Epimorfismen

Pouwelse, S.

Stefan Pouwelse

Epimorfismen

Bachelorscriptie, 10 september 2009

Scriptiebegeleider: prof.dr. H.W. Lenstra

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Voorwoord

Deze scriptie is geschreven naar aanleiding van mijn bacheloronderzoek voor het bachelorseminarium algebra, meetkunde en getaltheorie. De inhoud van de scriptie is zodanig dat deze aansluit bij de kennis van een derdejaars wiskundige en zal voor iedereen met enige basiskennis van algebra en topologie te begrijpen zijn. Gedurende het onderzoek en het schrijven van de scriptie werd ik begeleid door professor Hendrik Lenstra en ik wil hem bij dezen zeer hartelijk bedanken voor zijn goede en inspirerende begeleiding.

Inleiding

Het begrip "epimorfisme" komen we tegen in de categorieënleer als morfismen met een bepaalde eigenschap. Zij $\mathcal{C}$ een categorie en $[A, B]_\mathcal{C}$ de verzameling morfismen van A naar B voor willekeurige objecten $A, B \in \mathcal{C}$.

Definitie 1. *Een morfisme $f \in [A, B]_\mathcal{C}$ heet* epimorf *als voor elk object $C \in \mathcal{C}$ en elke twee morfismen $g, h \in [B, C]_\mathcal{C}$ met $g \circ f = h \circ f$ geldt $g = h$.*

Deze eigenschap van morfismen is op te vatten als een abstractie van het begrip surjectief uit de categorie van verzamelingen. In de categorie van verzamelingen zijn de epimorfismen dan ook de surjectieve afbeeldingen. Aan de ene kant is dit direct duidelijk, immers als f surjectief is, zijn g en h gelijk op heel B. Andersom kunnen we bij voorbeeld kijken naar de afbeeldingen $g, h : B \to \{1, 2\}$ waarbij g gedefinieerd is door $g(x) = 1$ voor alle $x \in B$ en h gedefinieerd is door $h(x) = 1$ voor $x \in f(A)$ en $h(x) = 2$ voor $x \in B \backslash f(A)$. We zien dan dat $g \neq h$ zodra $f(A) \neq B$. Dus f is niet epimorf zodra f niet surjectief is.
Ook in bijvoorbeeld de categorie van abelse groepen is het eenvoudig om te bewijzen dat epimorfismen surjectief zijn. Hier kunnen we bij voorbeeld kijken naar de afbeeldingen $g, h : B \to B/f(A)$ gegeven door $g(x) = f(A)$ voor $x \in B$ en $h(x) = x \cdot f(A)$, want ook hier zijn g en h enkel dan gelijk als f surjectief is.

Toch is het niet zo dat in elke categorie waar surjectiviteit betekenis heeft, epimorfismen ook surjectief moeten zijn. Dit komen we bijvoorbeeld tegen in de categorie van Hausdorffse topologieën. Hier is een morfisme $f : A \to B$ al epimorf als zijn beeld $f(A)$ dicht ligt in B. Stel namelijk dat $g(x) \neq h(x)$ voor zekere $g, h : B \to C$ en $x \in B$, dan zijn er wegens de Hausdorffeigenschap disjuncte open U, V in C met $g(x) \in U$ en $h(x) \in V$. Maar nu geldt dat g en h verschillend zijn op de niet lege, open deelverzameling $g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$. Dit betekent dat $g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V) \subseteq B \backslash f(A)$, ofwel $f(A)$ ligt niet dicht in B.

Naast de hierboven genoemde voorbeelden, zullen we voor de categorieën van de topologieën, de groepen, de torsievrije groepen, de eindige groepen en de oplosbare groepen bewijzen dat epimorfismen surjectief zijn. Hiertoe zullen we onder andere een verband tussen colimieten en epimorfismen afleiden, en de constructie van geamalgameerde sommen behandelen.

1. Diagrammen en colimieten

In deze paragraaf behandelen we de relatie tussen epimorfismen en colimieten van diagrammen. We gaan weer uit van een categorie $\mathcal{C}$.

Definitie 2. *Zij I een willekeurige indexverzameling. Een* diagram $\mathcal{D} = \{(A_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_{ij})_{i,j\in I}\}$ *bestaat uit een collectie objecten $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{C}$ met voor alle $i, j \in I$ een deelverzameling $\mathcal{F}_{ij} \subseteq [A_i, A_j]_{\mathcal{C}}$ van morfismen van A_i naar A_j.*

Definitie 3. *Zij $\mathcal{D} = \{(A_i)_{i\in I}, (\mathcal{F}_{ij})_{i,j\in I}\}$ een diagram en $A \in \mathcal{C}$. Een familie van morfismen $(g_i : A_i \to A)_{i\in I}$ heet* toelaatbaar *als voor alle $i, j \in I$ en elke $f \in \mathcal{F}_{ij}$ geldt dat $g_j \circ f = g_i$. Als $(g_i : A_i \to A)_{i\in I}$ een toelaatbare familie is noemen we A het* object *van $(g_i : A_i \to A)_{i\in I}$.*

Voorbeeld Een eenvoudig voorbeeld van een toelaatbare familie voor elk diagram in de categorie van de groepen is de familie $(g_i : A_i \to A)_{i\in I}$, waarin $A = \{1\}$ en de g_i gegeven zijn door $g_i(a) = 1$ voor alle $a \in A_i$.

