Paradoxen in de kansrekening aan de hand van Dutch Books

Hisken, V.

Veerle Hisken

Paradoxen in de kansrekening
aan de hand van
Dutch Books

Bachelorscriptie, 28 september 2009

Scriptiebegeleider: prof.dr. P.D. Grünwald

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Voorwoord

Het Sleeping Beauty probleem zou zo maar tot slapeloosheid kunnen leiden. Dit vraagstuk, dat op de navolgende pagina's onder de loep wordt genomen, wordt gerekend tot de paradoxen in de kansrekening. Hoe meer je erover leest en je het hoofd breekt over mogelijke invalshoeken en antwoorden, hoe verder je verwijderd lijkt te raken van dé oplossing. Niet voor niets bemoeien bijvoorbeeld ook filosofen zich met de discussie, want wordt de wiskundige paradox niet veroorzaakt door een interpretatieprobleem? In ieder geval lijkt rationaliteit, het terrein van de wiskunde, geen afdoende oplossing te kunnen bieden.

In mijn onderzoek, waarvan deze scriptie de weerslag vormt, heb ik ervoor gekozen het Sleeping Beauty probleem en een tweede wiskundig vraagstuk, *Boy or Girl Paradox*, te analyseren aan de hand van Dutch Books. In deze paradoxen wordt naar een kans gevraagd. De literatuur vermeldt verschillende antwoorden. Het is lastig te onderzoeken of deze kansen wel of niet correct zijn, dat wil zeggen, of een kans de oplossing van de paradox is. Dutch Books komen hier goed van pas. Het bestaan van een Dutch Book tegen een kans is een heel sterk argument om te kunnen zeggen dat deze kans niet goed is. De vraag die ik mezelf vooraf gesteld heb luidt dan ook: 'Kunnen we met behulp van Dutch Books aantonen dat een bepaalde kans niet het antwoord kan zijn op de paradox?'

Deze scriptie had niet tot stand kunnen komen zonder Peter Grünwald, mijn scriptiebegeleider. Terwijl ik me verdiepte in het onderwerp van mijn onderzoek en er steeds meer over las, bleek ieder antwoord de volgende vraag op te roepen en dreigde ik regelmatig te verzanden in een moerassig gebied van ongelijksoortige gegevens. Gelukkig wees Peter Grünwald me op die momenten de weg. Ik dank hem heel hartelijk voor zijn heldere inzichten, de inspirerende discussies en de plezierige samenwerking. Daarnaast dank ik mijn moeder voor haar taalinhoudelijke adviezen. Ik heb herhaaldelijk gemerkt hoe lastig het is woorden te vinden voor iets dat je misschien wel begrijpt, maar niet zo gemakkelijk kunt uitleggen. Achteraf gezien weet ik dat het een hele klus is een scriptie te schrijven die én voldoende inhoud heeft én voldoende aansprekend is, ook voor de niet-wiskundige lezer. Slapeloze nachten dankzij Sleeping Beauty? Het risico is niet geweken, omdat het een probleem is dat blijft intrigeren.

Samenvatting

Van elke weddenschap, of er nu wel of geen sprake is van een Dutch Book, worden de inhoud en aanname bepaald door twee betrokkenen: degene die de weddenschap al dan niet aanneemt, in deze scriptie voortaan 'agent' genoemd, en degene die de weddenschap aanbiedt, de 'bookie'.

In hoofdstuk 1 is het concept Dutch Books aan de orde. Om duidelijk te maken wat een Dutch Book is, maken we eerst onderscheid tussen subjectieve en wiskundige kansen. Daarna geven we achtereenvolgens de Dutch Book definitie en de Dutch Book stelling. Beide worden kort toegelicht en van een enkele kanttekening voorzien.

In hoofdstuk 2 wordt het Sleeping Beauty probleem geanalyseerd. In sectie 2.2 presenteren we het experiment. De mogelijke antwoorden op de vraag die Sleeping Beauty gesteld wordt, zijn P(kop) $= X$ voor elke X met $0 < X < 1$. In de literatuur betogen sommige mensen dat $X = \frac{1}{2}$ het correcte antwoord is, terwijl anderen menen dat $X = \frac{1}{3}$ de oplossing van de paradox is. Wij bewijzen dat voor elke X met $0 < X < 1$ een Dutch Book te maken is en dat dus geen enkele kans correct is. Dit Dutch Book argument zien we vervolgens in het licht van de standpunten van achtereenvolgens Bradley & Leitgeb en Draper & Pust en Christopher Hitchcock. Laatst genoemde geeft een beperking aan de bookie mee, waardoor het lastig wordt het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$ te rechtvaardigen. Daaruit blijkt eens te meer, hoe ambigu het Sleeping Beauty probleem is.

In hoofdstuk 3 bespreken we de Boy or Girl paradox. We bekijken de paradox aan de hand van twee verschillende selectieprocedures. We zien dat er slechts in één selectieprocedure sprake lijkt te zijn van een paradox: het lijkt daar nog steeds alsof we van kans moeten veranderen. Vervolgens laten we voor die selectieprocedure met een Dutch Book argument zien dat het niet correct is van kans te veranderen. Een aangepaste steekproef van Marilyn vos Savant bevestigt deze uitkomst. Ten slotte tonen we aan dat conditioneren niet toegestaan is in de Boy or Girl paradox.

Hoofdstuk 1

Dutch Books

1.1 Inleiding

Het concept Dutch Book werd, onder een andere naam weliswaar, in 1937 geïntroduceerd door Bruno de Finetti [1937]. Alvorens de definitie te geven van het begrip Dutch Book is het van belang wiskundige kansen te onderscheiden van subjectieve kansen. De Finetti liet namelijk zien dat het niet mogelijk is een Dutch Book te maken voor een subjectieve kansverdeling dan en slechts dan als de subjectieve kans voldoet aan de wiskundige axioma's voor kansen. Dit is de Dutch Book stelling, die volgt na de definitie van Dutch Books.
Waarom wordt zo'n reeks een Dutch Book genoemd, vraagt de Nederlandse lezer zich misschien af. We kunnen slechts gissen. Vast staat dan de toevoeging 'Dutch' een negatieve inhoud geeft aan Engelse uitdrukkingen sinds de Nederlanders en Engelsen in de 17^{e} eeuw machtige en rivaliserende vloten hadden [9]. Een Dutch uncle is bijvoorbeeld iemand die ongevraagd te kritisch is en een Dutch treat is een uitstapje waar ieder voor zich betaalt. Verder weten we dat de New Yorkse gangster Dutch Schultz (1902-1935) veel geld verdiend heeft door slimme weddenschappen af te sluiten [9]. 'Dutch' betekent zoiets als 'listig' of 'op een wijze die winst genereert'. 'Book' moet zijn ontleend aan de uitdrukking 'making a book', waarmee in de wereld van de paardenraces het vastleggen van 'betting' (to bet = wedden) kansen wordt bedoeld [9].

1.2 Subjectieve en wiskundige kansen

Als iemand in het dagelijkse leven een kans P toekent aan een gebeurtenis A, dan betekent dit dat hij of zij bereid is een weddenschap aan te gaan, die maximaal $\mathrm{P} \cdot \mathrm{M}$ euro kost en $\mathrm{M} > 0$ uitbetaalt als A zich voordoet. We zeggen dat de kosten maximaal $\mathrm{P} \cdot \mathrm{M}$ euro mogen bedragen, omdat bij hogere kosten de verwachte opbrengst negatief wordt en de weddenschap in dat geval uiteraard niet wordt aangenomen. Dit is de zogenoemde operationele definitie van subjectieve kansen. Operationeel betekent hier hoe men kansen in de praktijk gebruikt.
Nu is het niet duidelijk of subjectieve kansen iets te maken hebben met kansen, zoals we die in de wiskunde definiëren. Wat zijn deze wiskundige kansen precies?
Bij een kansexperiment is er een aantal mogelijke uitkomsten. Een verzameling uitkomsten heet een gebeurtenis. Op elke gebeurtenis is een kans P gedefinieerd. De verzameling van alle uitkomsten noemen we Ω, de uitkomstenruimte. In het algemeen kan niet iedere deelverzameling van Ω als gebeurtenis optreden. In deze scriptie beschouwen we alleen het simpele

geval waarin dit wel kan. Een wiskundige kans P moet voldoen aan de volgende axioma's van Kolmogorov:

1. Voor iedere gebeurtenis A geldt, P(A)$\geq$ 0.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Voor een rij disjuncte gebeurtenissen A_k geldt: $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$

De Finetti liet zien dat het niet mogelijk is een Dutch Book te maken voor een subjectieve kansverdeling dan en slechts dan als P voldoet aan de wiskundige axioma's voor kansen. Dit is de Dutch Book stelling die we in sectie 1.4 behandelen.

