Stabiele Koppelingen

Brandwacht, L.

Laura Brandwacht

Stabiele Koppelingen

Bachelorscriptie, 9 juni 2010

Scriptiebegeleider: Dr. D.C. Gijswijt

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Voorwoord

Vroeger wilde ik *weddingplanner* worden. Dat ik wiskunde ging studeren lag daarom ook niet erg voor de hand. Want wie had ooit gedacht dat ik tijdens mijn bacheloronderzoek de huwelijksstelling zou tegenkomen en zou kijken naar stabiele koppelingen tussen mannen en vrouwen?

Deze scriptie is een verslag van het (literatuur-)onderzoek dat ik heb gedaan naar stabiele koppelingen, een onderwerp binnen de besliskunde. Wat mij opviel tijdens dit onderzoek was dat in veel artikelen die geschreven zijn over stabiele koppelingen veel dingen die intuïtief duidelijk zijn aangenomen worden zonder dat ze bewezen worden. Al snel besloot ik dat ik dat in mijn scriptie juist wel wilde doen. Voorbeelden hiervan zijn Lemma 1.1, Stelling 1.2 en Stelling 1.3. Wat me ook opviel was dat de notaties die werden gebruikt in artikelen vaak van elkaar verschilden en vaak moeilijk te interpreteren of contra-intuïtief waren. Ik heb in deze scriptie gekozen voor de makkelijkst te begrijpen notatie en waar nodig zelf nieuwe notaties ingevoerd. Op bladzijde 26 is een overzicht te vinden van de gebruikte notatie.

Met dit alles hoop ik dat mijn scriptie een stuk makkelijker te lezen is dan de artikelen die tot nu toe zijn verschenen over dit onderwerp, ook voor mensen die weinig basiskennis hebben op dit vlak. Mocht de wiskunde toch moeilijk te volgen zijn, dan kunnen de definities, stellingen en lemma's ook overgeslagen worden waarbij het verhaal er omheen toch te volgen blijft. Hierbij moet ik wel vermelden dat Hoofdstuk 2 een stuk technischer is dan Hoofdstuk 1.

Deze scriptie is als volgt opgebouwd: in Hoofdstuk 1 zal ik een introductie geven over koppelingen en stabiele koppelingen in het bijzonder. Ook zal ik een algoritme geven waarmee je zo'n stabiele koppeling kan vinden en zal ik een aantal eigenschappen van stabiele koppelingen bewijzen. In Hoofdstuk 2 zullen we het probleem op een iets andere manier bekijken, namelijk als Lineair Programmeringsprobleem. Dit kan ons helpen om álle stabiele koppelingen te vinden en deze onderling te vergelijken. In Hoofdstuk 3 zal ik kort ingaan op variaties van het probleem, waarbij niet perse mannen aan vrouwen gekoppeld hoeven te worden, maar bijvoorbeeld kamergenoten aan elkaar of studenten aan universiteiten.

Aangezien er in deze theoretische scriptie geen wezenlijk verschil is tussen mannen en vrouwen gelden alle definities, uitspraken en stellingen die ik noem voor het ene geslacht automatisch ook voor het andere geslacht.

Deze scriptie was nooit tot stand gekomen zonder Dion Gijswijt, ik wil hem dan ook hartelijk bedanken. Ten eerste voor het aandragen van dit prachtige onderwerp, waar ik zelf waarschijnlijk nooit op gekomen was maar me wel direct aansprak. Daarnaast voor de gesprekken waarin Dion altijd bereid was me te helpen en een zetje in de goede richting te geven maar me daarnaast vooral heel erg vrij liet in de keuze welke richting ik zelf precies op wilde. En als laatste voor de hulp bij het daadwerkelijk schrijven van deze scriptie. Zijn kritiek was altijd snel en gevat maar vooral heel erg opbouwend wat me veel plezier heeft bezorgd bij het schrijven.

Naast Dion wil ik ook graag Lodewijk Kallenberg bedanken. Voor alle Besliskundecolleges maar bovenal voor zijn enthousiasme wat me aangestoken heeft en heeft laten zien waar mijn passie ligt binnen de wiskunde.

Rest mij slechts u veel plezier toe te wensen bij het lezen van mijn scriptie.

Laura Brandwacht

1 Stabiele Koppelingen

1.1 Inleiding

We bekijken een verzameling van n mannen en n vrouwen. Elke man heeft zo zijn voorkeuren wat betreft de vrouwen. Zo heeft elke man een lijstje met daarop de vrouwen met wie hij wel gekoppeld zou willen worden. Binnen deze vrouwen bestaat ook nog een bepaalde volgorde: van bovenaan de vrouw met wie hij het liefst gekoppeld wil worden tot onderaan de vrouw met wie hij het minst graag gekoppeld wil worden. We gaan er vanuit dat er niet twee vrouwen zijn met wie een man even graag gekoppeld wil woren. Op dezelfde manier heeft ook elke vrouw een lijstje met mannen met wie ze gekoppeld wil worden in een bepaalde volgorde.

De verzameling mannen geven we aan met M en de deelverzameling hiervan waarmee een vrouw w wel gekoppeld zou willen worden met M_w. Op dezelfde manier geven we de verzameling vrouwen aan met W en de deelverzameling hiervan waarmee een man m wel gekoppeld zou willen worden met W_m. Als m in de verzameling M_w zit én w in W_m dan willen m en w dus allebei wel met elkaar gekoppeld worden. We noemen zo'n koppel (m, w) een acceptabel koppel en de verzameling van alle acceptabele koppels noemen we $A := \{(m, w) : m \in M_w, w \in W_m\}$.

De voorkeuren van mannen en vrouwen geven we aan met $>$ en $<$ waarbij we met subscript aan zullen geven over wiens voorkeur we het hebben. Zo betekent $m' >_w m$ dat vrouw w man m' prefereert boven man m. Rekening houdend met deze voorkeuren willen we de mannen en de vrouwen koppelen.

Definitie 1.1
Een <u>koppeling</u> is een verzameling van koppels, waarbij elk koppel bestaat uit één man en één vrouw en elke man en elke vrouw in maximaal één koppel voorkomt.

Een koppeling X kunnen we representeren met een matrix $x = (x_{ij})_{i \in M, j \in W}$ waarvoor geldt dat:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \text{ en } j \text{ gekoppeld onder } X \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Niet elke willekeurige koppeling zal stand houden, dit is alleen het geval als de koppeling stabiel is. In 1962 gaven Gale en Shapley [1] de volgende definitie voor een stabiele koppeling.

Definitie 1.2
Een koppeling is stabiel als er geen koppel (m, w) te vinden is waarvoor geldt dat:

- m en w zijn niet gekoppeld én
- m prefereert w boven zijn huidige partner én
- w prefereert m boven haar huidige partner.

Is een koppeling niet stabiel, dan zou zo'n koppel (m, w) de koppeling namelijk kunnen saboteren door hun huidige partner te verlaten en met elkaar verder te gaan.

Definitie 1.3
Als er wel een koppel (m, w) te vinden is met de eigenschappen uit Definitie 1.2 dan noemen we zo′n koppel een blokkerend paar.

