



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Hoeken en kromming

Horsmeier, T.A.

Citation

Horsmeier, T. A. (2009). *Hoeken en kromming*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596798>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

T.A. Horsmeier

Hoeken en kromming

In genormeerde ruimten zonder inproduct

Bachelorscriptie, 25 augustus 2009

Scriptiebegeleider: Dr. O.W. van Gaans



Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	De Alexandrov-hoek	4
2.1	Originele definitie	4
2.2	Genormeerde ruimten	4
2.3	P-norm	5
2.3.1	Alexandrov-hoek in $(\mathbb{R}^2, \ \cdot\ _p)$	5
3	Numerieke benadering	6
3.1	Algoritme	6
3.2	Numerieke analyse Alexandrov-hoek voor p-normen	6
4	Kromming	9
4.1	Meetkundige definitie	9
4.2	Kromming en eenheidsbollen	9
4.3	Alexandrov-hoek en kromming	10
5	Nieuwe numerieke benaderingen	11
5.1	Eenheidsbollen	11
5.2	Alexandrov-kromming benaderd.	11
6	Conclusies en discussie	13

1 Inleiding

Dit is een scriptie naar aanleiding van mijn onderzoek naar een specifieke manier om hoeken en kromming te definiëren voor genormeerde ruimten zonder inproduct.

Het begrip hoek was ooit iets puur meetkundigs, een maat voor de draaiing tussen lijnstukken. In de loop van tijd is het hoekbegrip steeds verder veralgemeiseerd. In de lineaire analyse zien we dat het concept hoek te definiëren is op een manier zo, dat in alle genormeerde ruimten met inproduct, zelfs oneindig-dimensionale, een hoek tussen elementen bestaat. Het concept hoek in z'n geheel is dus steeds abstracter geworden. In een deelgebied van een heel andere tak van de wiskunde, variëteiten (manifolds), heeft Aleksandr Aleksandrov een andere methode gevonden om hoeken te definiëren.

Het doel van dit onderzoek is om te kijken of deze methode te gebruiken is om het hoekbegrip te veralgemeniseren voor alle genormeerde ruimten, of in ieder geval uit te breiden naar genormeerde ruimten zonder inproduct. Ook is het de vraag of het concept kromming, dat in inproduktruimtes in direct verband staat met hoeken, op een logische manier uit te breiden is naar genormeerde ruimten zonder inproduct.

Naast het bewijs dat Alexandrov's hoekbegrip inderdaad een veralgemening is voor alle genormeerde ruimten, zijn de resultaten van dit onderzoek vooral numerieke benaderingen van eigenschappen van dit hoekbegrip, toegepast op een aantal specifieke genormeerde ruimten, en vermoedens over andere eigenschappen die weer uit deze benaderingen gerezen zijn.

Dit artikel begint met een sectie over Alexandrov's methode en hoe deze kan worden toegepast op genormeerde ruimten. Dan volgt een uitleg van mijn numerieke methode als benadering van deze methode, samen met een aantal resultaten. Vervolgens wordt het begrip kromming op verschillende manieren geïntroduceerd en volgen er nieuwe numerieke resultaten. Uiteindelijk worden de conclusies besproken.

2 De Alexandrov-hoek

2.1 Originele definitie

In een *Alexandrov-oppervlak*¹ noemen we een kromme een *geodeet*, of *kortste kromme*, als de lengte van de kromme gelijk is aan de afstand tussen begin en eindpunt. Een *geodetische driehoek* ([3]) in een Alexandrov-oppervlak is een gesloten verzameling homeomorf met de eenheidsschijf waarvan de rand bestaat uit drie geodeten tussen drie punten x , y en z . Alexandrov definieerde voor deze driehoeken, maar eigenlijk voor krommen in Alexandrov-oppervlakken in het algemeen, als volgt een hoek:

Definitie 1. ([3]) Laat L en M krommen zijn in een Alexandrov-oppervlak S , met het zelfde beginpunt o . Kies $x \in L$ en $y \in M$ beiden ongelijk o willekeurig. Zij nu

$$X = d_\rho(o, x), Y = d_\rho(o, y), Z = d_\rho(x, y).$$

waar d_ρ de metriek van S is. Nu bestaat er in het Euclidisch vlak een unieke driehoek met zijde-lengtes X , Y en Z . Zij $\gamma_{LM}(X, Y)$ de overstaande hoek van de zijde met lengte Z . De *tophoek* tussen L en M is dan

$$\overline{\angle(L, M)} = \limsup_{X, Y \rightarrow 0} \gamma_{LM}(X, Y) \in [0, \pi]. \quad (1)$$