Maar wat is nou precies een Dutch Book? Voordat we de formele definitie kunnen geven, moeten we eerst het begrip verwachtingswaarde definiëren:

Definitie (verwachtingswaarde)
Gegeven is een kansexperiment met uitkomstenruimte Ω. Op elke uitkomst a $\in \Omega$ is een kans P gedefinieerd. Een stochastische variabele X is een functie X: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. De verwachtingswaarde, oftewel de verwachte uitkomst van het kansexperiment, is als volgt gedefinieerd:

$$E_P[X] = \sum_a X(a)P(a)$$

De formele definitie van een Dutch Book luidt nu als volgt:

1.3 Dutch Book definitie

Neem een experiment met uitkomstenruimte Ω. Noem de weddenschap, die $x \in \mathbb{R}$ euro kost om mee te doen en $y \in \mathbb{R}$ euro uitbetaalt bij uitkomst a $\in \Omega$ en 0 euro bij elke andere uitkomst, de weddenschap (x,y,a). Laat f een functie zijn die voor iedere weddenschap (x,y,a) zegt: f(x,y,a) = accept of f(x,y,a) = reject. We noemen f een beslisfunctie. Laat $\mathrm{I_a}$ de indicatorfunctie zijn met

$$\mathrm{I_a} = \begin{cases} 1 & \text{als a geldig is (als a `gebeurt')} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De verwachte opbrengst van weddenschap (x,y,a) is $\mathrm{V}_{P,x,y,a}$. Voor een kansverdeling P definiëren we $\mathrm{V}_{P,x,y,a}$ als $\mathrm{V}_{P,x,y,a} = \mathrm{E}_P[-x + yI_a] = -x + P(a)y$.

Een Dutch book tegen een agent met beslisfunctie f is nu een eindige reeks weddenschappen $(x_1, y_1, a_1), \ldots, (x_n, y_n, a_n)$ zodanig dat f(x_i, y_i, a_i) = accept voor alle (x_i, y_i, a_i), met $i \in \{1, \ldots, n\}$ en tegelijkertijd moet gelden:

$$-x_1 + y_1 I_{a_1} - x_2 + y_2 I_{a_2} - x_3 + y_3 I_{a_3} - \ldots - x_n + y_n I_{a_n} < 0.$$

Informeel is een Dutch book tegen een agent een reeks weddenschappen die hij allemaal accepteert, terwijl de som van alle inzetten en uitbetalingen negatief is, ongeacht de uitkomst van het experiment. Belangrijk is hierbij aan te tekenen dat de voorwaarden waaronder de agent de weddenschappen accepteert bekend moeten zijn. Hieronder zullen we zien dat deze informatie cruciaal is in de Dutch Book stelling.

1.4 Dutch Book stelling

1. Laat f gebaseerd zijn op een kansverdeling P op Ω, dat wil zeggen f(x,y,a) = reject dan en slechts dan als $V_{P,x,y,a} < 0$. Dan bestaat er geen Dutch book voor f.

2. Stel f is niet gebaseerd op een kansverdeling, dat wil zeggen, er is geen enkele kansverdeling P op Ω zodat f(x,y,a) = accept dan en slechts dan als $V_{P,x,y,a} \geq 0$ geldt. Dan bestaat er een Dutch book voor f.

Het bewijs van deze stelling is te vinden in het boek *The Uncertain Reasoner's Companion: A Mathematical Perspective* van J.B. Paris [1994].
De interpretatie van deze stelling is niet louter wiskundig, want f beschrijft het gedrag van de agent. Er kan een Dutch book gemaakt worden, tenzij de agent zijn beslissingen baseert op kansverdelingen zoals die in de wiskunde gedefinieerd zijn.

In de praktijk ligt het voor de hand te denken dat een agent een weddenschap alleen aanneemt als de verwachtingswaarde groter is dan nul. In deze scriptie gaan we er echter vanuit dat een agent de weddenschap ook zal aannemen als de verwachtingswaarde gelijk is aan nul. Het is immers altijd mogelijk een weddenschap te corrigeren met een ϵ, die groot genoeg is om de verwachtingswaarde licht positief te maken en klein genoeg is om niet het Dutch Book te veranderen.
Daarbij moet worden aangetekend dat de kosten van de weddenschappen zoals aan de orde in deze scriptie steeds laag zullen zijn. Het is immers onwaarschijnlijk te verwachten dat iemand al zijn spaargeld inzet bij een weddenschap met een verwachtingswaarde gelijk of bijna gelijk aan nul.

Daarnaast zullen we in deze scriptie geen gebruik meer maken van subjectieve kansen, die niet per se wiskundig zijn; we gaan er al vanuit dat de kansen die we gebruiken wiskundig zijn. We zullen Dutch Books dus op een iets andere manier gebruiken dan De Finetti voor ogen had. We willen met Dutch Books laten zien dat bepaalde wiskundige kansen in de navolgende hoofdstukken niet correct kunnen zijn. Met andere woorden: als de agent denkt dat de wiskundige kans P de correcte kans is van een bepaalde gebeurtenis, terwijl er een Dutch Book te maken is, maakt hij een irrationele beoordelingsfout. Wiskundige kans P kan niet het antwoord zijn op de vraag van de paradox.

Hoofdstuk 2

Sleeping Beauty

2.1 Inleiding

Robert Stalnaker besprak tijdens een graduate seminar op MIT aan het einde van de 20$^{\mathrm{e}}$ eeuw het vraagstuk dat in dit hoofdstuk aan de orde is. Hij gaf het probleem de naam Sleeping Beauty. Tot zijn toehoorders behoorde Adam Elga, die in 2000 het artikel *Self-locating belief and the Sleeping Beauty problem* publiceerde. Hierin presenteert Elga een oplossing ten gunste van $\frac{1}{3}$. Aan de hand van dit artikel startte een wereldwijde discussie over het Sleeping Beauty probleem.

In dit hoofdstuk wordt het Sleeping Beauty probleem gepresenteerd en worden de mogelijke oplossingen van het probleem besproken. Vervolgens zullen we het Sleeping Beauty probleem behandelen aan de hand van Dutch Books. Tot slot bekijken we achtereenvolgens het commentaar van Bradley en Leitgeb, Draper en Pust en Hitchcock op het Dutch Book dat we in dit hoofdstuk geven.

2.2 Experiment

Sleeping Beauty, de agent in dit hoofdstuk, doet mee aan een experiment dat zondagavond begint en woensdag eindigt. De opzet van het experiment is van te voren bij haar bekend. Nadat ze op zondag in slaap is gebracht, zal een worp met een eerlijke munt het verdere verloop van het experiment bepalen; bij kop wordt Sleeping Beauty op maandag wakker gemaakt, bij munt op maandag en dinsdag. Het slaapmiddel zorgt ervoor dat Sleeping Beauty op dinsdag vergeten is dat ze op maandag al een keer wakker is geweest. Hierdoor weet Sleeping Beauty niet of het maandag of dinsdag is als ze wakker wordt.
Nu wordt elke keer als Sleeping Beauty wakker wordt gemaakt, haar de volgende vraag gesteld: ‘Hoe groot is volgens jou de kans dat er kop gegooid is?’

2.3 Mogelijke antwoorden

Er is veel discussie over deze vraag, want wat is het juiste antwoord?
We gooien met een eerlijke munt, dus we weten dat op zondagavond de kans op kop gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Op maandag ontvangt Sleeping Beauty geen nieuwe informatie, dus waarom zou ze iets anders antwoorden dan $\frac{1}{2}$?

