De Banach-Tarski-Paradox
Koning, T. de

Teus de Koning
emailadres: tdekoning87@gmail.com

De Banach-Tarski-Paradox

Bachelorscriptie, 9 juni 2010

Scriptiebegeleiders:
Marco Streng en Gabriele Dalla Torre

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Niels Bohrweg 1, 2333 CA Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De Banach-Tarski-paradox is eigenlijk geen paradox, maar gewoon een stelling. Met behulp van het keuzeaxioma is aan te tonen dat we de eenheidsbol in eindig veel stukken kunnen verdelen, waarna we de verschillende stukken ieder op een eigen manier draaien en verplaatsen, zodat we twee bollen krijgen, die beide identiek zijn aan de oorspronkelijke bol. Het bewijs van de Banach-Tarski-paradox zullen we in verschillende stappen geven. De eerste stap is een andere 'paradox', namelijk de Hausdorffparadox, die een soortgelijke bewering doet over de eenheidssfeer S^2.

Vervolgens zullen we dit uitbreiden tot de Banach-Tarski-paradox, waarbij we onder andere gebruik maken van een stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein.

In de Banach-Tarski-paradox wordt de eenheidsbol in een aantal stukken gepartitioneerd. Wat we in Hoofdstuk 3 van deze scriptie behandelen, is de vraag hoeveel stukken we daar precies voor nodig hebben. We zullen bewijzen dat met vijf stukken een dergelijke constructie kunnen geven, en dat het met minder dan vijf stukken niet mogelijk is.

De Banach-Tarski-paradox is bewezen door Banach en Tarski in 1924. In de bibliografie staat het originele artikel van Banach en Tarski. In een artikel uit 1947 bewijst R.M. Robinson dat het met vijf stukken mogelijk is en dat vijf een ondergrens is voor het aantal stukken. Voor deze scriptie volg ik het boek van S. Wagon: 'The Banach-Tarski Paradox' waarin beide resultaten uitgebreid behandeld worden.

Dankwoord

Ik wil mijn begeleiders, Marco Streng en Gabriele Dalla Torre, hartelijk bedanken voor de vele hulp en ontelbare tips die ze mij gegeven hebben bij het schrijven van deze scriptie. Zonder hun waardevolle aanwijzingen zou deze scriptie er niet gekomen zijn.

2 Het bewijs van de Banach-Tarski-paradox

In deze scriptie staat de Banach Tarski-paradox centraal. Bij deze stelling, en ook in het vervolg, maken we gebruik van de volgende notatie. We schrijven $A = U \sqcup V$ om aan te geven dat geldt $A = U \cup V$ met $U \cap V = \emptyset$.

Stelling 1 (Banach-Tarski-paradox)**.** *Zij* $\mathbf{B}$ *de gesloten eenheidsbol in* $\mathbb{R}^3$ *en* $I_3^+(\mathbb{R})$ *de groep van oriëntatiebewarende isometriën van* $\mathbb{R}^3$*. Er bestaat een partitie*

$$\mathbf{B} = \bigsqcup_{i=1,...,n} A_i,$$

zodanig dat er elementen $g_1, ..., g_n$ *in* $I_3^+(\mathbb{R})$ *en een* $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *bestaan waarvoor geldt*

$$\mathbf{B} = \bigsqcup_{i=1,...,j} g_i(A_i) \qquad en$$
$$\mathbf{B} = \bigsqcup_{i=j+1,...,n} g_i(A_i)$$

Het bewijs van deze stelling zullen we in verschillende stappen geven. De eerste stap is de Hausdorffparadox, die in de volgende paragraaf gegeven wordt.

2.1 De Haudorffparadox

De Hausdorffparadox stelt dat we de eenheidssfeer S^2, afgezien van een aftelbare verzameling D, op een bepaalde manier in stukken kunnen verdelen, waarna we uit deze stukken twee exemplaren van dezelfde eenheidssfeer (weer afgezien van dezelfde aftelbare verzameling D) kunnen krijgen. Wat we daar precies mee bedoelen, wordt duidelijk in de volgende stelling. Hierbij is $SO_3(\mathbb{R})$ de groep van rotaties van $\mathbb{R}^3$ is.

Stelling 2 (Hausdorffparadox)**.** *Er bestaan een aftelbare verzameling* D *en disjuncte deelverzamelingen* U_1*,* U_2*,* V_1 *en* V_2 *van* $S^2 \setminus D$ *waarvoor er twee afbeeldingen* $h_1, h_2 \in SO_3(\mathbb{R})$ *bestaan, zodanig dat geldt*

$$S^2 \setminus D = U_1 \sqcup h_1(U_2) \qquad en$$
$$S^2 \setminus D = V_1 \sqcup h_2(V_2).$$

Bij het bewijs van deze stelling maken we gebruik van een zekere ondergroep G van $SO_3(\mathbb{R})$. Deze G is een zogeheten vrije groep, voorgebracht door twee elementen van $SO_3(\mathbb{R})$. Wat dat precies betekent wordt duidelijk in de volgende definities.

Definitie 3. Zij S een verzameling en S^{-1} de verzameling van alle 'inverse elementen van S', waarmee we bedoelen dat S^{-1} alle elementen van S bevat, met aan ieder element een '${}^{-1}$'-teken toegevoegd. Een *woord in* S is een eindig, mogelijk leeg, rijtje van elementen uit S. Als w een woord in S is noteren we met w^{-1} het woord in S^{-1} dat gevormd wordt door de inversen van de elementen van w in omgekeerde volgorde in een rijtje te plaatsen.

Definitie 4. Zij S een verzameling en S^{-1} de verzameling van alle inverse elementen van S. Zij w een woord in $(S \cup S^{-1})$, dan heet w *gereduceerd* als voor alle elementen $a \in S$, deze a niet direct voor of na zijn inverse element $a^{-1} \in S^{-1}$ in w voorkomt. We kunnen van een woord een gereduceerd woord maken door het te *reduceren*, wat betekent dat we iedere keer dat in het rijtje een a die direct naast zijn inverse a^{-1} voorkomt, we zowel deze a als de a^{-1} uit het rijtje verwijderen. We zeggen dan dat a *wegvalt* tegen a^{-1}.

Definitie 5. Zij G een groep en S een deelverzameling van G. Dan heet G *de vrije groep voortgebracht door* S als de natuurlijke afbeelding van de verzameling van gereduceerde woorden in $\{S \cup S^{-1}\}$ naar G bijectief is.

We definiëren nu onze groep G als de ondergroep van $SO_3(\mathbb{R})$ die wordt voortgebracht door de elementen ϕ en ρ, gegeven door

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$\rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Voor ons bewijs is het cruciaal dat $G = \langle \phi, \rho \rangle$ een vrije groep is. Om dat aan te tonen, bewijzen we eerst het volgende lemma. We willen er naar toe werken dat een niet-leeg gereduceerd woord in $\{\phi, \rho, \phi^{-1}, \rho^{-1}\}$ niet de identiteit is. Daarvoor beschouwen we alleen woorden die eindigen (dus aan de rechterkant) met ϕ, om de volgende reden. Als een niet-leeg gereduceerd woord w de identiteit zou zijn, en w eindigt met ρ of ρ^{-1}, dan zou $\phi^{-1}w\phi$ na reductie ook een niet-leeg gereduceerd woord zijn dat gelijk is aan de identiteit, en eindigt met ϕ. Als w de identiteit zou zijn en w eindigt met een aantal keer ϕ^{-1}, zeg k keer, dan beschouwen we $\phi^{-(k+1)}w\phi^{k+1}$, wat na reductie ook een niet-leeg gereduceerd woord is dat gelijk is aan de identiteit, en eindigt met ϕ. Dus om te bewijzen dat een niet-leeg gereduceerd woord niet de identiteit is, hoeven we alleen woorden te beschouwen die eindigen met ϕ.

Lemma 6. *Zij w een gereduceerd woord eindigend met ϕ, dan geldt*

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3^k} \\ \frac{b\sqrt{2}}{3^k} \\ \frac{c}{3^k} \end{pmatrix}$$

met a, b, c, $k \in \mathbb{Z}$ en met b niet deelbaar door 3.

Bewijs. We zullen dit aantonen met inductie naar de lengte van w. Voor de eerste stap in het bewijs moeten we nagaan dat het lemma geldt als de lengte van w gelijk is aan 1, wat betekent dat w gelijk is aan ϕ. In dat geval hebben we:

$$\phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{0}{3} \end{pmatrix}.$$

Hierbij zijn 1, 2 en 0 elementen van $\mathbb{Z}$ en 2 is niet deelbaar door 3, dus voor dit geval hebben we ons lemma bewezen.