Om iemands partner aan te geven onder een bepaalde koppeling X gebruiken we de volgende notatie:

- $w(X, m)$: partner van man m onder koppeling X
- $m(X, w)$: partner van vrouw w onder koppeling X

Voor een stabiele koppeling X geldt dus voor alle $(m, w) \in A$:
Als $w \neq w(X, m)$ dan geldt $w(X, m) >_m w$ of $m(X, w) >_w m$.

Als een persoon zijn partner onder koppeling X' prefereert boven zijn partner onder koppeling X, dan zeggen we dat hij koppeling X' prefereert boven koppeling X en geven dit aan met:

- $X' >_w X$: vrouw w prefereert koppeling X' boven koppeling X
- $X' >_m X$: man m prefereert koppeling X' boven koppeling X

Als een persoon in een koppeling X niet gekoppeld is dan prefereert hij alle koppelingen X' waarin hij wel gekoppeld is boven X.

Uit de definitie van stabiliteit volgt direct dat als er een X' is waarvoor geldt: $m = m(X', w)$, $X' >_m X$ en $X' >_w X$ dan is X niet stabiel.

1.2 Existentie

In hun artikel lieten Gale en Shapley [1] ook direct zien dat er altijd minstens één stabiele koppeling bestaat. Dit deden ze de door een algoritme te geven waarmee een koppeling te vinden is en vervolgens te bewijzen dat deze koppeling stabiel is.

Algoritme 1.1

Stap 1: Elke man doet een aanzoek aan de vrouw die hij het meest prefereert.

Stap 2: Elke vrouw bekijkt de verzameling mannen die haar tot nu toe een aanzoek hebben gedaan. Van deze mannen wijst ze iedereen af behalve diegene die ze het meest prefereert binnen deze verzameling.

Stap 3: Elke man die in de vorige ronde afgewezen is doet een aanzoek aan de vrouw die hij het meest prefereert binnen de verzameling van vrouwen die hij nooit eerder een aanzoek heeft gedaan.

Stap 4: Herhaal stap 2 en 3 todat alle mannen óf gekoppeld zijn óf niemand meer hebben wie ze een aanzoek kunnen doen.

Stelling 1.1
Algoritme 1.1 geeft een stabiele koppeling X.

Bewijs
Stel dat er een man m en een vrouw w zijn waarvoor geldt: $w >_m w(X, m)$. Aangezien m w prefereert boven zijn huidige partner, heeft hij w een aanzoek gedaan voordat hij zijn huidige partner een aanzoek deed. De enige rede voor w om m af te wijzen is dat zij een aanzoek heeft gekregen van een man m' waarvoor geldt: $m' >_w m$. Vrouw w is dus gekoppeld aan iemand die zij prefereert boven m (namelijk aan m' of aan iemand die ze nog leuker vindt). Dus de koppeling is stabiel.

$\square$

Als we de rollen van de mannen en de vrouwen in Algoritme 1.1 omwisselen (dus de vrouwen doen een aanzoek en de mannen accepteren dit of wijzen dit af) vinden we in de meeste gevallen een andere stabiele koppeling. Het algoritme waarin de rollen van de mannen en de vrouwen zijn omgewisseld, noemen we **Algoritme 1.2**.

Voorbeeld 1.1
We hebben vier mannen m_1, m_2, m_3 en m_4, vier vrouwen w_1, w_2, w_3 en w_4 en de volgende voorkeuren (waarbij de eerste in het rijtje diegene is die het meest geprefereerd wordt):

m_1: w_1, w_3, w_4, w_2	w_1: m_1, m_2, m_3, m_4
m_2: w_1, w_2, w_3, w_4	w_2: m_4, m_2, m_3, m_1
m_3: w_2, w_3, w_1, w_4	w_3: m_3, m_4, m_1, m_2
m_4: w_3, w_4, w_2, w_1	w_4: m_4, m_2, m_1, m_3

Tijdens Algoritme 1.1 zal het volgende gebeuren:

- m_1 zal w_1 een aanzoek doen, m_2 zal w_1 een aanzoek doen, m_3 zal w_2 een aanzoek doen en m_4 zal w_3 een aanzoek doen
- w_1 zal m_1's aanzoek accepteren en m_2's aanzoek afwijzen, w_2 zal m_3's aanzoek accepteren en w_3 zal m_4's aanzoek accepteren
- m_2 zal w_2 een aanzoek doen
- w_2 zal m_2's aanzoek accepteren en m_3's aanzoek afwijzen
- m_3 zal w_3 een aanzoek doen
- w_3 zal m_3's aanzoek accepteren en m_4's aanzoek afwijzen
- m_4 zal w_4 een aanzoek doen
- w_4 zal m_4's aanzoek accepteren
- niemand zal meer afgewezen worden en de koppels zijn als volgt: (m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3) en (m_4, w_4)

1.3 Perfecte koppelingen

Definitie 1.4
Een koppeling heet <u>perfect</u> als alle mannen en alle vrouwen gekoppeld zijn onder deze koppeling.

Bij een gegeven groep personen en gegeven voorkeuren, is het natuurlijk interessant om te weten of er een perfecte stabiele koppeling mogelijk is. De volgende stelling helpt ons om dit gemakkelijk na te kunnen gaan.

Stelling 1.2
Gegeven een instantie van het stabiele koppelingsprobleem tussen mannen en vrouwen hebben in elke stabiele koppeling dezelfde mensen een partner.

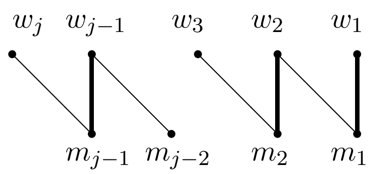
Bewijs
Stel dat de stelling niet waar is. Dan bestaan er twee stabiele koppelingen X en X' en een vrouw w_1 waarvoor geldt dat w_1 in de ene koppelingen wel gekoppeld is en in de andere niet.

We mogen aannemen dat w_1 wel gekoppeld is onder X en noemen haar partner m_1. Onder X' is w_1 dan niet gekoppeld. We noem de partner van m_1 onder X' w_2, de partner van w_2 onder X m_2, de parter van m_2 onder X' w_3 etc.

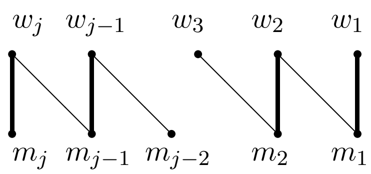
Als $X >_{m_1} X'$ dan is X' niet stabiel, want m_1 en w_1 geen koppel en ze prefereren beide X boven X'. Dus $X' >_{m_1} X$. Op dezelfde manier kunnen we bewijzen dat $X >_{w_2} X'$, $X' >_{m_2} X$, $X >_{w_3} X'$ etc. Ofwel de mannen prefereren X' en de vrouwen X.

Aangezien w_1 wel gekoppeld is onder X en niet onder X' moet er een vrouw w_j zijn die niet gekoppeld is onder X en wel onder X' óf een man m_j die wel gekoppeld is onder X en niet onder X'. In het eerste geval vind je een tegenspraak aangezien m_{j-1} en w_j beide X' prefereren boven X, dus X geen stabiele koppeling kan zijn. In het tweede geval vind je ook een tegenspraak aangezien w_j en m_j beide X prefereren boven X', dus X' geen stabiele koppeling kan zijn.

Eerste geval:



Tweede geval:



Dus er bestaat niet zo'n vrouw w_1.