Maar stel nu dat we het experiment 1000 keer herhalen. We zullen ongeveer 500 keer kop en 500 keer munt gooien. Bij kop wordt ze één keer wakker gemaakt, bij munt twee keer. Oftewel, ze wordt 500 keer wakker gemaakt bij kop en 1000 keer bij munt. Je wordt dus met kans $\frac{1}{3}$ wakker gemaakt als er kop is gegooid. Het antwoord zou in dit geval $\frac{1}{3}$ moeten zijn. Maar we weten dat frequentie-argumenten niet betrouwbaar zijn als de 'individual trails' niet onafhankelijk zijn. In ons probleem zijn de 'trials' de keren dat Sleeping Beauty wordt wakker gemaakt en deze zijn duidelijk niet onafhankelijk; als Sleeping Beauty de eerste keer wakker wordt en er is munt gegooid, dan is er bij de tweede keer dat ze wakker wordt ook munt gegooid.
Dus prima facie lijkt daarom de uitkomst $\frac{1}{2}$ een betere keuze voor Sleeping Beauty.
Naast de groep *halfers* (voorstanders van $\frac{1}{2}$) en de groep *thirders* (voorstanders van $\frac{1}{3}$) tekent zich in de discussie nog een derde kamp af: de groep die claimt dat het probleem te ambigu is om een antwoord te kunnen geven.
Saar Wilf [10] behoort tot deze derde groep. Zij meent dat de vraag die Sleeping Beauty gesteld wordt te vaag geformuleerd is. Om duidelijk te krijgen wat Saar Wilf bedoelt met vaag, zullen we de vraag in het Engels moeten formuleren:

'What is your credence now for the proposition that our coin landed heads?'

Het woord 'credence' is hier een sleutelwoord. Een 'credence' is een persoonlijke inschatting van de kans ('probability') dat een gebeurtenis heeft plaatsgevonden of zal plaatsvinden. In het Engels kunnen we de vraag dus ook als volgt formuleren:

'What is your estimate now of the probability that our coin landed heads?'

Het definiëren van het begrip 'probability' brengt ons tot de volgende vraagstelling:

'If we run this test repeatedly, what is your estimate of the fraction of times the coin would have landed heads from among all possible coin outcomes?'

Door de vraag aldus te herformuleren, ontdekken we de plaats waar de schoen wringt: de term 'times' is niet goed gedefinieerd. We kunnen het aantal keren dat Sleeping Beauty wakker wordt gemaakt bedoelen. In dat geval is de kans $\frac{1}{3}$. Of we kunnen het aantal keren dat het experiment herhaald wordt bedoelen. In deze betekenis luidt het juiste antwoord $\frac{1}{2}$.

De drie hierboven genoemde oplossingen komen in de literatuur naar voren. Er is nog steeds veel discussie. In de volgende sectie gaan wij het Sleeping Beauty probleem bekijken aan de hand van Dutch Books om te zien of we iets wijzer kunnen worden in het beoordelen van deze drie verschillende oplossingen.

2.4 Dutch Book

In een artikel uit 2004 geeft Christopher Hitchcock [Hitchcock, 2004] een Dutch Book tegen de kans $\frac{1}{2}$. Met behulp van een soortgelijk Dutch Book laat Joseph Y. Halpern [Halpern, 2008] zien dat ook $\frac{1}{3}$ niet het goede antwoord kan zijn. Deze vaststelling doet ons vermoeden dat er een Dutch Book te maken moet zijn tegen alle mogelijke antwoorden van Sleeping Beauty.

Dit brengt ons tot de volgende stelling:

Stelling
Zeg f(x,y,a) = accept als $V_{P,x,y,a} \geq 0$.
Welke kans Sleeping Beauty ook aan kop toekent, een bookie kan haar altijd een reeks weddenschappen $(x_1, y_1, a_1), \ldots, (x_n, y_n, a_n)$ voorleggen zodanig dat f(x_i, y_i, a_i) = accept voor alle (x_i, y_i, a_i) met i $\in \{1, \ldots, n\}$, en tegelijkertijd geldt:

$$-x_1 + y_1 I_{a_1} - x_2 + y_2 I_{a_2} - x_3 + y_3 I_{a_3} - \ldots - x_n + y_n I_{a_n} < 0.$$

Bewijs
Neem P(kop) = X, waarbij 0 < X < 1. Op zondagavond is de kans op kop $\frac{1}{2}$, dus voordat het experiment begint, nemen we P(kop) = $\frac{1}{2}$. Alle afzonderlijke weddenschappen in dit bewijs hebben verwachtingswaarde nul, dus Sleeping Beauty neemt ze per definitie allemaal aan.
We onderscheiden de volgende drie gevallen:

1. $0 < X < \frac{1}{3}$
Voordat het experiment start, wordt Sleeping Beauty de volgende first bet aangeboden: ze ontvangt 30 euro als de munt op kop valt en 0 euro bij munt. De kosten bedragen 15 euro.
Elke keer als Sleeping Beauty wakker wordt gemaakt, wordt haar een weddenschap aangeboden, de zogenaamde waking bet, waarbij ze M $\in \mathbb{R}_{>0}$ euro uitbetaald krijgt als de munt op munt is gevallen en 0 euro bij kop. De kosten bedragen $(1-X)$M euro. Als munt de uitkomst is van de worp met het geldstuk zal ze twee keer deze weddenschap aannemen.
Tabel 2.1 geeft een overzicht van de twee verschillende weddenschappen.

	Kop	**Munt**	**Kosten**	**Verwachtingswaarde**
First bet	30	0	-15	$\frac{1}{2} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot (-15) = 0$
Waking bet ma	0	M	-(1 - X)M	$X \cdot (-(1-X)\text{M}) + (1-X) \cdot X\text{M} = 0$
Waking bet di		M	-(1 - X)M	
Winst	$15 - (1-X)\text{M}$	$-15 + 2X\text{M}$		

Tabel 2.1: Dutch Book bij $0 < X < \frac{1}{3}$

We zoeken nu naar een M, waarbij

$$15 - (1-X)\text{M} < 0$$

$$-15 + 2(\text{M} - (1-X)\text{M}) = -15 + 2X\text{M} < 0$$

Dit stelsel verder oplossen geeft

$$\text{M} < \frac{15}{2X}$$

$$\text{M} > \frac{15}{1-X}$$

We hadden aangenomen dat $0 < X < \frac{1}{3}$, dus we hebben nu een afbakening gevonden voor M. We kunnen nu voor elke $0 < X < \frac{1}{3}$ een M vinden waarbij Sleeping Beauty gegarandeerd geld verliest.

2. $\frac{1}{3} < X < 1$
Op zondagavond bieden we Sleeping Beauty een weddenschap aan, waarbij ze 30 euro ontvangt als de munt op munt valt en 0 euro als de uitkomst kop is. De weddenschap kost 15 euro.
Elke keer als Sleeping Beauty wakker wordt gemaakt, wordt haar de volgende waking bet aangeboden: ze ontvangt M euro bij kop, waarbij $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_{>0}$, en 0 bij munt. Bij kosten van XM euro is de verwachtingswaarde van deze weddenschap gelijk aan nul.

	Kop	**Munt**	**Kosten**	**Verwachtingswaarde**
First bet	0	30	-15	$\frac{1}{2} \cdot (-15) + \frac{1}{2} \cdot 15 = 0$
Waking bet ma	M	0	$-X\mathrm{M}$	$X(\mathrm{M} - X\mathrm{M}) + (1 - X)(-X\mathrm{M}) = 0$
Waking bet di		0	$-X\mathrm{M}$	
Winst	$-15 + \mathrm{M} - XM$	$15 - 2X\mathrm{M}$		

Tabel 2.2: Dutch Book bij $\frac{1}{3} < X < 1$

We zoeken nu naar een M, waarbij

$$-15 + \mathrm{M} - X\mathrm{M} < 0$$

$$15 - 2X\mathrm{M} < 0$$

Dit stelsel verder oplossen geeft

$$\mathrm{M} < \frac{15}{1 - X}$$

$$\mathrm{M} > \frac{15}{2X}$$

We hadden aangenomen dat $\frac{1}{3} < X < 1$, dus we hebben nu een afbakening gevonden voor M. We kunnen nu voor elke $\frac{1}{3} < X < 1$ een M vinden waarbij Sleeping Beauty gegarandeerd geld verliest.

