De Zariski topologie versus de Sterke topologie

Lieshout, S.L. van

S.L. van Lieshout

De Zariski topologie versus de Sterke topologie

Bachelorscriptie, 10 juni 2009

Scriptiebegeleider: dr. R.S. de Jong

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Introductie

Iedere variëteit X over een algebraïsch afgesloten topologisch lichaam is op een unieke manier te voorzien van een nieuwe topologie, de Sterke topologie. Dat is de unieke topologie zodat de volgende eigenschappen gelden:

(1) De Sterke topologie is sterker dan de Zariski topologie (voor een Zariski open resp. gesloten verzameling schrijven we vanaf nu open resp. gesloten verzameling).
(2) Morfismen zijn sterk continu.
(3) De Sterke topologie op een lokaal gesloten deelvariëteit $Z \subset X$ is de geïnduceerde topologie van de Sterke topologie op X.
(4) De Sterke topologie op $X \times Y$ is het product van de Sterke topologie op X en op Y.
(5) De Sterke topologie op $\mathbb{A}^1$ is precies de gegeven topologie op k.

Het is duidelijk dat deze topologie uniek is en bestaat. Ook is op te merken dat variëteiten sterk Hausdorffs zijn. We hebben namelijk voor een variëteit X dat

$$\Delta_2(X) := \{z \in X \times X | p_1(z) = p_2(z)\}$$

gesloten is in $X \times X$ dus ook sterk gesloten in $X \times X$ (eigenschap 1). $X \times X$ heeft de producttopologie van de Sterke topologie op X (eigenschap 4) dus is X sterk hausdorffs (lemma 13).
Vanaf nu nemen we aan dat $k = \mathbb{C}$ voorzien is van de Euclidische topologie. De Sterke topologie op X komt dan precies overeen met de Euclidiche topologie op X. In deze scriptie zal het bewijzen van de volgende stelling centraal staan:

Stelling 1. *Laat X een variëteit zijn over $\mathbb{C}$. Dan geldt:*

$$X \text{ is compleet} \Leftrightarrow X \text{ is sterk compact}$$

Definitie 1. *Een variëteit X is compleet als voor alle variëteiten Y, het projectiemorfisme*

$$p_2 : X \times Y \to Y$$

gesloten is.

Voordat we aan het bewijs beginnen, geven we eerst nog één andere definitie:

Definitie 2. *Laat X een variëteit zijn. Een deelverzameling $A \subset X$ heet construeerbaar als A een eindige vereniging is van lokaal gesloten deelverzamelingen van X.*

1. Het bewijs

Bewijs. '$\Leftarrow$' Laat X een sterk compacte variëteit zijn over $\mathbb{C}$, laat $p_2 : X \times Y \to Y$ het projectiemorfisme zijn voor een willekeurige andere variëteit Y. Stel $Z \subset X \times Y$ is gesloten, dan is Z ook sterk gesloten (eigenschap 1). Dus is $p_2(Z) \subset Y$ sterk gesloten (lemma 1). Aangezien Z construeerbaar is, is $p_2(Z)$ construeerbaar (lemma 7 [Chevalley]). Dus $p_2(Z)$ is gesloten (gevolg 1). Dus p_2 is een gesloten afbeelding. Dus X is compleet.

'$\Rightarrow$' Beschouw eerst $\Sigma := \{(z_o, \ldots, z_n) | \sum |z_i|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Via de identificatie $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ is $\Sigma = S^{2n+1}$ de $(2n+1)$-dimensionale begrensde sterk gesloten bol. Deze bol is sterk compact (lemma 8 [Heine-Borel]). Daarnaast hebben we de continue surjectieve afbeelding:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma & \to & \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ (z_o, \ldots, z_n) & \mapsto & (z_o : \ldots : z_n) \end{array}$$

dus $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ is zelf ook sterk compact (lemma 9) en dus tevens de gesloten deelvariëteiten $Y \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (lemma 10). Dus X is compact (lemma 3 [Chow's lemma]). $\square$