Definitie 4. *Een toelaatbare familie $(g_i : A_i \to A)_{i\in I}$ voor een diagram $\mathcal{D}$ heet een* colimiet *als voor elke toelaatbare familie $(h_i : A_i \to B)_{i\in I}$ van $\mathcal{D}$ geldt:*

$$\exists! \gamma \in [A, B]_{\mathcal{C}} \text{ zodanig dat voor alle } i \in I \text{ geldt } \gamma \circ g_i = h_i.$$

Een colimiet is dus een toelaatbare familie waarvan het object dusdanig groot is dat elke andere toelaatbare familie erlangs kan factoriseren, en tegelijk dusdanig klein dat deze factorisatie slechts op een unieke manier kan plaatsvinden.

Voorbeeld We beschouwen de diagrammen in de categorie van de verzamelingen bestaande uit objecten $(A_i)_{i\in I}$ en waarbij $\mathcal{F}_{ij} = \emptyset$ voor alle $i, j \in I$. Voor deze diagrammen vormen de natuurlijke inbeddingen in de disjuncte vereniging $\coprod_{i\in I} A_i$ van de A_i een colimiet. Dat is als volgt in te zien. Elke toelaatbare familie voor dit diagram bestaat in feite uit een vast object B met voor elke A_i een willekeurige functie $f_i : A_i \to B$. De unieke factorisatie via de colimiet krijgen we nu door de afbeelding $\gamma : \coprod A_i \to B$ zo te definieren dat $\gamma(a) = f_i(a)$ voor $a \in A_i \subset \coprod_{j\in I} A_j$. Daarmee is γ volledig bepaald, en dus uniek.

Stelling 1. *Colimieten zijn uniek op een uniek isomorfisme na.*

Bewijs We maken een categorie $\mathcal{E}$ waarin de objecten de toelaatbare families van $\mathcal{D}$ zijn. Voor twee toelaatbare families $P = (g_i : A_i \to M)_{i\in I}$ en $Q = (h_i : A_i \to N)_{i\in I}$ definieren we $[P, Q]_{\mathcal{E}}$ als

$$[P, Q]_{\mathcal{E}} = \{f \in [M, N]_{\mathcal{C}} | f \circ g_i = h_i \text{ voor alle } i \in I\}.$$

De verzameling $[P, P]_{\mathcal{E}}$ bevat altijd de identiteit. Voor een derde toelaatbare familie $R = (j_i : A_i \to O)_{i\in I}$ geldt dat de samenstelling $\alpha \circ \beta$ van twee morfismen $\alpha \in [Q, O]_{\mathcal{E}}$ en $\beta \in [P, Q]_{\mathcal{E}}$ zich in $[P, O]_{\mathcal{E}}$ bevindt. Immers als $\beta \circ g_i = h_i$ en $\alpha \circ h_i = j_i$ dan geldt ook dat $\alpha \circ \beta \circ g_i = j_i$. Dit bewijst dat $\mathcal{E}$ een categorie is. Wegens de universele eigenschap van colimieten zijn de colimieten de beginobjecten in deze categorie, en van beginobjecten weten we dat ze uniek zijn op een uniek isomorfisme na. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

De volgende stelling laat zien hoe colimieten in verband kunnen worden gebracht met epimorfismen.

Stelling 2. *Een morfisme $f \in [M, N]_{\mathcal{C}}$ is epimorf dan en slechts dan als het diagram $\mathcal{D}$ met objecten $(A_1 = M, A_2 = N, A_3 = N)$ en morfismen $(f_1 = f : A_1 \to$*

$A_2, f_2 = f : A_1 \to A_3)$ *colimiet* $(g_1 = f : A_1 \to N, g_2 = \mathrm{id}_N : A_2 \to N, g_3 = \mathrm{id}_N : A_3 \to N)$ *heeft.*