3. $X = \frac{1}{3}$
Ook hier wordt Sleeping Beauty een weddenschap aangeboden voordat het experiment begint. Ze krijgt 30 euro bij kop en 0 euro bij munt. De kosten zijn 15 euro.
Elke keer als Sleeping Beauty wakker wordt gemaakt, krijgt ze de volgende waking bet onder ogen: M euro bij munt, 0 euro bij kop en de kosten bedragen $\frac{2}{3}$M euro. **Let op:** we spreken hier af dat er in het geval van munt maar één waking bet in behandeling wordt genomen!

	Kop	**Munt**	**Kosten**	**Verwachtingswaarde**
First bet	30	0	-15	$\frac{1}{2} \cdot (-15) + \frac{1}{2} \cdot 15 = 0$
Waking bet	0	M	$-\frac{2}{3}\mathrm{M}$	$\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}\mathrm{M}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{3}\mathrm{M}) = 0$
Winst	$15 - \frac{2}{3}\mathrm{M}$	$-15 + \mathrm{M} - \frac{2}{3}\mathrm{M}$		

Tabel 2.3: Dutch Book bij X = $\frac{1}{3}$

Om een Dutch Book te creëren, moeten we de volgende vergelijkingen oplossen:

$$15 - \frac{2}{3}\mathrm{M} < 0$$

$$-15 + M - \frac{2}{3}\mathrm{M} < 0$$

We krijgen nu een mooie afbakening voor M bij X = $\frac{1}{3}$:

$$\mathrm{M} < \frac{15}{\frac{1}{3}} = 45$$

$$\mathrm{M} > \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22\frac{1}{2}$$

We kunnen nu voor $X = \frac{1}{3}$ een M vinden waarbij Sleeping Beauty gegarandeerd geld verliest.

Hiermee is bewezen dat er voor elke P(kop) = X met $0 < X < 1$ een Dutch Book bestaat tegen Sleeping Beauty. □

Aan de hand van dit Dutch Book bewijs zien we dat Sleeping Beauty er goed aan doet geen weddenschap aan te gaan. Voor elke kans die zij zou toekennen is er immers een Dutch Book te maken. Toch is niet iedereen het eens met deze conclusie. In de volgende sectie bespreken we een artikel uit 2006 van Bradley en Leitgeb, die beweren dat een Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$ niet bestaat. In sectie 2.6 behandelen we een artikel van Hitchcock uit 2004 waarin hij een beperking van de bookie noemt, die moet aantonen dat er geen Dutch Book te maken is tegen $\frac{1}{3}$.

2.5 Verwachte opbrengst waking bets

Bradley en Leitgeb [2004] werpen een ander licht op de Dutch Book argumenten. In het voorafgaande gingen we ervan uit dat Sleeping Beauty alle weddenschappen aanneemt, omdat de verwachtingswaarde per waking bet gelijk is aan nul. Bradley en Leitgeb kiezen een ander uitgangspunt: omdat Sleeping Beauty niet weet welke dag het is als ze een waking bet krijgt aangeboden, moet zij de verwachte opbrengst van maandag en dinsdag bij elkaar optellen. Alleen in het geval waarin deze gezamenlijke verwachte opbrengst groter of gelijk is aan nul, zal Sleeping Beauty de waking bets accepteren. Bekijk nu het Dutch Book in stap 2 van het bewijs in sectie 2.4 en neem X = $\frac{1}{2}$ en M = 20. In dit Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$ is de verwachte opbrengst op maandag nul en op dinsdag negatief. Het resultaat is daarom negatief. Op basis van deze optelsom zal Sleeping Beauty de waking bets niet aannemen en bestaat er dus geen Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$.
Draper en Pust [2006], een ander filosofisch duo, berekenen in het Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$ opnieuw de verwachte opbrengst van maandag en dinsdag samen. Het resultaat is nu gelijk aan nul. Wat is er aan de hand?

Noem de winst bij kop op maandag $W_{\text{ma}}(\text{kop})$ en op dinsdag $W_{\text{di}}(\text{kop})$. De winst bij munt op maandag noteren we als $W_{\text{ma}}(\text{munt})$ en op dinsdag als $W_{\text{di}}(\text{munt})$. De verwachte opbrengst op maandag is $E[W|\text{ma}]$ en op dinsdag $E[W|\text{di}]$.

Verwachte opbrengst dinsdag

We berekenen eerst de verwachte opbrengst op dinsdag. We kijken in dit geval dus alleen naar de waking bet en niet naar de first bet.

Er geldt met X = $\frac{1}{2}$ en M = 20 dat:

$$E[W|\text{di}] = P(\text{kop}|\text{di}) \cdot W_{\text{di}}(\text{kop}) + P(\text{munt}|\text{di}) \cdot W_{\text{di}}(\text{munt}) = 0 \cdot 10 + 1 \cdot -10 = -10$$

Beide duo's zijn het eens met deze berekening voor de verwachte opbrengst op dinsdag. Laten we nu eens kijken naar de berekening van de verwachte opbrengst op maandag, want daar zit het verschil van mening.

Verwachte opbrengst maandag
Berekening Draper en Pust:
De verwachte opbrengst op maandag moet met de volgende vergelijking bepaald worden:

$$E[W|\text{ma}] = P(\text{kop}|\text{ma}) \cdot W_{\text{ma}}(\text{kop}) + P(\text{munt}|\text{ma}) \cdot W_{\text{ma}}(\text{munt})$$

Vanwege de vergelijking

$$P(\text{kop}) = P(\text{ma})P(\text{kop}|\text{ma}) + P(\text{di})P(\text{kop}|\text{di})$$

en omdat $P(\text{kop}|\text{di}) = 0$ en $P(\text{ma}) < 1$ moet gelden dat $P(\text{kop}) < P(\text{kop}|\text{ma})$.
Om $E[W|\text{ma}]$ uit te kunnen rekenen moeten we eerst $P(\text{kop}|\text{ma})$ exact berekenen.

Volgens de stelling van Bayes geldt:

$$P(\text{kop}|\text{ma}) = \frac{P(\text{kop})P(\text{ma}|\text{kop})}{P(\text{kop})P(\text{ma}|\text{kop}) + P(\text{munt})P(\text{ma}|\text{munt})}$$

waarbij

$$P(\text{ma}|\text{kop}) = 1$$

$$P(\text{ma}|\text{munt}) = \frac{1}{2}$$ [1]

$$P(\text{kop}) = \frac{1}{2}$$

Deze vergelijkingen samen geven dat

$$P(\text{kop}|\text{ma}) = \frac{2}{3}$$

Dus

$$E[W|\text{ma}] = \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot (-10) = \frac{10}{3}$$

De verwachte opbrengst van maandag en dinsdag samen is nu

$$P(\text{ma}) \cdot E[W|\text{ma}] + P(\text{di}) \cdot E[W|\text{di}]$$

Nu geldt volgens Bayes' stelling en omdat $P(\text{ma}|\text{kop}) = 1$, dat

$$P(\text{ma}) = \frac{P(\text{kop})P(\text{ma}|\text{kop})}{P(\text{kop}|\text{ma})} = \frac{P(\text{kop})}{P(\text{kop}|\text{ma})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

[1] Net als Lewis (2001) en een aantal andere voorstanders van $\frac{1}{2}$ accepteren Bradley en Leitgeb de restricted principle of indifference die zegt dat de volgende vergelijking geldt: $P(\text{ma}|\text{munt}) = P(\text{di}|\text{munt})$. En omdat $P(\text{ma}|\text{munt}) + P(\text{di}|\text{munt}) = 1$, geldt $P(\text{ma}|\text{munt}) = \frac{1}{2}$.