$\square$

In alle stabiele koppelingen hebben dus dezelfde mannen en vrouwen een partner als in de stabiele koppeling verkregen uit Algoritme 1.1. Om uit te zoeken of er een perfecte stabiele koppeling bestaat hoeven we dus alleen maar te kijken of de stabiele koppeling uit Algoritme 1.1 perfect is.

1.4 Shortlists

Alhoewel er meestal dus meerdere stabiele koppelingen zijn, komt niet elk paar $(m, w) \in M \times W$ voor in een stabiele koppeling. Van elke man en vrouw kunnen we een lijstje maken met vrouwen respectievelijk mannen waarmee ze voorkomen in een stabiele koppeling: een zogenaamde shortlist.

Definitie 1.5
Man m en vrouw w staan op elkaars shortlist als er een stabiele koppeling bestaat waarin m en w gekoppeld zijn.

De ordening binnen zo'n shortlist is dezelfde als binnen de oorspronkelijke lijst van personen met wie iemand gekoppeld zou willen worden. Dus bovenaan diegene die het meest geprefereerd wordt en onderaan diegene die het minst geprefereerd wordt.

Lemma 1.1
w staat bovenaan m's shortlist $\Leftrightarrow$ m staat onderaan w's shortlist

Bewijs
$\Rightarrow$ Merk op dat m in ieder geval voorkomt op w's shortlist: w staat namelijk op m's shortlist dus er bestaat een stabiele koppeling waarin m en w gekoppeld zijn.

Bekijk een m' waarvoor geldt dat $m >_w m'$ (als er niet zo'n m' bestaat, dan is m zeker de onderste op w's shortlist). Als we w en m' koppelen onder X dan zijn w en m niet gekoppeld. w staat bovenaan m's shortlist dus $w >_m w(X, m)$ én $m >_w m' = m(X, w)$. Dus deze koppeling is niet stabiel. Hieruit volgst dat m' niet op w's shortlist voorkomt en dat m dus de onderste op w's shortlist moet zijn.

$\Leftarrow$ De shortlist van mensen die in geen enkele stabiele koppeling voorkomen is leeg. Stelling 1.2 vertelt ons dat dit bij evenveel mannen als vrouwen het geval is, namelijk precies bij de mannen en vrouwen die in de stabiele koppeling verkregen uit Algoritme 1.1 geen partner hebben.

Neem aan dat er in deze stabiele koppeling k koppels zijn, dan zijn er dus k mannen met minstens één vrouw op hun shortlist en k vrouwen die voorkomen op de shortlist van een man. Een vrouw kan nooit bij meer dan één man bovenaan zijn shortlist staan, dit zou namelijk volgens $\Rightarrow$ betekenen dat er twee mannen helemaal onderaan haar shortlist zouden staan. Elk van deze k vrouwen moet dus bij precies één man bovenaan zijn shortlist staan, dit moet wel de man zijn die onderaan haar shortlist staat.

$\square$

1.5 Tegengestelde belangen

Aangezien de mannen elkaars concurrenten zijn zou je misschien denken dat ze het waarschijnlijk niet vaak eens zullen zijn over of een stabiele koppeling nou wel of niet gunstig voor hen is. Anderszijds zou je denken dat een man en een vrouw samen kunnen werken om een hele gunstige stabiele koppeling te vormen en het dus juist sneller eens zijn.

Het omgekeerde blijkt echter het geval. In het boek van Gusfield en Irving [2] wordt bewezen dat er één stabiele koppeling is die de beste is voor alle mannen en juist de slechtste voor alle vrouwen.

Stelling 1.3
De stabiele koppeling verkregen uit Algoritme 1.1 is voor elke man de gunstigste en voor elke vrouw de ongunstigste stabiele koppeling die bestaat.

Bewijs
Neem aan dat X de stabiele koppeling is die verkregen is door Algoritme 1.1 uit te voeren. Stel dat er een andere stabiele koppeling X' en een man m zijn waarvoor geldt dat: $w' = w(X', m) >_m w(X, m) = w$.

Omdat $w' >_m w$ heeft m tijdens het algoritme een aanzoek gedaan aan w'. Aangezien ze aan het einde van het algoritme niet gekoppeld zijn, moet w' hem afgewezen hebben. We kunnen er zonder verlies van algemeenheid vanuit gaan dat deze afwijzing de eerste keer was dat een vrouw iemand van haar shortlist afwees (m staat op w''s shortlist omdat ze gekoppeld zijn onder de stabiele koppeling X'). Neem verder aan dat zij dit deed omdat $m' = m(X, w')$ haar een aanzoek deed.

Omdat deze afwijzing de eerste keer was dat een vrouw iemand afwees van haar shortlist, bestaat er geen stabiele koppeling waaronder m' gekoppeld is aan iemand die hij prefereert boven w'. X' kan dus nooit stabiel zijn omdat w' niet gekoppeld is aan m' terwijl ze elkaar prefereren boven hun huidige partner.

Blijkbaar is elke man na Algoritme 1.1 gekoppeld aan de bovenste vrouw van zijn shortlist. Lemma 1.1 vertelt ons nu dat elke vrouw dan gekoppeld is aan de onderste man van haar shortlist.

$\square$

Analoog is te bewijzen dat Algoritme 1.2 een stabiele koppeling geeft die de best mogelijke is voor de vrouwen en de slechts mogelijke voor de mannen. We noemen deze twee stabiele koppelingen dan ook respectievelijk *man-optimaal* en *vrouw-optimaal*.

2 Lineair Programmeringsprobleem

2.1 Inleiding

In de meeste gevallen zijn we niet (alleen maar) op zoek naar de stabiele koppeling die het beste voor de mannen of het beste voor de vrouwen is. Veel vaker is het interessant om te kijken naar welke stabiele koppeling *gemiddeld* het beste is of zelfs naar alle mogelijke stabiele koppelingen. In dat geval hebben we niet meer genoeg aan de algoritmes uit het vorige hoofdstuk.

Een manier om wel naar alle mogelijke stabiele koppelingen te kunnen kijken en deze te vergelijken is door het probleem als lineair programmeringsprobleem te formuleren. In 1988 introduceerde John. H. Vande Vate [3] deze methode. De manier waarop we dat in dit hoofdstuk doen is echter grotendeels gebasseerd op een artikel van Rothblum [4].

2.2 Voorwaarden

Zoals we in het vorige hoofdstuk al hebben gezien, kunnen we een koppeling X representeren met een matrix $x = \{x_{ij}\}_{i \in M, j \in W}$ waarvoor geldt:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \text{ en } j \text{ gekoppeld onder } X \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Niet alle matrices met alleen nullen en enen representeren een koppeling, laat staan een stabiele koppeling. Daarvoor moet aan een aantal voorwaarden voldaan worden. De voorwaarden die we zullen gebruiken komen uit het artikel van Rothblum [4] en zijn de volgende:

$$x_{mw} \geq 0 \qquad \forall\ (m, w) \in M \times W \tag{1}$$

$$\sum_{j \in W} x_{mj} \leq 1 \qquad \forall\ m \in M \tag{2}$$

$$\sum_{i \in M} x_{iw} \leq 1 \qquad \forall\ w \in W \tag{3}$$

$$x_{mw} = 0 \qquad \forall\ (m, w) \in (M \times W) \backslash A \tag{4}$$

$$\sum_{j >_m w} x_{mj} + \sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} \geq 1 \qquad \forall\ (m, w) \in A \tag{5}$$

Voordat we het in de volgende paragraaf over de laatste voorwaarde zullen hebben, zullen we nu eerst laten zien dat de geheeltallige oplossingen die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5) inderdaad stabiele koppelingen zijn.