Zij w een gereduceerd woord van lengte minstens 2 en stel dat het lemma waar is voor woorden van lengte kleiner dan de lengte van w. We schrijven w op één van de volgende manieren, namelijk als $\phi w'$, $\phi^{-1}w'$, $\rho w'$ of $\rho^{-1}w'$, met de lengte van w' kleiner dan de lengte van w. Wegens de inductieaanname weten we dat voor w' het lemma waar is en dat er dus geldt:

$$w' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{3^{k'}} \\ \frac{b'\sqrt{2}}{3^{k'}} \\ \frac{c'}{3^{k'}} \end{pmatrix}$$

met a', b', c', $k' \in \mathbb{Z}$ en met b' niet deelbaar door 3.

In de eerste twee gevallen, dus als w gelijk is aan $\phi w'$ of $\phi^{-1}w'$, kunnen we over w het volgende zeggen:

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3^k} \\ \frac{b\sqrt{2}}{3^k} \\ \frac{c}{3^k} \end{pmatrix}$$

met

$$a = a' \mp 4b',\ b = b' \pm 2a',\ c = 3c' \text{ en } k = k' + 1.$$

Dus zien we dat voor w ook geldt dat a, b, c, k elementen van $\mathbb{Z}$ zijn. Voor het geval dat w gelijk is aan $\rho^{\pm 1}w'$ geldt iets soortgelijks, dan geldt namelijk

$$a = 3a',\ b = b' \mp 2c',\ c = c' \pm 4b' \text{ en } k = k' + 1.$$

We moeten nu nog aantonen dat b niet deelbaar is door 3. Dat is iets ingewikkelder en daarvoor onderscheiden we de volgende gevallen: $w = \phi^{\pm 1}w' = \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}w''$, $w = \rho^{\pm 1}w' = \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}w''$, $w = \phi^{\pm 1}w' = \phi^{\pm 2}w''$ en $w = \rho^{\pm 1}w' = \rho^{\pm 2}w''$ met w'' een gereduceerd woord, mogelijk leeg. (We wijzen er op dat bij

$w = \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}w''$ en $w = \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}w''$ de $\phi^{\pm 1}$ en $\rho^{\pm 1}$ van teken mogen verschillen, bij de andere twee gevallen niet.) Het lemma geldt wegens de inductieaanname voor w'.

In de eerste twee gevallen is het eenvoudig in te zien dat b niet deelbaar is door 3: we beschouwen eerst het eerste geval. We weten dat voor w'' geldt:

$$w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a''}{3^{k''}} \\ \frac{b''\sqrt{2}}{3^{k''}} \\ \frac{c''}{3^{k''}} \end{pmatrix}$$

met a'', b'', c'', k'' elementen van $\mathbb{Z}$. (Als w'' het lege woord is, geldt dit ook.)

We kijken nu eerst naar $\rho^{\pm 1}w''$, waarvoor geldt:

$$\rho^{\pm 1}w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{3^{k'}} \\ \frac{b'\sqrt{2}}{3^{k'}} \\ \frac{c'}{3^{k'}} \end{pmatrix}.$$

met $a' = 3a''$ (de b', c' en k' zijn voor dit bewijs niet van belang). Dan geldt voor $w = \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}w''$ (het eerste geval):

$$w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi^{\pm 1}\rho^{\pm 1}w'' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi^{\pm 1} \begin{pmatrix} \frac{a'}{3^{k'}} \\ \frac{b'\sqrt{2}}{3^{k'}} \\ \frac{c'}{3^{k'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{3^{k}} \\ \frac{b\sqrt{2}}{3^{k}} \\ \frac{c}{3^{k}} \end{pmatrix}$$

met $b = b' \pm 2a'$. Als we hierin de a' invullen levert dat op: $b = b' \pm 2a' = b' \pm 6a''$. Dat betekent dat omdat b' niet deelbaar door 3 is (de inductieaanname), dat b dat ook niet is, omdat $6a''$ wel deelbaar is door 3.

Iets dergelijks geldt voor het geval $w = \rho^{\pm 1}\phi^{\pm 1}w''$: dan geldt $b = b' \mp 2c'$ en $c' = 3c'$, dus $b = b' \mp 6c''$ en ook daaruit volgt dat b niet deelbaar is door 3.

Als geldt $w = \phi^{\pm 2}w''$, hebben we $b = b' \pm 2a'$ en $a' = a'' \mp 4b''$ (hier geldt dat een verschillend teken, dus bijvoorbeeld $\phi\phi^{-1}$, niet toegestaan is, omdat w een gereduceerd woord is). Dat invullen levert op:

$$b = b' \pm 2(a'' \mp 4b'').$$

Dit kunnen we herschrijven tot

$$b = b' + b'' \pm 2a'' - 9b''.$$

Omdat geldt $b' = b'' \pm 2a''$, volgt hieruit

$$b = 2b' - 9b''.$$

Wegens de inductiehypothese, dat b' niet deelbaar is door 3, kunnen we weer concluderen dat b ook niet deelbaar is door 3. Het laatste geval, als geldt $w = \rho^{\pm 2}w''$ is soortgelijk: dan geldt $b = b' + b'' \pm 2c'' - 9b'' = 2b' - 9b''$, omdat dan ook geldt $b' = b'' \pm 2c''$. In alle vier de gevallen concluderen we dat b niet deelbaar is door 3. $\square$

Met dit lemma hebben we het cruciale onderdeel van het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 7. *De groep* $G = \langle \phi, \rho \rangle$ *is een vrije groep voortgebracht door* $\{\phi, \rho\}$.

Bewijs. De groep G is een vrije groep voortgebracht door $\{\phi, \rho\}$ als de natuurlijke afbeelding van de verzameling van gereduceerde woorden in $\{\phi, \rho, \phi^{-1}, \rho^{-1}\}$ naar G bijectief is (Definitie 5). Uit Lemma 6 en de alinea erboven weten we dat een gereduceerd woord ongelijk aan het lege woord, niet naar de identiteit afgebeeld wordt. Hieruit volgt dat de natuurlijke afbeelding van de verzameling van gereduceerde woorden in $\{\phi, \rho, \phi^{-1}, \rho^{-1}\}$ naar G injectief is. Immers, verschillende gereduceerde woorden w_1 en w_2 kunnen niet naar een zelfde element van G afgebeeld worden, omdat dan $w_1 w_2^{-1}$ een niet-leeg woord is dat naar de identiteit gestuurd wordt. (Dat $w_1 w_2^{-1}$ niet-leeg is, volgt uit het feit dat w_1 ongelijk is aan w_2. Daaruit volgt namelijk dat als we de gereduceerde woorden w_1 en w_2^{-1} (w_2^{-1} is gereduceerd omdat w_2 gereduceerd is), achter elkaar plaatsen, we niet het lege woord kunnen krijgen.)

De surjectiviteit van de afbeelding geldt automatisch, omdat elementen van G geschreven kunnen worden als rijtjes in $\phi^{\pm 1}$ en $\rho^{\pm 1}$. Dus G is een vrije groep voortgebracht door $\{\phi, \rho\}$. $\square$

Nu we weten dat G een vrije groep is kunnen we de volgende partitie van G geven:

$$G = \{\mathrm{id}\} \sqcup W_\phi \sqcup W_{\phi^{-1}} \sqcup W_\rho \sqcup W_{\rho^{-1}}. \tag{1}$$

Hierbij bedoelen we met W_ϕ de verzameling gereduceerde woorden die met ϕ beginnen (dus het meest linkse element is ϕ), met $W_{\phi^{-1}}$ de gereduceerde woorden die met ϕ^{-1} beginnen, en hetzelfde voor ρ en ρ^{-1}. We kunnen ϕ aan de linkerkant met elementen van G vermenigvuldigen, we plakken dan aan de linkerkant van een woord een ϕ vast. Op deze manier kunnen we bijvoorbeeld ϕ ook vermenigvuldigen met deelverzamelingen van G, dan plakken we bij alle elementen uit die deelverzameling een ϕ ervoor. Dat is wat er gebeurt in het volgende lemma.

Lemma 8. *Er geldt:* $G = \phi W_{\phi^{-1}} \sqcup W_\phi$.

Bewijs. Een element van G is de identiteit, of begint met ϕ, ϕ^{-1}, ρ of ρ^{-1}. De identiteit is een element van $\phi W_{\phi^{-1}}$, want $\phi^{-1} \in W_{\phi^{-1}}$, dus geldt $\mathrm{id} = \phi\phi^{-1} \in \phi W_{\phi^{-1}}$. Stel nu dat een $g \in G$ met ρ begint, dus $g = \rho g'$. Hiervoor geldt: $\phi^{-1} g \in W_{\phi^{-1}}$, dus $g = \phi\phi^{-1} g \in \phi W_{\phi^{-1}}$. Hetzelfde geldt als g met ρ^{-1} of ϕ^{-1} begint. Als $g \in G$ met ϕ begint, dan geldt vanzelfsprekend $g \in W_\phi$. Dit bewijst de inclusie $\subset$. De andere inclusie is duidelijk, dus we moeten alleen nog aantonen dat de vereniging disjunct is.