Bewijs Stel f is epimorf. Dan geldt voor elke toelaatbare familie (h_1, h_2, h_3) van $\mathcal{D}$ dat $h_2 = h_3$. Immers $h_2 \circ f = h_2 \circ f_1 = h_1 = h_3 \circ f_2 = h_3 \circ f$. En omdat f epimorf is geldt dan $h_2 = h_3$. Dit morfisme h_2 is daarom de enige manier waarlangs (h_1, h_2, h_3) kan factoriseren via N. Daarmee is $(g_1 = f : A_1 \to N, g_2 = \mathrm{id} : A_2 \to N, g_3 = \mathrm{id} : A_3 \to N)$ een colimiet van $\mathcal{D}$. Omgekeerd, als voor een object $O \in \mathcal{C}$ en twee morfismen $g, h \in [N, O]_{\mathcal{C}}$ geldt $g \circ f = h \circ f$, dan is $(h_1 = g \circ f, h_2 = g, h_3 = h)$ een toelaatbare familie voor $\mathcal{D}$. De colimiet $(g_1 = f : A_1 \to N, g_2 = \mathrm{id} : A_2 \to N, g_3 = \mathrm{id}_N : A_3 \to N)$ geeft nu een unieke factorisatie van $(h_1 = g \circ f, h_2 = g, h_3 = h)$ via N, dus een morfisme γ zodanig dat $g = \gamma \circ g_2$ en $\gamma \circ g_3 = h$. Maar omdat $g_2 = g_3 = \mathrm{id}$ geldt nu $g = h$. Dus f is epimorf. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

Deze stelling geeft eigenlijk een herdefinitie van het begrip epimorf in termen van colimieten. Als wij in een categorie een colimiet voor het diagram uit de stelling kunnen construeren, zal deze herdefinitie nuttig blijken voor het bewijzen van de surjectiviteit van epimorfismen. Dit zien we in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld In de categorie van verzamelingen kunnen we de colimiet van het diagram $(A_1 = M, A_2 = N, A_3 = N)$ met morfismen $(f_1 = f : A_1 \to A_2, f_2 = f : A_1 \to A_3)$ construeren. We gaan om te beginnen uit van de verzameling $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ zoals in het vorige voorbeeld, en definiëren hierop de volgende equivalentie relatie. Elementen $a, b \in A_1 \subset A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ zijn equivalent dan en slechts dan als $f_1(a) = f_1(b)$. Voor elementen $c \in A_2 \subset A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ en $d \in A_3 \subset A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ geldt allereerst dat $c \sim c$ en $d \sim d$. Daarnaast geldt dat $a \sim c$ respectievelijk $a \sim d$ dan en slechts dan als $f_1(a) = c$ respectievelijk $f_2(a) = d$. Als laatste geldt $c \sim d$ dan en slechts dan als er een element $a \in A_1$ bestaat zodanig dat $f_1(a) = c$ en $f_2(a) = d$. Het is eenvoudig na te gaan dat $\sim$ aan alle voorwaarden voor een equivalentierelatie voldoet. De afbeeldingen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ die de elementen van A_1, A_2, A_3 sturen naar de bijbehorende klassen in $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ vormen nu een colimiet voor het diagram. Dit is in te zien door $\sim$ op te vatten als de minimale relatie op $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ zodanig dat de functies $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ toelaatbaar zijn. De verzameling $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ laat zich als volgt beschrijven. Voor elk element $x \in f(M)$ is er één klasse, bestaande uit de elementen in M die op x worden afgebeeld, en de elementen $x \in A_2$ en $x \in A_3$. Daarnaast zijn er voor elke $y \in N \setminus f(M)$ twee klassen omdat deze y zowel in A_2 als in A_3 voorkomt en met geen enkel ander element in relatie staat. We zien dus dat de verzameling $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ ook te schrijven is als $f(M) \coprod (A_2 \setminus f_1(A_1)) \coprod (A_3 \setminus f_2(A_1))$.

Stel nu dat f epimorf is, dan geeft stelling 2 de colimiet $(g_1 = f : A_1 \to N, g_2 = \mathrm{id}_N : A_2 \to N, g_3 = \mathrm{id}_N : A_3 \to N)$ voor hetzelfde diagram. De unieke factorisatie $\gamma : N \to (A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ wordt nu gegeven door θ_2, immers $\theta_2 = \gamma \circ g_2 = \gamma \circ \mathrm{id} = \gamma$, en deze is wegens Stelling 1 een isomorfisme. Isomorfie van θ_2 impliceert dat elke klasse van $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ correspondeert met precies één element van A_2, en gezien de equivalentie op $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ volgt nu direct dat $f = f_1$ surjectief is. Immers als f niet surjectief is, is de verzameling $(A_3 \setminus f_2(A_1))$ niet leeg. Deze verzameling ligt geheel buiten het beeld van θ_2 zodat θ_2 niet surjectief, en dus niet isomorf is.

In de categorie van de topologische ruimten kunnen we op eenzelfde manier redeneren.

Stelling 3. *Epimorfismen zijn surjectief in de categorie van de topologische ruimten.*

Bewijs We kunnen de constructie in het voorafgaande voorbeeld uitvoeren op de onderliggende verzamelingen van de topologische ruimten A_1, A_2, A_3. Voor de verzameling $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ kiezen we dan de topologie bestaande uit de deelverzamelingen $U \subseteq A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ waarvoor geldt dat $U \cap A_i$ open is in A_i voor $i = 1, 2, 3$, en voor $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ kiezen we de quotiënttopologie. De stelling kan nu worden bewezen met dezelfde redenering als in het voorbeeld. $\square$

Voor de categorie van de Hausdorffse topologieën is deze methode niet direct toepasbaar, omdat de quotiënt- topologie op $(A_1 \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim$ niet Hausdorff hoeft te zijn. In het algemeen is dit dus geen colimiet van het diagram. Epimorfismen laten zich in deze categorie als volgt karakteriseren.