- Voorwaarden (1), (2) en (3) eisen dat alle elementen positief zijn en dat elke man met maximaal één vrouw en elke vrouw met maximaal één man gekoppeld is zodat je inderdaad disjuncte paren krijgt.
- Voorwaarde (4) zorgt ervoor dat alleen toegestane koppels $(m, w) \in A$ voor kunnen komen.
- Voorwaarde (5) zorgt voor de stabiliteit van de koppeling. Het kan nu namelijk niet voorkomen dat er een koppel (m, w) te vinden is waarvoor geldt dat m en w niet gekoppeld zijn én $w >_m w(X, m)$ én $m >_w m(X, w)$. In dat geval zijn namelijk alledrie de termen aan de linkerkant gelijk aan 0 en wordt niet aan de ongelijkheid voldaan. In alle andere gevallen is ten minste één van de drie termen aan de linkerkant gelijk aan 1 en wordt wel aan de ongelijkheid voldaan.

2.3 Geheeltalligheid

Als laatste voorwaarde willen we dat een oplossing geheeltallig is. Want een koppeling waarin een man bijvoorbeeld *half* aan de ene vrouw en *half* aan de andere vrouw is gekoppeld kan natuurlijk niet.

Een lineair programmeringsprobleem waarvan de oplossingen geheeltallig moeten zijn is echter moeilijk op te lossen. In eerste instantie zullen we daarom geen rekening houden met deze voorwaarde. Later in dit hoofdstuk zullen we laten zien dat we dit mogen doen door te bewijzen dat de extreme oplossingen waar we naar op zoek zijn, toch altijd geheeltallig zijn.

Voor een x die voldoet aan de voorwaarden (1) t/m (5), geheeltallige of niet, kunnen we als volgt definiëren:

$$S_M(x) := \{m \in M : \sum_{j \in W} x_{mj} > 0\}, \qquad F_M(x) := \{m \in M : \sum_{j \in W} x_{mj} = 1\}$$

$$S_W(x) := \{w \in W : \sum_{i \in M} x_{iw} > 0\}, \qquad F_W(x) := \{w \in W : \sum_{i \in M} x_{iw} = 1\}$$

En voor $m \in S_M(x)$ en $w \in S_W(x)$:

$$S_m(x) := \{w \in W : x_{mw} > 0\}, \qquad S_w(x) := \{m \in M : x_{mw} > 0\}$$

Binnen zo'n verzameling $S_k(x)$ bestaat er iemand die het meest geprefereerd wordt en iemand die het minst geprefereerd wordt door k. Dit geven we aan met respectievelijk bovenster en onderster:

$$\begin{array}{lclll} w^*(x,m) & := & w^* \in S_m(x) & \text{waarvoor geldt:} & w^* \geq_m w & \forall w \in S_m(x) \\ w_*(x,m) & := & w_* \in S_m(x) & \text{waarvoor geldt:} & w_* \leq_m w & \forall w \in S_m(x) \\ & & & & & \\ m^*(x,w) & := & m^* \in S_w(x) & \text{waarvoor geldt:} & m^* \geq_w m & \forall m \in S_w(x) \\ m_*(x,w) & := & m_* \in S_w(x) & \text{waarvoor geldt:} & m_* \leq_w m & \forall m \in S_w(x) \end{array}$$

Voor een stabiele koppeling X en zijn representant x geldt dus:

$$w^*(x,m) = w(X,m) = w_*(x,m), \qquad m^*(x,w) = m(X,w) = m_*(x,w)$$

2.4 Tegengestelde belangen

In het vorige hoofdstuk zagen we al dat de belangen van mannen en vrouwen vaak tegengesteld zijn. In de lemma's die nu volgen komt dit ook weer naar voren. Lemma's 2.1 t/m 2.10 zijn afgeleid uit Lemma's 2 en 3 uit het artikel van Rothblum [4] en gelden voor $(m,w) \in A$ en x die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5).

Lemma 2.1

$[\ m \notin S_M(x)\ ]$ of $[\ m \in S_M(x)$ en $w \geq_m w^*(x,m)\ ]$

$$\Rightarrow [\ \textstyle\sum_{i \in M} x_{iw} = 1 \text{ en } m \leq_w m_*(x,w)\ ]$$

Bewijs
Als $[m \notin S_M(x)]$ of $[m \in S_M(x)$ en $w \geq_m w^*(x,m)]$ dan $\sum_{j >_m w} x_{mj} = 0$. Volgens (5) geldt dan: $\sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} \geq 1$. En volgens (3): $\sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$. Dat betekent dat $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ en $\sum_{i <_w m} x_{iw} = 0$ en dus dat $m \leq_w m_*(x,w)$.

□

Lemma 2.2

Als $\sum_{j >_m w} x_{mj} + \sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$ dan geldt ook:

$[\ \sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ en $m \leq_w m_*(x,w)\ ] \Rightarrow$

$$[\ m \notin S_M(x)\ ] \text{ of } [\ m \in S_M(x) \text{ en } w \geq_m w^*(x,m)\ ]$$

Bewijs
Als $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ en $m \leq_w m_*(x, w)$ dan $\sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$. Omdat geldt dat $\sum_{j >_m w} x_{mj} + \sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$ betekent dit dat $\sum_{j >_m w} x_{mj} = 0$. Dus als m gekoppeld is, dan is dat aan iemand die hij minder prefereert dan w of w zelf. Dus [$m \notin S_M(x)$] of [$m \in S_M(x)$ en $w \geq_m w^*(x, m)$].

$\square$

Lemma 2.3

[$m \in S_M(x)$ en $w = w^*(x, m)$] $\Rightarrow$ [$\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ en $m = m_*(x, w)$]

Bewijs
$w = w^*(x, m)$ impliceert dat $w \geq_m w^*(x, m)$ en $x_{mw} > 0$. Uit Lemma 2.1 volgt nu dat $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ en $m \leq_w m_*(x, w)$. Omdat $x_{mw} > 0$ geldt $m = m_*(x, w)$.

$\square$

Om ook de omgekeerde implicatie van Lemma 2.3 te kunnen bewijzen hebben we Lemma 2.4 nodig, dat laat zien dat $S_M(x)$ en $F_M(x)$ niet verschillen.

Lemma 2.4

$F_M(x) = S_M(x)$

Bewijs
$F_M(x) \subseteq S_M(x)$: volgt uit de definities van $F_M(x)$ en $S_M(x)$.

$S_M(x) \subseteq F_M(x)$: Lemma 2.3 vertelt ons dat $w^*(x, \cdot)$ een injectieve afbeelding is van $S_M(x)$ naar $F_W(x)$: als $w^*(x, m_1) = w$ en $w^*(x, m_2) = w$ dan geldt namelijk dat $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ dus $w \in F_W(x)$ en $m_1 = m_*(x, w) = m_2$.