We zien dat de verwachte opbrengst op maandag precies de negatieve verwachte opbrengst op dinsdag opheft:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{4} \cdot (-10) = 0$$

Bradley en Leitgeb geven in hun artikel geen berekening van de verwachte opbrengst op maandag en dinsdag. Ze gaan er waarschijnlijk vanuit dat $P(\text{kop}|\text{ma}) = \frac{1}{2}$. Dan:

$$E[W|\text{ma}] = P(\text{kop}|\text{ma}) \cdot W_{\text{ma}}(\text{kop}) + P(\text{munt}|\text{ma}) \cdot W_{\text{ma}}(\text{munt}) = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-10) = 0$$

Op deze manier is de verwachte opbrengst van maandag en dinsdag samen inderdaad negatief. Maar laten we nu met behulp van de berekening van Draper en Pust de kans op maandag volgens Bradley en Leitgeb uitrekenen:

$$P(\text{ma}) = \frac{P(\text{kop})P(\text{ma}|\text{kop})}{P(\text{kop}|\text{ma})} = \frac{P(\text{kop})}{P(\text{kop}|\text{ma})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Het is onmogelijk dat P(maandag) = 1. We zullen dus moeten concluderen dat Bradley en Leitgeb geen gelijk hebben en dat de waking bets op maandag en dinsdag gewoon aangenomen worden door Sleeping Beauty. Het Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$ is legitiem.

2.6 Beperking van een Dutch Book

Christopher Hitchcock betoogt in een artikel uit 2004 dat er geen Dutch Book te maken is tegen $\frac{1}{3}$ [Hitchcock, 2004]. Hij maakt duidelijk dat aan de bookie een essentiële beperking moet worden opgelegd bij het afsluiten van weddenschappen: hij mag ten opzichte van de agent niet over extra informatie beschikken. Maakt hij wel gebruik van extra informatie, dan is het Dutch Book ongeldig.

De beperking betekent in ons probleem dat de bookie niet mag weten welke dag het is als hij Sleeping Beauty vraagt naar de kans op kop. Hitchcock ziet maar één manier om de bookie deze beperking op te leggen: hij moet het experiment tegelijkertijd met Sleeping Beauty doorlopen. Zijn conclusie op basis van deze strategie luidt dat de bookie wel een Dutch Book kan creëren tegen P(kop) = X met $0 < X < \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3} < X < 1$, maar niet tegen P(kop) = $\frac{1}{3}$. Maar in het bewijs van sectie 2.4 hebben we gezien dat er wel degelijk een Dutch Book bestaat tegen $\frac{1}{3}$. Wat is hier aan de hand?

Het belangrijke verschil tussen het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$ van de auteur van deze scriptie en het ontkennen van een Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$ door Hitchcock is dat in het bewijs uit paragraaf 2.4 bij munt maar één waking bet in behandeling wordt genomen. Het is inderdaad waar dat er geen Dutch Book bestaat tegen $\frac{1}{3}$ als beide waking bets in het geval van munt in behandeling worden genomen. Hitchcock geeft hiervoor een bewijs, waarin hij laat zien dat de opbrengst bij kop en munt niet allebei negatief kunnen worden, omdat de één de negatieve opbrengst van de ander is. Dit bewijs is samengevat in onderstaande tabel:

Bij het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$, gegeven in sectie 2.4, wordt de beperking van de bookie echter niet overtreden, op voorwaarde dat hij de afspraak dat er maar één waking bet in behandeling wordt genomen, voorafgaande aan het experiment met Sleeping Beauty maakt. De bookie kan echter pas bepalen of hij de twee waking bets, die in het geval van munt worden aangenomen door Sleeping Beauty, één of twee keer in behandeling wilt nemen als hij weet welke kans Sleeping Beauty zal toekennen aan kop op maandag en/of dinsdag.

We bekijken nu de twee mogelijke vervolgsituaties:

	Kop	Munt	Kosten	Verwachtingswaarde
First bet	X	0	$-\frac{X}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{X}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{X}{2})=0$
Waking bet ma	Y	0	$-\frac{Y}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2Y}{3}+\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{3})=0$
Waking bet di		0	$-\frac{Y}{3}$	
Winst	$X-\frac{X}{2}+Y-\frac{Y}{3}$	$-\frac{X}{2}-\frac{Y}{3}-\frac{Y}{3}$		
	$\frac{X}{2}+\frac{2Y}{3}$	$-(\frac{X}{2}+\frac{2Y}{3})$		

Tabel 2.4: Geen Dutch Book bij $X=\frac{1}{3}$ volgens Hitchcock

- Sleeping Beauty nr. 1 stelt op zondagavond vast welke kans ze zal toekennen aan kop op maandag en/of dinsdag. Ze mag deze kans niet meer veranderen, ook niet nadat zij geïnformeerd is over het voornemen van de bookie de waking bets eventueel maar één keer in behandeling te nemen.
  Op deze manier is er tegen elke kans op kop een Dutch Book te maken. Stelt Sleeping Beauty de kans op kop gelijk aan X met $0<X<\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{3}<X<1$, dan zal de bookie beide waking bets door laten gaan. Geeft zij het antwoord $\frac{1}{3}$, dan zal de bookie één waking bet in behandeling nemen.
- De bookie beslist eerst of de waking bets in het geval van munt één of twee keer in behandeling worden genomen. Vervolgens bepaalt Sleeping Beauty nr. 2 haar kans op kop. Is het voor Sleeping Beauty nr. 2 mogelijk haar kans op kop zo te bepalen dat een Dutch Book altijd vermeden wordt? In de volgende paragraaf tonen we aan dat dit inderdaad kan.

2.6.1 Eén of twee waking bets?

Stel dat de bookie besluit dat beide waking bets in het geval van munt in behandeling worden genomen. Sleeping Beauty nr. 2 kan nu, zelfs zonder het kennen van de first bet, bepalen hoe ze haar kans op kop moet bepalen om een Dutch Book te vermijden:

1. Beide waking bets worden in behandeling genomen.

Neem P(kop) $=X$ met $0<X<1$.
Bekijk de volgende tabel:

	Kop	Munt	Kosten	Verwachtingswaarde
First bet	A	0	$-\frac{A}{2}$	$(A-\frac{A}{2})\cdot\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}=0$
Waking bet ma	B	0	-XB	$(B-XB)\cdot X-XB\cdot(1-X)=0$
Waking bet di		0	-XB	
Winst	$A-\frac{A}{2}+B-XB$	$-\frac{A}{2}-XB-XB$		

Tabel 2.5: Twee waking bets

Er bestaat geen Dutch Book als $A-\frac{A}{2}+B-XB=\frac{A}{2}+(1-X)B$ en $-\frac{A}{2}-XB-XB=-(\frac{A}{2}+2XB)$ niet allebei negatief kunnen zijn. Dit is het geval als $1-X=2X$, dus als $X=\frac{1}{3}$. Dus als beide waking bets in behandeling worden genomen, zal Sleeping Beauty nr. 2 haar kans op kop gelijk nemen aan $\frac{1}{3}$.

Ook als de bookie besluit één waking bet in behandeling te nemen, dan is het voor Sleeping Beauty nr. 2 mogelijk haar kans op kop zo te kiezen dat een Dutch Book ontweken wordt:

2. Er wordt één waking bet in behandeling genomen.

Neem ook hier P(kop) = X met $0 < X < 1$.
Bekijk de volgende tabel:

	Kop	**Munt**	**Kosten**	**Verwachtingswaarde**
First bet	A	0	$-\frac{A}{2}$	$(A-\frac{A}{2})\cdot\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2}=0$
Waking bet	B	0	-XB	$(B-XB)\cdot X-XB\cdot(1-X)=0$
Winst	$A-\frac{A}{2}+B-XB$	$-\frac{A}{2}-XB$		

Tabel 2.6: Eén waking bet

Er bestaat geen Dutch Book als $A-\frac{A}{2}+B-XB=\frac{A}{2}+(1-X)B$ en $-\frac{A}{2}-XB=-(\frac{A}{2}+XB)$ niet allebei negatief kunnen zijn. Dit is het geval als $1-X=X$, dus als $X=\frac{1}{2}$. Dus als er maar één waking bet in behandeling wordt genomen, moet Sleeping Beauty nr. 2 haar kans op kop gelijk nemen aan $\frac{1}{2}$.

