$$

Hieruit volgt (samen met de monotoniciteit en de lineairiteit van $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ en de eigenschap $\mathbb{E}(\mathbb{1}|\mathcal{A}) = \mathbb{1}$)

$$a\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) + b = \mathbb{E}(af + b|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(\psi \circ f|\mathcal{A}) \quad \text{in } L^1(\Sigma).$$

Dus voor elke $(a,b) \in C_0$ is er een $\mathbb{P}$-nulverzameling $A_{(a,b)} \in \mathcal{A}$ zodat

$$\forall \omega \notin A_{(a,b)} : \mathbb{E}(af + b|\mathcal{A})(\omega) \leq \mathbb{E}(\psi \circ f|\mathcal{A})(\omega).$$

Laat
$$A = \bigcup_{(a,b) \in D} A_{(a,b)},$$
dan geldt $A \in \mathcal{A}$ en $\mathbb{P}(A) = 0$ en

$$\forall \omega \notin A \; \forall (a,b) \in C_0 : a\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(\omega) + b \leq \mathbb{E}(\psi \circ f|\mathcal{A})(w)$$

Neem nu het supremum over C_0 en gebruik (2), dan geldt

$$\forall \omega \notin A : \psi\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(\omega)\big) \leq \mathbb{E}(\psi \circ f|\mathcal{A})(\omega) \quad \text{in } L^1(\Sigma).$$

□

Stelling 15: *(Douglas [1], Andô[2]) Zij $P : L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$ een positieve operator, dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

- ***(a)*** *P is contractieve projectie en $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$;*
- ***(b)*** *P is een conditionele verwachting, d.w.z. er is een sub-σ-algebra $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ zodat*

$$\forall f \in L^p(\Sigma) : Pf = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}).$$

Bewijs:
[$\Longrightarrow$] Merk op dat P continu is en dat P een contractie is. Uit het bewijs van stelling 13 volgt dat het beeld een gesloten deelruimte is. Daarnaast is de operator P contractief en is de p-norm strikt monotoon op $L^p(\Sigma)$. Uit stelling 13 volgt nu dat P een representatie heeft in termen van een conditionele verwachting. Deze representatie wordt gegeven door

$$Px = \mathbb{E}\left(\phi x | \mathcal{A}\right),$$

waarbij ϕ gedefinieerd is als in stelling 13.
Het voldoet te bewijzen dat $\phi = \mathbb{1}$. Laat P^* de geadjungeerde operator van P zijn. Merk op dat als geldt

$$P^*\phi = \mathbb{1},$$

dan geldt ook $\phi = \mathbb{1}$. Omdat P contractief en positief is, heeft P^* ook deze eigenschappen. Laat q de geconjugeerde van p zijn, d.w.z. kies q zodanig dat geldt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vanwege de eigenschap

$$P\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

en Hölder's ongelijkheid geldt

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= \int \mathbb{1}\mathbb{1} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int (P\mathbb{1})\mathbb{1} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int \mathbb{1}P^*\mathbb{1} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&\leq ||\mathbb{1}||_p ||P^*\mathbb{1}||_q \\
&\leq ||\mathbb{1}||_p ||\mathbb{1}||_q \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dus geldt

$$\int \mathbb{1}P^*\mathbb{1} \, \mathrm{d}\mathbb{P} = ||\mathbb{1}||_p ||\mathbb{1}||_q.$$

Hieruit volgt

$$\mathbb{1} = cP^*\mathbb{1}, \text{ voor } c \in \mathbb{R}.$$

Neem nu de q-norm van de bovenstaande uitdrukking, dan volgt

$$\begin{aligned}
1 &= ||1||_q \\
&= |c| ||P^*||_Q \\
&= |c|.
\end{aligned}$$

Uit het feit dat P^* positief is, volgt dat

$$P^*\mathbb{1} = \frac{1}{c}\mathbb{1}$$

positief moet zijn. Dus geldt $c \geq 0$, wat inhoudt dat $c = 1$. Dit betekent dat geldt

$$P^*\mathbb{1} = c.$$

Dus geldt

$$\phi = 1.$$

[$\Longleftarrow$]
Zij $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ een sub-σ-algebra en zij $f \in L^p(\Sigma)$ zodat $f > 0$. Pas nu stelling 14 toe op de convexe functie $\psi(t) = |t|^p$, dan volgen de ongelijkheden

$$0 \leq \left(\mathbb{E}\left(f | \mathcal{A}\right)\right)^p \leq \mathbb{E}\left(f^p | \mathcal{A}\right).$$

Omdat $f^p \in L^1(\Sigma)$, volgt er dat $\mathbb{E}(f^p|\mathcal{A}) \in L^1(\mathcal{A}) \subseteq L^1(\Sigma)$. Nu volgt uit de bovenstaande ongelijkheden dat geldt

$$\left(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\right)^p \in L^1(\Sigma).$$

In het bijzonder geldt

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \in L^p(\Sigma).$$

Dus $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ laat $L^p(\Sigma)$ invariant.