Nu we het bewijs van de stelling hebben gegeven is het leuk op te merken dat we via '$\Leftarrow$' heel makkelijk het algebrafeit dat $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ compleet is hebben bewezen. Dit is tevens een gevolg van het algemenere algebra feit dat $\mathbb{P}_n(k)$ compleet is, Grothendieck gaf hier al een algebraïsch bewijs voor [1]. Wij hebben via de lemma's een meer topologisch-analytisch bewijs. Het is dus zeker interessant de gebruikte lemma's verder toe te lichten:

2. Toelichting '$\Leftarrow$'

Lemma 1. *Laat X, Y twee topologische ruimten zijn. Dan geldt:*

$$X \text{ is compact} \Rightarrow p_2 : X \times Y \to Y \text{ is gesloten}$$

Bewijs. Laat $U \subset X \times Y$ gesloten zijn. Om aan te tonen dat $p_2(U)$ ook gesloten is laten we zien dat $p_2(U)^c$ open is. We maken om iedere $y \in p_2(U)^c$ een $V_y \subset Y$ open zodat $y \in V_y \subset p_2(U)^c$. Laat $y \in p_2(U)^c$ willekeurig, nu geldt:

$$p_2^{-1}(y) = X \times \{y\} \subset U^c$$

U^c is open dus we kunnen $X \times \{y\} \subset X \times Y$ overdekken met open vierkantjes. Voor iedere $x \in X$ laat $U_x \subset X$ open en $V_x \subset Y$ open zodat $(x, y) \in U_x \times V_x \subset U^c$. We hebben dan:

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

Omdat X compact is kunnen we een eindige deelverzameling $\tilde{X} \subset X$ vinden zodat:

$$X = \bigcup_{x \in \tilde{X}} U_x$$

Laat dan $V_y := \bigcap_{x \in \tilde{X}} V_x$ dan is $V_y \subset Y$ open en $y \in V_y$. Daarnaast geldt:

$$p_2^{-1}(V_y \bigcap p_2(U)) = p_2^{-1}(V_y) \bigcap U = (X \times V_y) \bigcap U = \bigcup_{x \in \tilde{X}} (U_x \times \bigcap_{x \in \tilde{X}} V_x) \bigcap U = \emptyset,$$

want voor iedere $x \in \tilde{X}$ geldt

[1] [1] par. 9, stelling 1, blz. 77

$$U_x \times \bigcap_{x \in \tilde{X}} V_x \subset U_x \times V_x \subset U^c.$$

Dus $V_y \bigcap p_2(U) = \emptyset$. Dus $y \in V_y \subset p_2(U)^c$. □

Na lemma 1 werd in het bewijs van '⇐' de stelling van Chevalley (lemma 7) gebruikt. Deze stelling zal behalve de formulering niet verder behandeld worden. Dit doen we wel met gevolg 1, dit gevolg is afkomstig van de volgende stelling. Die op een analytische manier wordt bewezen.

Lemma 2. *Laat X een variëteit zijn en $U \subset X$ een niet lege open deelvariëteit. Dan is U sterk dicht in X.*

Het bewijs van dit lemma kan opgedeeld worden in 3 stappen:

(1) Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat X een affiene variëteit is.
(2) Bewijs het lemma voor $X = \mathbb{A}^n$. Doe dit door voor ieder punt $y \in \mathbb{A}^n - V$, met $V \subset X$ een niet-lege open deelvariëteit, een rijtje $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ in V te maken dat sterk naar y convergeert.
(3) Gebruik dat er voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ een eindig surjectief morfisme

$$\pi: \quad X \quad \rightarrow \quad \mathbb{A}^n$$

bestaat wegens de geometrische vorm van Noether's normalisatie lemma [2]. Laat $Z := \pi(X - U)$, dan is Z gesloten. Neem $x \in X - U$ en laat $y := \pi(x)$, dan geldt $y \in Z$. Laat $V = \mathbb{A}^n - Z$ en lift vervolgens het rijtje $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ van stap (2) via π naar een rijtje $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ in U dat sterk convergeert naar x.