2.7 Conclusie

Het Sleeping Beauty probleem blijft de gemoederen bezighouden. Over de hele wereld wordt gesproken over de kans die Sleeping Beauty aan kop moet toekennen. Met behulp van Dutch Books hebben wij geprobeerd aan te tonen dat geen enkele kans op kop goed kan zijn. De Dutch Books tegen P(kop) = X met $0 < X < \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3} < X < 1$ zijn allemaal van dezelfde categorie: het experiment wordt op de normale manier doorlopen. Sleeping Beauty neemt in het geval van kop één waking bet aan en in het geval van munt twee. Bradley en Leitgeb hebben geprobeerd het Dutch Book tegen $\frac{1}{2}$, dat dus in deze categorie valt, onderuit te halen. Zij beweren in hun artikel dat de waking bets nooit worden aangenomen, omdat de verwachte opbrengst van maandag en dinsdag samen negatief is. Dit argument was echter vrij eenvoudig te weerleggen met behulp van Draper en Pust.

Het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$ vormt de tweede categorie: in het geval van munt wordt maar één waking bet in behandeling genomen. Het maken van deze extra afspraak, wat absoluut nodig is voor het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$, is een stuk lastiger te rechtvaardigen:

- Hitchcock werpt een beperking voor de bookie op: hij mag ten opzichte van Sleeping Beauty niet over extra informatie beschikken. Hitchcock claimt dat de enige manier waarop hieraan voldaan wordt, is dat de bookie met Sleeping Beauty meeslaapt. Hitchcock zal vermoedelijk van mening zijn dat er geen extra afspraken gemaakt mogen worden, al zegt hij dit niet expliciet.

- Als er wél een extra afspraak gemaakt mag worden zonder dat Sleeping Beauty de gelegenheid krijgt haar kans aan te passen, verliest Sleeping Beauty gegarandeerd geld. Op deze manier wordt de weddenschap echter wel erg oneerlijk voor haar.

- Als de extra afspraak gemaakt mag worden en Sleeping Beauty mag daarna haar kans op kop bepalen, dan is er geen Dutch Book tegen P(kop) = X met $0 < X < 1$ te maken.

Wanneer we afspreken dat Sleeping Beauty haar kans mag aanpassen aan het soort weddenschap (1 of 2 keer uitbetalen bij munt), maar niet aan de payoffs in de Dutch Book weddenschap, dan kan er geen Dutch Book gemaakt worden en zijn beide kansen op kop dus 'goed'. Het lijkt redelijk dit te eisen - zoals Saar Wilf vond dat eerst duidelijk moet zijn wat met 'times' bedoeld wordt, voordat er van kansen sprake kan zijn. Terwijl Saar Wilf op een 'vage' manier claimt dat het Sleeping Beauty probleem vaag is, hebben wij nu wiskundig vastgesteld dat het Sleeping Beauty probleem vaag is.

Hoofdstuk 3

Boy or Girl paradox

3.1 Inleiding

De eerste referentie in de literatuur van de Boy or Girl paradox, ook wel *The Two Children Problem* genoemd, stamt uit 1959 [13]. Het was in dat jaar dat Martin Gardner het probleem besprak in zijn column 'Mathematical Games' in het tijdschrift Scientific American. In 1996 kwam de Boy or Girl paradox aan de orde in de column 'Ask Marilyn' van Marilyn vos Savant in Parade, een populair Amerikaans zondagmagazine. Na deze publicatie werd het probleem wereldwijd bekend en laaide er veel discussie op.

In dit hoofdstuk zullen we de Boy or Girl paradox formuleren, de mogelijke oplossingen bekijken aan de hand van Dutch Books en met behulp van Marilyn vos Savant tot een oplossing komen.

3.2 Probleem

De meest bekende versie van het Boy or Girl probleem, zoals Martin Gardner het formuleerde in 1959, bestaat uit de volgende twee vragen:

1. Meneer Smith heeft twee kinderen. Ten minste een van de twee is een jongen. Wat is de kans dat beide kinderen jongens zijn?

2. Meneer Jones heeft twee kinderen. De oudste is een meisje. Wat is de kans dat beide kinderen meisjes zijn?

Om verwarring te voorkomen, zullen we een klein detail in het hierboven geformuleerde probleem veranderen. In de tweede vraag kijken we net als in de eerste vraag ook naar jongens in plaats van meisjes. De tweede vraag wordt nu:

2. Meneer Jones heeft twee kinderen. De oudste is een jongen. Wat is de kans dat beide kinderen jongens zijn?

Intuïtief lijkt duidelijk dat het antwoord op beide vragen $\frac{1}{2}$ moet zijn. Maar laten we dit probleem eens nader bekijken. Bij gezinnen met twee kinderen hebben we te maken met de volgende uitkomstenruimte: $\Omega = \{\text{JJ}, \text{JM}, \text{MJ}, \text{MM}\}$ (M: meisje, J: jongen). Er geldt $P(\text{JJ}) = P(\text{JM}) = P(\text{MJ}) = P(\text{MM}) = \frac{1}{4}$. In het eerste hierboven genoemde geval weten we

dat ten minste één van de twee een jongen is, dus de mogelijkheid MM valt af. Van de drie overgebleven mogelijkheden zien we dat met kans $\frac{1}{3}$ de beide kinderen jongens zijn.
In het tweede geval daarentegen valt de mogelijkheid MM af, maar ook MJ. De kans op nog een jongen is hier dus $\frac{1}{2}$. We zien dat de antwoorden op beide vragen niet overeenstemmen.

3.2.1 Paradox

Om duidelijk te maken waarom dit probleem een paradox genoemd wordt, plaatsen we de twee afzonderlijke vragen direct achter elkaar:
Meneer Jones komt op straat meneer Smith met zijn zoon tegen. Meneer Smith vertelt hem dat hij twee kinderen heeft en dat ten minste één van de twee een jongen is. Meneer Jones denkt na over de kans op nog een jongen en concludeert volgens hierboven genoemde redenering dat deze kans $\frac{1}{3}$ moet zijn. Dan vraagt meneer Jones aan meneer Smith of zijn zoon de oudste van de twee kinderen is. Meneer Smith bevestigt dit, waarop meneer Jones ontdekt dat hij de kans op nog een jongen nu moet aanpassen. Meneer Jones had ook van kans moeten veranderen als meneer Smith had gezegd dat zijn zoon de jongste van zijn twee kinderen is. Het merkwaardige is nu dat hij in beide gevallen de kans naar $\frac{1}{2}$ zou moeten veranderen. Als meneer Jones al, voordat zijn vraag beantwoord wordt, weet dat de bijbehorende kans van $\frac{1}{3}$ naar $\frac{1}{2}$ verandert, dan zou die kans toch meteen al $\frac{1}{2}$ moeten zijn? Hierin schuilt de paradox van het Boy or Girl probleem.

In sectie 3.3 zullen we met behulp van Dutch Books zien dat het niet goed kan zijn om van kans te veranderen. Maar eerst gaan we het probleem verduidelijken door te kijken naar de wijze van selectie van ouder en kind.

3.3 Wijze van selectie

Om de paradox meer inzichtelijk te maken onderscheiden we hieronder twee manieren van selectie. We zullen zien dat deze zullen leiden tot twee verschillende antwoorden op de eerste vraag. Het antwoord $\frac{1}{3}$ is alleen het juiste antwoord bij selectieprocedure 2. We zijn dus hierboven impliciet van de tweede selectie methode uitgegaan. De paradox in het Boy or Girl probleem wordt ook in deze tweede selectieprocedure zichtbaar.