2.2 Genormeerde ruimten

In genormeerde ruimten met een inproduct kennen we de volgende definitie van een hoek:

Definitie 2. Zij $(X, \|\cdot\|, (\cdot, \cdot))$ een genormeerde ruimte met inproduct. De hoek α tussen twee vectoren $x, y \in X$ ongelijk 0 is gelijk aan

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi].$$

Voor genormeerde ruimten zonder inproduct hebben we normaal gesproken geen hoekbegrip. Dit onderzoek begon met de vraag: *wat gebeurt er als we in genormeerde ruimten een hoek definiëren op de manier zoals Alexandrov dit deed?*

Alexandrov definieerde hoeken tussen twee krommen, dus als we tussen twee vectoren x en y in onze ruimten net als gewoonlijk een éénduidige hoek willen, zullen we moeten afspreken welke krommen we kiezen. In genormeerde ruimten met een strict convexe norm zijn “rechte lijnen” de enige geodeten tussen punten, en in inproduktruimten kennen we hoeken in principe ook alleen tussen lijnen en/of lijnstukken. Daarom zal ik vanaf nu de tophoek uit definitie 1, toegepast op de krommen $L := tx$, $t \in [0, 1]$ en $M := ty$, $t \in [0, 1]$ de *Alexandrov-hoek* tussen de vectoren x en y noemen.

Vervolgens kunnen we ons afvragen of de Alexandrov-hoek in inproduktruimten hetzelfde is als de standaardhoek.

Stelling 1. *In inproduktruimten over \mathbb{R} zijn de Alexandrov-hoek en de standaardhoek gelijk.*

¹een variëteit met bepaalde, hier onbesproken, eigenschappen

Bewijs: Zij X een inproduktruimte met inprodukt $(\cdot, \cdot)_X$ en geïnduceerde norm $\|\cdot\|_X$. Neem $x, y \in X$ ongelijk nul. Als we de Alexandrov-hoek bepalen op de manier zoals hierboven besproken wordt, kiezen we steeds $a, b \in (0, 1]$ en kijken naar de driehoek in \mathbb{R}^2 met zijden $A = \|ax\|_X$, $B = \|by\|_X$ en $C = \|ax - by\|_X$. De hoek $\gamma_{x,y}(A, B)$ die we nu moeten berekenen is de hoek tussen twee vectoren in \mathbb{R}^2 , zeg p en q . Voor p en q geldt: $\|p\|_{\mathbb{R}^2} = \|ax\|_X$, $\|q\|_{\mathbb{R}^2} = \|by\|_X$ en $\|p - q\|_{\mathbb{R}^2} = \|ax - by\|_X$. Dus als we nu de *parallelogramregel* toepassen zien we:

$$\begin{aligned} 4(p, q)_{\mathbb{R}^2} &= \|p + q\|^2 - \|p - q\|^2 \\ &= \|ax + by\|^2 - \|ax - by\|^2 \\ &= 4(ax, by)_X \end{aligned}$$

$$\text{en dus } (p, q)_{\mathbb{R}^2} = (ax, by)_X = ab(x, y)_X$$

Maar nu geldt voor de euclidische hoek:

$$\gamma_{x,y}(A, B) = \frac{(p, q)_{\mathbb{R}^2}}{\|p\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|q\|_{\mathbb{R}^2}} = \frac{ab(x, y)_X}{a\|x\|_X \cdot b\|y\|_X} = \frac{(x, y)_X}{\|x\|_X \cdot \|y\|_X}$$

We zien dat voor alle a en b de euclidische hoek gelijk is aan de standaardhoek in X . De Alexandrov-hoek tussen x en y is dus

$$\limsup_{a,b \rightarrow 0} \gamma_{x,y}(A, B) = \limsup_{a,b \rightarrow 0} \frac{(x, y)_X}{\|x\|_X \cdot \|y\|_X} = \frac{(x, y)_X}{\|x\|_X \cdot \|y\|_X}$$

en dat is precies de standaardhoek in X .