De eerste twee stappen zullen worden bewezen, het bewijs van stap (3) zal worden overgelaten aan de lezer.

(1) *Bewijs.* Noteer $\widehat{A}^B$ voor de sterke afsluiting van A in B. Stel het lemma is waar voor affiene variëteiten. Laat X een variëteit zijn, dan wordt X overdekt door eindig veel open affiene variëteiten U_i. Dus we kunnen X schrijven als:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

met I een eindige indexverzameling en U_i niet-lege open affiene variëteiten. Stel nu dat $U \subset X$ een niet-lege open deelvariëteit is. Dan geldt voor alle $i \in I$ dat $\widehat{U \bigcap U_i} = U_i$, want $U \bigcap U_i$ is een niet-lege open deelvariëteit van U_i. Dus geldt:

$$\widehat{U}^X = \bigcup_{i \in I} \widehat{U_i \bigcap U}^X \supset \bigcup_{i \in I} \widehat{U_i \bigcap U}^{U_i} = \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

dus $\widehat{U}^X = X$. □

(2) *Bewijs.* Stel $V \subset \mathbb{A}^n$ is niet leeg en open. Laat $y \in \mathbb{A}^n - V$ willekeurig gegeven. $\mathbb{A}^n - V$ is gesloten dus te schrijven als een verzameling van gezamenlijke nulpunten van eindig veel polynomen, zeg $f_1, \ldots, f_l \in k[x_1, \ldots, x_n]$. V is niet leeg, dus $f_j \neq 0$ voor een zekere $j \in \{1, \ldots, l\}$. We hebben dus:

$$\mathbb{A}^n - V = \{x | f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0\} \subset \{x | f_j = 0\}.$$

Kies nu $y^{(1)} \in \mathbb{A}^n$ zodat $f_j(y^{(1)}) \neq 0$ en definieer voor $t \in \mathbb{C}$

$$h(t) = f_j((1-t)y + ty^{(1)})$$

[2][1] par. 7, blz 59.

Dan geldt $h \neq 0$, want $h(1) = f_j(y^{(1)}) \neq 0$. Hieruit volgt dat $h(t)$ eindig veel nulpunten heeft. Laat nu $t_i \in \mathbb{C}$ zodat $t_i \to 0$ sterk als $i \to \infty$ en $h(t_i) \neq 0$ voor alle i. Bijvoorbeeld:

$$t_i = \begin{cases} 1/i & \text{als } h(1/i) \neq 0; \\ 1 & \text{anders.} \end{cases}$$

Beschouw vervolgens het morfisme:

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \mathbb{A} & \to & \mathbb{A}^n \\ & t & \mapsto & (1-t)y + ty^{(1)} \end{array}$$

Morfismen zijn sterk continu (eigenschap 2) dus hebben we

$$y^{(i)} := \alpha(t_i) \to \alpha(0) = y \text{ sterk als } i \to \infty.$$

Daarnaast $f_j(y^{(i)}) = h(t^{(i)}) \neq 0$ dus $y^{(i)} \in V$ voor alle $i \in I$. $\square$

Gevolg 1. *Als $Z \subset X$ een construeerbare deelverzameling van een variëteit is dan zijn de Zariski afsluiting en de sterke afsluiting van Z aan elkaar gelijk.*

Bewijs. Noteer $\overline{A}^B$ voor de Zariski afsluiting van A in B. Laat $Z \subset X$ een construeerbare deelverzameling zijn, dan is Z te schrijven als eindige vereniging van niet lege lokaal gesloten verzamelingen:

$$Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$$

I is hier een eindige indexverzameling en voor iedere $i \in I$ kunnen we schrijven $\emptyset \neq Z_i = O_i \bigcap G_i$, waarbij O_i open is in X en G_i gesloten in X. Dus voor iedere $i \in I$ is Z_i een niet lege open deelvariëteit van G_i (lemma 11). De $G_i \subset X$ zijn gesloten en dus deelvariëteiten van X. Dus $\widehat{Z_i}^{G_i} = G_i$ voor alle i (lemma 2). Laat nu $G := \bigcup_{i \in I} G_i$ dan geldt $G \supset Z$ is gesloten in X. We hebben nu dus:

$$\overline{Z}^X \supset \widehat{Z}^X \supset \widehat{Z}^G = \widehat{\bigcup_{i \in I} Z_i}^G = \bigcup_{i \in I} \widehat{Z_i}^G \supset \bigcup_{i \in I} \widehat{Z_i}^{G_i} = \bigcup_{i \in I} G_i = G \supset \overline{Z}^X.$$