3.3.1 Selectie 1

Een groot aantal jongens en meisjes uit gezinnen met twee kinderen zetten we bij elkaar in een ruimte. Uit al deze kinderen kiezen we volledig willekeurig een kind. Dat wil zeggen dat elk kind even grote kans heeft om gekozen te worden. Als dit kind een jongen blijkt te zijn, ziet de uitkomstenruimte van zijn gezin er als volgt uit: $\Omega = \{\mathrm{JJ}, \mathrm{JM}, \mathrm{MJ}\}$. We weten van deze jongen dat hij een oudere zus, jongere zus, oudere broer en jongere broer kan hebben. We geven de drie mogelijkheden nu als volgt weer: $\Omega = \{\mathrm{J_1J_2}, \mathrm{J_3M}, \mathrm{MJ_4}\}$. Onze random geselecteerde jongen kan $\mathrm{J_1}$, $\mathrm{J_2}$, $\mathrm{J_3}$ of $\mathrm{J_4}$ zijn. Van deze vier mogelijkheden hebben alleen $\mathrm{J_1}$ en $\mathrm{J_2}$ een broer(tje), dus de kans op nog een jongen is hier $\frac{1}{2}$.
Wat gebeurt er als de jongen vertelt dat hij de oudste van de twee kinderen is? De mogelijkheden $\mathrm{J_2}$ en $\mathrm{J_4}$ vallen af. Van de twee overgebleven mogelijkheden heeft alleen $\mathrm{J_1}$ een broertje, dus de kans op nog een jongen in het gezin blijft $\frac{1}{2}$. Hier is het veranderen van de kans dus niet aan de orde en is er geen sprake van een paradox.

3.3.2 Selectie 2

We selecteren een groot aantal ouders, die allemaal twee kinderen hebben. We kiezen nu volledig willekeurig een ouder uit deze groep. Als de ouder een zoon blijkt te hebben, is dit de uitkomstenruimte voor het gezin van de ouder: $\Omega = \{$JJ, JM, MJ$\}$. Omdat deze mogelijkheden onafhankelijk van elkaar zijn, hebben ze alle drie even grote kans: P(JJ) = P(JM) = P(MJ) = $\frac{1}{3}$. Dus de kans op nog een jongen is hier $\frac{1}{3}$.
Maar wat gebeurt er nu als de ouder vertelt dat de zoon de oudste van de twee kinderen is? Zoals we in sectie 3.1 al hebben gezien, lijkt het alsof we hier de kans op nog een jongen in het gezin moeten aanpassen. Het Dutch Book in de volgende paragraaf zal echter uitwijzen dat het niet goed kan zijn om van kans te veranderen.

3.4 Dutch Book

We nemen voor dit Dutch Book de tweede selectieprocedure als uitgangspunt, omdat er bij selectie 1 geen sprake is van een paradox.
Meneer Jones kiest volledig willekeurig een ouder uit de grote groep volwassenen met twee kinderen. De gekozen ouder heet meneer Smith en blijkt ten minste één zoon te hebben. Meneer Jones bepaalt de kans op nog een jongen in het gezin van meneer Smith en komt zoals we al eerder gezien hebben op kans $\frac{1}{3}$ uit. Op dat moment komt er een bookie aangelopen, die meneer Jones de volgende weddenschap aanbiedt:

Uitbetaling als het 2^{e} kind een jongen is: 0 euro
Uitbetaling als het 2^{e} kind een meisje is: M euro, M $\in \mathbb{R}_{>0}$
Kosten: $\frac{2}{3}$M
De verwachtingswaarde is gelijk aan nul:

$$\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}M) + \frac{2}{3}(M - \frac{2}{3}M) = 0$$

Per definitie zal meneer Jones deze weddenschap accepteren.

Nu vertelt meneer Smith dat zijn zoon de oudste van de twee kinderen is. Weer denkt meneer Jones na over de kans op nog een jongen. Meneer Jones bekijkt wederom de mogelijkheden en stelt vast dat de kans op nog een jongen nu $\frac{1}{2}$ moet zijn.
De bookie grijpt zijn kans en biedt meneer Jones een nieuwe weddenschap aan:

Uitbetaling als het 2^{e} kind een jongen is: N euro, N $\in \mathbb{R}_{>0}$
Uitbetaling als het 2^{e} kind een meisje is: 0 euro
Kosten: $\frac{1}{2}$N
De verwachtingswaarde is ook in dit geval gelijk aan nul:

$$\frac{1}{2}(N - \frac{1}{2}N) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}N) = 0$$

Dus meneer Jones neemt ook deze weddenschap aan.

De twee weddenschappen staan in onderstaande tabel:

	Jongen	**Meisje**	**Kosten**	**Verwachtingswaarde**
Bet 1	0	M	$-\frac{2}{3}M$	$\frac{1}{3}(-\frac{2}{3}M)+\frac{2}{3}(M-\frac{2}{3}M)=0$
Bet 2	N	0	$-\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{2}(N-\frac{1}{2}N)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}N)=0$
Winst	$-\frac{2}{3}M+N-\frac{1}{2}N$	$M-\frac{2}{3}M-\frac{1}{2}N$		

Tabel 3.1: Dutch Book: Boy or Girl paradox

Als meneer Jones in het geval van een jongen én in het geval van een meisje geld verliest, dan hebben we een Dutch Book gecreëerd. Dus we zoeken nu een M en een N waarvoor geldt:

$$-\frac{2}{3}M+N-\frac{1}{2}N<0$$

$$M-\frac{2}{3}M-\frac{1}{2}N<0$$

Er moet gelden:

$$\frac{1}{2}N<\frac{2}{3}M \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2}N>\frac{1}{3}M$$

We nemen nu M = N = 60, zodat meneer Jones gegarandeerd 10 euro verliest. Het Dutch Book is gemaakt.

We hebben nu aangetoond dat het niet goed kan zijn om van kans te veranderen. Laten we nu terugkeren naar selectieprocedure 2. Als we weten dat de ouder ten minste één zoon heeft, nemen we P(nog een jongen) = $\frac{1}{3}$. Dan vertelt de ouder dat de zoon de oudste van de twee kinderen is. Wat is in dit geval de kans op nog een jongen in het gezin? Om te kunnen rechtvaardigen dat $\frac{1}{3}$ het goede antwoord op deze vraag is, raadplegen we Marilyn vos Savant met een IQ van 228, volgens het *Guinness Book of World Records* de intelligentste vrouw ter wereld.

3.5 Steekproef

Voornoemde Marilyn vos Savant heeft een column *Ask Marilyn* in het populaire Amerikaanse zondagmagazine Parade [14]. In deze column beantwoordt zij vragen van lezers. Haar antwoord op een vraag over de Boy or Girl paradox deed zoveel discussie oplaaien dat sindsdien het probleem wereldwijd bekend is. Marilyn beargumenteerde haar antwoord aan de hand van de verschillende mogelijkheden en veranderde zoals dat in paragraaf 3.1 ook gebeurde de kans van $\frac{1}{2}$ naar $\frac{1}{3}$. Een aantal lezers bleef met vraagtekens zitten, omdat het intuïtief onmogelijk lijkt om van kans te veranderen. Uiteindelijk heeft Marilyn alle lezers met twee kinderen, waarvan tenminste één jongen, gevraagd een brief in te zenden met daarin het geslacht van het andere kind. Van de 18.000 reacties had 35,9 % twee jongens. Deze manier van selectie komt overeen met onze tweede selectieprocedure. Uit deze steekproef kunnen we opmaken dat het goede antwoord op vraag 1 inderdaad $\frac{1}{3}$ moet zijn. Marilyn heeft met haar steekproef ons op het idee gebracht om een aangepaste steekproef te construeren, waaruit duidelijk wordt dat het antwoord op de tweede vraag $\frac{1}{3}$ moet blijven. Hieronder volgt onze opzet.

3.5.1 Aangepaste constructie

We vragen nu alle lezers van Marilyn met twee kinderen waarvan ten minste één jongen een brief in te zenden met daarop het geslacht van het andere kind én de naam van de zoon. Als de lezer twee zonen heeft, kiest de lezer willekeurig één van de twee namen. Na het ontvangen van alle brieven zullen we net als Marilyn ondervinden dat ongeveer $\frac{1}{3}$ van de lezers, die een brief hebben gezonden, twee zonen heeft. Vervolgens bellen we alle lezers die gegevens hebben ingezonden. We vragen hun of ze de naam van hun oudste kind hebben opgeschreven. Alle inzenders met een ouder meisje (MJ) zullen nee antwoorden en afvallen. Uiteraard bevestigen alle ouders met een oudere jongen (JM) deze vraag. Omdat de ouders met twee zonen willekeurig een naam hebben gekozen, zal de helft met ja en de helft met nee antwoorden. De eerste rij in de tabel hieronder geeft aan hoe de verschillende mogelijkheden verdeeld zijn over de lezers, die een brief ingezonden hebben. De tweede rij laat zien hoe groot het deel is dat de naam van het oudste kind heeft opgeschreven.