Zij g een element van $\phi W_{\phi^{-1}}$, we bewijzen dat g niet met ϕ begint. Er geldt $g = \phi g'$ met $g' \in W_\phi^{-1}$, dus $g = \phi\phi^{-1} g'' = g''$. g'' kan niet met ϕ beginnen, omdat dan g' geen gereduceerd woord is. Omdat $g = g''$ kan g ook niet met ϕ beginnen, dus $g \notin W_\phi$. $\square$

We merken op dat we in plaats van ϕ evengoed ρ hadden kunnen gebruiken. Daarom gelden de volgende drie gelijkheden, die al erg lijken op de Hausdorffparadox:

$$\begin{aligned} G &= \{\text{id}\} \sqcup W_\phi \sqcup W_{\phi^{-1}} \sqcup W_\rho \sqcup W_{\rho^{-1}}, \\ G &= \phi W_{\phi^{-1}} \sqcup W_\phi, \\ G &= \rho W_{\rho^{-1}} \sqcup W_\rho. \end{aligned} \tag{2}$$

Nu willen we in de Hausdorffparadox iets soortgelijks over de eenheidssfeer S^2 zeggen. Dat proberen we op de volgende manier. Onze groep G werkt op S^2. We kunnen dus de G-banen in S^2 beschouwen en daaruit kiezen we door het keuzeaxioma uit iedere baan een element en krijgen zo de verzameling M van representanten. We zouden graag S^2 als volgt willen schrijven:

$$S^2 = \bigsqcup_{g \in G} g(M).$$

Dat is echter onmogelijk, omdat sommige punten op de eenheidssfeer door elementen van G op hun plaats worden gelaten, waardoor deze vereniging niet meer disjunct is. Daarom definiëren we de volgende verzameling, die we de verzameling van vaste punten noemen:

$$D = \{x \in S^2 : \exists g \in G \text{ zodat } g \neq \text{id en } g(x) = x\}$$

De verzameling D is aftelbaar, omdat de groep G aftelbaar veel elementen heeft en ieder element van G (ongelijk aan de identiteit) twee vaste punten heeft, namelijk de twee punten waar de rotatie-as de eenheidssfeer snijdt.

We merken op dat D een vereniging van G-banen is. Immers, als x een vast punt is dat vast gelaten wordt door $w \in G$ en $g(x)$ een ander element van de baan van x is, dan wordt $g(x)$ vast gelaten door gwg^{-1}, want daarvoor geldt $gwg^{-1}(g(x)) = gw(x) = g(x)$.

Omdat D een vereniging van G-banen is, is $S^2 \setminus D$ dat ook. Nu nemen we M de verzameling van representanten uit de G-banen van $S^2 \setminus D$. Nu kunnen de $S^2 \setminus D$ als volgt schrijven:

$$S^2 \setminus D = \bigsqcup_{g \in G} g(M). \tag{3}$$

Deze vereniging is wel disjunct, wat als volgt in te zien is. Omdat banen per definitie disjunct zijn, zou de enige mogelijkheid voor een niet-lege doorsnede zijn, dat er g_1 en $g_2 \in G$ zijn die in dezelfde baan met representant m zitten, waarvoor geldt dat $g_1(m) = g_2(m)$. Maar dat betekent dat m een vast punt is van $g_2^{-1}g_1$, wat in tegenspraak is met het feit dat we M uit de G-banen van $S^2 \setminus D$ gekozen is.

We kunnen nu de partitie van G (1) gebruiken. Dat combineren we met bovenstaande vereniging (3) van $S^2 \setminus D$, die we daardoor als volgt kunnen schrijven:

$$S^2 \setminus D = M \sqcup \bigsqcup_{g \in W_\phi} g(M) \sqcup \bigsqcup_{g \in W_{\phi^{-1}}} g(M) \sqcup \bigsqcup_{g \in W_\rho} g(M) \sqcup \bigsqcup_{g \in W_{\rho^{-1}}} g(M)$$

We geven bovenstaande verzamelingen de volgende namen:

$$U_1 = \bigsqcup_{g \in W_\phi} g(M), \qquad U_2 = \bigsqcup_{g \in W_{\phi^{-1}}} g(M),$$
$$V_1 = \bigsqcup_{g \in W_\rho} g(M), \qquad V_2 = \bigsqcup_{g \in W_{\rho^{-1}}} g(M).$$

We passen nu de gelijkheden (2) toe wat ons het bewijs van de Hausdorffparadox geeft. Dit levert namelijk op:

$$S^2 \setminus D = U_1 \sqcup \phi(U_2) \qquad \text{en}$$
$$S^2 \setminus D = V_1 \sqcup \rho(V_2).$$

Hiermee hebben we de Hausdorffparadox (Stelling 2) bewezen, waarbij de rol van h_1 vervuld wordt door ϕ en die van h_2 door ρ. □

Eén van de gevolgen hiervan is dat er geen isometrie-invariante, sigma-additieve maat μ bestaat waarvoor alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ meetbaar zijn, en $\mu(S^2)$ positief en eindig is. Dit is als volgt in te zien: als eerste merken we op dat de aftelbare verzameling D maat 0 moet krijgen. Immers, voor $p \in S^2$ geldt $\mu(p) = 0$, anders wordt $\mu(S^2)$ oneindig. De sigma-additiviteit impliceert dan dat een aftelbare verzameling maat 0 moet krijgen. Dit betekent dat $S^2 \setminus D$ ook een positieve, eindige maat krijgt, we definiëren nu $a = \mu(S^2 \setminus D)$. Dan krijgen we de volgende tegenspraak:

$$a = \mu(S^2 \setminus D) = \mu((S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D)) = \mu(S^2 \setminus D) + \mu(S^2 \setminus D) = a + a = 2a.$$

2.2 De Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein

Met het bewijs van de Haudorffparadox hebben we de eerste belangrijke stap van het bewijs van de Banach-Tarski-paradox gegeven. Een belangrijk verschil tussen de Haudorffparadox en de Banach-Tarski-paradox is dat het in de eerste om de eenheidssfeer en in de tweede om de gesloten eenheidsbol gaat. Verder is er in de Banach-Tarski-paradox ook geen aftelbare verzameling D die niet er buiten gehouden wordt. Maar er is nog een derde verschil.

In ons bewijs van de Hausdorffparadox hebben we een partitie van $S^2 \setminus D$ gegeven, waaruit 2 kopieën van $S^2 \setminus D$ te maken zijn. Daarbij valt een verzameling M buiten de boot: die wordt niet gebruikt om twee kopieën van $S^2 \setminus D$ te vormen. Bij de Banach-Tarski-paradox mag de verzameling M niet buiten de boot vallen. We moeten een partitie geven van de bol en met *alle* delen van de partitie twee nieuwe bollen vormen. We geven eerst een definitie.

Definitie 9. Stel X is een verzameling en G een groep die werkt op X. Twee deelverzamelingen A en B van X noemen we *equidecomposabel* voor G als we voor A en B partities

$$A = \bigsqcup_{i=1,\dots,n} A_i, \qquad B = \bigsqcup_{i=1,\dots,n} B_i,$$

bestaan waarvoor geldt dat er $g_1, ..., g_n$ in G bestaan zodanig dat geldt

$$g_i(A_i) = B_i \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Dit noteren we als $A \sim_G B$.

Een voorbeeld voor deze definitie hebben we al gezien in de Hausdorffparadox. Daarin geldt namelijk

$$\begin{aligned} S^2 \setminus D &\sim_{SO_3(\mathbb{R})} V_1 \cup V_2, && \text{en} \\ S^2 \setminus D &\sim_{SO_3(\mathbb{R})} U_1 \cup U_2, && \text{met} \\ S^2 \setminus (D \cup M) &= U_1 \sqcup U_2 \sqcup V_1 \sqcup V_2. \end{aligned}$$

Omdat we één van de $S^2 \setminus D$ kunnen transleren met een element van $I_3^+(\mathbb{R})$, zodat die disjunct is met de andere $S^2 \setminus D$, geldt ook

$$S^2 \setminus (D \cup M) \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} (S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D).$$

Hierbij gebruiken we het symbool '$\sqcup$' op een andere manier, namelijk $A \sqcup A$ betekent $A \times f(A)$ met een $f \in I_3^+(\mathbb{R})$. In het vervolg zullen we deze definitie altijd gebruiken als het gaat om een verzameling die we met zichzelf verenigen.

Een ander voorbeeld van equidecomposabiliteit vinden we in de Banach-Tarski-paradox (Stelling 1), zoals te zien is in deze equivalente formulering. Het uiteindelijke bewijs zal aansluiten bij deze formulering.

Stelling 10 (Banach-Tarski-paradox, equivalente formulering)**.** *Er geldt:*

$$\mathbf{B} \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} \mathbf{B} \sqcup \mathbf{B}.$$

Dat equidecomposabiliteit een equivalentierelatie is, is gemakkelijk in te zien.