Dus $\overline{Z}^X = \widehat{Z}^X$. $\square$

We zijn nu klaar met de toelichting van '$\Leftarrow$'. We gaan nu verder met het analyseren van '$\Rightarrow$'.

3. Toelichting '$\Rightarrow$'

De lemma's 8 t/m 10 zijn voorkennis uit de topologie [2], daar zullen we niet verder op ingaan. Lemma 3 en het bewijs daarvan zal wel worden gegeven, het bewijs is cruciaal voor het bewijs van '$\Leftarrow$' en bevat veel interessante technieken.

Lemma 3. *(Het lemma van Chow) Laat X een complete variëteit zijn over een algebraisch afgesloten lichaam k. Dan bestaat er een gesloten deelvariëteit Y van $\mathbb{P}_n(k)$ voor een zekere n, en een surjectief birationaal morfisme:*

$$\pi : Y \to X$$

Bewijs. Schrijf

$$X = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} U_i$$

waarbij U_i open affiene variëteiten zijn en I een eindige indexverzameling. Vat de U_i op als gesloten deelvariëteiten van de $\mathbb{A}^{n_i}$, met $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zodat via de inclusie-afbeelding:

$$\begin{array}{llll} i: & \mathbb{A}^{n_i} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{n_i}(k) \\ & (x_1, \ldots, x_{n_i}) & \mapsto & (1 : x_1 : \ldots : x_{n_i}) \end{array}$$

we de U_i kunnen zien als een lokaal gesloten deelvariëteit van $\mathbb{P}_n(k)$, immers:

$$U_i \cong \{x \in k^{n_i} | f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0\}$$

voor zekere $f_1, \ldots, f_l \in k[x_1, \ldots, x_{n_i}]$ dus

$$i(U_i) = \{x \in k^{n_i+1} | \tilde{f}_1(x) = \ldots = \tilde{f}_l(x) = 0\} \bigcap \{x \in k^{n_i+1} | x_0 = 0\}^c$$

waarbij $\tilde{f}_j = x_0^{deg(f_j)} f_j(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_{n_i}}{x_0})$ voor alle $j \in \{1, \ldots, l\}$.
Laat de $\overline{U_i}$ de afsluiting zijn van U_i in $\mathbb{P}_n(k)$. Dan is $\overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}$ isomorf met een gesloten deelvariëteit van $\mathbb{P}_N(k)$, voor een zekere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (lemma 12). Laat vervolgens $U^* = U_1 \bigcap \ldots \bigcap U_m$, zodat we via de inclusies $U^* \subset \overline{U}_i$ voor alle i, $U^* \times \ldots \times U^* \subset \overline{U_1} \ldots \times \overline{U_m}$ als open deelvariëteit krijgen. Als we nu het multidiagonaalmorfisme bekijken:

$$\Delta_m := (id_{U^*}, \ldots, id_{U^*}) : U^* \to U^* \times \ldots \times U^*$$

dan zien we dat

$$\begin{array}{rcl} \Delta_m(U^*) & = & \{z \in U^* \times \ldots \times U^* | p_1(z) = \ldots = p_m(z)\} \\ & = & \{z \in U^* \times \ldots \times U^* | p_1(z) = p_2(z)\} \bigcap \\ & & \ldots \bigcap \{z \in U^* \times \ldots \times U^* | p_{n-1}(z) = p_n(z)\} \end{array}$$

waarbij de p_l de projectiemorfismen op de l-de coördinaat zijn. We hebben nu dus dat $\Delta_m(U^*)$ gesloten is in $U^* \times \ldots \times U^*$ en lokaal gesloten in $\overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}$. Laat $Y := \overline{\Delta_m(U^*)} \subset \mathbb{P}_n(k)$, dan is Y zelf ook een projectieve variëteit. We willen nu een morfisme maken:

$$\pi : Y \to X.$$

Om deze te construeren kijken we naar het morfisme:

$$\Delta_2 : U^* \to U^* \times U^* \subset X \times Y$$

Dit morfisme wordt geïnduceerd door de inclusies:

(1) $U^* \subset X$

(2) $U^* \subset Y$ ($\Delta_m(U^*)$ is isomorf met U^*)

Laat nu $\tilde{Y} := \overline{\Delta_2(U^*)} \subset X \times Y$. Dan is $\tilde{Y}$ een gesloten deelvariëteit van $X \times Y$. X en Y zijn compleet, dus $X \times Y$ ook (lemma 4.1), dus $\tilde{Y}$ ook (lemma 4.2). De projecties p en q van $\tilde{Y}$ op X resp. Y geven het diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} U^* & \subset & \tilde{Y} & = & \tilde{Y} & \supset & U^* \\ \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow \\ U^* & \subset & X & & Y & \supset & U^* \end{array}$$

Beperkt tot U^* zijn p en q dus isomorfismen, dit betekent dat ze birationale morfismen zijn. Daarnaast is $\tilde{Y}$ compleet dus $p(\tilde{Y})$, $q(\tilde{Y})$ zijn gesloten in X resp. Y. U^* ligt dicht in X resp. Y. We hebben de inclusies $U^* \subset p(\tilde{Y}) \subset X$ en $U^* \subset q(\tilde{Y}) \subset Y$, dus p en q zijn surjectief. We hoeven nu alleen nog te bewijzen dat q een isomorfisme is. Dan laten we namelijk:

$$\pi := p \circ q^{-1} : Y \to X$$

en zijn we klaar.
Daartoe beschouwen we $\tilde{Y}$ als gesloten deelvariëteit van $X \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}$, we hebben namelijk $\tilde{Y} \subset X \times Y \subset X \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}$, waarbij $\tilde{Y}$ gesloten is in $X \times Y$ en Y gesloten in $\overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}$. Laten we nu de projectie r_i bekijken van $\tilde{Y}$ op $X \times \overline{U_i}$ voor iedere i, we krijgen het diagram:

$$\begin{array}{llll} U^* \times U^* \times & \ldots \times U^* & \subset & X \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m} \\ \uparrow & \downarrow & & \downarrow r_i \\ U^* \to & U^* \times U^* & \subset & X \times \overline{U_i} \end{array}$$

In dit diagram zijn de pijlen naar onder, de r_i, de projecties op de 1-ste + $(i+1)$-de factoren. De andere pijlen zijn de diagonaalmorfismen. $\tilde{Y}$ is compleet dus de projectie $r_i(\tilde{Y})$ is gesloten (lemma 4.3). Uit het morfisme $\Delta_2 : U^* \to U^* \times U^*$ en de inclusies (1) en (2) kunnen we halen dat $\tilde{Y} = \overline{\Delta_{m+1}(U^*)}$. Hierbij is:

$$\begin{array}{llll} \Delta_{m+1} : & U^* & \to & X \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m} \\ & u & \mapsto & (u, \ldots, u) \end{array}$$

Dus $r_i(\Delta_{m+1}(U^*)) = \Delta_2(U^*)$ ligt dicht in $r_i(\tilde{Y})$. Daarnaast is $\Delta_2(U^*)$ isomorf met U^* dus $r_i(\tilde{Y})$ is de afsluiting van U^* in $X \times \overline{U_i}$. Met behulp van (lemma 5) kunnen we met de onderste morfismen van het diagram concluderen dat:

$$r_i(\tilde{Y}) \bigcap (X \times U_i) = r_i(\tilde{Y}) \bigcap (U_i \times \overline{U_i}) = \{(x, x) | x \in U_i\}$$

door vervolgens r_i^{-1} aan beide kanten te nemen zien we dat:

$$\tilde{Y} \bigcap (X \times \overline{U_1} \times \ldots \times U_i \times \ldots \times \overline{U_m}) = \tilde{Y} \bigcap (U_i \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m})$$