<table>
<tr><th></th><th>MM</th><th>MJ</th><th>JM</th><th colspan="2">JJ</th><th>Totaal</th></tr>
<tr><td>Verdeling ingezonden brieven</td><td>-</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{3}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Verdeling naam oudste kind</td><td>-</td><td>-</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>-</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

Tabel 3.2: Aangepaste steekproef

We zien dat de helft van de inzenders de naam van hun oudste kind heeft opgeschreven. Van deze helft heeft $\frac{1}{3}$ twee zonen. Dus ook in het geval van de tweede selectieprocedure veranderen we niet van kans.

3.6 Conditioneren

Conditioneren is één van de meest gebruikte methoden in de kansrekening. Deze methode toegepast op de Boy or Girl paradox, lijkt te laten zien dat het antwoord op de eerste vraag $\frac{1}{3}$ en het antwoord op de tweede vraag $\frac{1}{2}$ moet zijn:

$$P(\text{JJ}|\text{JM,MJ,JJ}) = \frac{\text{P(JJ)P(JM,MJ,JJ|JJ)}}{\text{P(JM,MJ,JJ)}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{JJ}|\text{JM,JJ}) = \frac{\text{P(JJ)P(JM,JJ|JJ)}}{\text{P(JM,JJ)}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Door te conditioneren zien we dat we van kans moeten veranderen, terwijl we met een Dutch Book argument hebben aangetoond dat dit niet goed kan zijn. Welke van deze twee methoden uit de kansrekening moeten we geloven? In een artikel van Grünwald en Halpern vinden we het antwoord op deze vraag.

Grünwald en Halpern laten zien dat conditioneren niet correct is als de gebeurtenissen geen partitie van de uitkomstenruimte vormen [Grünwald & Halpern, 2003, p.251]. In ons geval ziet de uitkomstenruimte er als volgt uit: $\Omega = \{\text{JM,MJ,JJ}\}$. Nu zijn er twee mogelijkheden; de zoon is het oudste of het jongste kind. We conditioneren dus op de volgende deelverzamelingen U,V $\subset \Omega$: U $= \{\text{JM, JJ}\}$,
V $= \{\text{MJ, JJ}\}$. Dit is duidelijk geen partitie van Ω, omdat in het geval van een partitie moet gelden dat U $\cap$ V $= \emptyset$. Dit verklaart waarom we tot een verkeerd antwoord komen als we conditioneren. Conditioneren is in de Boy or Girl paradox niet toegestaan.

3.7 Conclusie

Bij de Boy or Girl paradox is het belangrijk onderscheid te maken tussen twee verschillende soorten selectie. Als we onze eerste selectieprocedure volgen, is er geen sprake van een paradox. Bij de tweede manier van selecteren is dit lastiger in te zien. Het lijkt intuïtief nog steeds nodig om van kans te veranderen. Een Dutch Book laat ons echter zien dat het niet goed kan zijn om van kans te veranderen. Een andere methode in de kansrekening, conditioneren, zegt dat we wel moeten veranderen van kans. Echter, omdat de gebeurtenissen geen partitie van onze uitkomstenruimte zijn, is conditioneren in de Boy or Girl paradox niet toegestaan.

Het Dutch Book heeft dus uitgewezen dat het niet correct is om van kans te veranderen in onze tweede selectieprocedure en dat $\frac{1}{3}$ dus het goede antwoord op de tweede vraag moet zijn. Om dit te rechtvaardigen, hebben we Marilyn vos Savant, volgens de Guinness Book of Worldrecords de intelligentste vrouw ter wereld, geraadpleegd. Door het aanpassen van de steekproef die zij onder haar lezers heeft afgenomen, zien we dat het antwoord inderdaad $\frac{1}{3}$ moet blijven.

Dutch Books zijn dus ook in de Boy or Girl paradox een goede methode om aan te tonen of een kans wel of niet correct is.

Conclusie

In de twee ons inmiddels bekende paradoxen van deze scriptie wordt gevraagd naar een kans. Door de kansaxioma's na te lopen kunnen we vaststellen of de kans die we toekennen aan een gebeurtenis, in ons geval de kans op kop en de kans op een jongen, wiskundig is. Het is echter lastiger te bepalen of de gegeven kans het juiste antwoord is op de vraag van de paradox. Dutch Books bieden hier uitkomst. In het geval dat we een Dutch Book kunnen maken tegen een wiskundige kans tonen we daarmee impliciet aan dat deze kans niet de kans is die we zoeken in de paradox.

Aanvankelijk leken we voor Sleeping Beauty op betrekkelijk eenvoudige wijze een Dutch Book te kunnen construeren tegen alle mogelijke kansen op kop. Daarbij moeten we wel aantekenen, dat onze bookie de vrijheid nam om in het geval van munt maar één bet in behandeling te nemen. Deze vrijheid kwam hem goed van pas voor P(kop) $= \frac{1}{3}$. In feite manipuleerde hij in dit geval de weddenschap. De vraag blijft of deze extra afspraak het Dutch Book tegen $\frac{1}{3}$ ongeldig maakt.
In ieder geval hebben we met behulp van Dutch Books in het Sleeping Beauty probleem wiskundig aangetoond dat het probleem ambigu is. We zien dat het niet goed is om te zeggen dat $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$ HET antwoord op de vraag moet zijn.
Met behulp van Dutch Books hebben we in de Boy or Girl paradox aangetoond dat het niet goed kan zijn om van kans te veranderen. Dutch Book blijken ook hier een goede methode te zijn voor het analyseren van paradoxen in de kansrekening.

Dutch Books hebben meestal betrekking op een meer omvangrijke en minder doorzichtige serie van weddenschappen dan in de problemen van deze scriptie aan de orde zijn. Dat in ons geval toch Dutch Books te maken zijn, danken we aan de paradox. De problemen zijn meerduidig, waardoor een agent altijd op het verkeerde been te plaatsen is als we de kans die hij toekent eenmaal kennen. Concluderend stellen we daarom vast dat

- door middel van een Dutch Book kan worden aangetoond dat de kans waarop deze gebaseerd is niet goed kan zijn, én
- door middel van Dutch Books, wanneer deze te maken zijn voor alle kansen tussen $0 < P(X) < 1$, wiskundig wordt aangetoond dat een probleem in de kansberekening onoplosbaar is.

Bibliografie

[1] de Finetti, B. (1937). La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 7: 1-68.
Vertaald in het Engels naar 'Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources' door Henry E. Kyburg Jr. in: Kyburg Jr., H.E. & Smokler, H.E. (1964). *Studies in Subjective Probability*. Wiley, New York.

[2] Paris, J.B. (1994). *The Uncertain Reasoner's Companion: A Mathematical Perspective*. Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Elga, A. (2000). Self-locating belief and the Sleeping Beauty problem. *Analysis*, 62: 53-62.

[4] Grünwald, P.D. & Halpern, J.Y. (2003). Updating Probabilities. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 19: 243-278.

[5] Hitchcock, C. (2004). Beauty and the bets. *Synthese*, 139: 405-420.

[6] Bradley, D. & Leitgeb, H. (2006). When Betting Odds and Credences Come Apart: More Worries for Dutch Book Arguments. *Analysis*, 66: 119127.

[7] Draper, K. & Pust, J. (2008). Diachronic Dutch Books and Sleeping Beauty. *Synthese*, 164: 281-287.

[8] Halpern, J.Y. (2008). Sleeping Beauty Reconsidered: Conditioning and Reflection in Asynchronous Systems.

[9] Geschiedenis van de term Dutch Book:

`http://people.few.eur.nl/wakker/miscella/dutchbk.htm`

[10] Waarom het Sleeping Beauty probleem ambigu zou zijn:

`http://www.maproom.co.uk/sb.html#arg-16`

[11] Dutch Book, Wikipedia

[12] Sleeping Beauty problem, Wikipedia

[13] Boy or Girl paradox, Wikipedia

[14] Marilyn vos Savant, Wikipedia