Als twee verzamelingen A en B equidecomposabel zijn, bestaat wegens de afbeeldingen g_i uit Definitie 9 ook de afbeelding

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto g_i(a) \text{ voor} a \in A_i \end{aligned} \tag{4}$$

Equidecomposabiliteit is een equivalentierelatie die voldoet aan twee eigenschappen, die in het volgende lemma gegeven zijn.

Lemma 11. (a) *Als geldt $A \sim_G B$ met een bijectie $f : A \to B$, dan volgt voor alle deelverzamelingen $C \subset A$ dat geldt $C \sim_G f(C)$.*

(b) *Als geldt $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ en er geldt $A_1 \sim_G B_1$ en $A_2 \sim_G B_2$, dan geldt ook $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.*

Bewijs. Zowel (a) als (b) volgt direct uit de eigenschappen van de afbeelding (4) die wegens equidecomposabiliteit bestaat. Bij (a) kunnen we een beperking nemen van een afbeelding die bestaat wegens $A \sim_G B$. De afbeelding die bestaat uit beperkingen van g_i, en dat zijn op de doorsneden van de A_i met C precies de benodigde afbeeldingen voor equidecomposabiliteit van C met $f(C)$.

Voor (b) kunnen we twee afbeeldingen samennemen, als $f : A_1 \to B_1$ en $g : A_2 \to B_2$ dan definiëren we $h : A \to B$ door $x \in A_1$ naar $f(x)$ te sturen en als $x \in A_2$ sturen we x naar $g(x)$. Deze afbeelding geeft aan dat er equidecomposabiliteit is. □

Met behulp van deze equivalentierelatie definiëren we de volgende ordening, waarvan later zal blijken dat zij een partiële ordening is.

Definitie 12. We schrijven $A \leq_G B$ als A equidecomposabel is met een deelverzameling van B voor een groep G.

Bij het bewijs van de Hausdorffparadox hebben we al aangetoond dat geldt:

$$(S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D) \leq_{I_3^+(\mathbb{R})} S^2 \setminus D.$$

Vanzelfsprekend geldt ook

$$S^2 \setminus D \leq_{I_3^+(\mathbb{R})} (S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D).$$

We zouden nu graag willen concluderen dat $S^2 \setminus D$ equidecomposabel is met $(S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D)$, daarvoor bewijzen we eerst dat de in Definitie 12 gedefinieerde ordening een partiële ordening is. Het bewijs hiervoor wordt geleverd in de Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein. Deze stelling is analoog aan de Stelling van Cantor, Schröder en Bernstein, die stelt dat als er voor verzamelingen A en B injecties van A naar B én van B naar A bestaan, dat er dan ook een bijectie tussen A en B bestaat.

Banach merkte op dat wat in de Stelling van Cantor, Schröder en Bernstein voor bijectieve verzamelingen bewezen wordt, op een vergelijkbare manier geldt voor verzamelingen die equidecomposabel zijn. Het bewijs van de Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein maakt evenals de Stelling van Cantor, Schröder en Bernstein alleen gebruik van de in Lemma 11 gegeven eigenschappen.

Stelling 13 (Stelling van Banach, Cantor, Schröder en Bernstein)**.** *Zij X een verzameling en G een groep die werkt op X. Zijn A en B deelverzamelingen van X. Stel dat $A \leq_G B$ en $B \leq_G A$, dan geldt $A \sim_G B$.*

Bewijs. Er geldt $A \leq B$, dus er bestaat een $B_1 \subset B$ met $A \sim_G B_1$. Evenzo hebben we $A_1 \sim_G B$ voor $A_1 \subset A$. Wegens deze equidecomposabiliteit bestaan er afbeeldingen (4) die noemen we $f : A \to B_1$ en $g : A_1 \to B$. We definiëren nu C_0 als $A \setminus A_1$ en per inductie C_{n+1} als $g^{-1}f(C_n)$. Nu beschouwen we de verzameling $C := \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$.

We gaan nu de gelijkheid: $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ aantonen.

De inclusie van links naar rechts, die we eerst aantonen, is eenvoudig. Stel $x \in A \setminus C$, dan geldt $g(x) \in B$. Stel nu dat $g(x) \in f(C)$, dan is er een zekere $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $g(x) \in f(C_i)$. Maar dan is $g^{-1}g(x)$ een element van C_{i+1} en dat is een tegenspraak met de aanname $x \in A \setminus C$. Dus geldt $g(A \setminus C) \subset B \setminus f(C)$.

De andere inclusie is als volgt in te zien. Zij $x \in B \setminus f(C)$, dan is er een $y \in A_1$ waarvoor geldt $g(y) = x$. Stel dat deze y in C ligt. Dat betekent $x = g(y) \in f(C_i)$ voor zekere i, en dat is in tegenspraak met $x \in B \setminus f(C)$. Dus $g(A \setminus C) \supset B \setminus f(C)$, dus de gelijkheid is bewezen.

De gelijkheid betekent wegens Lemma 11(a) $A \setminus C \sim_G B \setminus f(C)$, omdat g een afbeelding is als (4). Bovendien is f ook een dergelijke afbeelding als (4), dus geldt wegens Lemma 11(a) ook $C \sim_G f(C)$. Dit combineren we met Lemma 11(b) en dat levert op $(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$, dus geldt $A \sim_G B$, hetgeen te bewijzen was. $\square$

Zoals hierboven al uitgelegd, is het gevolg hiervan dat $S^2 \setminus D$ equidecomposabel is met $(S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D)$ voor de groep $I_3^+(\mathbb{R})$.

Hiermee hebben we de volgende stap van het bewijs van de Banach-Tarski-paradox gegeven, ook de verzameling M wordt nu ook gebruikt om twee kopieën van $S^2 \setminus D$ te vormen. In de volgende paragraaf wordt het bewijs van de Banach-Tarski-paradox voltooid door in te gaan op de laatste twee verschillen tussen de Hausdorffparadox en de Banach-Tarski-paradox.

2.3 De Banach-Tarski-paradox

Zoals gezegd zullen we nog enkele stappen moeten maken om de Banach-Tarski-paradox helemaal te bewijzen. De volgende stap op weg naar het bewijs van de Banach-Tarski-paradox is het wegwerken van deze aftelbare verzameling D. Dat doen we in de volgende stelling.

Stelling 14. *Er geldt:* $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$.

Bewijs. Zij l een lijn door de oorsprong, en θ een rotatie om l met een hoek γ. We zoeken een γ waarvoor geldt $\theta^i(D) \cap \theta^j(D) = \emptyset$ voor alle $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met $i \neq j$. Zo'n γ bestaat, om de volgende reden.

De verzameling D is aftelbaar, dus $D \times D \times \mathbb{Z}_{>0}$ is ook aftelbaar. Nu beschouwen we de γ's $\in [0, 2\pi)$ waarvoor er een $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $p, q \in D$ bestaan waarvoor geldt $\theta_\gamma^i(p) = q$.

Merk op dat we zo alle γ's beschouwen waarvoor geldt $\theta_\gamma^i(D) \cap \theta_\gamma^j(D) \neq \emptyset$. Immers, als $\theta^i(D) \cap \theta^j(D) = p$, (zonder verlies van algemeenheid nemen we $i \geq j$) dan geldt $\theta_\gamma^{i-j}(\theta_\gamma^{-i}(p)) = \theta_\gamma^{-j}(p)$ en zowel $\theta_\gamma^{-i}(p)$ als $\theta_\gamma^{-j}(p)$ zijn elementen van D.

Vervolgens geldt dat voor elk element $(p, q, k) \in D \times D \times \mathbb{Z}_{>0}$ hooguit eindig veel γ's zijn waarvoor geldt $\theta_\gamma^i(p) = q$. Omdat $D \times D \times \mathbb{Z}_{>0}$ aftelbaar is, zijn er slechts aftelbaar veel γ's waarvoor geldt $\theta_\gamma^i(D) \cap \theta_\gamma^j(D) \neq \emptyset$. We kiezen een $\gamma \in [0, 2\pi)$ waarvoor dit niet geldt en laat θ de rotatie om l met als hoek deze γ zijn.