Noem deze verzameling $\tilde{Y}_i$. Dan volgt uit de rechterhandzijde dat $\{\tilde{Y}_i\}$ een open overdekking van $\tilde{Y}$ is:

$$\begin{array}{rcl} \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} \tilde{Y}_i & = & \tilde{Y} \bigcap (\bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} U_i \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}) \\ & = & \tilde{Y} \bigcap (X \times \overline{U_1} \times \ldots \times \overline{U_m}) \\ & = & \tilde{Y}. \end{array}$$

Daarnaast volgt uit de linkerhandzijde dat:

$$\begin{array}{rcll} \tilde{Y}_i & = & q^{-1}(Y_i) & \text{waarbij} \\ Y_i & := & Y \bigcap (\overline{U_1} \times \ldots \times U_i \times \ldots \times \overline{U_m}) & \end{array}$$

Dus geldt:

$$\tilde{Y} = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} \tilde{Y}_i = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} q^{-1}(Y_i) = q^{-1}(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} Y_i)$$

en omdat q surjectief is hebben we vervolgens:

$$Y = q(\tilde{Y}) = \bigcup_{i \in \{1,\ldots,m\}} Y_i.$$

De $\{Y_i\}$ vormen dus een open overdekking voor Y. Nu definiëren we het volgende morfisme

$$\begin{array}{rlcl} \sigma_i : & Y_i & \to & \tilde{Y}_i \\ & (u_1, \dots, u_m) & \mapsto & (u_i, u_1, \dots, u_m) \end{array}$$

Dit morfisme is welgedefinieerd, want $u_i \in U_i \subset X$ en
$q(u_i, u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m) \in Y$ dus $(u_i, u_1, \dots, u_m) \in \tilde{Y}$.
De σ_i zijn de inverse van q beperkt tot Y_i, immers er geldt:

(1) $q(\sigma_i(u_1, \dots, u_m)) = q(u_i, u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m)$

(2) Voor $(v, u_1, \dots, u_m) \in \tilde{Y}_i$ geldt $v = u_i$, want uit (lemma 5) volgt tevens $\tilde{Y}_i = \Gamma_i^{-1}(\{(x, x) | x \in U_i\})$. Dus we hebben:
$\sigma_i(q(v, u_1, \dots, u_m)) = \sigma_i(u_1, \dots, u_m) = (u_i, u_1, \dots, u_m) = (v, u_1, \dots, u_m)$

Dus q is een isomorfisme en π is geconstrueerd. □

Van de lemma's 11 en 12 zullen we uitgaan dat het voorkennis is, deze zullen we niet verder toelichten dan de formulering. De lemma's 4 en 5 zullen wel verder worden toegelicht.

Lemma 4. *(Eigenschappen van een complete variëteit). Laat X een complete variëteit zijn en Y een variëteit, dan geldt:*

(1) *Voor ieder morfisme $f : X \to Y$ is $f(X)$ gesloten in Y.*

(2) *Als Y compleet is dan is $X \times Y$ compleet.*

(3) *Als Y een gesloten deelvariëteit van X is dan is Y compleet.*

Bewijs. (1) We krijgen een diagram:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_2"] & Y \\ & X \arrow[ul, "(id_x, f)"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

dat commuteert. We zien dat $(id_X, f)(X)$ de grafiek is van f en dus gesloten in $X \times Y$ (lemma 6). Daarnaast is p_2 een gesloten afbeelding, dus $f(X) = (p_2 \circ (id_X, f))(X)$ is gesloten in Y.

(2) Laat Z een willekeurige variëteit zijn, beschouw het diagram:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[r, "p_{2,X \times Y}"] \arrow[dr, "p_{2,X}"'] & Z \\ & Y \times Z \arrow[u, "p_{2,Y}"'] \end{tikzcd}$$

Dit diagram commuteert. Als X en Y compleet zijn dan zijn $p_{2,X}$ en $p_{2,Y}$ gesloten dus $p_{2,X \times Y} = p_{2,Y} \circ p_{2,X}$ ook.