Stelling 4. *Een morfisme $f \in [M, N]_\mathcal{C}$ in de categorie van Hausdorffse topologieën is epimorf dan en slechts dan als $f(M)$ dicht ligt in N.*

Bewijs Een colimietobject voor het diagram in stelling 2 in deze categorie is de disjuncte vereniging $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$ uitgedeeld naar de equivalentierelatie $\sim$ gegeven door dezelfde voorwaarden als in het voorbeeld met de toevoeging dat alle identieke elementen in $\overline{f_1(A_1)}$ en $\overline{f_2(A_1)}$ ook equivalent zijn. We bewijzen dat de nu verkregen quotiënt topologie op $X := (\overline{f(M)} \coprod A_2 \coprod A_3)/_\sim = \overline{f(M)} \coprod (A_2 \setminus \overline{f_1(A_1)}) \coprod (A_3 \setminus \overline{f_2(A_1)})$ Hausdorff is. Hiertoe merken we op dat $A_2 \setminus \overline{f_1(A_1)}$ en $A_3 \setminus \overline{f_2(A_1)}$ open zijn in X. De complementen $\overline{f(M)} \coprod (A_3 \setminus \overline{f_2(A_1)})$ en $\overline{f(M)} \coprod (A_2 \setminus \overline{f_1(A_1)})$ zijn daarom gesloten in X. Laat p en q twee verschillende punten in X zijn. We beschouwen de continue afbeelding $\pi : X \to N$ die elk punt uit X naar het bijbehorende punt in N stuurt, en onderscheiden de gevallen $\pi(x) = \pi(y)$ en $\pi(x) \neq \pi(y)$. Als $\pi(x) = \pi(y)$, dan zijn x en y afkomstig uit de verzameling $A_2 \setminus \overline{f_1(A_1)}$ en $A_3 \setminus \overline{f_2(A_1)}$ en wel zodanig dat deze beide verzamelingen elk precies één van de elementen x en y bevatten. De verzamelinge $A_2 \setminus \overline{f_1(A_1)}$ en $A_3 \setminus \overline{f_2(A_1)}$ zijn open en disjunct dus in dit geval is de Hausdorff eigenschap bewezen. Als $\pi(x) \neq \pi(y)$, dan zijn er twee disjuncte open deelverzamelingen $U, V \subset N$ met $\pi(x) \in U$ en $\pi(y) \in V$. Wegens de continuïteit van π zijn nu ook $\pi^{-1}(U)$ en $\pi^{-1}(V)$ disjuncte open deelverzamelingen. Dit bewijst dat de topologie op X Hausdorff is.

Als we de redeneringen uit het voorbeeld toepassen met deze colimiet, zien we dat f niet epimorf is als $f(M)$ niet dicht ligt in N. De omkering is al in de inleiding behandeld, dus hiermee is de stelling bewezen. $\square$

2. Geamalgameerde sommen

In deze sectie behandelen we een methode (zoals beschreven in paragraaf 1 van [1]) om colimieten van zekere diagrammen in de categorie van groepen te bepalen. Deze methode werkt met een kleine aanpassing ook voor het diagram uit stelling 2. De hier gevonden colimiet, en de colimiet uit stelling 2 zullen we uiteindelijk samen gebruiken om te bewijzen dat epimorfismen surjectief zijn in de categorie van de groepen.

De diagrammen die we hier bekijken bestaan uit objecten, in dit geval groepen $(A, (G_i)_{i\in I})$ en morfismen, in dit geval homomorfismen $f_i : A \to G_i$ waarbij alle f_i injectief zijn. De colimiet van een dergelijk diagram noemen we de som van de G_i met A geamalgameerd. Deze colimiet bestaat altijd. Hij kan bijvoorbeeld worden verkregen door de vrije groep op de disjuncte vereniging van A en de G_i uit te delen naar de normaaldeler voortgebracht door de elementen xyz^{-1} met x, y, z uit een bepaalde G_i en $xy = z$ in die G_i, en de elementen xy^{-1} met $x \in A$ en $y = f_i(x)$ voor $y \in G_i$. De morfismen sturen dan elementen van A en de G_i naar de bijbehorende klasse.