Per definitie van de conditionele verwachting geldt

$$\int_\Omega \mathbb{E}(f^p|\mathcal{A})\ \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega f^p\ \mathrm{d}\mathbb{P},$$

dus

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_p &= \left(\int_\Omega \left(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\right)^p\ \mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \mathbb{E}(f^p|\mathcal{A})\ \mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega f^p\ \mathrm{d}\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$ contractief is. □

Definitie 10: *Zij $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ een deelruimte, dan is $u \in Y$ met $\|u\|_p = 1$ een* ***eenheid***[5] *als aan de volgende eisen is voldaan:*

(a) $\forall f \in Y : fu = f$.

(b) $\forall \omega \in \Omega : u(\omega) \neq 0$.

Gevolg 16: *Zij $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ een lattice deelruimte, dan geldt*

Y is gesloten $\iff$ Er is een contractieve projectie $P : L^p(\Sigma) \to L^p(\Sigma)$ zodat geldt $Y = \mathrm{Ran}\, P$.

Bewijs:
[$\Longrightarrow$] Neem aan dat $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ gesloten is. Er mag zonder verlies der algemeenheid aangenomen worden dat Y een eenheid u heeft. Merk op dat deze eenheid niet per se gelijk hoeft te zijn aan $\mathbb{1}$. Constueer een nieuwe (isomorfe) kansruimte $L^p(\Sigma, \mu)$ waar $\mathbb{1}$ wel een eenheid is als volgt:

$$\mu(A) := \int_A u^p\ \mathrm{d}\mathbb{P} \ \text{ voor alle } A \in \Sigma.$$

Merk op dat $\mathrm{supp}(u) = \Omega$, want elke coördinaat van u is ongelijk aan nul. Hieruit volgt direct dat de kansmaten $\mathbb{P}$ en μ equivalent zijn, want er geldt $\mu \ll \mathbb{P} \ll \mu$.
Beschouw nu de afbeelding

$$\begin{array}{rccc} J : & L^p(\Sigma,\mu) & \to & L^p(\Sigma,\mathbb{P}) \\ & J(f) & = & fu. \end{array}$$

Deze afbeelding is een surjectieve isometrie:
Laat $f \in L^p(\Sigma, \mu)$, dan geldt

$$\begin{aligned}
\|Jf\|_p &= \|fu\|_p \\
&= \|f\|_p \cdot \|u\|_p \\
&= \|f\|_p.
\end{aligned}$$

[5]De existentie van eenheden in deelruimten van $L^p(\Sigma)$ is een gevolg van het keuzeaxioma. Het voert te ver om dit nu uit te werken. Zie [8] en [9] voor de uitwerking.

De inverse van J wordt gegeven door

$$\begin{array}{rcccl} J^{-1} & : & L^p(\Sigma,\mathbb{P}) & \to & L^p(\Sigma,\mu) \\ & & J(g) & = & \frac{g}{u}. \end{array}$$

Merk op dat J^{-1} goedgedefinieerd is, want u is op elke coördinaat ongelijk aan nul.
Laat $g \in L^p(\Sigma,\mathbb{P})$ en definieer

$$f = \frac{g}{u},$$

dan volgt $Jg = f$. Dus J is een isomorfisme.
Omdat J een isometrie is, is J ook continu.
Definieer

$$Y_1 := J^{-1}\left[Y\right],$$

dan volgt uit continuïteit van J dat Y_1 gesloten is, en uit de definitie van J^{-1} dat Y een lattice is.
Ook geldt

$$J\mathbb{1} = \mathbb{1}u = u,$$

dus geldt $\mathbb{1} \in J^{-1}\left[Y\right]$. Nu volgt uit lemma 11 dat er een sub-σ-algebra $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ bestaat zodat geldt

$$Y_1 = L^p(\Omega,\mathcal{A},\mu).$$

Gebruik nu stelling 15, dan is conditionele verwachtingsoperator $\mathbb{E}\left(\cdot|\mathcal{A}\right)$ op $L^p(\Sigma,\mathbb{P})$ een positieve contractieve projectie van $L^p(\Sigma,\mathbb{P})$ naar Y. Zodoende ontstaat het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd} L^p(\Sigma,\mu) \arrow[r, "J"] \arrow[d, "P"'] & L^p(\Sigma,\mathbb{P}) \arrow[d, "\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})"] \\ Y_1 & Y \arrow[l, "J^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Definieer operator P als volgt:

$$\begin{array}{rcccl} P & : & L^p(\Sigma,\mathbb{P}) & \to & L^p(\Sigma,\mu) \\ & & P & = & J\mathbb{E}\left(\cdot|\mathcal{A}\right)J^{-1}. \end{array}$$

Nu volgt dat P een positieve contractieve projectie is, waarbij de beeldruimte gelijk is aan Y.