Nu definiëren we $D' := \{D \cup \theta(D) \cup \theta^2(D) \cup ...\}$. Dit geeft ons de gevraagde equidecomposabiliteit, want nu geldt:

$$S^2 = (S^2 \setminus D') \sqcup D' \sim_{SO_3(\mathbb{R})} (S^2 \setminus D') \sqcup \theta(D') = S^2 \setminus D. \qquad \square$$

Voor de eenheidssfeer hebben we tot nu toe het volgende bewezen:

$$S^2 \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2 \setminus D \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} S^2 \setminus D \sqcup S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2 \sqcup S^2.$$

We kunnen dat wat we gedaan hebben voor de eenheidssfeer uitbreiden tot de bol door elementen x in de gesloten eenheidsbol $\mathbf{B}$, ongelijk aan de oorsprong O, vanuit de oorsprong op S^2 te projecteren. Dan krijgen we:

$$\mathbf{B} \setminus O \sim_{SO_3(\mathbb{R})} \mathbf{B} \setminus (\mathbf{D} \cup O) \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} \mathbf{B} \setminus (\mathbf{D} \cup O) \sqcup \mathbf{B} \setminus (\mathbf{D} \cup O) \sim_{SO_3(\mathbb{R})} (\mathbf{B} \setminus O) \sqcup (\mathbf{B} \setminus O).$$

waarbij $\mathbf{D}$ de verzameling is van alle elementen van $\mathbf{B}$ die op D geprojecteerd zijn.

We hebben de Banach-Tarski-paradox nu bijna bewezen. De laatste stap van het bewijs is dat we aantonen dat de gesloten eenheidsbol zonder de oorsprong equidecomposabel is met de gesloten eenheidsbol inclusief de oorsprong. Hiervoor gebruiken we echter geen rotatie die een element is van $SO_3(\mathbb{R})$, maar een rotatie om een ander punt dan de oorsprong.

Stelling 15. *Er geldt:* $\mathbf{B} \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} \mathbf{B} \setminus O$

Bewijs. We kiezen een rotatie θ om het punt $(0, 0, \frac{1}{4})$ met als rotatie-as de as die evenwijdig aan de de x-as loopt en door het punt $(0, 0, \frac{1}{4})$ gaat. Voor de hoek van onze rotatie kiezen we een niet-rationaal veelvoud van 2π, waardoor voor alle i en $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ met $i \neq j$ geldt $\theta^i(O) \cap \theta^j(O) = \emptyset$. Nu kunnen we hetzelfde trucje toepassen als bij de vorige stelling, want nu definiëren we

$$O' := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \theta^i(O)$$

en dan geldt

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B} \setminus O') \cup O' \sim_{I_3^+(\mathbb{R})} (\mathbf{B} \setminus O') \cup \theta(O') = \mathbf{B} \setminus O. \qquad \square$$

Hiermee is het laatste stapje in het bewijs voltooid en is de Banach-Tarski-paradox (Stelling 10 en Stelling 1) bewezen. $\square$

3 Zo min mogelijk stukken

3.1 Het aantal stukken

Het bewijs van de Banach-Tarski-paradox zoals dat in de voorgaande paragrafen gegeven is, gaat in verschillende stappen. Dat is op zich geen probleem, maar dat wordt het wel als we de volgende vraag stellen: hoeveel stukken hebben wij precies nodig waarin we de bol moeten verdelen om daarmee twee identieke exemplaren te vormen? Deze vraag kunnen we precies maken na de volgende definitie.

Definitie 16. Zij X een verzameling en A een deelverzameling van X en G een groep die werkt op X. Een *paradoxale decompositie* van A voor de groep G is een partitie $\{A_i\}$ (met $i \in \{1, 2, ..., n\}$) van A en een partitie $\{B_i\}$ van $A \sqcup f(A)$ met $f \in G$, waarvoor geldt dat er $g_i \in G$ bestaan met $g_i(A_i) = B_i$ voor alle $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Wat stellen onszelf nu de vraag wat het minimale aantal stukken is van een paradoxale decompositie van de gesloten eenheidsbol. Hierbij bedoelen we met 'het aantal stukken' de n uit definitie 16.

Laten we eerst kijken hoeveel stukken we in een deel van het bovenstaande bewijs gebruikt hebben. Voor de equidecomposabiliteit van $S^2 \setminus (D \cup M)$ met $(S^2 \setminus D) \sqcup (S^2 \setminus D)$ gebruikten we vier stukken. Verder gebruikten we voor het aantonen van $S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2$ twee stukken. Behalve dat de M nog weggewerkt moet worden (wat we niet expliciet met een aantal stukken gedaan hebben) hebben we door deze twee stappen al 4×2 is 8 stukken gebruikt. Als we alle stappen uitwerken worden dat er nog meer. Wat we aan zullen tonen is dat het met 5 stukken mogelijk is om een paradoxale decompositie van de bol te geven.

3.2 Ondergrenzen op het aantal stukken

Zoals we in de volgende stelling zien, is vier een ondergrens voor het aantal stukken dat we nodig hebben voor een paradoxale decompositie van de eenheidssfeer.

Stelling 17. *Er bestaat geen paradoxale decompositie van S^2 voor de groep $SO_3(\mathbb{R})$ in minder dan vier stukken.*

Bewijs. Stel dat we een paradoxale decompositie van S^2 kunnen geven in een partitie van drie stukken, A_1, A_2 en A_3. Dan geldt zonder verlies van algemeenheid: $A = f(A_1) \sqcup g(A_2)$ voor zekere f en $g \in SO_3(\mathbb{R})$, maar ook $A = h(A_3)$ voor een $h \in SO_3(\mathbb{R})$. Dat is echter onmogelijk, omdat dan geldt $A_3 = h^{-1}(A) = A$ en dat is een tegenspraak, want dan zouden A_1 en A_2 leeg moeten zijn. $\square$

Het blijkt ook mogelijk om voor de eenheidssfeer een paradoxale decompositie in vier stukken te geven, wat bewezen wordt in Stelling 22. Voor de gesloten eenheidsbol is het niet mogelijk om het in vier stukken te doen, in de volgende stelling wordt bewezen dat er minstens vijf stukken nodig zijn.

Stelling 18. *Een paradoxale decompositie van de gesloten eenheidsbol* $\mathbf{B}$ *voor de groep $I_3^+(\mathbb{R})$ in minder dan vijf stukken is onmogelijk.*

Bewijs. Stel dat we voor de bol wel een paradoxale decompositie hebben met vier stukken, dus $f_1(A_1) \sqcup f_2(A_2) = \mathbf{B} = f_3(A_3) \sqcup f_4(A_4)$ met $\mathbf{B} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$. Zij S^2 de rand van $\mathbf{B}$, dus de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^3$. Nu moet er een f_i zijn die iets naar de oorsprong stuurt, anders kunnen we aan het einde niet de oorsprong twee keer krijgen. Deze f_i verplaatst dan ook de oorsprong. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we stellen dat $f_1(O) \neq O$ geldt. Dit impliceert dat S^2 niet volledig binnen $f_1(\mathbf{B})$ valt. Sterker nog, er is een gesloten hemisfeer $H \subset S^2$ met $H \cap f_1(\mathbf{B}) = \emptyset$.

Omdat $f_1(A_1) \cap H$ dus ook leeg is, moet gelden $H \subset f_2(A_2)$, dus geldt ook $f_2^{-1}(H) \subset A_2$. Merk op dat $f_2^{-1}(H)$ ook een gesloten hemisfeer is, en dus een deelverzameling van S^2 is. Dit betekent dat $(A_3 \cup A_4) \cap S^2$ een deelverzameling is van een open hemisfeer $H' = S^2 \setminus f_2^{-1}(H)$, omdat de A_i disjunct zijn. Dit betekent dat A_3 en A_4 geen van beide een gesloten hemisfeer bevatten, dus laten f_3 en f_4 de oorsprong op hun plaats. (Anders zou hetzelfde argument als voor f_1 gelden en zouden A_3 of A_4 wel een gesloten hemisfeer bevatten.) Dat de isometriën f_3 en f_4 de oorsprong op hun plaats laten, betekent dat ze S^2 op S^2 afbeelden.

Er geldt $((f_3(A_3) \cup f_4(A_4)) \cap S^2 = (f_3(A_3) \cap S^2) \cup (f_4(A_4) \cap S^2)$. Zowel $f_3(A_3) \cap S^2$ als $f_4(A_4) \cap S^2$ is echter een deelverzameling van een open hemisfeer, dus is de vereniging daarvan een deelverzameling van S^2 die niet samenvalt met S^2. Dit is in tegenspraak met $\mathbf{B} = f_3(A_3) \sqcup f_4(A_4)$. $\square$

We weten dus dat vijf stukken een ondergrens is voor een paradoxale decompositie van de gesloten eenheidsbol. Wat we nu nog aan moeten tonen, is dat het ook met vijf stukken mogelijk is. We zullen in de volgende paragrafen toewerken naar een bewijs hiervan.

3.3 Bijna de hele eenheidssfeer in vier stukken

We zullen in verschillende stappen toewerken naar een paradoxale decompositie van de gesloten eenheidsbol in vijf stukken. Als eerste geven we een paradoxale decompositie van $S^2 \setminus D$ in vier stukken, waarbij D de verzameling van vaste punten is van pagina 8. Vervolgens breiden we deze paradoxale decompositie uit tot heel S^2. Als laatste moeten we één stuk toevoegen om ook de oorsprong te verwerken. In de volgende stelling wordt de eerste stap, de paradoxale decompositie van $S^2 \setminus D$ met vier stukken gegeven.