□

2.3 P-norm

De p-norm is een norm op \mathbb{R}^n , en is als volgt gedefinieerd:

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \dots + |x_n|^p}, \quad p \in (1, \infty). \quad (2)$$

Voorlopig beperk ik me tot de p-norm op \mathbb{R}^2 . Het is een relatief simpele norm, in een niet zo ingewikkelde ruimte, dus is het makkelijker exact danwel numeriek vermoedens te vormen over verbanden tussen het gedrag van de Alexandrov-hoek en de eigenschappen van deze ruimte, die misschien zelfs in het algemeen voor genormeerde ruimten zonder inprodukt gelden. Daarbij komt dat we voor $p = 2$ in bekend gebied zitten, de p-norm is dan namelijk de Euclidische norm op \mathbb{R}^n .

2.3.1 Alexandrov-hoek in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

Voor twee vectoren (x_1, x_2) en (y_1, y_2) in het platte vlak vinden we met behulp van de cosinusregel een uitdrukking voor de Alexandrov-hoek:

$$\limsup_{a,b \rightarrow 0} \cos^{-1} \left(\frac{-\sqrt[p]{|ax_1 - by_1|^p + |ax_2 - by_2|^p} + a^2 \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} + b^2 \sqrt[p]{|y_1|^p + |y_2|^p}}{2ab \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \sqrt[p]{|y_1|^p + |y_2|^p}} \right) \quad (3)$$

Deze manier om de Alexandrov-hoek uit te drukken geeft nog niet bepaald duidelijke inzichten in haar gedrag en eigenschappen, het is een tamelijk ingewikkelde limiet, en dus zullen we misschien eerst op andere manieren vermoedens moeten ontwikkelen.

3 Numerieke benadering

We hebben gezien dat zelfs in een simpele genormeerde ruimte met een niet heel gekke norm als $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ de Alexandrov-hoek toch een vrij ingewikkelde uitdrukking oplevert. Daarom leek het een goed idee om voor deze ruimte en deze norm de hoek te benaderen met een algoritme in Matlab.

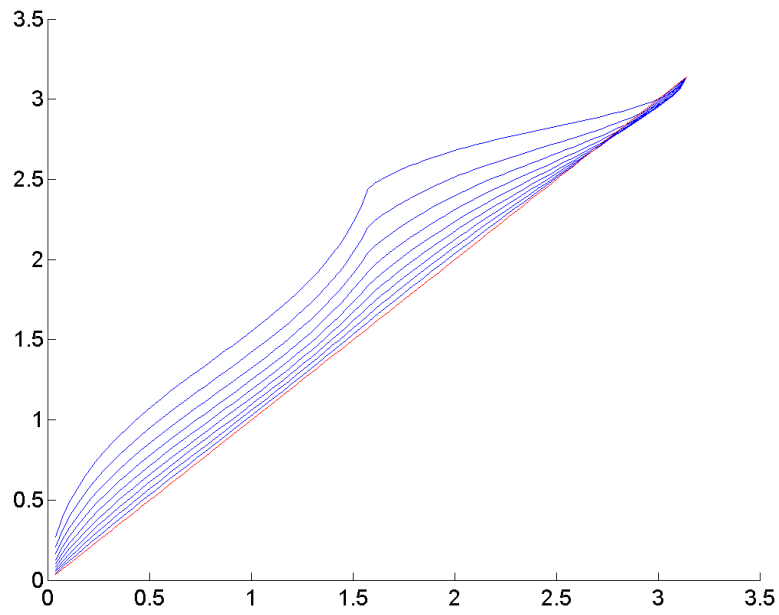
3.1 Algoritme

We hebben als invoer de vier coördinaten x_1, x_2, y_1 en y_2 en de p horend bij de norm. Het Algoritme heeft twee in elkaar genestelde iteraties, ten eerste gaat een waarde S in 100 stappen van 1 naar 0,01. Voor elke waarde van S worden er tweeduizend paren a en b willekeurig gekozen in het interval $[0, S]$. Bij elk koppel a, b kunnen we de juiste hoek berekenen in de euclidische driehoek met zijden $\|ax\|_p, \|by\|_p$ en $\|ax - by\|_p$. Voor elke S slaan we het maximum van deze hoeken op, en uiteindelijk is mijn benadering van de Alexandrov-hoek het minimum van deze maxima.