Een geamalgameerde som kunnen we beschrijven met behulp van zogenaamde gereduceerde woorden die enigzins vergelijkbaar zijn met de woorden uit een vrije groep. Om die gereduceerde woorden te beschrijven hebben we de volgende twee ingrediënten nodig:

(1) Laat $j = (i_1, \dots, i_k)$ een eindige rij in I van willekeurige lengte $k \geq 0$ zijn die voldoet aan de voorwaarde
$$i_m \neq i_{m+1} \text{ voor alle } 1 \leq m \leq k-1.$$
Laat J de verzameling zijn van alle rijen van elke eindige lengte die voldoen aan bovenstaande voorwaarde. Deze series bepalen de mogelijke vormen die gereduceerde woorden kunnen hebben.

(2) Voor alle $i \in I$, laat S_i een keuze van representanten van rechter-nevenklassen van $f_i(A)\backslash G_i$ zijn waarbij $1 \in S_i$. Deze verzamelingen leveren de letters voor de gereduceerde woorden.

Definitie 5. *Laat $j = (i_1, \dots, i_k) \in J$. Een* gereduceerd woord *van type j is een object*
$$(a; s_1, ..., s_k) \text{ met } a \in A, s_1 \in S_{i_1}, \dots, s_k \in S_{i_k} \text{ , en } s_1, \dots, s_k \neq 1 \ .$$

Laat X_j de verzameling van alle gereduceerde woorden van type j zijn, en laat X de disjuncte vereniging van alle X_j zijn. De volgende stelling vertelt ons hoe we deze woorden kunnen identificeren met de colimiet G.

Stelling 5. *Zij $\mathcal{D}$ een diagram van de beschreven vorm. Laat G een colimietobject voor $\mathcal{D}$ zijn, en laat $h : A \to G$ en $h_i : G_i \to G$ de bijbehorende morfismen zijn. Dan is de afbeelding $\alpha : X \to G$ gegeven door*
$$\alpha((a; s_1, \dots, s_k)) = h(a)h_{i_1}(s_1) \dots h_{i_k}(s_k)$$
is bijectief.

Bewijs We bewijzen achtereenvolgens injectiviteit en surjectiviteit. Injectiviteit bewijzen we door een linksinverse voor α te construeren. Laat $Y_i = \{(a; s_1, \dots, s_k) \in X | a = 1, k = 0 \text{ of } i_1 \neq i\}$. Elk element $g \in G_i$ is uniek te schrijven als as met

$a \in f_i(A)$ en $s \in S_i$. Daarom is de afbeelding $\theta_i : G_i \times Y_i \to X$ gegeven door

$$(a, (1; s_1, \ldots, s_n)) \to (a; s_1, \ldots, s_n) \quad \text{en}$$

$$(as, (1; s_1, \ldots, s_n)) \to (a; s, s_1, \ldots, s_n) \text{ voor } s \neq 1$$

bijectief. We kunnen nu als volgt een werking van G_i op $G_i \times Y_i$ definieren:

$$\tilde{g} \cdot (g, y) = (\tilde{g}g, y).$$

Via θ_i geeft dit een werking van G_i op X. Omdat de werking van $f_i(a)$ voor vaste $a \in A$ gelijk is voor alle $i \in I$ induceert dit een werking van G op X. Immers de werkingen van de G_i vormen een toelaatbare familie waarvan het object de permutatiegroep van X is. De universele eigenschap van de colimiet geeft nu een uniek morfisme van G naar de permutatiegroep van X. Dit unieke morfisme correspondeert met een werking van G op X, en deze werking is zodanig dat de werking van $x \in G_i$ op X gelijk is aan de werking van $h_i(x) \in G$. Als we nu kijken naar de werking van $\alpha((a; s_1, \ldots, s_k)) = h(a)h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_k}(s_k)$ op het gereduceerde woord $(1;)$ dan zien we dat

$$h(a)h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_k}(s_k) \cdot (1;) = h(a)h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_{k-1}}(s_{k-1}) \cdot (1; s_k) = \ldots$$

$$= h(a) \cdot (1; s_1, \ldots, s_k) = (a; s_1, \ldots, s_k).$$

Daarom is de afbeelding $\beta : G \to X$ gegeven door $\beta(g) = g \cdot (1;)$ een linksinverse van α, en een afbeelding met een linksinverse is injectief.

Surjectiviteit bewijzen we als volgt. We merken op dat $\alpha(\theta_i(g, y)) = h_i(g)\alpha(y)$ voor willekeurige $(g, y) \in G_i \times Y_i$. Daarom geldt $h_i(x)\alpha(\theta(g, y)) = \alpha(\theta(xg, y))$ voor $x \in G_i$. Omdat θ_i bijectief is kunnen we concluderen dat $h_i(x)\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Als we dit combineren met het feit dat G wordt voortgebracht door de beelden van de h_i zien we dat voor $z \in G$ met $z = h_{i_1}(g_1) \ldots h_{i_m}(g_m)$ geldt dat

$$z = z \cdot 1 \in z \cdot \mathrm{Im}(\alpha) = h_{i_1}(g_1) \ldots h_{i_m}(g_m)\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha).$$