Stelling 19. *Er bestaan U_1, U_2, V_1 en V_2 die een partitie vormen van $S^2 \setminus D$, waarvoor geldt:*

$$\begin{aligned} S^2 \setminus D &= U_1 \sqcup \phi(U_2) \qquad \text{en} \\ S^2 \setminus D &= V_1 \sqcup \rho(V_2). \end{aligned}$$

Bewijs. Als we deze gelijkheden vergelijken met de Haudorffparadox, komt dit neer op het wegwerken van de verzameling M. De verzameling M kregen we, omdat we bij de paradoxale decompositie van de vrije groep $G = \langle \phi, \rho \rangle$ de identiteit niet gebruikten. We definiëren nu de volgende verzamelingen:

$$\begin{aligned} u_1 &= W_\phi \cup \{\mathrm{id}, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, ...\}, & u_2 &= W_{\phi^{-1}} \setminus \{\phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, ...\} \\ u_3 &= W_\rho, & u_4 &= W_{\rho^{-1}}. \end{aligned}$$

Er geldt nu nog steeds $G = u_3 \sqcup \rho u_4$ en $G = u_1 \sqcup \phi u_2$. Bovendien zijn deze verenigingen nog steeds disjunct. De inclusies van rechts naar links zijn triviaal, de andere inclusies en het disjunct zijn gaan analoog aan het bewijs van Lemma 8 en werken we daarom hier niet uit.

Nu kunnen we een expliciete paradoxale decompositie van de eenheidssfeer afgezien van een aftelbare verzameling D, geven in vier stukken. Hierbij is de verzameling M, evenals in het bewijs van de Haudorffparadox, de verzameling representanten van G-banen zonder vaste punten. We definiëren nu de partitie van $S^2 \setminus D$. Een element $x \in S^2 \setminus D$, die een element is van de baan Gx met m het door het keuzeaxioma gegeven element van Gx, plaatsen we in U_i als de unieke $g \in G$ waarvoor geldt dat $g(m) = x$ een element van u_i is. Dan geldt het volgende:

$$
\begin{aligned}
S^2 \setminus D &= U_1 \sqcup \ \phi(U_2), && \text{en}\\
S^2 \setminus D &= U_3 \sqcup \ \rho(U_4), && \text{met}\\
S^2 \setminus D &= U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \sqcup U_4.
\end{aligned}
$$

□

3.4 De hele eenheidssfeer in vier stukken

De volgende stap, waarbij we het aantal stukken op vier houden, wordt het verwerken van de verzameling D in de paradoxale decompositie.

De reden dat we de aftelbare verzameling D uit moesten sluiten is dat we, gegeven de gekozen representanten uit de G-banen, een punt $x \in D$ niet kunnen schrijven als het beeld van de representant $m \in M$ van een uniek element g van G. Zoals we in het bewijs van de Haudorffparadox gezien hebben, zijn vaste punten allemaal elementen van een baan waar alleen vaste punten in zitten. Een baan bestaat dus volledig uit elementen die geen van alle vaste punten zijn, of volledig uit elementen die wel vaste punten zijn.

Gegeven een G-baan B in S^2 van vaste punten van elementen van G, bepalen we uit welke elementen van een baan B het keuzeaxioma een representant kiest. Zij B' de verzameling van de elementen $x \in B$ waarvoor geldt dat een element $w \in G$ met $w \neq \mathrm{id}$, waarvoor geldt $w(x) = x$ met $w \neq \mathrm{id}$, van minimale lengte is. Uit iedere verzameling B' (waarbij het a priori mogelijk is dat B' maar één element bevat) voor elke baan B van vaste punten, kiest het keuzeaxioma een representant m. Van de elementen van de groep die m vast laten, nemen we $w \in G$ van minimale lengte.

In Lemma 21 zullen we bewijzen dat we voor deze m alle punten $y \in B$ met een element $g \in G$ aangeven die met bepaalde eigenschappen uniek is, waarvoor geldt dat $y = g(m)$. Om Lemma 21 te bewijzen gebruiken we het volgende lemma.

Lemma 20. *Zij $m \in S^2$ een vast punt en zij w een minimaal niet-triviaal groepselement dat m vast laat. Gegeven $u \in G$ waarvoor eveneens geldt $u(m) = m$ en $u \neq w$. Dan bestaat er een $i \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $u = w^i$.*

Bewijs. Als eerste tonen we aan dat u en w commuteren. Als x een vast punt is van w, dan ligt het punt x op een as door de oorsprong en is w een rotatie daaromheen. Dat x ook een vast punt van u is betekent dat u een rotatie om dezelfde as is. Van twee rotaties w en u om dezelfde as weten we dat geldt $wu = uw$.

Het bewijs gaat per inductie naar de lengte van u. Omdat w van minimale lengte is, is de lengte van u groter dan de lengte van w, of u is triviaal.

Als de lengte van u nul is, is de stelling waar met $i = 0$.

Gegeven $u \in G$ waarvoor geldt $wu = uw$, en de lengte van u is groter dan de lengte van w, de lengte van u noemen we k. Stel dat de stelling waar is voor het geval dat de lengte van u kleiner is dan k.

We schrijven wu als $wu = w'tt^{-1}u'$ met $w = w't$ en $u = t^{-1}u'$ en t van zo groot mogelijke lengte. Als t de identiteit is, beschouwen we $w^{-1}u$, daarvan is de lengte kleiner dan de lengte van u. Immers, er geldt $wu = uw$, dus u begint met een 'blok' w. Bovendien geldt dat $w^{-1}u$ en u commuteren, omdat w en u commuteren. De lengte van $w^{-1}u$ is kleiner dan k, dus passen we de inductieaanname toe en concluderen dat er een $i' \in \mathbb{Z}$ bestaat, waarvoor geldt $w^{-1}u = w^{i'}$. Nu nemen we $i = i' + 1$ dan geldt $u = w^i$.

Als geldt $t \neq \text{id}$ en de lengte van t is groter dan de helft van de lengte van w, dan geldt dat de lengte van wu kleiner is dan de lengte van u, dus weten we uit de inductiehypothese dat er een $i \in \mathbb{Z}$ bestaat met $wu = w^i$, dus geldt $u = w^{i-1}$.

Als de lengte van t kleiner is dan of gelijk is aan de helft van de lengte van w, geldt het volgende. Omdat de lengte van uw gelijk is aan wu (want $wu = uw$ dus wu en uw hebben gelijke lengte), valt in uw een even groot stuk weg als in wu. Sterker nog, we weten precies wat daar wegvalt, namelijk $uw = u''tt^{-1}w''$ met $u = u''t$ en $w = t^{-1}w''$. Dit is waar omdat het begin en einde van w en u hetzelfde is (wegens $wu = uw$), dus omdat w eindigt met t, eindigt u ook met t en omdat u met t^{-1} begint, begint w ook met t^{-1}.

Nu schrijven we w en u als volgt: $w = t^{-1}w'''t$ en $u = t^{-1}u'''t$. Dan schrijven we $wu = uw$ als $t^{-1}w'''u'''t = t^{-1}u'''w'''t$, dus geldt $w'''u''' = u'''w'''$ en $u'''w'''$ vereenvoudigt niet meer (anders zou t van grotere lengte zijn). Het is onmogelijk dat w''' de identiteit is, want dan is ook w de identiteit, wat een tegenspraak oplevert.

Wegens het eerste deel van het bewijs (als $t = \text{id}$) geldt de stelling voor u''' en v''', dus bestaat er een $i \in \mathbb{Z}$, waarvoor geldt $u''' = (w''')^i$. Maar dan geldt ook $u = w^i$, omdat de tussenliggende $t^{-1}t$ wegvallen en $u = t^{-1}u'''t$.

Hiermee hebben we het bewijs van het lemma voltooid. □

Met behulp van dit lemma kunnen we zometeen Lemma 21 bewijzen.

We merken eerst op dat een rotatie w een product is van $\phi^{\pm 1}$'s en $\rho^{\pm 1}$'s, waardoor we w kunnen schrijven als $w = \tau_n \tau_{n-1} ... \tau_1$ met $\tau_i \in \{\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}\}$. Deze notatie gebruiken we in het volgende lemma.

Lemma 21. *Zij Gm een baan van vaste punten, met $m \in B'$ en met een minimale w waarvoor geldt $w(m) = m$. Zij $y \in Gm$, dan bestaat er een unieke $g \in G$ met de eigenschap dat g niet eindigt met τ_n^{-1} of met w, waarvoor geldt dat $g(m) = y$.*

Bewijs. Als eerste tonen we het bestaan van een dergelijke g aan. Omdat y in de baan Gm ligt, is er sowieso een g waarvoor geldt dat $g(m) = m$. Als g eindigt op w, kan w weggelaten worden, omdat geldt $w(m) = m$. In het tweede geval, als g met τ_n^{-1} eindigt, nemen we gw, waarbij het eerste element van w en het laatste element van g tegen elkaar wegvallen. A priori zou het nog kunnen dat gw met τ_n^{-1} eindigt, maar dat is onmogelijk, omdat w niet met τ_n^{-1} eindigt om de volgende reden. In dat geval zou namelijk $\tau_n^{-1} w \tau_n$ een element met kleinere lengte zou zijn die ook een punt in Gm vast laat, namelijk $\tau_n^{-1}(m)$. We concluderen dat er altijd een g met deze eigenschappen bestaat.