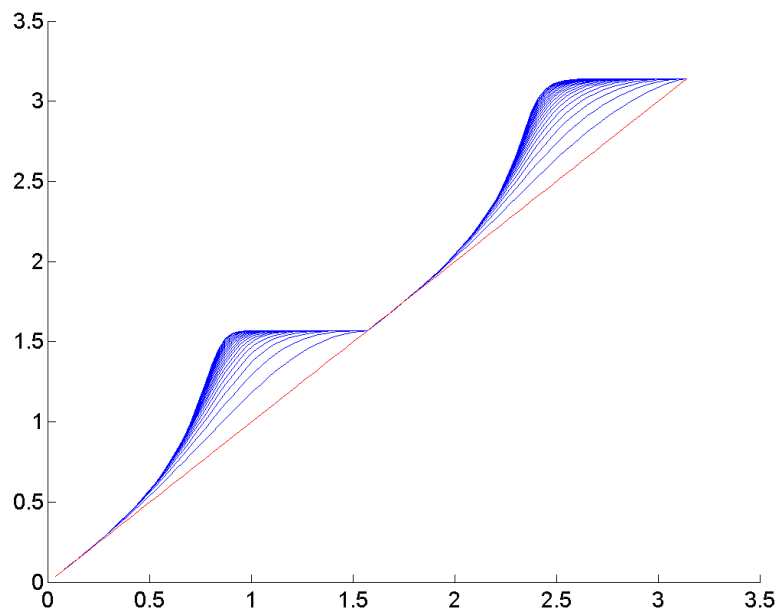
3.2 Numerieke analyse Alexandrov-hoek voor p-normen

Ten eerste heb ik voor verschillende p -normen gekeken naar wat de Alexandrovhoek doet bij steeds groter wordende standaardhoek. Ik laat de standaardhoek tussen een vector en de x -as “openklappen” van 0 tot π , voor verschillende p . De rode lijn stelt steeds de hoek voor $p = 2$ oftewel de standaardhoek voor. Hoe dicht bij 2 p zit hoe meer de kromme op de rechte rode lijn lijkt. We zien dat voor p kleiner dan 2 (figuur 1) de Alexandrov-hoek soms kleiner is dan de standaardhoek. Opmerkelijk ook is dat bij p groter dan 2 (figuur 2) er een soort herhaling optreedt vanaf een standaardhoek van $\frac{\pi}{2}$.

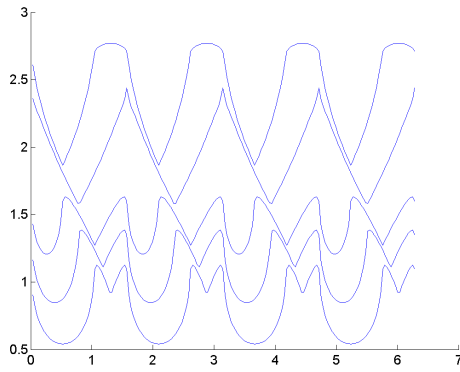
Vervolgens heb ik gekeken wat er gebeurt als ik een constante standaardhoek α tussen twee vectoren, zeg \vec{a} en \vec{b} ronddraai rond de oorsprong, en steeds de Alexandrov-hoek bepaal. We zien in figuur 3 voor elke p van laag naar hoog verschillende krommen voor $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ en $\frac{2\pi}{3}$. We zien dat dicht bij $p = 2$ de Alexandrov-hoek niet zo veel varieert met de oriëntatie van de hoek, maar als p steeds groter of kleiner wordt de Alexandrov-hoek sterk schommelt. We kunnen onder andere concluderen dat zelfs voor vaste p de Alexandrov-hoek niet uniek is.



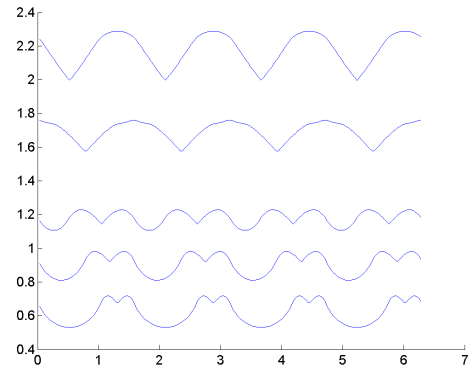
Figuur 1: De Alexandrov-hoek (y-as) voor $p = 1.1, 1.2, \dots, 1.9$ t.o.v. de standaardhoek (x-as)