(3) Laat Z een willekeurige variëteit zijn. $Y \times Z$ is gesloten in $X \times Z$ dus het inclusiemorfisme $i : Y \times Z \hookrightarrow X \times Z$ is gesloten. Daarnaast commuteert het diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & X \times Z & \xrightarrow{p_{2,X}} & Z & \\ i & \nwarrow & & \nearrow & p_{2,Y} \\ & & Y \times Z & & \end{array}$$

en is $p_{2,X}$ een gesloten afbeelding dus $p_{2,Y} = p_{2,X} \circ i$ is ook gesloten, dus Y is compleet.

□

Lemma 5. *Laat S en T twee variëteiten zijn, met twee isomorfe open deelverzamelingen $V_S \subset S$ en $V_T \subset T$. Identificeer V_S en V_T voor het gemak met elkaar. Dan geldt voor het morfisme*

$$\Delta_2 : V \to V \times V \subset S \times T$$

het volgende:

$$\overline{\Delta_2(V)}^{S\times T} \bigcap (S \times V) = \overline{\Delta_2(V)}^{S\times T} \bigcap (V \times T) = \Delta_2(V).$$

Bewijs. $\Delta_2(V)$ is de grafiek van het inclusiemorfime $id : V \hookrightarrow T$, dus $\Delta_2(V)$ is gesloten in $V \times T$ (lemma 6). Dus geldt:

$$\overline{\Delta_2(V)}^{S\times T} \bigcap (V \times T) = \overline{\Delta_2(V)}^{V\times T} = \Delta_2(V).$$

Het bewijs voor $\overline{\Delta_2(V)}^{S\times T} \bigcap (S \times V) = \Delta_2(V)$ gaat analoog. □

We eindigen met het bewijzen dat de grafiek van een morfisme tussen variëteiten gesloten is.

Lemma 6. *Laat $f : X \to Y$ een morfisme zijn van prevariëteiten en Y een variëteit zijn, dan is de grafiek van f, i.e. het beeld van het morfisme $(id, f) : X \to X \times Y$, gesloten.*

Bewijs. Beschouw het morfisme:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & X \times Y & \to & Y \times Y \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}$$

We hebben dat $\Delta_2(Y) \subset Y \times Y$ gesloten is, dus is

$$\phi^{-1}(\Delta_2(Y)) = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = y\} = (id, f)(X)$$

ook gesloten. □

De overige lemma's zullen kort vermeld worden met referenties:

4. Overige lemma's

Lemma 7. *(Chevalley) Laat $f : X \to Y$ een morfisme zijn. Dan is het beeld van f een construeerbare verzameling in Y. Algemener, f beeld construeerbare verzamelingen in X af op construeerbare verzamelingen in Y.*

Bewijs. [1] blz. 72, gevolg 2

□

Lemma 8. *(Heine-Borel) Een deelverzameling $S \subset \mathbb{R}^n$ is gesloten en begrensd d.e.s.d.a. S compact is.*

Bewijs. [2] blz. 44, stelling 3.3

□

Lemma 9. *Het continue beeld van een compacte topologische ruimte is compact.*

Bewijs. [2] blz. 47, stelling 3.4

□

Lemma 10. *Een gesloten deelverzameling van een compacte verzameling is compact.*

Bewijs. [2] blz. 47, stelling 3.5

□

Lemma 11. *Iedere lokaal gesloten deelverzameling van een (pre)variëteit is op natuurlijke wijze te voorzien van de structuur van een (pre)variëteit.*

Bewijs. [1] blz. 39, bovenaan

□

Lemma 12. *Het product van twee projectieve variëteiten is ook een projectieve variëteit.*

Bewijs. [1] blz. 50, stelling 3

□

Referenties

[1] David Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Springer-Verlag, 1988.
[2] M.A. Amstrong, Basic topology, Springer-Verlag, 1983.