Als we de cardinaliteit van $S_M(x)$ en $F_W(x)$ bekijken volgt uit de injectiviteit van $w^*(x, \cdot)$ dat $|F_W(x)| \geq |S_M(x)|$, maar aan de andere kant geldt:

$$|F_W(x)| = \sum_{j \in F_W(x)} 1 = \sum_{j \in F_W(x)} \sum_{i \in S_M(x)} x_{ij} \leq \sum_{i \in S_M(x)} 1 = |S_M(x)|$$

Dus $|F_W(x)| = |S_M(x)|$ en voor alle $m \in S_M(x)$ geldt: $\sum_{j \in F_W(x)} x_{mj} = 1$ wat betekent dat $m \in F_M(x)$.

$\square$

Dit betekent dat in alle stellingen en lemma's waar $m \in S_M(x)$ staat we ook $m \in F_M(x)$ ofwel $\sum_{j \in W} x_{mj} = 1$ mogen lezen en andersom.

Lemma 2.5

[$\sum_{i\in M} x_{iw} = 1$ en $m = m_*(x,w)$] $\Rightarrow$ [$m \in S_M(x)$ en $w = w^*(x,m)$]

Bewijs

Als $m = m_*(x,w)$ dan $m \in S_M(x)$ en in het bewijs van Lemma 2.4 hebben we laten zien dat $w^*(x,\cdot)$ een bijectieve afbeelding van $S_M(x)$ naar $F_W(x)$ is dus er is precies één w waarvoor geldt dat $m = m_*(x,w)$ en dat is $w^*(x,m)$.

□

Zoals ik in mijn voorwoord al even aanstipte gelden alle stellingen die ik bewijs voor het ene geslacht automatisch ook voor het andere geslacht. Ik geef daarom de lemma's waarbij de rollen van de mannen en vrouwen zijn omgedraaid ten opzichte van Lemma 2.1 t/m 2.5 hieronder zonder bewijs.

Lemma 2.6

[$w \notin S_W(x)$] of [$w \in S_W(x)$ en $m \geq_w m^*(x,w)$]

$$\Rightarrow [\ \sum_{j\in W} x_{mj} = 1 \text{ en } w \leq_m w_*(x,m)\ ]$$

□

Lemma 2.7

Als $\sum_{j>_m w} x_{mj} + \sum_{i>_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$ dan geldt ook:

[$\sum_{j\in W} x_{mj} = 1$ en $w \leq_m w_*(x,m)$] $\Rightarrow$

$$[\ w \notin S_W(x)\ ] \text{ of } [\ w \in S_W(x) \text{ en } m \geq_w m^*(x,w)\ ]$$

□

Lemma 2.8

[$w \in S_W(x)$ en $m = m^*(x,w)$] $\Rightarrow$ [$\sum_{j\in W} x_{mj} = 1$ en $w = w_*(x,m)$]

□

Lemma 2.9

$w \in F_W(x) \Leftrightarrow w \in S_W(x)$

□

Lemma 2.10

[$\sum_{j\in W} x_{mj} = 1$ en $w = w_*(x,m)$] $\Rightarrow$ [$w \in S_W(x)$ en $m = m^*(x,w)$]

□

2.5 Knuth

In deze paragraaf zullen we het Lemma van Knuth (1976) bekijken dat opnieuw de tegengestelde belangen van mannen en vrouwen aangeeft. Dit lemma zullen we met behulp van de lemma's uit de vorige paragraaf op een andere manier bewijzen dan Knuth zelf deed in 1976.

Binnen het Lemma van Knuth bekijken we twee stabiele koppelingen X en Y, twee disjuncte deelverzameling van M en twee disjuncte deelverzamelingen van W. De mannen respectievelijk vrouwen die X prefereren boven Y in de ene deelverzameling en de mannen respectievelijk vrouwen die Y prefereren boven X in de andere deelverzameling:

$$K_M(X) := \{m \in M : X >_m Y\}, \qquad K_M(Y) := \{m \in M : Y >_m X\}$$

$$K_W(X) := \{w \in W : X >_w Y\}, \qquad K_W(Y) := \{w \in W : Y >_w X\}$$

Lemma 2.11 (Knuth, 1976)

Bekijk twee stabiele koppelingen X en Y en de afbeelding $w(X, \cdot)$. Deze afbeelding beeldt $K_M(X)$ af op $K_W(Y)$ en $K_M(Y)$ op $K_W(X)$. Ditzelfde geldt voor de afbeelding $w(Y, \cdot)$.

Bewijs

Neem aan dat x en y de matrices zijn die de stabiele koppelingen X en Y representeren en neem $z := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$. Aangezien x en y representanten zijn van stabiele koppelingen voldoen ze aan de voorwaarden (1) t/m (5) en moet z dus ook wel aan deze voorwaarden voldoen. We mogen dus de lemma's uit de vorige paragraaf gebruiken voor z.

Kies nu een $m \in K_M(X)$. Omdat $X >_m Y$ is m in ieder geval gekoppeld onder X dus $m \in S_M(x)$. Als $\sum_{j \in W} x_{mj} > 0$ dan ook $\sum_{j \in W} z_{mj} > 0$ dus $z \in S_M(z)$. Lemma 2.4 vertelt ons dat $m \in F_M(z)$ en dus dat $\sum_{j \in W} z_{mj} = 1$. Dit betekent dat $\sum_{j \in W} y_{mj} = 1$ dus dat $m \in S_M(y)$.

Aangezien m X prefereert boven Y geldt: $w := w(X, m) >_m w(Y, m) = w^*(y, m)$. Uit Lemma 2.1 volgt nu dat $\sum_{i \in M} y_{iw} = 1$ en $m <_w m_*(y, w) = m(Y, w)$. Dus $m(X, w) = m <_w m(Y, w)$ en $Y >_w X$ waaruit volgt dat $w \in K_W(Y)$.

Door een $w \in K_W(Y)$ te kiezen en de rollen van m en w om te draaien kunnen we bewijzen dat $m(x, w) \in K_M(X)$. Waarmee bewezen is dat $w(X, \cdot)$ $K_M(X)$ afbeeldt op $K_W(Y)$.

Op analoge wijze kunnen we bewijzen dat $w(X, \cdot)$ $K_M(Y)$ afbeeldt op $K_W(X)$ en dat ditzelfde geldt voor $w(Y, \cdot)$.

$\square$

2.6 Extreme oplossingen

Voordat we kunnen bewijzen dat de extreme oplossingen die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5) geheeltallig zijn, hebben we Lemma's 1.12 t/m 1.15 nodig die gelden voor álle oplossingen x die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5). In het artikel van Rothblum [4] zijn deze lemma's verwerkt in het bewijs van Stelling 1, maar voor iets meer overzicht behandelen we ze hier apart.

In de komende lemma's worden z^*, z_* en z gebruikt, die we als volgt definiëren:

$$(z^*)_{mw} := \begin{cases} 1 & \text{als } w = w^*(x,m) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$(z_*)_{mw} := \begin{cases} 1 & \text{als } w = w_*(x,m) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$z_{mw} := (z^*)_{mw} - (z_*)_{mw}$$

Lemma's 2.3 en 2.10 vertellen ons dat voor z^* en z_* ook geldt:

$$(z^*)_{mw} := \begin{cases} 1 & \text{als } m = m_*(x,w) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$(z_*)_{mw} := \begin{cases} 1 & \text{als } m = m^*(x,^w\ ) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Er is dus een groot verschil tussen de definitie van (z^*) als we kijken vanuit de mannen of kijken vanuit de vrouwen. Ditzelfde geldt voor de definitie van (z_*). Hier moeten we goed op blijven letten bij de lemma's en bewijzen die nu volgen.