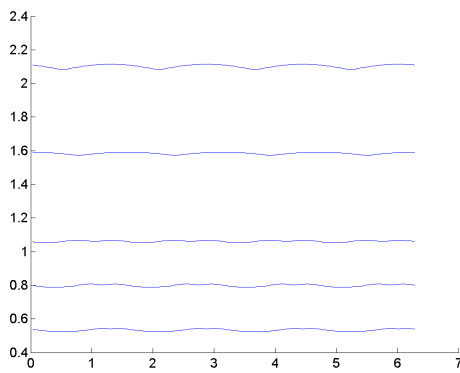
Figuur 2: De Alexandrov-hoek (y-as) voor $p = 2.8, 3.6, \dots, 18$ t.o.v. de standaardhoek (x-as)



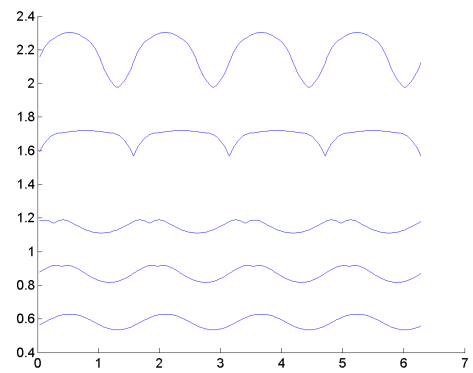
(a) $p = 1.1$



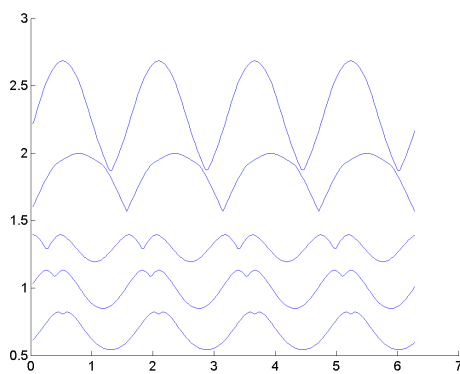
(b) $p = 1.6$



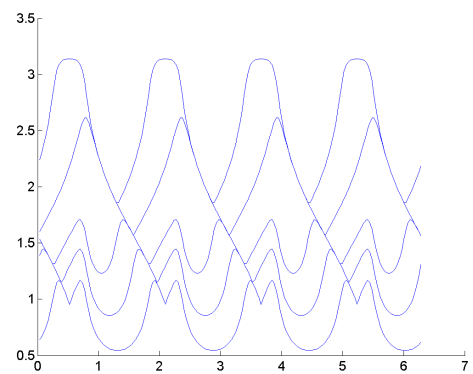
(c) $p = 1.95$



(d) $p = 2.5$



(e) $p = 4$



(f) $p = 20$

Figuur 3: x-as: standaardhoek tussen \vec{a} en de x-as. y-as: Alexandrov-hoek tussen \vec{a} en \vec{b} .

4 Kromming

4.1 Meetkundige definitie

Er zijn verschillende manieren om kromming te definiëren. Voor sommige ruimtes kunnen we voor een punt op een vlak of kromme in de ruimte de kromming in een bepaalde richting berekenen door te bepalen wat de grootste mogelijke cirkel is die het vlak of de kromme in het vlak van die richting raakt. De kromming is dan $\pm \frac{1}{r}$, met r de straal van de cirkel, met een $+$ of een $-$ afhankelijk van aan welke kant van de kromme/het vlak de cirkel zit. Als voorbeeld kunnen we \mathbb{R}^2 beschouwen binnen \mathbb{R}^3 . We kunnen in elk punt en in elke richting een oneindig grote cirkel laten raken, dus het Euclidisch vlak heeft een kromming van 0. Een voorbeeld van een kromme met kromming ∞ is het hoekpunt van een driehoek: hoe klein we de cirkel ook maken, de cirkel raakt het hoekpunt pas in de limiet $\lim_{r \rightarrow 0} r$.