Daarmee is α surjectief en is de stelling bewezen. □

Nu we weten hoe geamalgameerde sommen eruitzien kunnen we eenvoudig de volgende stelling bewijzen:

Stelling 6. *Epimorfismen zijn surjectief in de categorie van de groepen.*

Bewijs Stel dat er een epimorf, niet surjectief groepshomomorfisme $\psi : B \to G$ bestaat. Laat $A := B/\ker(\psi)$ en $\pi : A \to G$ het door ψ geinduceerde homomorfisme zijn. Dan is π een injectief, epimorf, niet surjectief groepshomomorfisme. Omdat π epimorf is, is $(\pi : A \to G, \mathrm{id} : G_1 \to G, \mathrm{id} : G_2 \to G)$ een colimiet van het diagram $(A, G_1 = G, G_2 = G)$ met morfismen $(g_1 = \pi : A \to G_1, g_2 = \pi : A \to G_2)$ (Stelling 2). De colimiet is in dit geval ook een geamalgameerde som, daarom geeft stelling 5 de bijectie $\alpha : X \to G$. Omdat G_1 en G_2 gelijk zijn kunnen we S_1 en S_2 zo kiezen dat ze uit dezelfde representanten bestaan. Bovendien bevatten S_1 en S_2 representanten ongelijk aan 1 omdat π niet surjectief is. Er zijn daarom $s_1 \in S_1 \backslash \{1\}$ en $s_2 \in S_2 \backslash \{1\}$ met $s_1 = s_2$. Maar nu hebben we dat $\alpha((1; s_1)) = 1 \cdot \mathrm{id}(s_1) = s_1 = s_2 = \alpha((1; s_2))$. Er zijn dus twee woorden van verschillende typen die onder α hetzelfde beeld geven. Daarmee is α niet injectief, hetgeen in tegenspraak is met stelling 5. □

Met precies ditzelfde bewijs kunnen we aantonen dat epimorfismen surjectief zijn in de categorie van de torsievrije groepen. Een geamalgameerde som van torsievrije groepen is namelijk weer een torsievrije groep. Dit volgt uit de volgende stelling over zogenaamde cyclisch gereduceerde elementen van G. Een cyclisch gereduceerd element $g \in G$ is een element waarvoor geldt dat het type $j = (i_1, \ldots, i_k)$ van het gereduceerde woord $\beta(g)$ voldoet aan de voorwaarden $k \neq 0$ en $i_1 \neq i_k$.

Stelling 7.

(1) *Elk element $g \in G$ is geconjugeerd met een cyclisch gereduceerd element of met een element uit een van de ondergroepen $h_i(G_i)$.*
(2) *Elk cyclisch gereduceerd element heeft oneindige orde.*

Bewijs Laat $\beta(g) = (a; s_1, \ldots, s_m)$ het gereduceerde woord van type $(i_1, \ldots, i_m)$ zijn behorende bij g. Dan is g te schrijven als $g = h(a)h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_m}(s_m)$. Het eerste deel van de stelling bewijzen we met inductie naar de lengte m van dit product. Alle woorden van lengte 0 en 1 zijn direct afkomstig uit een van de $h_i(G_i)$, dus de uitspraak is waar voor $m \leq 1$. We veronderstellen nu dat de uitspraak waar is voor dergelijke producten van lengte kleiner dan een bepaalde m. Stel dat g niet cyclisch gereduceerd is, dan geldt $i_1 = i_m$. We kijken naar de geconjugeerde $h_{i_m}(s_m) g h_{i_m}(s_m)^{-1}$ en zien dat

$$h_{i_m}(s_m) g h_{i_m}(s_m)^{-1} = h_{i_m}(s_m) h(a) h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_m}(s_m) h_{i_m}(s_m)^{-1}$$

$$= h_{i_m}(s_m) h(a) h_{i_1}(s_1) \ldots h_{i_{m-1}}(s_{m-1}) \ .$$

Het gedeelte $h_{i_m}(s_m)h(a)h_{i_1}(s_1)$ is in zijn geheel afkomstig uit de groep G_{i_1} en is daarom te vereenvoudigen tot $h(\tilde{a})h_{i_1}(\tilde{s}_1)$. We zien dus dat g geconjugeerd is met het element $h(\tilde{a})h_{i_1}(\tilde{s}_1) \ldots h_{i_{m-1}}(s_{m-1})$ van lengte $m-1$ of $m-2$ (als $\tilde{s}_1 = 1$). Vanwege de inductiehypothese is dit element geconjugeerd met een cyclisch gereduceerd element of een element uit een van de $h_i(G_i)$, dus hetzelfde geldt nu voor g.
Voor het tweede gedeelte van de stelling kijken we naar het type van machten van een cyclisch gereduceerd element g van type $(i_1, \ldots, i_n)$. We zien dat g^2 van het type $(i_1, \ldots, i_n, i_1, \ldots, i_m)$ is, en dus lengte $2m$ heeft. In het algemeen heeft het type van g^n lengte nm. Machten van g zijn daarom nooit gelijk aan 1 en g heeft dus oneindige orde. Dat bewijst de stelling. □