[$\Longleftarrow$] Neem aan dat $Y \subseteq L^p(\Sigma)$ het beeld van een contractieve projectie P is. Merk op dat P continu is en dat $I - P$ ook een projectie is. Nu volgt analoog aan het bewijs van stelling 6 dat Y een gesloten lattice deelruimte is. □

De volgende stelling geeft een algorimte voor de contructie van een blokbasis van de beeldruimte Y (waarbij Y gedefinieerd is als in de voorgaande stelling.)

Stelling 17: *Laat $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ een aftelbare partitie van Ω zijn, d.w.z. de indexverzameling I is aftelbaar en voor alle $k, j \in I$ met $k \neq j$ geldt*

$$\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$$

en

$$\Omega = \bigcup_{k\in I} \Omega_k.$$

Dan geldt:

(a) *De σ-algebra voortgebracht door $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ is gelijk aan*

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{k\in J} \Omega_k : J \subseteq I\right\};$$

(*b*) *Een functie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{A}$-meetbaar desda f te schrijven is als lineaire combinatie van indicatorfuncties op elke Ω_k, m.a.w.*

$$f = \sum_{k \in I} \alpha_k \mathbb{1}_{\Omega_k} \text{ voor } \alpha_k \in \mathbb{R};$$

(*c*) *Als Ω aftelbaar is, dan wordt elke σ-algebra van deelverzamelingen van Ω voortgebracht door een unieke aftelbare partitie van Ω;*

(*d*) *Laat $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ een kansruimte zijn en $\{\Omega_k\}_{k \in I}$ een aftelbare partitie van Ω, m.a.w. $\{\Omega_k\}_{k \in I}$ is een partitie en voor elke $k \in I$ geldt $\Omega_k \in \Sigma$. Als voor iedere $k \in I$ geldt $\mathbb{P}(\Omega_k) > 0$, dan geldt voor elke $f \in L^1(\Sigma)$ dat de conditionele verwachting gegeven wordt door*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = \sum_{k \in I} \left[\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f \, d\mathbb{P} \right] \mathbb{1}_{\Omega_k}.$$

BEWIJS: Zij $\{\Omega_k\}_{k \in I}$ een aftelbare partitie van Ω.

(a) Merk op dat elk element van $\mathcal{A}$ automatisch in $\sigma\big(\{\Omega_k\}_{k \in I}\big)$ zit. Het voldoet dus te bewijzen dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is.

- Merk op dat
$$\Omega = \bigcup_{k \in I} \Omega_k,$$
dus neem $J = I$. Dan geldt $\Omega \in \mathcal{A}$.

- Zij $A \in \mathcal{A}$ en schrijf
$$A = \bigcup_{k \in J} \Omega_k, \quad \text{voor } J \subseteq I.$$
Met de wetten van de Morgan geldt
$$A^c = \left(\bigcup_{k \in J} \Omega_k \right)^c = \bigcup_{k \in J^c} \Omega_k.$$
Omdat $J^c \subseteq I$, geldt $A^c \in \mathcal{A}$.

- Zij $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$ met $A_n \cap A_m = \varnothing$ voor $n \neq m$ en schrijf voor elke n:
$$A_n = \bigcup_{k \in J_n} \Omega_k, \text{ voor } J_n \subseteq I.$$
Laat
$$J = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} J_n,$$
dan volgt vanwege het feit dat de verzamelingen in (A_n) paarsgewijs disjunct zijn dat geldt
$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} A_n = \bigcup_{k \in J} \Omega_k.$$

Dus $\mathcal{A}$ is een σ-algebra.

(b) [$\Longleftarrow$] Merk op dat als f van de vorm $f = \sum_{k \in I} \alpha_k \mathbb{1}_{\Omega_k}$ is, dat f per definitie $\mathcal{A}$-meetbaar is.