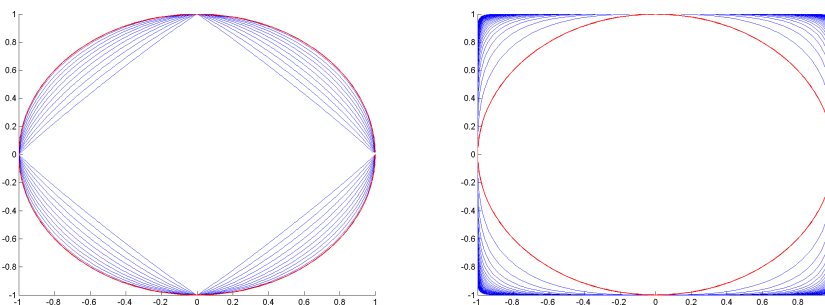
4.2 Kromming en eenheidsbollen

Vaak reflecteert de vorm van de eenheidsbol van een zekere norm een zekere eigenschap van een genormeerde ruimte. Daarom ben ik benieuwd of er een verband bestaat tussen de kromming van de eenheidsbol van de p -norm en de Alexandrov-hoek horend bij die p -norm. De kromming van de eenheidsbol voor p -normen anders dan $\|\cdot\|_2$ is geenszins constant. Voor p onder de 2 zien we dat hoe dichter p bij 1 komt hoe meer de bol op een ruit gaat lijken (figuur 4). Voor p boven 2 lijkt de eenheidsbol steeds meer op het eenheidsvierkant van de supremumnorm ($p = \infty$). Om de kromming van de eenheidsbol te bepalen gebruik ik de volgende definitie uit [2]:

Definitie 3. Laat S^{n-1} de Euclidische eenheidsbol zijn, en S_X^r de bol met straal $r > 0$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Dan is de *Gauss-afbeelding* $\mathcal{N} : S_X^r \rightarrow S^{n-1}$ gegeven door:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{\nabla \|x\|_p}{|\nabla \|x\|_p|},$$

met $|\cdot|$ de Euclidische norm. Laat V_x de raakruimte van $x \in S_X^r$ zijn. Voor $x \in S_X^r$ is de *Weingarten-afbeelding* $\mathcal{L}_x : V_x \rightarrow V_x$ gegeven door $\mathcal{L}_x(v) = -\mathcal{N}(x)$.



(a) $p < 2$

(b) $p > 2$

Figuur 4: Eenheidsbollen, rood is voor $p = 2$.

De normaalkromming in de richting van $v \in V_x$ is dan

$$k_x(v) = \langle \mathcal{L}_x(v), v \rangle.$$

Als we definitie 3 op $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ toepassen krijgen we:

$$\mathcal{N}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sgn}(x)|x|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p}}{\sqrt{(\operatorname{sgn}(x)|x|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p})^2 + (\operatorname{sgn}(y)|y|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p})^2}} \\ \frac{\operatorname{sgn}(y)|y|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p}}{\sqrt{(\operatorname{sgn}(x)|x|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p})^2 + (\operatorname{sgn}(y)|y|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p})^2}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

We nemen als $v \in V_x$

$$v = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(y)|y|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p} \\ -\operatorname{sgn}(x)|x|^{p-1}\|(x,y)\|_p^{1-p} \end{pmatrix}$$

Dan is

$$\mathcal{L}_{\vec{x}}(v) = - \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{N}_1(\vec{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_2(\vec{x})}{\partial x} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{N}_1(\vec{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_2(\vec{x})}{\partial y} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5)$$

De kromming in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ is nu dus²

$$k_{\vec{x}}(v) = \langle \mathcal{L}_{\vec{x}}(v), v \rangle \quad (6)$$

4.3 Alexandrov-hoek en kromming

In de context van Alexandrov-hoeken is er ook een andere maat voor de kromming van de ruimte. We noemen een (Alexandrov-)ruimte van non-negatieve kromming als voor alle kleine driehoeken ABC geldt: De som van de Alexandrov-hoeken van ABC $-\pi \geq 0$. Als ook nog geldt dat deze som $-\pi \leq K$ voor zekere $K \in \mathbb{R}$, is het een ruimte met begrensde nonnegatieve kromming. Ik noem deze kromming Alexandrov-kromming, hoewel dat in de literatuur eigenlijk iets anders in de Variëteitenleer is.

²De compleet uitgeschreven versie van deze formule (m.b.v. [1]) was te breed door vele brede breuken om goed opgemaakt weer te geven, ik heb deze wel gebruikt in mijn Matlab-berekeningen.