Stelling 8. *Epimorfismen zijn surjectief in de categorie van torsievrije groepen.*

Bewijs In een geamalgameerde som van torsievrije groepen zijn naast de cyclisch gereduceerde elementen ook de elementen uit de $h_i(G_i) \setminus \{1\}$ van oneindige orde. Dat is als volgt in te zien. Omdat elk element in een G_i op een unieke manier te schrijven is als as met $a \in f_i(A) \subseteq G_i$ en $s \in S_i$, correspondeert elke $g \in G_i$ met een uniek woord $(a; s)$, en dus met een uniek element van G. Hieruit concluderen we dat de h_i injectief zijn. Omdat de (G_i) torsievrij zijn, zien we nu dat de elementen van $h_i(G_i) \setminus \{1\}$ van oneindige orde zijn. Elk element van $G \setminus \{1\}$ is in dat geval dus geconjugeerd met een element van oneindige orde, en dus zelf van oneindige orde. De geamalgameerde som van torsievrije groepen is dus een torsievrije groep. De stelling kan daarom met het bewijs van stelling 6 worden bewezen. □

Een geheel andere situatie doet zich voor wanneer we kijken naar de categorie van torsievrije abelse groepen. Hier kunnen we geen gebruik maken van geamalgameerde sommen, omdat een geamalgameerde som van abelse groepen in het algemeen niet abels is. De epimorfismen in deze categorie blijken ook niet alleen de surjectieve afbeeldingen te zijn.

Stelling 9. *Een morfisme $f \in [H, G]_{\mathcal{C}}$ in de categorie van torsievrije abelse groepen is epimorf dan en slechts dan als $G/f(H)$ een torsiegroep is.*

Bewijs Stel $G/f(H)$ is een torsiegroep. We beschouwen een willekeurige torsievrije abelse groep F en twee homomorfismen $g, h : G \to F$ die identiek zijn op $f(H)$. Voor elke $a \in G$ geldt $a^n \in f(H)$ voor zekere positieve gehele n, immers de klasse $af(H)$ is torsie in $G/f(H)$. Omdat g en h gelijk zijn op $f(H)$ volgt hieruit dat $g(a)^n = g(a^n) = h(a^n) = h(a)^n$. Maar omdat $(g(a)h(a)^{-1})^n = g(a^n)h(a^n)^{-1} = 1$ en omdat F torsievrij is, volgt nu dat $g(a)h(a)^{-1} = 1$, oftewel $g(a) = h(a)$. Omgekeerd, als $G/f(H)$ niet torsie is, dan is de ondergroep $N \subset G/f(H)$ bestaande uit alle torsie elementen in $G/f(H)$ een stricte ondergroep en is de groep $(G/f(H))/N$ een niet triviale torsievrije groep. Via de quotiëntafbeelding van G naar $G/f(H)$ hebben we nu zowel de quotiëntafbeelding van G naar $(G/f(H))/N$ als de afbeelding die G in zijn geheel naar het eenheidselement van $(G/f(H))/N$ stuurt. Beide zijn identiek op H en, omdat $(G/f(H))/N$ niet triviaal is, niet identiek op heel G. Dus f is niet epimorf.

3. Eindige groepen

In deze sectie bewijzen we dat epimorfismen surjectief zijn in de categorie van eindige groepen. Om dat te bewijzen kunnen we niet het bewijs van stelling 6 navolgen, omdat de betreffende geamalgameerde som van in dit geval eindige groepen, in het algemeen geen eindige groep is. We zullen daarom een geheel ander bewijs voor stelling 6 geven dat wel toepasbaar is voor de categorie van eindige groepen. Dit bewijs is een moderne weergave van een bewijs beschreven in opgave 13 van paragraaf 1 van [2].

Alternatief bewijs Stelling 6 Stel $f : A \to G$ is een niet surjectief groepshomomorfisme. We construeren een derde groep X en twee homomorfismen $g, h : G \to X$ die gelijk zijn op $H = f(A)$ en verschillend op G. Daarmee is f niet epimorf. Zij p een willekeurig punt, $(G/H) \coprod \{p\}$ de disjuncte vereniging van dit punt met de verzameling van linkernevenklassen van H in G, en X de permutatiegroep van de verzameling $(G/H) \coprod \{p\}$. We definieren $g : G \to X$ door aan $a \in G$ de permutatie $g(a)$, gegeven door

$$g(a)(bH) = (ab)H \text{ voor } bH \in G/H \text{ en}$$
$$g(a)(p) = p,$$

toe te kennen. We definieren $h : G \to X$ als $h(a) = \sigma g(a) \sigma^{-1}$, waarbij $\sigma \in X$ de permutatie is die H en p van plek verwisselt en de andere klassen van G/H ongewijzigd laat. Als we nu nagaan hoe h zich gedraagt, dan zien we dat voor $a \in H$ geldt dat