Lemma 2.12
$x_{mw} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_{mw} = 0$

Bewijs
Als $x_{mw} = 0$ dan geldt $w \neq w^*(x,m)$ en $w \neq w_*(x,m)$ dus $(z^*)_{mw} = 0$, $(z_*)_{mw} = 0$ en $z_{mw} = 0$.

□

Lemma 2.13

$\sum_{j\in W} x_{mj} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j\in W} z_{mj} = 0$

$\sum_{i\in M} x_{iw} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i\in M} z_{iw} = 0$

Bewijs
Als $\sum_{j\in W} x_{mj} = 1$ dan is er precies één w waarvoor geldt dat $w = w^*(x, m)$ en precies één w' waarvoor geldt dat $w' = w_*(x, m)$. Dus $\sum_{j\in W}(z^*)_{mj} = 1$, $\sum_{j\in W}(z_*)_{mj} = 1$ en $\sum_{j\in W} z_{mj} = 0$.

Als $\sum_{i\in M} x_{iw} = 1$ dan is er precies één m waarvoor geldt dat $m = m_*(x, w)$ en precies één m' waarvoor geldt dat $m' = m^*(x, w)$. Dus $\sum_{i\in M}(z^*)_{iw} = 1$, $\sum_{i\in M}(z_*)_{iw} = 1$ en $\sum_{i\in M} z_{iw} = 0$.

□

Lemma 2.14
$z_{mw} = 0 \qquad \forall (m, w) \in (M \times W)\backslash A$

Bewijs
Dit volgt direct uit Lemma 2.12 en het feit dat x aan voorwaarde (4) voldoet.

□

Lemma 2.15
Voor $(m, w) \in A$ geldt:

$$[\sum_{j>_m w} x_{mj} + \sum_{i>_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1] \qquad \Rightarrow \qquad [\sum_{j>_m w} z_{mj} + \sum_{i>_w m} z_{iw} + z_{mw} = 0]$$

Bewijs
Neem aan dat $\sum_{j>_m w} x_{mj} + \sum_{i>_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$ en beschouw drie gevallen:

Geval I: $[w \notin S_W(x)]$ of $[w \in S_W(x)$ en $m \geq_w m^*(x, w)]$

Aangezien $m^*(x, w) \geq m_*(x, w)$ geldt ook $m \geq m_*(x, w)$. Hieruit volgt dat als we kijken naar alle mannen die volgens w leuker zijn dan m, we in ieder geval niet $m_*(x, w)$ of $m^*(x, w)$ tegen zullen komen. Wat betekent dat $\sum_{i>_w m}(z_*)_{iw} = \sum_{i>_w m}(z^*)_{iw} = 0$

Lemma 2.6 vertelt ons dat uit de aanname volgt dat $m \in S_M(x)$ en $w \leq_m w_*(x, m)$. En aangezien $w_*(x, m) \leq_m w^*(x, m)$ geldt ook $w \leq w^*(x, m)$. Hieruit volgt dat als we kijken naar alle vrouwen die volgens m leuker zijn dan w en naar w zelf, we zeker $w_*(x, m)$ en $w^*(x, m)$ tegen zullen komen. Wat betekent dat $\sum_{j>_m w}(z^*)_{mj} + (z^*)_{mw} = \sum_{j>_m w}(z_*)_{mj} + (z_*)_{mw} = 1$.

Uit deze gegevens volgt nu dat $\sum_{j>_m w} z_{mj} + \sum_{i>_w m} z_{iw} + z_{mw} = 0$.

Geval II: $[m \notin S_M(x)]$ of $[m \in S_M(x)$ en $w \geq_m w^*(x,w)]$

In dit geval is op analoge wijze te bewijzen dat $m \leq m_*(x,w)$, $\sum_{j>_m w}(z^*)_{mj} = \sum_{j>_m w}(z_*)_{mj} = 0$, $\sum_{i>_w m}(z_*)_{iw} + (z_*)_{mw} = \sum_{i>_w m}(z^*)_{iw} + (z^*)_{mw} = 1$ en dus $\sum_{j>_m w} z_{mj} + \sum_{i>_w m} z_{iw} + z_{mw} = 0$.

Geval III: $w \in S_W(x)$, $m \in S_M(x)$, $m <_w m^*(x,w)$ en $w <_m w^*(x,m)$

Hieruit volgt direct dat $(z^*)_{mw} = (z_*)_{mw} = 0$.

Als we naar alle mannen kijken die volgens w leuker zijn dan m, dan komen we zeker $m^*(x,w)$ tegen. En als we naar alle vrouwen kijken die volgens m leuker zijn dan w, dan komen we ook zeker $w^*(x,m)$ tegen. Dus $\sum_{i>_w m}(z_*)_{iw} = 1$ en $\sum_{j>mw}(z^*)_{mj} = 1$.

Als $m \leq m_*(x,w)$ dan $\sum_{i>_m m} x_{iw} = 1$ en omdat $w <_m w^*(x,m)$ geldt $\sum_{j>_m w} x_{mj} > 0$ dus dan $\sum_{j>mw} x_{mj} + \sum_{i>_w m} x_{iw} > 1$ wat in tegenspraak is met onze aanname. Dus $m >_w m_*(x,w)$. Op dezelfde manier is aan te tonen dat $w >_m w_*(x,m)$.

Hieruit volgt dat als we naar alle mannen kijken die volgens w leuker zijn dan m, we $m_*(x,w)$ niet tegen zullen komen. Op dezelfde manier geldt dat als we naar alle vrouwen kijken die volgens m leuker zijn dan w, we $w_*(x,m)$ niet tegen zullen komen. Dus $\sum_{i>_w m}(z^*)_{iw} = 0$ en $\sum_{j>_m w}(z_*)_{mj} = 0$.

Dit alles samen geeft $\sum_{j>_m w} z_{mj} + \sum_{i>_w m} z_{iw} + z_{mw} = 0$.

$\square$

Stelling 2.1

De extreme punten van de verzameling van oplossingen die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5) zijn geheeltallig.

Bewijs

Noem de verzameling van oplossingen die voldoen aan de voorwaarden (1) t/m (5) C en neem x een extreem punt van C. Hieruit volgt dat voor alle $0 < \alpha < 1$ geldt dat er geen $x' \neq x$ en $x'' \neq x$ in C zijn waarvoor geldt dat $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$.

We zullen laten zien dat voor voldoende kleine $\epsilon > 0$ geldt dat $x + \epsilon z$ en $x - \epsilon z$ ook aan de voorwaarden (1) t/m (5) voldoen:

(1) Als $x_{mw} = 0$ dan $z_{mw} = 0$ (Lemma 2.12) dus $(x+\epsilon z)_{mw} = (x - \epsilon z)_{mw} = 0$.

Als $x_{mw} > 0$ dan kunnen we ϵ klein genoeg kiezen zodat $(x+\epsilon z)_{mw} \geq 0$ en $(x-\epsilon z)_{mw} \geq 0$

(2) Als $\sum_{j \in W} x_{mj} = 1$ dan $\sum_{j \in W} z_{mj} = 0$ (Lemma 2.13) dus $\sum_{j \in W}(x + \epsilon z)_{mj} = 1$ en $\sum_{j \in W}(x - \epsilon z)_{mj} = 1$.