5 Nieuwe numerieke benaderingen

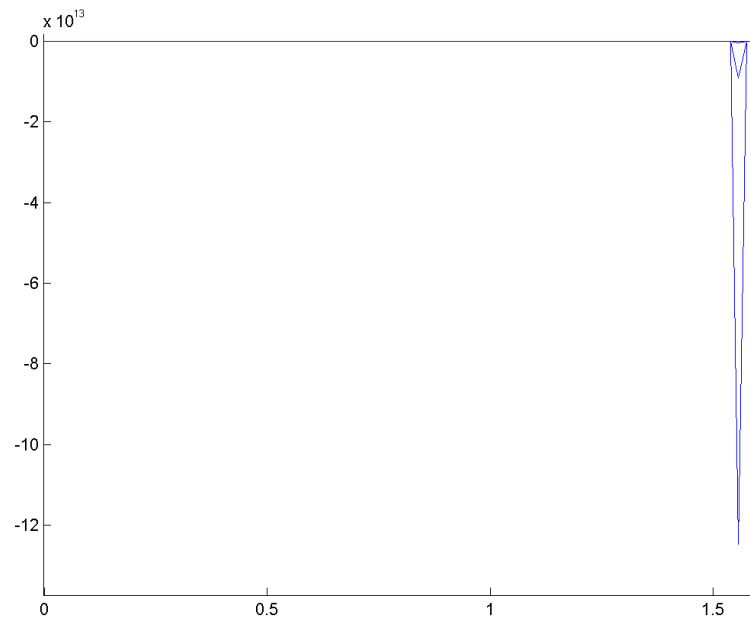
Nogmaals heb ik nu geprobeerd met behulp van MATLAB enkele eigenschappen van de zojuist geïntroduceerde begrippen te bepalen voor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$.

5.1 Eenheidsbollen

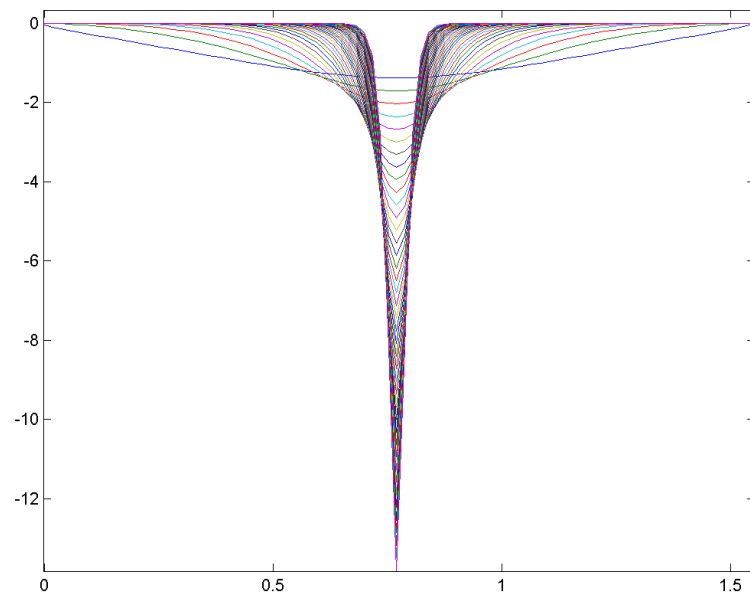
Ten eerste heb ik gekeken wat het verloop is van de kromming van de eenheidsbol voor verschillende p . Voor p kleiner dan 2 is de kromming bijna altijd 0, en heel klein als hij de x -as of de y -as snijdt (zie figuur 5). Dit omdat onder de 2 de p -eenheidsbol van cirkel al redelijk snel richting de ruit gaat, die oneindige kromming heeft in de hoekpunten, en 0 langs de ribben. Voor $p > 2$, waar de eenheidsbol steeds meer naar een vierkant neigt, zien we voor hogere p inderdaad de grafiek steeds puntiger worden (zie figuur 6, waar de blauwe lijn de kromming van de bol voor $p = 2,9$ voorstelt).