[$\Longrightarrow$] Neem aan dat f $\mathcal{A}$-meetbaar is. Het is voldoende om te bewijzen dat f constant is op elke Ω_k. Stel dat er een $k \in I$ bestaat en $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_k$ met $\omega_1 \neq \omega_2$ zodat $f(\omega_1) \neq f(\omega_2)$.
Merk op dat de verzamelingen

$$A_1 = \{\omega \in \Omega_k : f(\omega) = f(\omega_1)\} \quad \text{en} \quad A_2 = \{\omega \in \Omega_k : f(\omega) = f(\omega_2)\}$$

$\mathcal{A}$-meetbaar zijn en strikte deelverzamelingen van Ω_k zijn (er geldt namelijk $\omega_2 \notin A_1$ en $\omega_1 \notin A_2$). Dit geeft een tegenstrijdigheid, dus f is te schrijven als

$$f = \sum_{k \in I} \alpha_k \mathbb{1}_{\Omega_k}.$$

(c) Neem aan dat Ω aftelbaar is en laat $\mathbb{A}$ de σ-algebra zijn van deelverzamelingen van Ω. Eerst zal worden aangetoond dat er hoogstens één partitie van Ω bestaat die $\mathbb{A}$ voorbrengt, vervolgens zal er bewezen worden dat $\mathbb{A}$ voorgebracht wordt door een partitie.

Zij I en J aftelbare verzamelingen en laat $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ en $\{\Psi_j\}_{j\in J}$ partities van Ω zijn die $\mathbb{A}$ voortbrengen. Neem $k_0 \in I$, dan is er een niet-lege $J_1 \subseteq J$ zodat

$$\Omega_{k_0} = \bigcup_{j\in J_1} \Psi_j.$$

Neem nu $j \in J_1$, dan is er een niet-lege $I_1 \subseteq I$ zodat geldt

$$\Psi_j = \bigcup_{k\in I_1} \Omega_k \subseteq \Omega_k.$$

Merk op dat $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ per definitie een paarsgewijs disjuncte collectie is, dus $I_1 = \{k_0\}$.
Stel dat dit niet het geval is, dan zijn er $k_0, k_1, \ldots$ zodat

$$\Psi_j \supseteq \bigcup_{l\geq 0} \Omega_l,$$

maar $\Psi_j \subseteq \Omega_k$.
Analoog geldt dus ook dat $J_1 = \{j\}$. Dit houdt in dat $\Omega_{k_0} = \Psi_j$. Dus elke Ω_k is bevat in een zekere Ψ_j en elke Ψ_j is gelijk aan een Ω_k. Dus de partities $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ en $\{\Psi_j\}_{j\in J}$ zijn gelijk en dus wordt $\mathbb{A}$ voortgebracht door hoogstens één (aftelbare) partitie.

Definieer voor elke $\omega \in \Omega$ de verzameling

$$A_\omega = \bigcap \{U \in \mathbb{A} : \omega \in U\},$$

dan geldt

$$A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} \neq \emptyset \Longrightarrow A_{\omega_1} = A_{\omega_2}.$$

Neem namelijk $U \in \mathbb{A}$ zodat $\omega_1 \in U$. Als $\omega_2 \notin U$, dan $\omega_2 \in U^c$ en dus volgt uit het feit dat $\mathbb{A}$ gesloten is onder het nemen van complementen dat geldt

$$A_{\omega_1} \cap A_{\omega_2} \subseteq U \cap U^c = \emptyset.$$

Dit geeft een tegenspraak met de aanname, dus geldt $\omega_2 \in U$. Dit houdt in dat $A_{\omega_2} \subseteq A_{\omega_1}$.
De andere inclusie volgt analoog. Hieruit volgt

$$A_{\omega_1} = A_{\omega_2}.$$

Verder geldt dat elke A_ω bevat is in Ω en $\omega \in A_\omega$, dus de verzameling

$$\left\{A_\omega : \omega \in \Omega\right\}$$

is een partitie van Ω.

Nu moet er nog bewezen worden dat elke A_ω een element van $\mathbb{A}$ is.
Definieer

$$B_\omega = \Omega \backslash A_\omega.$$

Merk op dat Ω aftelbaar is, dus is B_ω dat ook.