Nu tonen we de uniciteit van g aan. Stel we hebben $g_1, g_2 \in G$ met $g_1 \neq g_2$ en $y = g_1(m) = g_2(m)$ en g_1 en g_2 eindigen niet met τ_n^{-1} of w. Dan geldt $g_1^{-1} g_2(m) = m$, dus m is een vast punt van $g_1^{-1} g_2$. Uit Lemma 20 weten we dan dat we $g_1^{-1} g_2$ kunnen schrijven als $g_1^{-1} g_2 = w^i$ voor zekere $i \in \mathbb{Z}$. Zonder verlies van algemeenheid stellen we $i \geq 0$. Maar dit betekent dat g_1^{-1} begint met τ_n (wat een tegenspraak is met het feit dat g_1 niet met τ_n^{-1} eindigt), of in het gereduceerde $g_1^{-1} g_2$ valt heel g_1^{-1} weg, maar dan zou g_2 op w eindigen, wat ook een tegenspraak is. Hieruit concluderen we dat $g_1 = g_2$, dus de g waarvoor geldt dat $y = g(m)$ is uniek met de gegeven eigenschappen. $\square$

We hebben nu een met eigenschappen unieke g gevonden voor elementen van G-banen van vaste punten. We kunnen nu echter niet gelijk de resultaten uit paragraaf 2.1 toepassen om een paradoxale decompositie van heel S^2 in vier stukken te krijgen. Als eerste kunnen we niet alle elementen van G gebruiken, omdat nog telkens geldt $w(m) = \mathrm{id}(m)$. Daarom definiëren we U_1, U_2, U_3 en U_4 op de manier die gegeven wordt in Stelling 23.

We wijzen voor alle elementen $y \in S^2$ aan in welke U_i ze terechtkomen. Als y geen vast punt is, gaat dat zoals in Stelling 19. Als y wel een vast punt is, wordt het wat ingewikkelder. Daarvoor hebben we een andere partitie van de groep G nodig. Daarom zullen we de elementen van G opnieuw in u_i partitioneren (op een andere manier dan in Stelling 19), waarbij de gelijkheden $u_1 \sqcup \phi u_2 = G = u_3 \sqcup \rho u_4$ ook waar zijn.

Zoals gezegd, moeten we de elementen van G opnieuw indelen. Beter gezegd zullen we meerdere nieuwe partities van G geven. We zullen namelijk per G-baan de partitie in u_i maken, waarvoor ook geldt $u_1 \sqcup \phi u_2 = G = u_3 \sqcup \rho u_4$. Maar per G-baan van vaste punten verschilt het minimale element w die het punt m vast laat. Omdat w triviaal werkt op m, willen we dat w en id in hetzelfde deel van de partitie terecht komen.

Stelling 22. *Er bestaat een partitie van G in u_1, u_2, u_3 en u_4 waarvoor geldt $u_1 \sqcup \phi u_2 = G = u_3 \sqcup \rho u_4$ en waarvoor de identiteit en w in hetzelfde deel van de partitie liggen.*

Bewijs. De vorming van de partitie zal op inductieve wijze plaatsvinden, waarbij we eerst kijken naar w. Zoals gezegd moeten voor de nieuwe partitie de gelijkheden $u_1 \sqcup \phi u_2 = G = u_3 \sqcup \rho u_4$ blijven gelden. Terwille van de constructie geven we deze gelijkheden als volgt weer:

$$
\begin{aligned}
\phi(u_2) &= u_2 \cup u_3 \cup u_4 \\
\phi^{-1}(u_2 \cup u_3 \cup u_4) &= u_2 \\
\rho(u_4) &= u_1 \cup u_2 \cup u_4 \\
\rho^{-1}(u_1 \cup u_2 \cup u_4) &= u_4
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Vanaf nu noemen we $\{u_2\}$ de *bron van* ϕ en $\{u_2, u_3, u_4\}$ het *doel van* ϕ en insgelijks voor de andere inclusies.

Zoals gezegd bevinden we ons in een baan Gm van vaste punten met w minimaal en $w(m) = m$. We schrijven w weer als $w = \tau_n\tau_{n-1}\cdots\tau_1$. We zullen nu als eerste de elementen $\mathrm{id}, \tau_1, \tau_2\tau_1, \ldots, w$ indelen. Als eerste stoppen we de elementen $\{\mathrm{id}\}$ en w in u_2, u_1, u_4 of u_3 al naar gelang τ_1 gelijk is aan ϕ, ϕ^{-1}, ρ of ρ^{-1}.

Dan stellen we nu de vraag waar we $\tau_{n-1}\cdots\tau_1$ moeten plaatsen. Omdat geldt $\tau_{n-1}\cdots\tau_1 = \tau_n^{-1}(\tau_n\tau_{n-1}\cdots\tau_1) = \tau_n^{-1}(w)$, hangt dit af van waar w ingedeeld is. We stellen nu de vraag of w in één van de elementen van de bron van τ_n^{-1} ligt. Als w daarin ligt, plaatsen we $\tau_n^{-1}(w)$ in één van de elementen van het doel van τ_n^{-1}, en als w niet in de één van de elementen van bron van τ_n^{-1} ligt, plaatsen we $\tau_n^{-1}(w)$ in één van de elementen het complement van het doel van τ_n^{-1}.

We hebben nu $\tau_{n-1}\cdots\tau_1$ geplaatst. Vervolgens is $\tau_{n-2}\cdots\tau_1$ aan de beurt. Dit doen we weer door op te merken dat $\tau_{n-2}\cdots\tau_1 = \tau_{n-1}^{-1}(\tau_{n-1}\cdots\tau_1)$ en dus moeten we kijken of $\tau_{n-1}\cdots\tau_1$ wel of juist niet in één van de elementen van de bron van τ_{n-1}^{-1} ligt. Dit proces zetten we voort tot we bij τ_1 komen.

Als we bij τ_1 komen, zijn er twee dingen waar we rekening mee moeten houden. Er geldt

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_2^{-1}(\tau_2\tau_1) \qquad \text{en} \\
\tau_1 &= \tau_1(\mathrm{id})
\end{aligned}
$$

We moeten dus kijken naar de bron van τ_2^{-1}, maar ook zouden we vervolgens de identiteit wel of juist niet in het doel van τ_1 plaatsen. Dat we τ_1 kunnen plaatsen tonen we op de volgende manier aan.

Er zijn twee gevallen. In de eerste plaast kan τ_1 gelijk zijn aan ϕ of ρ. In deze gevallen zit de identiteit in één van de elementen van de bron van τ_1, dus moeten we τ_1 in één van de elementen van het doel van τ_1 plaatsen. Omdat we weten $\tau_2^{-1} \neq \tau_1$, zijn er drie opties voor het doel van τ_2^{-1}. Het kan zijn dat $\tau_2\tau_1$ in één van de elementen van de bron van τ_2^{-1} zit, het kan ook van niet. Als $\tau_2\tau_1$ er wel in zit, kijken we voor de drie opties naar de doorsnijding het doel van τ_2^{-1} met het doel van τ_1, die doorsnijding is niet leeg. Als $\tau_2\tau_1$ er niet in zit, kijken we voor de drie opties naar de doorsnijding van het complement van het doel van τ_2^{-1} met het doel van τ_1, die doorsnijding is evenmin leeg, dus kunnen we τ_1 altijd plaatsen als τ_1 gelijk is aan ϕ of ρ.

Als τ_1 gelijk zijn aan ϕ^{-1} of ρ^{-1} geldt het volgende. Dan zit de identiteit *niet* in één van de elementen van de bron van τ_1, dus moeten we τ_1 in één van de elementen van het complement van het doel van τ_1 plaatsen. Er geldt ook hier $\tau_2^{-1} \neq \tau_1$, dus zijn er weer drie opties voor het doel van τ_2. Nu kan $\tau_2\tau_1$ wel of niet in één van de elementen van de bron van τ_2^{-1} zitten. Maar er geldt dat voor alle drie de opties dat de doorsnijding van het doel van τ_2^{-1} met het complement van het doel van τ_1 niet leeg is, en ook de doorsnijding van het complement van het doel van τ_2^{-1} met het complement van het doel van τ_1 is niet leeg, voor alle drie de opties van τ_2^{-1}.

We concluderen dat we in alle gevallen τ_1 in een juiste verzameling kunnen plaatsen.