5.2 Alexandrov-kromming benaderd.

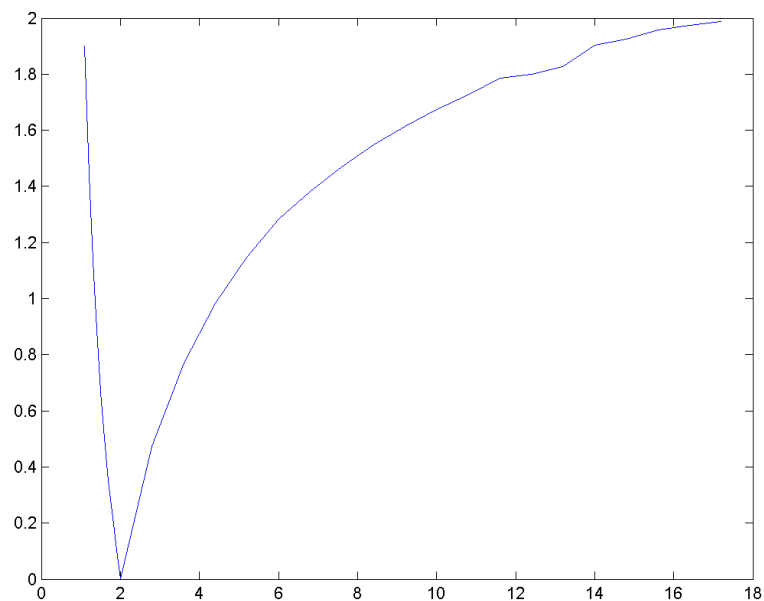
De in de vorige sectie geïntroduceerde Alexandrov-kromming heb ik ook geprobeerd met numerieke methoden te bestuderen voor $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$. Ik heb per p een groot aantal willekeurige driehoeken gegenereerd en de som van Alexandrovhoecken berekend. Per p heb ik het de grootste en de kleinste som van Alexandrovhoecken genomen en er π van afgetrokken, dit leverde figuur 7 op. De kleinste Alexandrov-hoek was voor vrijwel alle p gelijk aan of iets groter dan π , dus de rode lijn die deze weergeeft is samengevallen met de x -as. Hoewel dit allemaal eigenlijk maar statistische benaderingen zijn, lijkt het er sterk op dat de Alexandrov-kromming positief en begrensd is. De grenzen hangen ook duidelijk van p af, dus de volgende vraag is: *Welk verband zit er tussen p en de begrenzing van de Alexandrov-kromming?*



Figuur 5: Kromming (y-as) van de eenheidsbol voor $p < 2$, eerste quadrant van de bol.



Figuur 6: Kromming (y-as) van de eenheidsbol voor verschillende $p > 2$, eerste quadrant van de bol.



Figuur 7: Bovengrens Alexandrov-kromming (y-as) uitgezet tegen p (x-as)

6 Conclusies en discussie

Als een eerste onderzoek naar de mogelijkheden van Alexandrov's definitie binnen sommige genormeerde ruimten is dit project geslaagd. Een van de resultaten is dat voor p -normen anders dan 2 de waarde van de Alexandrov hoek op meer manieren kan variëren, bijvoorbeeld door een vaste euclidische hoek te draaien. Als belangrijkste resultaat hebben we gezien dat de Alexandrov-kromming zoals ik die in dit verslag gedefiniëerd heb, begrensd is en dat die begrenzing afhangt van p . In eventueel vervolgonderzoek zou ik op zoek kunnen gaan naar een exacte formule voor deze begrenzing. Ook is wellicht te bewijzen dat deze Alexandrov-kromming voor alle genormeerde ruimten begrensd is, of juist alleen voor bepaalde soorten ruimten. Als ik een betere manier vind om de Alexandrov-hoek te bepalen, al dan niet alleen voor bepaalde andere ruimten, kan ik misschien nog meer eigenschappen van kromming en hoeken in deze ruimten vinden.

APPENDIX

Matlab algoritme gebruikt om de Alexandrov-hoek te benaderen.

```
function [alpha] = alex(x1,x2,y1,y2,p)
supa=[];
A=[];
B=[];
C=[];
for k=1:100
    k;
    S=1-k/101;
    hoek=[];
    for i=1:2000
        a=rand*S;
        b=rand*S;

        B(i)=abs(((abs(a*x1))^p+(abs(a*x2))^p)^(1/p));
        C(i)=abs(((abs(b*y1))^p+(abs(b*y2))^p)^(1/p));
        A(i)=abs(((abs(a*x1-b*y1))^p+(abs(a*x2-b*y2))^p)^(1/p));

        if((B(i)>0)&&(C(i)>0)&&(A(i)>0))
            hoek(i)=abs(acos((B(i)^2+C(i)^2-A(i)^2)/(2*B(i)*C(i))));
        end
    end
    supa(k)=max(hoek);
end
alpha=(min(supa));
```

Referenties

- [1] Bas Lemmens and Onno van Gaans. On one-complemented subspaces of minkowski spaces with smooth riesz norms. *ROCKY MOUNTAIN JOURNAL OF MATHEMATICS*, 36(6):1937–1956, 2006.
- [2] Bas Lemmens and Onno van Gaans. Dynamics of non-expansive maps on strictly convex banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 171(1):425–442, june 2009.
- [3] Byung-Geun Oh. Aleksandrov surfaces and hyperbolicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1):4555–4577, june 2005.