Merk op dat voor elke $s \in B_\omega$ er een $U_s \in \mathbb{A}$ is, zodat $\omega \in U_s$ en $s \notin U_s$. Dit volgt uit het feit dat $U_s \subseteq A_\omega$. In het bijzonder geldt

$$A_\omega \subseteq \bigcap_{s\in B_\omega} U_s.$$

Laat

$$t \in \bigcap_{s\in B_\omega} U_s,$$

m.a.w. $t \in U_s$ voor alle $s \in B_\omega$.
Stel $t \notin A_\omega$, dan $t \in B_\omega$. Dit betekent dat $t \notin U_t$, wat een tegenspraak geeft.
Hieruit volgt $t \in A_\omega$, dus

$$\bigcap_{s \in B_\omega} U_s \subseteq A_\omega.$$

Dus

$$A_\omega = \bigcap_{s \in B_\omega} U_s.$$

(d) Neem aan dat $f \in L^1(\Sigma)$, dan volgt uit (b) dat de functie

$$\sum_{k \in I} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{\Omega_k}$$

$\mathcal{A}$-meetbaar is. Zij $A \in \mathcal{A}$ en schrijf

$$A = \bigcup_{k \in J} \Omega_k,$$

dan volgt

$$\begin{aligned}
\int_A \sum_{k \in I} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{\Omega_k} \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_\Omega \left[\sum_{k \in I} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{\Omega_k} \right] \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \sum_{k \in J} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} \mathrm{d}\mathbb{P} \right) \mathbb{1}_{\Omega_k} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{k \in J} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int_A f \, \mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Nu volgt per definitie dat

$$\mathbb{E}\left(f|\mathcal{A}\right) = \sum_{k \in I} \left[\frac{1}{\mathbb{P}(\Omega_k)} \int_{\Omega_k} f \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right] \mathbb{1}_{\Omega_k}.$$

□

Deze stelling legt de link tussen conditionele verwachtingsoperatoren en blokbases in $\mathbb{R}^n$. Laat $\{\Omega_k\}_{k \in I}$ een partitie van Ω zijn. Dan volgt dat de partitie

$$\left\{ \mathbb{1}_{\Omega_k} : k \in I \right\}$$

de gevraagde blokbasis vormt:

Gevolg 18: *De verzameling Y gegeven door*

$$Y = L^p(\mathcal{A}) \subseteq L^p(\Sigma)$$

heeft een blokbasis.

Bewijs: Uit stelling 17 volgt dat er een partitie $\{\Omega_k\}_{k \in I}$ bestaat, zodat de verzameling $\mathcal{A}$ gegeven door

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{k \in J} \Omega_k : J \subseteq I \right\}$$

een σ-algebra is. Beschouw de verzameling

$$B = \{b_k = \mathbb{1}_{\Omega_k} : k \in I\}.$$

Deze verzameling B is de gevraagde blokbasis:

- Uit stelling 17(b) volgt dat B de ruimte Y voortbrengt;
- De onafhankelijkheid van elke b_k volgt uit het feit dat $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ een partitie is;
- Zij $\omega \in \Omega$. Omdat $\{\Omega_k\}_{k\in I}$ een partitie is geldt

  $$\exists!\Omega_k : \omega \in \Omega_k.$$

  Dus geldt

  $$\mathbb{1}_{\Omega_k}(\omega) = 1 \text{ en } \mathbb{1}_{\Omega_j}(\omega) = 0 \text{ voor alle } k \neq j.$$

  Dit houdt in dat geldt

  $$b_k(\omega) \neq 0 \text{ en } b_j(\omega) = 0 \text{ voor alle } k \neq j.$$

Dus B is een blokbasis.

Dit leidt tot dezelfde conclusie als in hoofdstuk twee, namelijk:

$\boxed{\text{DE DEELRUIMTE } Y \subseteq \mathbb{R}^n_p \text{ IS HET BEELD VAN EEN CONTRACTIEVE PROJECTIE ALLEEN ALS } Y \text{ EEN BLOKBASIS HEEFT.}}$

5 Bibliografie

Referenties

[1] Douglas, R.G., 1965. Contractive Projections on an L^1 Space. *Pacific Journal of Mathematics* Vol 15, No.2.

[2] Ando, T., 1966. Contractive Projections in L^p Spaces. *Pacific Journal of Mathematics* Vol 17, No.3.

[3] Yosida, K., 1995. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlijn.

[4] Lindenstrauss, J., Tzafriri L., 2001. *Classical Banach spaces I and II*. Springer Verlag, 55.

[5] Calvert, B., 1975. Convergence sets in reflexive Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society* 47, 423-428.

[6] Rudin, W., 1987 *Real and complex analysis* 3rd Edition. McGraw-Hill International Edition, 121.

[7] Mekler, A.A., 1974. On a representation of stochastic projections, *Systems of Processing and Transferring of Information, Trudy (LIAP)*, no. 87, 115-118.

[8] Abramovich Y.A., Aliprantis, C.D., 2002. *An Invitation to Operator Theory*. American Mathematical Society., 211-228.

[9] Abramovich Y.A., Aliprantis, C.D., 2002. *Problems in Operator Theory*. American Mathematical Society., 169-180.