Op deze manier hebben we $\mathrm{id}, \tau_1, \tau_2\tau_1, \ldots, w$ ingedeeld, nu kijken we naar een willekeurige $g \in G$. Deze g is op unieke manier te schrijven als $g'\sigma$ met $g \in G$ en $\sigma \in \{\mathrm{id}, \tau_1,\ \tau_2\tau_1, \ldots, w\}$ waarbij σ maximale lengte heeft. Deze woorden plaatsen we nu met inductie naar de lengte van g' in de u_i. Als geldt $g' = \mathrm{id}$, dan zit g al in een u_i na bovenstaand algoritme. Als g' niet met ϕ^{-1} begint, plaatsen we $\phi g'\sigma$ in $(u_2 \cup u_3 \cup u_4)$ als $g'\sigma$ in u_2 zit en we plaatsen $g'\sigma$ in u_1 als $g'\sigma$ niet in u_2 zit. De gevallen $\phi^{-1}g'\sigma$, $\rho g'\sigma$ en $\rho^{-1}g'\sigma$ worden op soortgelijke manier geplaatst.

Deze partitie voldoet aan de gestelde eis, namelijk $u_1 \sqcup \phi u_2 = G = u_3 \sqcup \rho u_4$ omdat de elementen van G met deze voorwaarden ingedeeld zijn. Verder is het duidelijk dat in de constructie de identiteit en w in hetzelfde deel van de partitie geplaatst worden. $\square$

Nu we op deze manier een nieuwe partitie van G gegeven hebben, kunnen we de elementen van een alle G-banen van S^2 zodanig indelen dat we een paradoxale decompositie van de eenheidssfeer in vier stukken hebben. Dat bewijzen we in de volgende stelling.

Stelling 23. *Er bestaat een paradoxale decompositie van de eenheidssfeer in vier stukken, oftewel, we geven een partitie van de eenheidssfeer in vier stukken U_1, U_2, U_3 en U_4 waarvoor de volgende gelijkheden gelden:*

$$U_1 \sqcup \phi(U_2) = S^2 = U_3 \sqcup \rho(U_4).$$

Bewijs. Zoals eerder uitgelegd, zullen we de indeling in de U_i per G-baan bekijken. Merk op dat G-banen disjunct zijn en dat beelden van deelverzamelingen van een G-baan binnen die baan blijven, dus we kunnen volstaan om per G-baan een indeling in U_i te geven en daarvoor het volgende na te gaan:

$$(U_1 \cap Gm) \sqcup \phi(U_2 \cap Gm) = Gm = (U_3 \cap Gm) \sqcup \rho(U_4 \cap Gm).$$

Voor G-banen zonder vaste punten volgen we de indeling die gegeven is in Stelling 18, het bewijs dat daar gegeven is, geldt ook per G-baan.

Voor G-banen van vaste punten volgen we de volgende indeling in U_i waarbij we gebruik maken van onze nieuwe partitie van G. Voor elke G-baan B van vaste punten hebben we $m \in B$ de representant, zoals door het keuzeaxioma uit de verzameling B' gekozen aan het begin van paragraaf 3.4. Deze m is zo gekozen dat w minimaal is met $w(m) = m$. Uit Stelling 22 hebben we een partitie van

G in u_i gekregen waarvoor geldt dat de identiteit en w in hetzelfde deel van de partitie zitten. Zoals in Stelling 20 aangetoond, hebben we voor alle $y \in Gm$ een met eigenschappen unieke $g \in G$ waarvoor geldt dat $g(m) = y$. We delen het punt $y = g(m)$ in U_i in als g in u_i zit. Dat deze indeling voldoet aan de gestelde eisen, dat betekent dat de volgende gelijkheden gelden, die analoog gaan aan (5).

$$\begin{aligned} \phi(U_2) &= U_2 \cup U_3 \cup U_4 \\ \phi^{-1}(U_2 \cup U_3 \cup U_4) &= U_2 \\ \rho(U_4) &= U_1 \cup U_2 \cup U_4 \\ \rho^{-1}(U_1 \cup U_2 \cup U_4) &= U_4 \end{aligned}$$

Zij $t \in \{\phi, \phi^{-1}, \rho, \rho^{-1}\}$, we gebruiken de woorden 'bron' en 'doel' zoals bij de constructie (5) van de u_i. We moeten om deze inclusies te bewijzen, aantonen dat als geldt $y = g(m)$ en $g \in u_i$ (dus $y \in U_i$) dat $tg(m)$ in het doel van t komt als g in de bron van t ligt, en dat $tg(m)$ anders buiten het doel van t terecht komt. Als tg niet eindigt op w of op $\tau_n{-}1$ geldt dat automatisch. Er zijn dus twee gevallen waarin dit niet automatisch geldt, namelijk als tg eindigt met τ_n^{-1} of als tg eindigt met w. Het eerste geval is alleen mogelijk als g de identiteit is en $t = \tau_n^{-1}$. Dan geldt $y = m$. De unieke weergave voor $t(m)$ is $tw(m)$, en tw zit in het doel van t omdat w en de identiteit in hetzelfde deel van de partitie zitten en, en g is de identiteit, dus tw komt in het doel van t als g in de bron van t ligt en daarbuiten als g buiten de bron van t ligt. Daarom wordt $tg(m)$ in de juiste U_i geplaatst.

Het tweede geval is dat tg eindigt op w, dat betekent dat tg gelijk is aan w. Dan geldt ook $tg(m) = w(m) = m$. De unieke weergave van m is $\mathrm{id}(m)$ en de identiteit ligt in hetzelfde deel van de partitie als w. Omdat tg is w ligt w in het doel van t als g in de bron van t ligt en buiten het doel van t als g buiten de bron van t ligt. Omdat w en de identiteit in hetzelfde deel van de partitie liggen, wordt $tg(m) = m$ in de juiste U_i geplaatst. □

3.5 De Banach-Tarski-paradox in vijf stukken

Met behulp van Stelling 23 is het niet moeilijk meer om te bewijzen dat we een paradoxale decompositie van de eenheidsbol in vijf stukken kunnen geven.

Stelling 24. *Er bestaat een paradoxale decompositie van de eenheidsbol in vijf stukken waarvan één stuk uit één punt bestaat. Ofwel, er bestaan U_1, U_2, U_3, U_4 en $\{P\}$, waarvoor geldt:*

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3 \sqcup U_4 \sqcup \{P\}, \\ &\mathbf{B} = U_1 \sqcup \phi(U_2) \sqcup \sigma(P) \qquad \text{en} \\ &\mathbf{B} = U_3 \sqcup \rho(U_4), \end{aligned}$$

waarbij ϕ en ρ de bekende rotaties zijn en σ een translatie is.

Bewijs. In Stelling 23 hebben we voor elementen van S^2 aangegeven in welke U_i ze geplaatst worden. Nu plaatsen we ook de andere punten van de bol in de partitie. De punten $x \in \mathbf{B}$ die ongelijk zijn aan de oorsprong projecteren we vanuit de oorsprong op de eenheidssfeer, nu worden punten die op $a \in S^2$ projecteren in hetzelfde deel van de partitie geplaatst als a.

Het laatste probleem wat we op moeten lossen is de oorsprong. Als eerste voegen we de oorsprong zelf toe aan U_3. Daarmee hebben we de derde gelijkheid bewezen. We moeten nu alleen nog op een slimme manier een oorsprong voor de andere bol zien te vinden.

Zij x één element van de eenheidssfeer, geen vast punt van een element van G. Deze x is een element van de baan Gm, waar m de gekozen representant in Gm is. In deze baan veranderen we de indeling in U_i enigszins. In stelling 19 hebben we een partitie van G gegeven in vier stukken waarbij de identiteit in één van de vier stukken zit. Voor deze ene baan Gm draaien we deze partitie terug en doen het op de oude manier (zie (2)). Dat betekent, een element $y \in Gm$ in U_1 komt als de unieke g waarvoor geldt dat $g(m) = y$ met ϕ begint, in U_2 als g met ϕ^{-1} begint enzovoort.

Er geldt nu nog steeds:

$$(U_1 \cap Gm) \sqcup \phi(U_2 \cap Gm) = Gm = (U_3 \cap Gm) \sqcup \rho(U_4 \cap Gm),$$

wat we nodig hebben. Maar we hebben nu wel het punt m over, en dat punt kunnen we naar een ander punt transleren. We hebben in onze partitie nog een punt P nodig, en deze rol wordt vervuld door het punt m. Zij σ de translatie van P naar de oorsprong, dan gelden ook de eerste en de tweede gelijkheid en is de stelling bewezen. □

4 Bibliografie

- Banach, S. en Tarski, A., Sur la décomposation des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.* 6 (1924), pp. 244–277.
- Robinson, R.M., On the decomposition of spheres, *Fund. Math.* 34 (1947), pp. 246–260.
- Wagon, S., *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, 1994.