Als $\sum_{j \in W} x_{mj} < 1$ dan kunnen we ϵ klein genoeg kiezen zodat $\sum_{j \in W}(x + \epsilon z)_{mj} \leq 1$ en $\sum_{j \in W}(x - \epsilon z)_{mj} \leq 1$.

(3) Als $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$ dan $\sum_{i \in M} z_{iw} = 0$ (Lemma 2.13) dus $\sum_{i \in M}(x + \epsilon z)_{iw} = 1$ en $\sum_{i \in M}(x - \epsilon z)_{iw} = 1$.

Als $\sum_{i \in M} x_{iw} < 1$ dan kunnen we ϵ klein genoeg kiezen zodat $\sum_{i \in M}(x + \epsilon z)_{iw} \leq 1$ en $\sum_{i \in M}(x - \epsilon z)_{iw} \leq 1$.

(4) $z_{mw} = 0 \ \forall (m, w) \in (M \times W) \backslash A$ (Lemma 2.14) dus $(x + \epsilon z)_{mw} = 0$ en $(x - \epsilon z)_{mw} = 0 \ \forall (m, w) \in (M \times W) \backslash A$.

(5) Als $\sum_{j >_m w} x_{mj} + \sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} = 1$ dan $\sum_{j >_m w} z_{mj} + \sum_{i >_w m} z_{iw} + z_{mw} = 0$ (Lemma 2.15) dus $\sum_{j >_m w}(x + \epsilon z)_{mj} + \sum_{i >_w m}(x + \epsilon z)_{iw} + (x + \epsilon z)_{mw} = 1$ en $\sum_{j >_m w}(x - \epsilon z)_{mj} + \sum_{i >_w m}(x - \epsilon z)_{iw} + (x - \epsilon z)_{mw} = 1$.

Als $\sum_{j >_m w} x_{mj} + \sum_{i >_w m} x_{iw} + x_{mw} > 1$ dan kunnen we ϵ klein genoeg kiezen zodat $\sum_{j >_m w}(x + \epsilon z)_{mj} + \sum_{i >_w m}(x + \epsilon z)_{iw} + (x + \epsilon z)_{mw} \geq 1$ en $\sum_{j >_m w}(x - \epsilon z)_{mj} + \sum_{i >_w m}(x - \epsilon z)_{iw} + (x - \epsilon z)_{mw} \geq 1$.

Hieruit volgt dat $(x + \epsilon z) \in C$ en $(x - \epsilon z) \in C$. Uit het feit dat x een extreem punt van C is en geldt dat $x = \frac{1}{2}(x + \epsilon z) + \frac{1}{2}(x - \epsilon z)$ volgt dat $x + \epsilon z = x$ en $x - \epsilon z = x$. Dit betekent dat $z = 0$, waaruit volgt dat $z^* = z_*$.

Dus voor alle $m \in S_M(x)$ geldt $w^*(x, m) = w_*(x, m)$ en voor alle $w \in S_W(x)$ geldt $m_*(x, w) = m^*(x, w)$. Dus de leukste vrouw aan wie een man *gekoppeld* is, is gelijk aan de minst leuke vrouw aan wie een man *gekoppeld* is en de leukste man aan wie een vrouw *gekoppeld* is, is gelijk aan de minst leuke man aan wie een vrouw *gekoppeld* is. Dus iedereen is aan maximaal één persoon gekoppeld.

Uit Lemma's 2.4 en 2.9 wisten we al dat voor $m \in S_M(x)$ en $w \in S_W(x)$ geldt dat $\sum_{j \in W} x_{mj} = 1$ en $\sum_{i \in M} x_{iw} = 1$. Dit betekent dat x een geheeltallige oplossing is.

$\square$

3 Variaties

3.1 Inleiding

Een stabiele koppeling tussen mannen en vrouwen is slechts een voorbeeld van de stabiele koppelingen die mogelijk zijn. In dit hoofdstuk worden twee variaties besproken die vaak genoemd worden in artikelen die over stabiele koppelingen gaan. Als eerste een voorbeeld van een many-to-one koppeling: de koppeling tussen studenten en universiteiten. Zoals de naam al zegt wordt in dit soort koppelingen niet één-op-één gekoppeld, maar meerdere studenten aan één universiteit. Daarna bespreken we het roommates-probleem waarbij er geen onderscheid is tussen mannen en vrouwen maar er één groep is.

3.2 College Admission

Bij het college admission-probleem hebben we te maken met studenten en universiteiten en hun voorkeuren. We gaan er vanuit dat elke universiteit U een maximaal aantal studenten q_U aan kan nemen. In het artikel van Rothblum [4] wordt beschreven hoe we dit probleem kunnen transformeren naar een stabiel koppelingsprobleem tussen mannen en vrouwen. Dit kunnen we doen door elke universiteit U te splitsen in q_U *personen* van het ene geslacht, met gelijke voorkeuren wat betreft de studenten. En de studenten te zien als personen van het andere geslacht, die alle q_U *personen* die een universiteit vertegenwoordigen op gelijk niveau waarderen.

Of een koppeling tussen studenten en universiteiten stabiel is of niet, kunnen we op dezelfde manier definiëren als bij mannen en vrouwen. Om stabiel te zijn mogen er geen koppels van een student en een universiteit zijn die elkaar prefereren boven de huidige uitkomst. Door Algoritme 1.1 toe te passen zullen we een koppeling vinden die aan dit criterium voldoet. Hier wordt uitgebreider op ingegaan in hoofdstuk 5 van het boek van Roth en Sotomayor [5].

In het artikel van Gale en Shapley [1] worden een aantal zaken genoemd die het probleem in werkelijkheid een stuk lastiger maken. Er wordt natuurlijk niet gezamelijk een koppeling gemaakt tussen de studenten en de universiteiten: de studenten kiezen zelf voor welke universiteiten zij zich aanmelden en de universiteiten moeten beslissen welke studenten zij toelaten zonder met elkaar te overleggen. Voor de studenten speelt hierbij niet alleen hun eigen voorkeur een rol, maar ook de kans dat zij ergens toegelaten worden. Aan de andere kant zijn er voor de universiteiten ook een aantal zaken die meewegen bij het wel of niet toelaten van een student: of de student zich ook bij andere universiteiten heeft aangemeld, in welke volgorde de student de universiteiten prefereert en welke andere universiteiten de student toe zullen laten. Helaas zijn al deze gegevens in de meeste gevallen niet bekend.

In ditzelfde artikel [1] wordt ook een andere eis voor stabiliteit genoemd, gebaseerd op het principe dat de universiteiten er zijn voor de studenten en niet andersom. In deze definitie mag er geen tweetal studenten a en b voorkomen waarvoor geldt dat a de universiteit waar b toegelaten is prefereert boven de universiteit waar hij zelf toegelaten is én b de universiteit waar a toegelaten is prefereert boven de universiteit waar hij zelf toegelaten is. Onderstaand voorbeeld laat zien dat Algoritme 1.1 volgens deze definitie niet altijd een stabiele koppeling geeft. Zelfs als we de studenten de aanzoeken laten doen (dus de rol van de mannen krijgen) en de koppeling dus optimaal voor hen zou moeten zijn.