$h(a)(bH) = \sigma g(a) \sigma^{-1}(bH) = \sigma g(a)(bH) = \sigma(ab)H = (ab)H$ voor $b \notin H$,
$h(a)H = \sigma g(a) \sigma^{-1} H = \sigma g(a) p = \sigma p = H$ en
$h(a)p = \sigma g(a) \sigma^{-1} p = \sigma g(a) H = \sigma H = p.$

Voor $a \in H$ geldt dus $g(a) = h(a)$. Echter voor $a \notin H$ zien we dat

$$h(a)(p) = \sigma g(a)\sigma^{-1}(p) = \sigma g(a)(H) = \sigma(aH) = aH \neq p = g(a)(p).$$

We concluderen dat g en h identiek zijn op H, maar niet op G. Daarmee is f niet epimorf en is de stelling bewezen. $\square$

Stelling 10. *Epimorfismen zijn surjectief in de categorie van de eindige groepen.*

Bewijs Dit bewijs is geheel analoog aan het vorige. Het gevonden tegenvoorbeeld bevindt zich namelijk in deze categorie. Immers als G en H eindige groepen zijn, is de permutatiegroep van $(G/H)\coprod\{p\}$ ook een eindige groep. $\square$

4. Oplosbare groepen

Als laatste bechouwen we de categorie van oplosbare groepen. In deze categorie zijn de epimorfismen ook surjectief, maar om dat te bewijzen kunnen wij geen gebruik maken van de tot nu toe behandelde technieken. Zowel de geamalgameerde som van oplosbare groepen, als de permutatiegroep van een eindige verzameling is in het algemeen geen oplosbare groep. We zullen dus een andere methode moeten gebruiken voor deze situatie.

Stelling 11. *Epimorfismen zijn surjectief in de categorie van de oplosbare groepen.*

Bewijs Herinner dat een oplosbare groep G een groep is waarvoor de normale rij $G = G^0 \triangleright G^1 \triangleright \dots$ met G^{i+1} steeds de commutatorondergroep van G^i, na eindig veel stappen de triviale ondergroep $\{1\}$ bereikt. Stel nu dat $f : A \to G$ een niet surjectief homomorfisme van oplosbare groepen is. Zij $H = f(A)$, en k het aantal stappen waarin de rij $G = G^0 \triangleright G^1 \triangleright \dots$ de triviale ondergroep bereikt. Dus $G^k = \{1\}$. We bewijzen de stelling met inductie naar k. Voor $k = 1$ is de stelling waar, want in dat geval is G abels. We veronderstellen dat de stelling waar is voor alle lengtes kleiner dan k en onderscheiden de volgende twee gevallen. In het ene geval is $H \cdot G^{k-1}$ een strikte ondergroep van G. Het beeld van H onder de quotiëntafbeelding λ van G naar G/G^{k-1} is nu ook een strikte ondergroep van G/G^{k-1}. Omdat de normale rij $G^0/G^{k-1} \triangleright G^1/G^{k-1} \triangleright \dots \triangleright G^{k-1}/G^{k-1} = \{1\}$ van lengte $k-1$ is kunnen we vanwege de inductiehypothese concluderen dat een morfisme met beeld $\lambda(H)$ niet epimorf is. Een morfisme met beeld H is daarom ook niet epimorf. In het andere geval hebben we dat $G = H \cdot G^{k-1}$. We beschouwen de ondergroep $H \cap G^{k-1}$. Omdat de commutatorondergroep van G^{k-1} triviaal is, is G^{k-1} abels. De ondergroep $H \cap G^{k-1}$ is daarom normaal in G^{k-1}. Eveneens is $H \cap G^{k-1}$ normaal in $H \cap G = H$ omdat G^{k-1} normaal is in G. Samen brengen H en G^{k-1} de groep G voort, dus we kunnen concluderen dat $H \cap G^{k-1}$ normaal is in G. We definiëren nu $g : G \to G/(H \cap G^{k-1})$ als het natuurlijke quotiënthomomorfisme en $h : G \to G/(H \cap G^{k-1})$ als de samenstelling van het quotiënthomomorfisme naar $G/G^{k-1} = (H \cdot G^{k-1})/G^{k-1}$ met het isomorfisme van $(H \cdot G^{k-1})/G^{k-1}$ naar $H/(H \cap G^{k-1})$ dat we uit de algebra kennen. Beide homomorfismen zijn identiek op H, en verschillend op G, omdat g surjectief is en h slechts de strikte ondergroep $H/(H \cap G^{k-1})$ van $G/(H \cap G^{k-1})$ bereikt. Dat bewijst dat f niet epimorf is.

Referenties

[1] Jean-Pierre Serre, *Trees*, 1980, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
[2] Barry Mitchell, *Theory of Categories*, 1965, Academic Press, New York and London.