Voorbeeld 3.1
We hebben 4 studenten a, b, c en d, 4 universiteiten A, B, C en D die allen één student mogen aannemen en de volgende voorkeuren:

a:	A, B, C, D	A:	b, a, c, d
b:	B, A, C, D	B:	a, c, b, d
c:	B, C, A, D	C:	a, b, c, d
d:	D, A, B, C	D:	d, a, b, c

In Algoritme 1.1 zal het volgende gebeuren:

- a zal A een aanzoek doen, b zal B een aanzoek doen, c zal B een aanzoek doen en d zal D een aanzoek doen
- A zal a's aanzoek accepteren, B zal c's aanzoek accepteren en b's aanzoek afwijzen en D zal d's aanzoek accepteren
- b zal A een aanzoek doen
- A zal b's aanzoek accepteren en a's aanzoek afwijzen
- a zal B een aanzoek doen
- B zal a's aanzoek accepteren
- niemand zal meer afgewezen worden en de koppels zijn als volgt: $(a, B), (b, A), (c, C)$ en (d, D)

Volgens Definitie 1.2 is deze koppeling stabiel: er is geen koppel student-universiteit te vinden die elkaar prefereren boven hun *partner* in deze koppeling. Maar volgens onze laatste definitie is deze koppeling niet stabiel: a zou liever met A gekoppeld willen zijn en b liever met B terwijl ze andersom gekoppeld zijn.

Een ander voorbeeld van een many-to-one koppeling komen we tegen op de banenmarkt en in het bijzonder in de medische wereld, waar artsen geplaatst moeten worden in ziekenhuizen. Over het algemeen werken er meerdere werknemers/artsen bij één bedrijf/ziekenhuis en werkt elke werknemers/arts slechts bij één bedrijf/ziekenhuis. In ziekenhuizen werd een soortgelijk algoritme als Algoritme 1.1 al gebruikt voordat Gale en Shapley erover schreven.

3.3 Roommates

Bij het roommates-probleem hebben we niet te maken met mannen en vrouwen die gekoppeld moeten worden, maar hebben we één grote groep van een even aantal personen waaruit we disjuncte paren moeten vormen. In dit geval is er niet altijd een stabiele koppeling te vinden. Om dit te laten zien wordt in het artikel van Gale en Shapley [1] het volgende voorbeeld gegeven:

Voorbeeld 3.2
We hebben 4 jongens a, b, c en d en de volgende voorkeuren:

a:	b, c, d
b:	c, a, d
c:	a, b, d
d:	a, b, c

In elke mogelijke koppeling is er een blokkerend paar, wat betekent dat er geen stabiele koppeling mogelijk is:

koppeling	**blokkerend paar**
(a, b), (c, d)	(b, c)
(a, c), (b, d)	(a, b)
(a, d), (b, c)	(a, c)

Nawoord

In deze scriptie hebben we gezien dat er gegeven een verzameling mannen en vrouwen altijd een stabiele koppeling bestaat die voldoet aan hun voorkeuren. Met behulp van twee simpele algoritmes, één voor mannen en één voor vrouwen, kunnen we ook altijd een stabiele koppeling vinden. Een opvallend resultaat was dat er in elke stabiele koppeling precies dezelfde mensen gekoppeld zijn en dus ook dezelfde mensen alleen overblijven. Daarnaast viel op dat de best mogelijke stabiele koppeling voor mannen ook direct de slechts mogelijke stabiele koppeling voor vrouwen is en andersom.

Deze tegenstelling tussen de belangen van de mannen en de vrouwen kwam ook naar voren toen we het probleem als lineair programmeringsprobleem bekeken. Op deze manier konden we meer stabiele koppelingen vinden dan met alleen de twee algoritmes die we eerder zagen. Het grootste obstakel binnen deze methode was echter de eis dat een oplossing geheeltallig moet zijn. Gelukkig kon worden aangetoond dat we deze eis in eerste instantie mogen negeren aangezien alle extreme oplossingen sowieso geheeltallig zijn.

Er zijn nog veel meer manieren om stabiele koppelingen te bekijken en er is nog veel meer te lezen over dit onderwerp. Mocht je het interessant vinden, dan raad ik je zeker aan om het artikel van Vande Vate [3] te lezen waarin onder andere op rotaties ingegaan wordt. Dit is een manier om vanuit een stabiele koppeling (bijvoorbeeld de stabiele koppeling die je vindt door Algoritme 1.1 of Algoritme 1.2 uit te voeren) nieuwe stabiele koppelingen te vinden, door als het ware partners *door te schuiven*. Hierop wordt ook verder ingegaan in een artikel van Király en Pap [6].

Overzicht Notatie

- M : de verzameling mannen
- W : de verzameling vrouwen
- $M_w \subset M$: de verzameling mannen met wie vrouw w gekoppeld zou willen worden
- $W_m \subset W$: de verzameling vrouwen met wie man m gekoppeld zou willen worden
- $A := \{(m, w) : m \in M_w, w \in W_m\}$: de verzameling acceptabele koppels
- $m' >_w m$: vrouw w prefereert man m' boven man m
- $w' >_m w$: man m prefereert vrouw w' boven vrouw w
- $w(X, m)$: partner van man m onder koppeling X
- $m(X, w)$: partner van vrouw w onder koppeling X
- $X' >_w X$: vrouw w prefereert koppeling X' boven koppeling X
- $X' >_m X$: man m prefereert koppeling X' boven koppeling X
- $S_M(x) := \{m \in M : \sum_{j \in W} x_{mj} > 0\}$
- $S_W(x) := \{w \in W : \sum_{i \in M} x_{iw} > 0\}$
- $F_M(x) := \{m \in M : \sum_{j \in W} x_{mj} = 1\}$
- $F_W(x) := \{w \in W : \sum_{i \in M} x_{iw} = 1\}$
- $S_m(x) := \{w \in W : x_{mw} > 0\}$
- $S_w(x) := \{m \in M : x_{mw} > 0\}$
- $w^*(x, m) := w^* \in S_m(x)$ waarvoor geldt: $w^* \geq_m w \quad \forall w \in S_m(x)$
- $w_*(x, m) := w_* \in S_m(x)$ waarvoor geldt: $w_* \leq_m w \quad \forall w \in S_m(x)$
- $m^*(x, w) := m^* \in S_w(x)$ waarvoor geldt: $m^* \geq_w m \quad \forall m \in S_w(x)$
- $m_*(x, w) := m_* \in S_w(x)$ waarvoor geldt: $m_* \leq_w m \quad \forall m \in S_w(x)$

Referenties

[1] Gale, D & Shapley, L.S. (1962). College Admissions and the Stability of Marriage. *The American Mathematical Monthly.* Vol. 69, No. 1, pp. 9-15.

[2] Gusfield, D. & Irving, R.W. (1989). *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* Cambridge: The MIT Press.

[3] Vande Vate, J.H. (1988). Linear Programming Brings Marital Bliss. *Operations Research Letters.* No. 8 (1989) pp. 147-153.

[4] Rothblum, U.G. (1989). Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope. *Mathematical Programming.* No. 54 (1992) pp. 57-67.

[5] Roth, A.E. & Sotomayor, M.A.O. (1991) *Two-Sided Matching: a Study in Game-Theoretic Modelling and Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Király, T. & Pap, J. (2005). Rothblum's description of the stable marriage polyhedron is TDI. *Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization*