



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Het Black-Scholes optieprijsmodel

Helden, G.F. van

### Citation

Helden, G. F. van. (2008). *Het Black-Scholes optieprijsmodel*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596830>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

# Het Black-Scholes optieprijsmodel

Frans van Helden

16 december 2008



# Inhoudsopgave

<b>Voorwoord</b>	<b>5</b>
<b>1 Stochastiek van aandelenkoersen</b>	<b>7</b>
1.1 Marktefficiëntie . . . . .	7
1.2 Afleiding Aandeleprijsmodel . . . . .	8
1.3 Aannames . . . . .	9
<b>2 Opties</b>	<b>11</b>
2.1 Van aandelen naar afgeleiden . . . . .	11
2.2 Opties . . . . .	13
2.3 Resultaat: Black-Scholes voor opties . . . . .	14
<b>3 Volatiliteit en koersverwachtingen</b>	<b>17</b>
3.1 De Volatility Smile . . . . .	17
3.2 Breeden-Litzenberger . . . . .	18
3.3 Koersverwachtingen . . . . .	19
3.4 Data . . . . .	19
3.5 Polynomiale schatter . . . . .	22
3.6 Smoothed Volatility methode . . . . .	23
3.7 Schatters uit lognormale verdelingen . . . . .	24
3.7.1 Lognormale schatters: $\mu$ en $\sigma$ vrij . . . . .	26
3.7.2 Lognormale schatters: alleen $\sigma$ vrij . . . . .	27
3.8 Conclusie . . . . .	30
<b>A Code realisatie Aandelenkoers</b>	<b>31</b>
<b>B Code volatility smile</b>	<b>32</b>
<b>C Schatters</b>	<b>34</b>
C.1 Code Polynomiale schatter . . . . .	34
C.2 Code schatter Smoothed Volatility . . . . .	37
C.3 Code dubbel-lognormale schatter . . . . .	39
C.3.1 Alleen $\sigma$ vrij . . . . .	39

C.3.2 $\mu$ en $\sigma$ vrij . . . . .	43
<b>Bibliografie</b>	<b>47</b>

# Voorwoord

Voor u ligt mijn bachelorscriptie, getiteld "Het Black-Scholes optieprijsmodel". Deze scriptie heb ik geschreven in de periode van januari tot september 2008, in de bachelorfase van mijn studie Wiskunde aan de Universiteit Leiden, onder begeleiding van dr. E.W. van Zwet.

In deze scriptie doe ik verslag van een literatuuronderzoek naar het Black-Scholes optieprijsmodel, een wiskundig model om de verwachte opbrengst uit opties, en daarmee hun prijs, te berekenen.

Ik begin met het opzetten van een theoretisch model voor aandelen, om vervolgens dit model te gebruiken om na te denken over opties. Aan het eind van hoofdstuk 1 komt hier uiteindelijk een formule om de prijs van opties te berekenen uit. In hoofdstuk 2 gebruik ik deze formule om uit in de markt waargenomen optieprijsen informatie te halen over de verwachtingen die beleggers van een aandeel hebben. Ik gebruik hiervoor verschillende methodes, die ik geprogrammeerd heb in Matlab. Als appendix volgt dan ook de programmacode van de programma's die ik gebruikt heb.

Frans van Helden  
16 december 2008



# Hoofdstuk 1

## Stochastiek van aandelenkoersen

In dit hoofdstuk zal ik ingaan op de ontwikkelingen rondom de vraag hoe aandelenkoersen zich ontwikkelen. In de eerste paragraaf zal ik ingaan op de theorie van marktefficiëntie. Vervolgens zullen we op een conclusie van deze paragraaf een model bekijken dat beschrijft hoe aandelenkoersen zich ontwikkelen [4].

### 1.1 Marktefficiëntie

Een van de eersten die structureel nadacht over de vraag of men de beweging van de markt kan voorspellen, was Louis Bachelier. In 1900 verscheen zijn proefschrift 'Théorie de la spéculation', waarin hij de financiële markten bestudeert, en hij tot de conclusie komt dat deze in hoge mate een onvoorspelbaar gedrag vertonen. Zijn resultaat blijft echter lange tijd onopgemerkt. De eerste conclusie met een dergelijke strekking werd pas weer getrokken in 1933, door Alfred Cowles tijdens een lezing. Hij vraagt zich af hoe het gesteld is met de betrouwbaarheid van beleggingsadviezen wat betreft de ontwikkelingen op de beurs. Hij komt tot de conclusie: "No evidence of skill in forecasting". Ook andere analyses van Cowles komen op een dergelijke conclusie uit. In dit soort onderzoeken blijft hij echter lange tijd de enige.

In de jaren '50 wordt een deel van het werk vervolgens opgepakt door onder andere de statisticus Sir Maurice Kendall, die in een studie uit 1953 het concept van een random walk in de data van de beursontwikkelingen ontdekt. In de jaren '50, '60 en '70 worden verschillende van dit soort onderzoeken gedaan waarbij steeds weer de conclusie moet worden getrokken dat de beurskoersen een willekeurige ontwikkeling lijken te ondergaan.

In 1965 komt dan de eerste theoretische onderbouwing voor het fenomeen, in het artikel 'Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly' van de latere Nobelprijswinnaar Paul Samuelson. Zijn theorie zit in grote lijnen als volgt in elkaar: de prijsbepaling van financiële producten als aandelen en opties gebeurt op basis van de verwachte opbrengst van zo'n product. De verwachting over de grootte van de inkomensstroom hangt af van de beschikbare informatie. Wanneer er nieuwe informatie beschikbaar komt, wordt deze informatie direct in de prijs verwerkt. Een voorbeeld hiervan zijn we bij de koerswijzigingen bij het uitbrengen van de jaarcijfers van een bedrijf, of bijvoorbeeld een winstwaarschuwing. De gedachte is dat de prijs die zo op de markt ontstaat de beste voorspeller is van toekomstige inkomensstromen. Deze prijs heet ook wel de fundamentele



waarde. Deze theorie staat bekend als de efficiënte markt-hypothese.

Een van de implicaties van deze hypothese is de volgende: de prijs van een product verandert dus alleen als er nieuwe informatie vrijgegeven wordt. Echter, omdat de inhoud van nieuwe informatie onvoorspelbaar is (hij is immers nieuw), volgt de ontwikkeling van de prijs dus een willekeurige route: een random walk.

De conclusie van onvoorspelbaarheid heeft heel wat stof doen opwaaien in de beleggingswereld: waar zou immers nog een beleggingsadviseur voor nodig zijn? Dit heeft dan ook een tweespalt tussen de wetenschap en de praktijk opgeleverd. Beleggingsadviseurs zijn uiteraard geneigd te zeggen dat hun advies wel degelijk zin heeft, en komen dan ook met legio voorbeelden die die stelling zouden ondersteunen, aan de andere kant wetenschappers die geen enkel resultaat geloven dat tegen de efficiënte markt-hypothese ingaat. Hierbij dient wel aangetekend te worden dat advies bij beleggingen wel degelijk zin kan hebben, op tal van terreinen. Echter, de voorspellende vaardigheden van beleggingsadviseurs wanneer gesproken wordt over één fonds wordt door wetenschappers, op grond van de efficiënte markt-hypothese, vaak in twijfel getrokken.

De kracht van de conclusie is echter dat er, wanneer er inderdaad een random-walk proces optreedt, wiskundig wel een en ander over de te verwachten ontwikkelingen en afgeleide processen te zeggen valt. In de volgende paragraaf zullen we beginnen daar de structuur voor op te zetten.

## 1.2 Afleiding Aandeleprijsmodel

Aan de hand van gegevens uit de markt blijkt de prijs van een aandeel theoretisch gezien vrij goed te benaderen te zijn als een Markov-keten, die steeds een willekeurige stap naar boven of beneden maakt. Dit is, preciezer gezegd, een Wiener-proces. Wanneer we de ontwikkeling van de beurs willen beschouwen als een speciaal geval van een Brownse beweging, zullen we eerst wat theorie hierover moeten opzetten.

**Definitie 1.1** (Wiener-proces). *Een Wiener-proces met variabelen  $z$  en  $t$  is een proces met de volgende eigenschappen:*

1. *De verandering  $\Delta z$  gedurende tijd  $\Delta t$  is*

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

*Hierbij geldt  $\epsilon \sim N(0, 1)$*

2. *De waarden  $\Delta z$  voor verschillende tijdsintervallen  $\Delta t$  zijn onafhankelijk*

Uit de eerste eigenschap volgt dat  $z(T) - z(0) \sim N(0, T)$ , waarbij  $T$  de variantie is. Uit de tweede eigenschap dat  $z$  een Markov-proces is. In continue vorm schrijven we  $dz$  in plaats van  $\Delta z$ , wanneer  $\Delta \rightarrow 0$

Over het algemeen ondergaat een beurskoers geen gewoon Wiener-proces: er zit meestal een zekere trend achter, waarop een Wiener-proces als verstoring optreedt. Dit kan in het model meegenomen worden door bij een functie een Wiener-proces op te tellen. Wanneer hierdoor de functie  $dx = a dt + b dz$  ontstaat, heet dit een gegeneraliseerd Wiener-proces. Wanneer  $a$  hier van  $x$  of  $t$  afhangt, heet dit een Itô-proces:  $dx = a(x, t) dt + b dz$ . Een Itô-proces wordt meestal niet als

model gebruikt; meestal wordt gekozen voor een gegeneraliseerd Wiener-proces met een gemiddeld hellingsgetal  $\mu$ , de zogenaamde driftrate. De functie wordt, wanneer we de verstoring even buiten beschouwing laten, gegeven door

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Hierin is  $S$  de waarde van het aandeel. De continue vorm is

$$dS = \mu S dt. \tag{1.1}$$

Merk op dat de oplossing van differentiaalvergelijking 1.1 wordt gegeven door

$$S_t = S_0 e^{\mu t}. \tag{1.2}$$

waarin  $S_t$  de waarde van het aandeel op tijdstip  $t$  is, De waarde van het aandeel,  $S$ , als factor in de rechterterm van (1.1) zorgt ervoor dat trend van het aandeel afhankelijk is van de stand van het aandeel: wanneer deze term er niet zou staan, zou de sterkte van de stijging of daling onafhankelijk zijn van de waarde van het aandeel. In de praktijk blijkt dit niet zo te zijn, en blijkt de stijging of daling proportioneel afhankelijk te zijn van de waarde van het aandeel.

Eerder hebben we de verstoring buiten beschouwing gelaten. In de praktijk treedt een dergelijke verstoring wel degelijk op. Dit fenomeen heet de volatiliteit van een aandeel,  $\sigma$ . Het blijkt dat de mate van onvoorspelbare stijging of daling ook afhankelijk is van de hoogte van de waarde van een aandeel. Nemen we deze verstoring samen met formule (1.1), dan krijgen we de meest gebruikte vergelijking om het proces van een aandeel te beschrijven, die wordt gegeven door

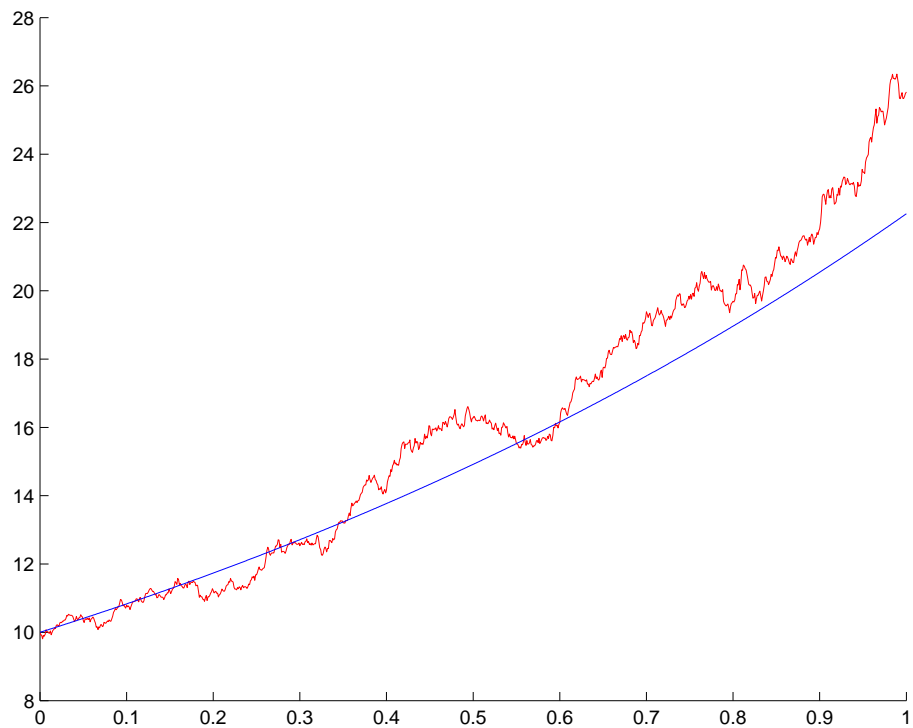
$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \tag{1.3}$$

Een numerieke realisatie van het proces is grafisch weergegeven in figuur 1.1. Hierin zijn gekozen:  $\mu = 0.8, \sigma = 0.2, S_0 = 10, \Delta t = 0.001, T = 1$ . De blauwe lijn geeft de verwachte loop van het aandeel zonder verstoring aan, en is gelijk aan functie 1.2. Zie appendix A voor de programmacode.

## 1.3 Aannames

Voordat we verder werken aan de afleiding van een model voor optiepreizen, bespreken we eerst nog kort het volgende zevental aannames. Later zullen we aan een aantal van deze aannames aandacht besteden.

1. De aandelenpreizen ontwikkelen zich volgens het model van formule 1.3 met  $\mu$  en  $\sigma$  constant
2. Het is toegestaan effecten te verkopen voordat die daadwerkelijk in bezit zijn ('short gaan')
3. Er worden geen transactiekosten berekend
4. Er worden geen dividenden uitgekeerd gedurende de looptijd van het contract
5. Er is zijn geen arbitragewinsten te behalen (risicovrije winsten door prijsverschillen tussen twee verschillende markten)



Figuur 1.1: Een realisatie van het stochastische model voor een aandelenkoers

6. Er is continue handel mogelijk
7. De risicovrije rentestand  $r$  is constant

Later zullen we zien dat  $\mu$ ,  $\sigma$  en  $r$  ook functies van  $t$  mogen zijn. Voor de eenvoud in de notatie gedurende de afleiding zullen we ze echter als constant beschouwen.

# Hoofdstuk 2

## Opties

In het vorige hoofdstuk zijn we begonnen met de afleiding van een model voor een theoretisch aandeel. In dit hoofdstuk zullen we verder werken. We bouwen vanuit het model dat nu staat toe naar een model voor optiepreizen, zoals dit model als eerste is afgeleid door Fisher Black en Myron Scholes, in 1973 [3].

### 2.1 Van aandelen naar afgeleiden

We hebben nu een model voor de ontwikkeling van aandelenpreizen. Hiermee zullen we gaan werken aan een prijssysteem voor afgeleide effecten. Met behulp van Itô's lemma kunnen we nu vrij eenvoudig de stap van aandelen naar afgeleide effecten maken. Itô's lemma [5] koppelt een stochastisch proces aan een nieuw stochastisch proces, dat op het eerste gebaseerd is. Dit is ook precies het geval bij effecten die op een bepaalde manier afhankelijk zijn van een aandelenkoers.

**Lemma 2.1** (Itô's lemma). *Laat een variabele  $x$  een Itô-proces volgen,*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz.$$

*Hierin is  $a$  en  $b$  functies van  $x$  en  $t$ .  $x$  heeft een drift  $a$  en een variantie  $b^2$ .  
Zij  $G$  een functie van  $x$  en  $t$ . Dan geldt dat*

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz. \quad (2.1)$$

Met behulp van dit lemma en formule (1.3) kunnen we nu eenvoudig een prijsvergelijking voor een afgeleid product bepalen:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (2.2)$$

Het is hierbij belangrijk op te merken dat  $G$  en  $S$  hun risicofactor uit hetzelfde proces  $dz$  halen. Omdat deze producten dus onderling afhankelijk zijn, kunnen we de mate waarin de prijs van de afgeleide reageert op die van het aandeel uitdrukken met  $\frac{\partial G}{\partial S}$ . We kiezen nu de volgende portfolio: -1 aan afgeleide producten, en  $\frac{\partial G}{\partial S}$  aan aandelen. Het negatieve teken betekent 'short gaan';

hiermee worden effecten verkocht die feitelijk niet in bezit zijn. De waarde van de portfolio wordt dan als volgt:

$$\Pi = -G + \frac{\partial G}{\partial S} S \quad (2.3)$$

Het is eenvoudig in te zien dat de waarde van de portfolio op deze manier onder koersstijgingen of -dalingen gelijk blijft: beschouw

$$\Pi' = -G' + \frac{\partial G}{\partial S} S'$$

Hierin geldt  $S' = S + \Delta S$  en  $G' = G + \Delta G$ . Omdat  $G$  van  $S$  afhankelijk is, en wel met ratio  $\frac{\partial G}{\partial S}$ , geldt dat  $G' = G + \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S$ . Invullen geeft nu:

$$\begin{aligned} \Pi' &= -G - \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial G}{\partial S} S + \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S \\ &= -G + \frac{\partial G}{\partial S} S \\ &= \Pi \end{aligned}$$

We zien dus dat  $\Pi$  onder koersstijgingen of -dalingen gelijk blijft. Opgemerkt moet wel worden dat dit natuurlijk maar op een willekeurig kort tijdstip exact zo is: het is dus nodig steeds aandelen te kopen of verkopen om de portfolio goed afgestemd te houden.

Om nu te komen tot de Black-Scholes differentiaalvergelijking, zetten we formules 1.3 en 2.2, die het gedrag van de effecten in de portfolio tenslotte beschrijven, eerst om naar de discrete versies:

$$\Delta G = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (2.4)$$

en

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (2.5)$$

De verandering van de waarde in de portfolio in tijd  $\Delta t$  is als volgt:

$$\Delta \Pi = -\Delta G + \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S \quad (2.6)$$

Wanneer we 2.4 en 2.5 in 2.6 invullen, is de verwachting dat de term  $\Delta z$  weg zal vallen; immers, we hebben de portfolio zo gekozen dat hij risico-neutraal is. Dat is ook zo. Na invullen blijft over:

$$\Delta \Pi = \left( -\frac{\partial G}{\partial S} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (2.7)$$

Dit is dus een risicovrije portfolio; er zit immers geen factor  $\Delta z$  in. Deze portfolio zal dus, omdat hij risicovrij is, net zoveel verdienen als andere risico-vrije korte-termijn beleggingen, ook omdat er gezien aanname 5 geen arbitrage-mogelijkheden zijn. Hij zal zich dus ontwikkelen volgens

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t \quad (2.8)$$

Hierin is  $r$  als in aanname 7 de risico-vrije winst-ratio. Wanneer we nu formules 2.7 en 2.8

combineren, komen we tot de Black-Scholes differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + rS \frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = rG \quad (2.9)$$

De oplossing van deze functie kan dus de prijs van een afgeleid effect beschrijven. Om welk soort effect dat gaat, wordt bepaald door de randvoorwaarde bij functie 2.9. Dit is ook een van de redenen waarom de methode van Black-Scholes geprezen werd: er werd een raamwerk opgezet om van een heel aantal verschillende producten de prijs te berekenen. Wij gaan specifiek naar opties kijken. In de volgende sectie wordt kort iets over het concept van een optie verteld. Daarna gaan we verder met de Black-Scholes analyse.

## 2.2 Opties

In de vorige secties hebben we in het algemeen gewerkt met afgeleide producten. Een daarvan is de zogenaamde optie. Dit is een contract tussen twee partijen, waarbij afgesproken wordt dat over een bepaalde tijd een aandeel gekocht of verkocht mag worden van de ene aan de andere partij. Een optie waarbij een aandeel gekocht mag worden, heet een call-optie, een mogelijkheid tot verkoop heet een put-optie. De partij die de optie biedt heet de *schrijver*, degene die de optie koopt heet de *koper*. Het gaat er hierbij om dat door de koper van de optie het aandeel gekocht of verkocht *mag* worden: hij is daar niet toe verplicht; de schrijvende partij is *wel* verplicht te kopen of verkopen wanneer de koper de optie wil lichten.

Nu zijn zulke contracten uiteraard niet gratis; de koper betaalt een bedrag aan de schrijver. Wat is nu een eerlijke prijs voor deze optie? De waarde van optie is exact gelijk aan de verwachte som geld die de optie gaat opleveren voor de koper, en die de schrijver dan dus mis zou lopen. Deze prijs wordt de fundamentele prijs genoemd. Ook kan er op een andere manier tegenaan gekeken worden. Als we in termen van risico denken, koopt de koper van de optie, door de prijs die hij voor de optie betaald, het risico af dat op de uitoefendatum de koers van het aandeel lager staat dan de uitoefenprijs. Aan de andere kant neemt de schrijver van de optie genoeg met de verwachtingswaarde van het aandeel op de uitoefendatum bij een koersstijging, terwijl hij het risico op een koersdaling behoudt. Er wordt dus gehandeld in risico en verwachte opbrengsten.

De genoemde eigenschappen levert de volgende formule op:

$$c = E(\max(S_T - K, 0)) \quad (2.10)$$

Hierin is :

c: de prijs van een call-optie

$S_t$ : de prijs van het aandeel op tijd t

T: de uitoefendatum K: de uitoefenprijs waarvoor het aandeel gekocht mag worden

We kunnen deze waarde van de optie gebruiken als randvoorwaarde van de Black-Scholes differentiaalvergelijking, formule (2.9). Merk op dat bij een put-optie de functie

$$p = E(\max(K - S_T, 0)) \quad (2.11)$$

zou zijn.

Dat het de moeite waard is, voor beide partijen, om de fundamentele prijs van de optie te weten, is duidelijk: immers, wanneer de prijs te laag is, is dat nadelig voor de schrijver, wanneer de prijs te hoog is, zal de koper dat willen weten: naar verwachting zal hij dan immers verlies maken.

Het blijkt dus interessant te zijn om een methode te hebben om de fundamentele prijs van een optie te berekenen. Lange tijd is dit binnen de wetenschap voor onmogelijk gehouden, aangezien de beurskoersen theoretisch onvoorspelbaar zijn. De in 1973 door Black en Scholes voorgestelde methode was dan ook een grote doorbraak binnen de handel in opties, en opende een geheel nieuwe tak binnen de economische wetenschap, omdat de formules niet alleen een heel redelijke schatting van de fundamentele prijs van een optie gaven, maar ook een raamwerk om de prijs van allerlei andere derivaten te berekenen. Deze nieuwe tak van economie werd Financial Engineering genoemd. Het belang van de door hen voorgestelde formules werd in 1997 erkend, toen Scholes en Merton de Nobelprijs voor Economie werd toegekend; Black was toen helaas al overleden.

## 2.3 Resultaat: Black-Scholes voor opties

Voordat we doorgaan met het directe resultaat van Black-Scholes, zullen we eerst laten zien dat wanneer  $S$  het proces volgt wat ontwikkeld is tot formule (1.3),  $S$  lognormaal verdeeld is.

Definieer  $L = \ln(S)$ . Nu kunnen we, omdat  $L$  een functie is van  $S$ , Itô's lemma toepassen, waaruit volgt dat

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \quad (2.12)$$

We zien nu eenvoudig in dat  $dG$  normaal verdeeld is. Dus geldt voor  $\ln S_T$ :

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \quad (2.13)$$

$S_T$  is dus lognormaal verdeeld.

Nu willen we de oplossing van het volgende model vinden:

$$rG = \frac{\partial G}{\partial t} + rS \frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \quad (2.14)$$

$$G = E(\max(S_T - K, 0)) \quad (2.15)$$

Meestal wordt voor het vinden hiervan niet als methode het oplossen van de differentiaalvergelijking gekozen, maar wordt dat gedaan via zogenaamde risico-neutraal-waardering. Zoals eerder gezegd, moet de prijs van de optie gelijk zijn aan andere risico-neutrale verdiensten. De prijs van een call-optie moet dan dus gelijk zijn aan de verdisconteerde waarde van de optie:

$$c = e^{-rT} E(\max(S_T - K, 0)) \quad (2.16)$$

Wanneer we nu deze verwachting uit gaan rekenen, waarbij  $S_T$  lognormaal verdeeld is, volgt daaruit:

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2.17)$$

Waarbij

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Hierin spelen de volgende variabelen een rol:

1.  $\sigma$ : de volatiliteit van het aandeel
2.  $S_t$ : De koers van het aandeel op tijdstip  $t$
3.  $K$ : de uitoefenprijs van de optie
4.  $r$ : de risico-neutrale factor
5.  $T$ : de tijd tot de uitoefendatum van de optie

Drie van de vijf variabelen zijn hierbij gegeven,  $r$  en  $\sigma$  moeten geschat worden. Hieraan is veel werk verricht. Ook veel werk is verricht aan het omzeilen van een aantal van de voorwaarden die we eerder opgesomd hebben.





## Hoofdstuk 3

# Volatiliteit en koersverwachtingen

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien hoe de Black-Scholes prijsformule tot stand komt. Deze formule was oorspronkelijk bedoeld om de prijs van een optie eerlijk vast te stellen, op basis van een aantal gegevens. In dit hoofdstuk zullen we in het bijzonder kijken naar de volatiliteit. Vervolgens zullen we kijken naar de voorspellende waarde van optieprijzen voor een ontwikkeling op de markt.

### 3.1 De Volatility Smile

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat de Black-Scholes formule vijf variabelen kent. Een van deze variabelen is de volatiliteit van het onderliggende effect. De volatiliteit is echter niet goed te schatten op basis van een bepaalde theorie, of nauwkeurig te voorspellen uit bijvoorbeeld de volatiliteit van het aandeel over een afgelopen periode. Hierom is de meest gebruikte methode om de volatiliteit te berekenen die van het berekenen van de zogeheten implied volatility. De gedachte bij deze methode is, dat de markt als geheel een behoorlijke schatter zal geven voor de volatiliteit. Hierbij worden de prijzen van opties in de markt geobserveerd en wordt teruggerekend welke volatiliteit gebruikt is om tot deze prijs te komen. Dit is kennelijk de volatiliteit waarvan men in de markt denkt dat het aandeel deze volatiliteit zal gaan vertonen.

Een van de veronderstellingen die hierbij impliciet gedaan wordt, is dat de volatiliteit van een optie constant is. Uit de manier waarop beleggers de volatiliteit inschatten, blijken zij daar echter heel anders over te denken. Zij schatten de volatiliteit als een convexe functie van de uitoefenprijs. Dit fenomeen is bekend als de volatility smile, vanwege de convexe vorm van de functie.

De vorm van deze smile is afhankelijk van het type onderliggend waardepapier van de optie. Wanneer de onderliggende waarde een buitenlandse valuta is ("currency option"), is de vorm anders dan wanneer de onderliggende waarde een aandeel ("equity option") is. [4]

De smile die ontstaat bij het analyseren van currency options heeft een symmetrische vorm: de volatiliteit is wordt hoger geacht naarmate de uitoefenprijs van de optie verder van de huidige prijs ("spot price") van het onderliggende waardepapier af ligt. De smile die ontstaat bij het analyseren van equity options is een dalende convexe functie: hoe hoger de uitoefenprijs van de optie, hoe lager de volatiliteit van het onderliggende aandeel geacht wordt.

Opmerkelijk hierbij is dat de markt pas Volatility Smiles is gaan vertonen na de krach op de

beurzen op 19 oktober 1987. Op die dag zakte de beurs 29% in waarde; een ongekennde val. Dit feit wijst echter wel de richting voor de eerste van de twee volgende verklaringen van de volatility smile.

Er zijn twee verklaringen voor de volatility smile. Allereerst, dat beleggers om een compensatie willen voor het lopen van een klein risico op het verlies van een hoog bedrag. Dit zou ook kunnen verklaren dat deze smile zich pas na 1987 ging vertonen; beleggers werden zich toen pijnlijk bewust van het risico dat juist bij extreme koersstijgingen of -dalingen voor kan doen. De compensatiefactor zou dan eigenlijk een zesde variabele in het Black-Scholesmodel zijn, maar door toepassing van de implied volatilitymethode wordt dit verwerkt in de volatiliteit.

Een tweede verklaring is dat beleggers de opbrengsten niet lognormaal verdeeld achten. In plaats daarvan zouden zij een verdeling van de log-opbrengst gebruiken die niet normaal verdeeld is, maar een verdeling met een hogere kurtosis: een gepiekt midden, en dikkere staarten (in het geval van de currency opties) of een gepiekt midden, dat licht naar rechts helt en een dikkere linkerstaart heeft (voor equity opties).

Deze twee verklaringen houden met elkaar verband. Allereerst voor de currency-opties. Wanneer beleggers opties met een uitoefenkoers ver van de spot-price waarderen, verwachten ze een hogere volatiliteit. Hierdoor worden hoge winsten waarschijnlijker; het risico op waardedalingen wordt beperkt doordat de koper van de optie geen uitoefenverplichting heeft: zijn maximale verlies is de aanschafprijs van de optie. Doordat hogere winsten waarschijnlijker worden schuift de prijsfunctie in zijn geheel omhoog. Daarnaast neemt de kans dat een hogere prijs gerealiseerd wordt toe, doordat naarmate de prijs verder van de spotprice komt, men een hogere volatiliteit verwacht. De kromme van  $c$  zal dus aan beide kanten omhoog gebogen worden.

Ook in het geval van equity-opties houdt de verklaring voor de volatility smile verband met het risico dat beleggers lopen. Wanneer een aandeel in waarde daalt, stijgt de verhouding

$$\frac{\text{Eigen vermogen}}{\text{Vreemd vermogen}},$$

ook wel de hefboom van het bedrijf genaamd. Dit heeft tot gevolg dat een belegging in dit aandeel meer risicovol wordt, en dus stijgt de volatiliteit. Andersom geldt, dat wanneer het aandeel in waarde stijgt, daalt de hefboom, het risico op het aandeel daalt, en de volatiliteit daalt.

## 3.2 Breeden-Litzenberger

Om vanaf deze constatering tot een verdeling van de toekomstige aandelenprijzen  $S_T$ , en daarmee de verwachte opbrengsten, te komen, hebben we een stelling nodig die door Breeden en Litzenberger [2] geïntroduceerd werd.

**Stelling 3.1** (Breeden-Litzenberger). *Zij  $K$  de uitoefenprijs van een optie en  $c(K)$  de optieprijs als functie van  $K$ . Zij  $f(K)$  de dichtheidsfunctie van  $S_T$  geëvalueerd in  $K$ , dan wordt  $f$  gegeven door*

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} c(K) = e^{-rT} f(K). \quad (3.1)$$

Deze stelling zal hier niet bewezen worden. Voor het bewijs, zie [2].

De stelling laat het verband zien tussen de prijs van opties en de uitoefenprijs. In de verdelingsfunctie van de uitoefenprijs is te zien hoe beleggers denken dat de prijs zich op tijdstip  $T$  zal gedragen: het is dus eigenlijk de dichtheid van de koers van het aandeel op tijdstip  $T$ .

We zullen nu zien dat wanneer een verdeling  $f(K, \sigma)$  een zwaardere linkerstaart en een lichtere rechterstaart heeft dan een lognormale verdeling, met dezelfde variantie en verwachting, dit consistent is met een dalende volatilititeit  $\sigma(K)$ . Noem de dichtheidsfunctie van een aandeelprijs onder aanname van een constante volatilititeit  $\phi$  (dit is een lognormale verdeling) en de bijbehorende volatilititeit  $\sigma_\phi$ , de geïmpliceerde dichtheid  $\psi$ , en noem hier de volatilititeit  $\sigma_\psi(K)$ .

Neem een uitoefenprijs  $K_2$ , zodat  $K_2 \gg S_0 \cdot e^{rt}$ . Onder de lognormale verdeling is de kans  $P_\phi(S_T > K_2)$  groter dan onder de geïmpliceerde verdeling. De geïmpliceerde dichtheid zou dus een relatief lage prijs moeten geven. Een lage prijs geeft een relatief lage volatilititeit. Voor hoge  $K$  vinden we dus een relatief lage  $\sigma_\psi(K_2)$ .

Neem  $K_1 \ll S_0 \cdot e^{rt}$ . Omdat de geïmpliceerde dichtheid een zwaardere linkerstaart heeft dan de lognormale verdeling, geldt dus dat  $P_\phi(S_T < K_1) < P_\psi(S_T < K_1)$ . Gebruikmakend van de geïmpliceerde dichtheid vinden we dus een relatief hoge prijs voor opties met een lage uitoefenprijs, en dus een relatief hoge  $\sigma_\psi(K_1)$ .

Een illustratie van het effect van de volatility smile bij zowel equity- als currency-opties is te zien in figuur 3.2. De blauwe lijn is geproduceerd door de volatilititeit een convexe functie van  $K$  te veronderstellen, de rode met een constante volatilititeit. De volatilititeit is gekozen als een respectievelijk hyperbolische en parabolische functie van  $K$ ; zie appendix B voor de volledige programmacode en parameters.

We hebben nu een inzicht gekregen in de invloed van een niet-constante volatilititeit op de prijsfunctie, en andersom. In het volgende hoofdstuk zullen we deze relatie nader bekijken aan de hand van waargenomen data.

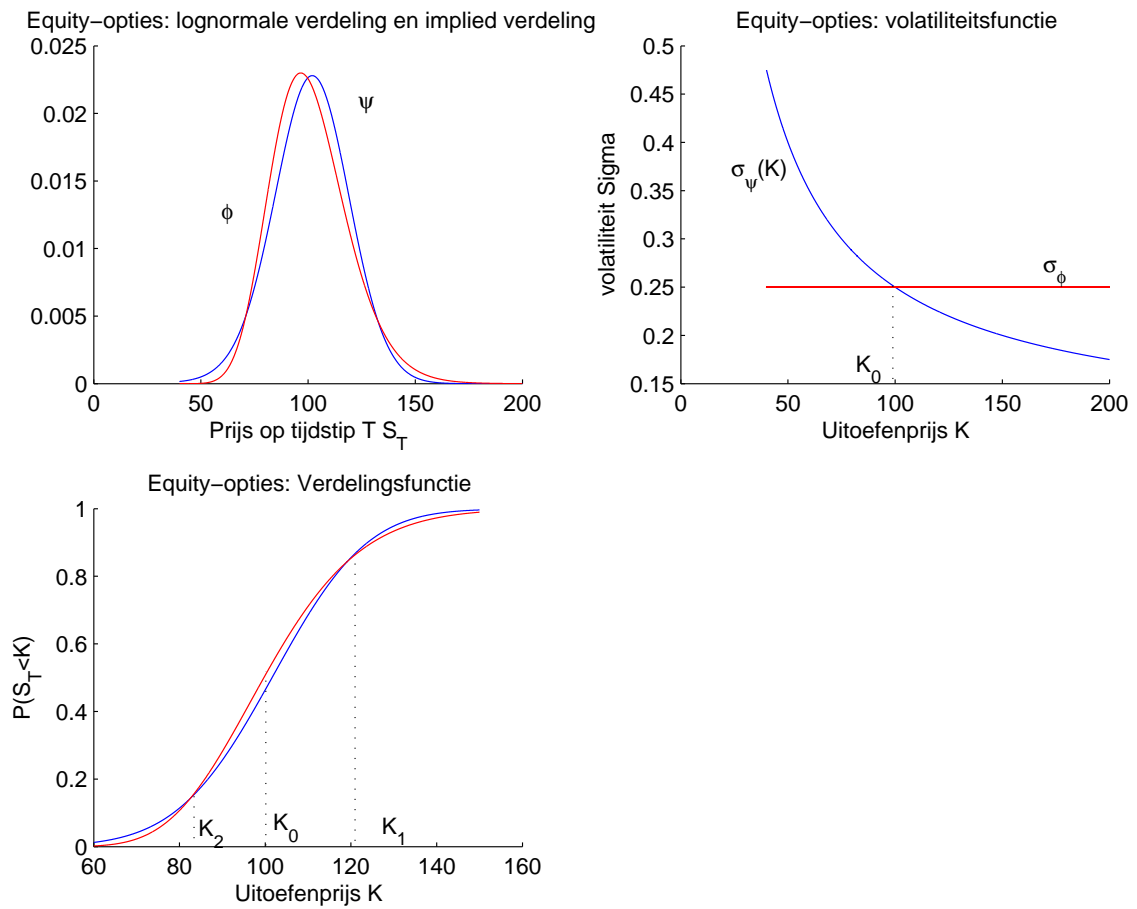
### 3.3 Koersverwachtingen

In het vorige gedeelte hebben we gezien hoe een volatility smile een afwijking van de lognormale verdeling veroorzaakt. In dit hoofdstuk gaan we kijken naar een aantal methoden waarop de uitoefenprijs-prijs functie te modelleren valt. Vervolgens maken we vanwege de stelling van Breeden-Litzenberger 3.1 bij deze functies een tweede afgeleide om de dichtheid  $f(K)$  te schatten. Deze dichtheid geeft in feite de verwachte koers op de uitoefendatum weer:

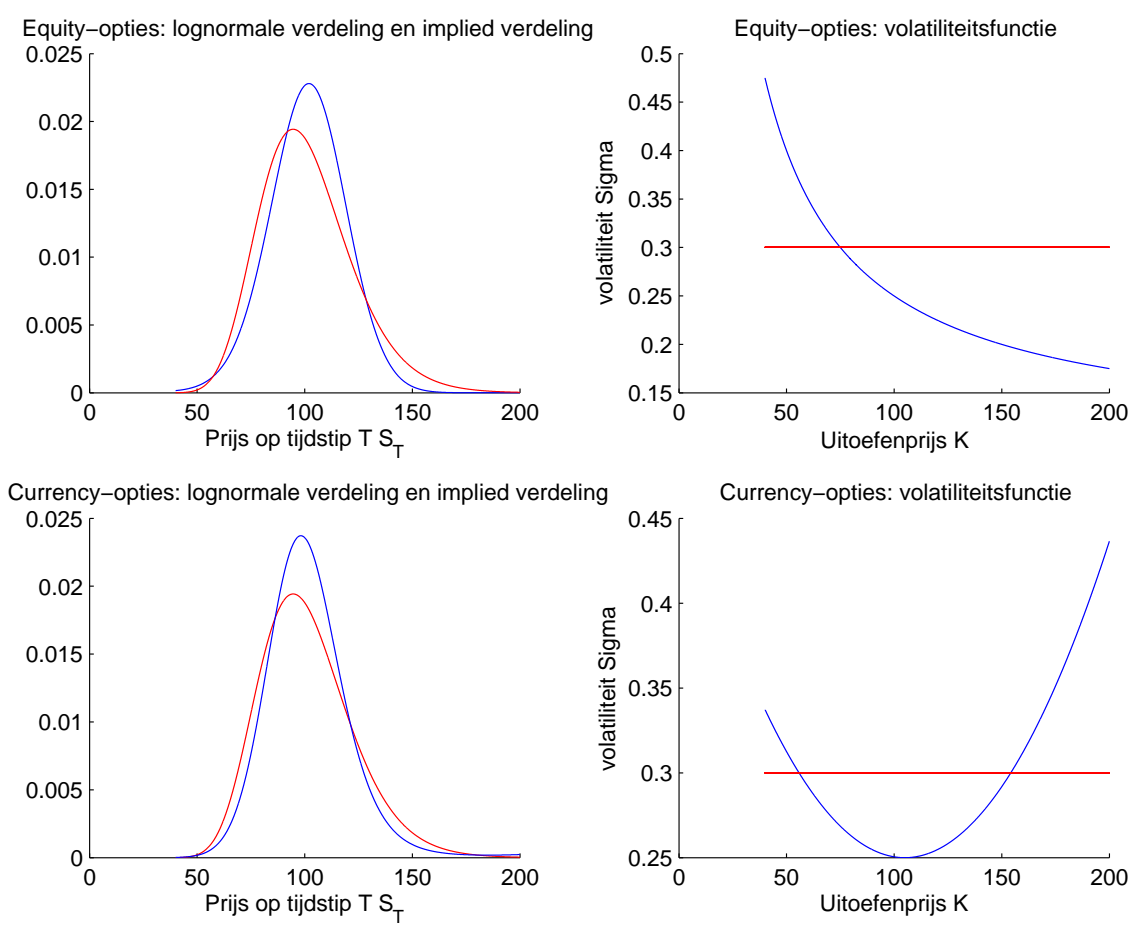
We bekijken een drietal methodes. Eerst proberen we een polynomiale schatter. Vervolgens twee methodes uit de literatuur: de Smoothed Volatility methode, geïntroduceerd door Shimko [6], en een methode waarbij de verdelingsfunctie wordt geschat als een mengsel van twee lognormale verdelingen, voorgesteld door Melick en Thomas [7].

### 3.4 Data

Als data heb ik de prijzen van callopties op IBM, aflopend op 18 juli, bij verschillende uitoefenprijzen, zoals tot stand gekomen op de markt op 1 juli. De prijs was op het moment van waarnemen



Figuur 3.1: Dichtheid, verdeling en volatility smile



Figuur 3.2: Constante en convexe volatiliteit

§ 117,29. De riskfree-rate  $r$  is afkomstig van BBA Libor, die op 26 juni voor een periode van 2 weken een rente boden van 2,6% op jaarbasis. De time-to-maturity  $T$  is het aantal handelsdagen tussen 1 en 18 juli, 12 in totaal, gedeeld door het aantal handelsdagen in 2008, 251:  $\frac{12}{251}$ .

Alle gegevens, opgesomd:

$$\begin{aligned} S_0 &= 117.29 \\ r &= 0.026 \\ T &= \frac{12}{251} \end{aligned}$$

$K$	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
$c$	60.30	48.40	49.90	44.20	40.38	34.00	23.50	19.82	15.10	10.20
$K$	115	120	125	130	135	140	145	150	155	
$c$	5.80	2.80	1.00	0.25	0.28	0.09	0.02	0.25	0.05	

Opgemerkt moet worden, dat hierbij resultaten verwacht zouden kunnen worden die beantwoorden aan de theorie voor equity-opties, omdat het om opties op een aandeel, en niet om opties op een geldhoeveelheid gaat.

### 3.5 Polynomiale schatter

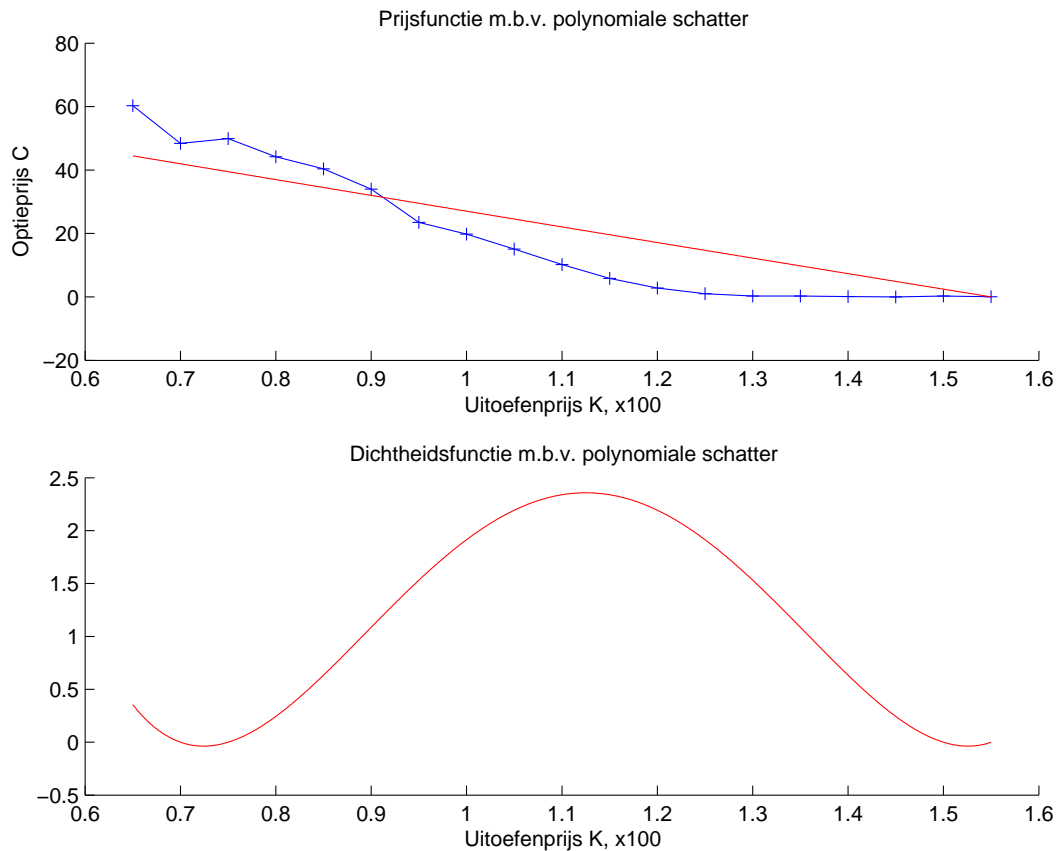
Allereerst willen we met zo min mogelijk aannames de prijsfunctie schatten. De meest voor de hand liggende keuze is het zoeken van een polynoom, dat zo goed mogelijk bij onze data past. Een voorwaarde voor het te vinden polynoom is dat zijn tweede afgeleide, vermenigvuldigd met een constante, een dichtheid is. We gebruiken hiervoor de MatLab-functie 'fmincon'. Het volledige programma is te vinden in bijlage C.1. In het programma wordt de kwadraatsom van de afstanden van de schatter tot de datapunten geminimaliseerd,

$$\hat{x}_i|_{i=0:6} = \arg \min_{x_i} \sum_{i=1}^{i=n} \left[ \sum_{p=0}^{p=6} (x_p K_i^p) - c_i \right]^2.$$

In figuur 3.3 zien we dat de poging een polynomiale schatter te vinden niet goed slaagt. Dit komt doordat de restrictie die van de tweede afgeleide een dichtheid moet maken, te veel gevraagd lijkt te zijn. Ook het criterium

$$\int_{K_1}^{K_n} f dK \leq 1$$

een verruiming ten opzichte van de eis dat over het totale gebied de integraal exact 1 moet zijn, biedt hierin geen uitkomst. Een verklaring voor het feit dat deze methode geen nuttige functie oplevert, zou gelegen kunnen zijn in het volgende. We zouden willen dat wanneer  $K \rightarrow -\infty$  of  $\infty$ ,  $f(K) \rightarrow 0$ . Met een polynoom dat slechts positief mag zijn, kan dit echter niet. Resultaten van deze methode, met als optieprijschatter een zesdegraads polynoom dat integreert tot exact 1, zijn weergegeven in figuur 3.3. Weergegeven zijn de optieprijschatter (boven) en bijbehorende dichtheidsfunctie (onder). De oorspronkelijke data is weergegeven in blauwe plusjes. Merk op de



Figuur 3.3: Polynomiale schatter

de geschatte rode lijn voor de optieprijs al laat zien dat het geen nuttige functie is; de functie van de tweede afgeleide is niet constant 0, zoals je gezien het plaatje van de optieprijsfunctie zou denken. Dat betekent dat deze functie ook geen rechte lijn is.

### 3.6 Smoothed Volatility methode

De Smoothed Volatility methode werd in 1993 voorgesteld door Shimko [6].

De data bestaat uit paren  $(K_i, c_i)$ . In plaats van direct een schatter voor deze paren te zoeken, berekenen we de bij deze paren behorende Black-Scholes implied volatility. We krijgen dus paren  $(K_i, IV_i)$ .

Nu fitten we op deze paren een schatter. Ik heb gekozen voor een parabool, zodat

$$(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) = \operatorname{argmin}_{a_1, a_2, a_3} \sum_{i=1}^{i=n} (a_1 + a_2 K_i + a_3 K_i^2 - IV_i)^2.$$

We hebben nu over het domein tussen  $K_1$  en  $K_n$  een functie  $\hat{IV}(K)$  gegeven door

$$\hat{IV}(K) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 K + \hat{a}_3 K^2.$$



Met de Black-Scholes optieprijsfunctie kunnen we nu voor het hele domein van  $K$   $\hat{c}$  te berekenen. Noem de Black-Scholes optieprijsfunctie  $c$  als in formule (2.17), en beschouw alle variabelen behalve de uitoefenprijs en de volatiliteit constant. Dan geldt

$$\hat{c} = c(K, \hat{V}).$$

We hebben nu dus een functie die paren  $(K, \hat{c})$  geeft. Deze functie is continu, omdat we  $K$  continu kunnen nemen (we zijn immers niet meer gebonden aan de data), en  $p$  is zelf continu. We kunnen nu ook een afgeleide kunnen berekenen. Ik heb dit numeriek gedaan. De resultaten staan grafisch weergegeven in figuur 3.4.

We zien dat er uit de gladdere functie  $c(K, \hat{V})$ , in rood, bijna een dichtheid volgt (de totale oppervlakte onder de grafiek in het tweede plaatje is niet 1, maar 1.12). In verschillende bronnen wordt gewezen op dergelijke onzuiverheden van deze methode. Zo zijn negatieve dichtheden niet uitgesloten, en is, zoals we hebben gezien, sommatie tot 1 niet gegarandeerd.

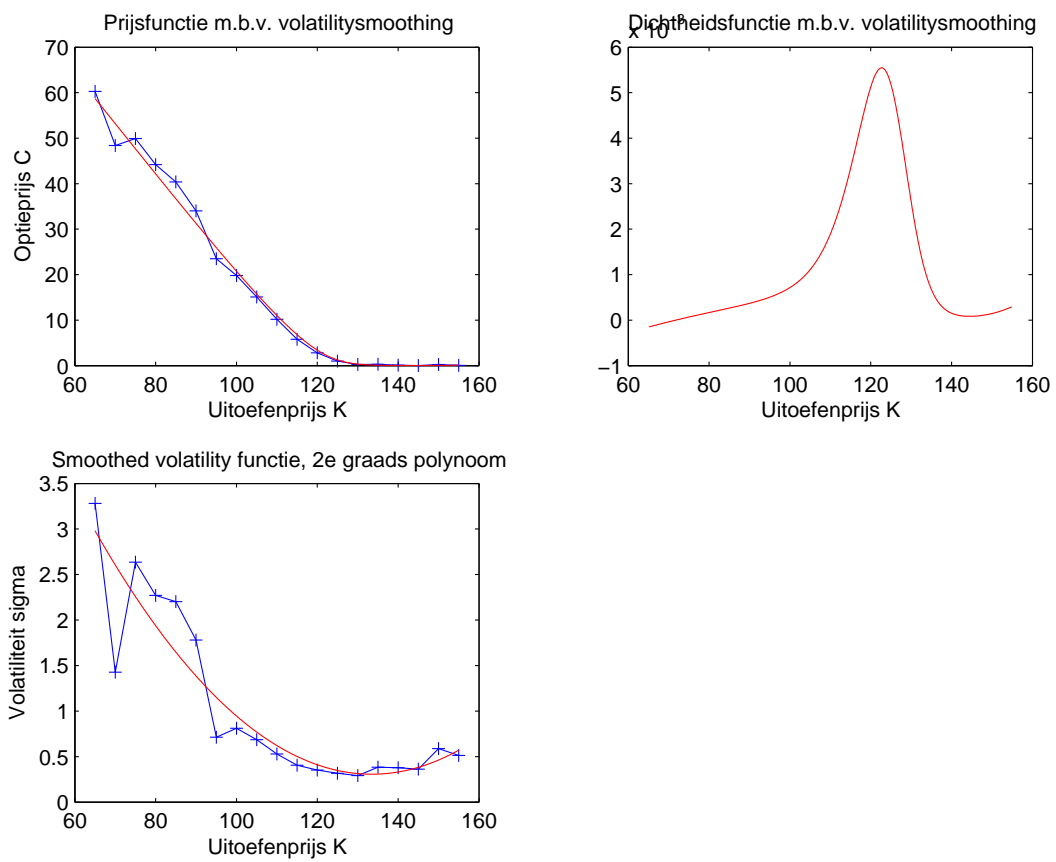
Volgens Bahra [1] worden deze dichtheden veroorzaakt door de grote waarden die de geschatte parabool voor de volatiliteit aan kan nemen, waardoor een optie met een hoge uitoefenprijs soms een hogere prijs dan een optie met een lagere uitoefenprijs kan hebben. Dit zou in strijd zijn met de aanname dat er geen arbitragewinsten (winsten zonder risico) te behalen zouden zijn, wat de negatieve kansdichtheid zou verklaren.

In dit zelfde artikel wordt een methode aangedragen om de kansmassa gelijk aan 1 te krijgen. Bij deze methode wordt het middengedeelte van de dichtheid behouden, en worden als staarten de staarten van een lognormale verdeling aan deze dichtheid geplakt. De gedachte hierachter zou kunnen zijn dat er informatie wordt gehaald uit de actief verhandelde opties, waar dus ook informatie van veel verschillende handelaren in zit. Informatie uit de minder actief verhandelde optieprijsen is minder 'getoetst', en dat wordt dus vervangen door een verdeling volgens de theorie; een lognormale verdeling.

Ik heb al deze methoden niet toegepast, maar de gebruikelijke Smoothed Volatility methode geprogrammeerd. De code van het programma om deze functie te schatten is te vinden in appendix C.2.

### 3.7 Schatters uit lognormale verdelingen

De derde methode die ik uitgewerkt heb zijn eigenlijk twee licht verschillende methoden, waarbij verondersteld wordt dat de waarde van het aandeel op tijdstip  $S_T$  verdeeld is volgens een mengsel van twee lognormale verdelingen. Vanuit de theorie is aangetoond in vergelijking (2.13) dat  $f(K)$  lognormaal verdeeld zou moeten zijn, maar onder deze aanname is de volatility smile niet te verklaren. Omdat het meestal wel een heel aardige schatting oplevert, is zo het idee ontstaan op deze lognormale verdeling te gaan variëren. Een voordeel van deze methode is dat we nu met zekerheid voor  $f(K)$  een dichtheid hebben. Een nadeel van deze aanpak is dat we niet meer niet-parametrisch werken, maar dat we al aannames doen over de verdeling. Dit, terwijl we in beginsel nu juist geïnteresseerd waren welke vorm de verdeling zou aannemen. Echter, de aanname van een mengsel van twee lognormalen zou een deel van de volatility smile, waar het ons ook om te doen was, verklaren, en een betere benadering van de prijsfunctie  $c$  geven.



Figuur 3.4: Smoothed Volatility schatter

Deze methode heb ik op twee verschillende manieren uitgewerkt. In beide methoden komt de volatility smile op een andere manier tot stand.

De beide methoden zijn een variant op de methode van Melick en Thomas, voorgesteld in 1997 [7]. Zij stellen voor om de uiteindelijke dichtheid van de aandelenkoers niet lognormaal verdeeld te schatten, maar als een mengsel van twee lognormale dichtheden. Uit de dichtheid die we invoeren, berekenen we de prijsfunctie volgens de functie

$$c(K) = e^{-rT} \int_K^{\infty} f(S_T)(S_T - K) dS_T. \quad (3.2)$$

De procedure is nu als volgt. We laten een  $f(K)$  schatten, die paren  $(K_i, \hat{c}_i)$  geeft die zo goed mogelijk bij de data, onze eerder gebruikte paren  $(K_i, c_i)$  passen; we minimaliseren de kwadraatsom van de verschillen tussen  $(K_i, \hat{c}_i)$  en  $(K_i, c_i)$ . Met deze paren  $K_i, \hat{c}_i$  berekenen we de implied volatility voor onze geschatte functie.

Het verschil tussen de twee methoden waarin deze methode uiteenvalt zit in de manier waarop we de lognormale functies schatten.

### 3.7.1 Lognormale schatters: $\mu$ en $\sigma$ vrij

In de meest algemene methode gebruiken we een mengsel van lognormalen, waarbij zowel verwachting als variantie vrij te kiezen zijn. Deze parameters kunnen geoptimaliseerd gekozen kunnen worden;

$$\ln S_T \sim p\phi[\mu_1, \sigma_1\sqrt{T}] + (1-p)\phi[\mu_2, \sigma_2\sqrt{T}] \quad (3.3)$$

We hebben nu vijf parameters waarover geoptimaliseerd kan worden:  $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2, p$ . Het hoeft hierbij niet zo te zijn dat wanneer we  $p = 1$  kiezen, we een constante implied volatility te zien krijgen; de verwachting kan immers anders zijn dan de waarde die hij volgens formule (3.5) moet hebben. We krijgen bij deze methode ook een volatility smile te zien. Dit resultaat is te zien in figuur 3.5. Hierin geeft de rode lijn een combinatie van twee lognormalen aan, en de zwarte onderbroken lijn de schatter met één onderliggende lognormale verdeling. De code van deze methode is te vinden in appendix C.3.2. Het nadeel van deze schatter is dat we met relatief veel variabelen (5) een schatter maken voor relatief weinig waarnemingen (19)

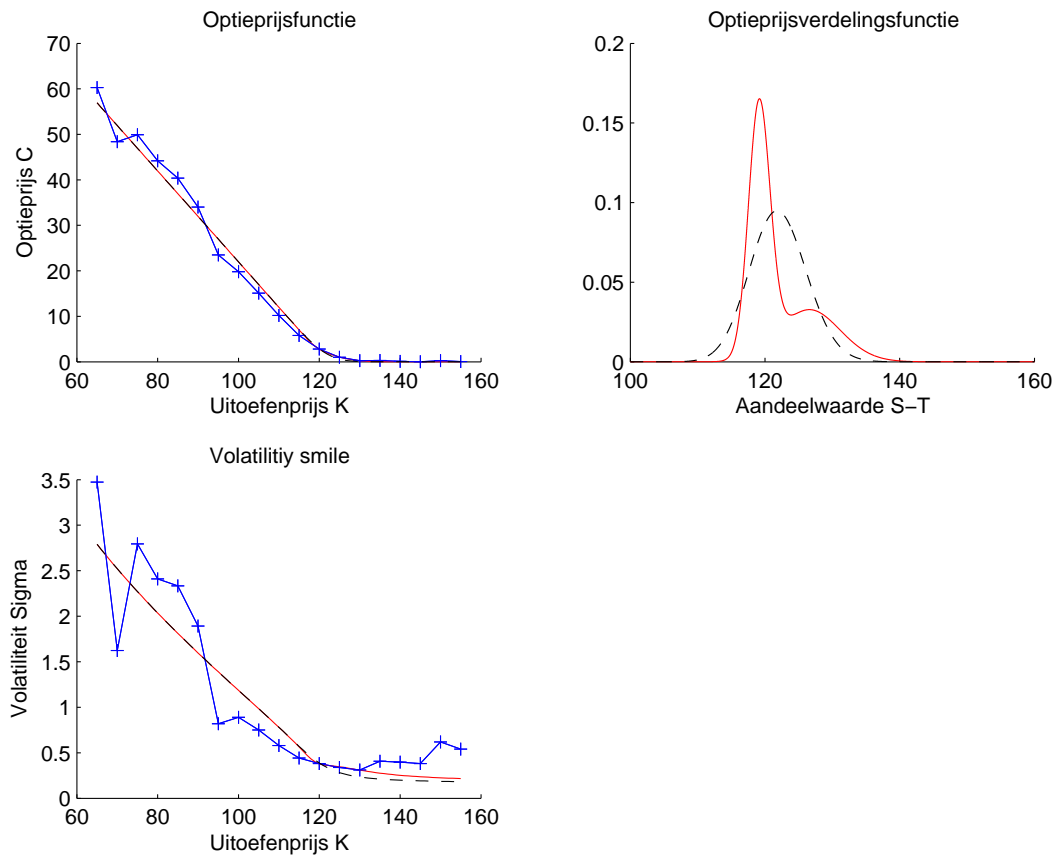
Het resultaat lijkt dit nadeel echter weg te nemen: de schatter werkt goed voor onze data. De kwadraatsom van het mengsel van twee lognormalen is

$$\sum_{i=1}^n (c_i - \hat{c}_i)^2 = 78,52.$$

Wanneer  $p = 1$  hebben we nog maar 2 parameters waarover geoptimaliseerd wordt,  $\mu_1, \sigma_1$ . Het model wordt dan

$$\ln(S_T) \sim N(\mu, \sigma\sqrt{T}). \quad (3.4)$$

Merk op dat de familie functies waarin we nu de optimale functie voor onze data zoeken een deelverzameling is van de familie functies die voldoen aan model (3.3). Zoals ook al in de grafiek te zien is, is de schatter duidelijk niet significant verschillend van het mengsel van lognormalen, al



Figuur 3.5: Lognormale schatter met  $\mu$  en  $\sigma$  vrij

is deze significantie niet getoetst. De kwadraatsom is ook vrijwel gelijk,

$$\sum_{i=1}^n (c_i - \hat{c}_i)^2 = 78,90$$

Kennelijk zijn de drie extra parameters in model (3.3) eigenlijk waardeloos. De verbetering door de aanname dat  $S_T$  is verdeeld volgens een mengsel van twee lognormale verdelingen is minimaal.

### 3.7.2 Lognormale schatters: alleen $\sigma$ vrij

In de tweede sub-methode zoeken we alleen een optimale  $\sigma$ . Volgens 2.13 zou moeten gelden dat

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \quad (3.5)$$

Wanneer we dit uitbreiden naar een mengsel van twee lognormalen, krijgen we de veronderstelling dat

$$\ln S_T \sim pN\left[\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T, \sigma_1\sqrt{T}\right] + (1-p)N\left[\ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T, \sigma_2\sqrt{T}\right] \quad (3.6)$$

Merk weer op dat ook deze familie functies een deelverzameling van de familie functies die voldoet aan formule (3.3). De enige parameters die ons hier nog vrij staan te kiezen, zijn  $\sigma_1, \sigma_2, p$ . Wanneer we hier nu  $p = 1$  kiezen, krijgen we de aanname van formule 3.5. De resultaten zijn te zien in figuur 3.6. In de figuur geeft de rode lijn een schatter uit twee lognormale verdelingen, de zwarte een schatter uit éé lognormale verdeling; dit is de oorspronkelijke aanname uit het Black-Scholes model. De blauwe plusjes geven de oorspronkelijke data aan. De code van deze methode is te vinden in appendix C.3.1.

We zien dat een optimale keuze van  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$  de volatility smile wel gedeeltelijk kan verklaren, maar lang niet helemaal. De kwadraatsom in het geval van het geschatte mengsel is

$$\sum_{i=1}^n (c_i - \hat{c}_i)^2 = 278.$$

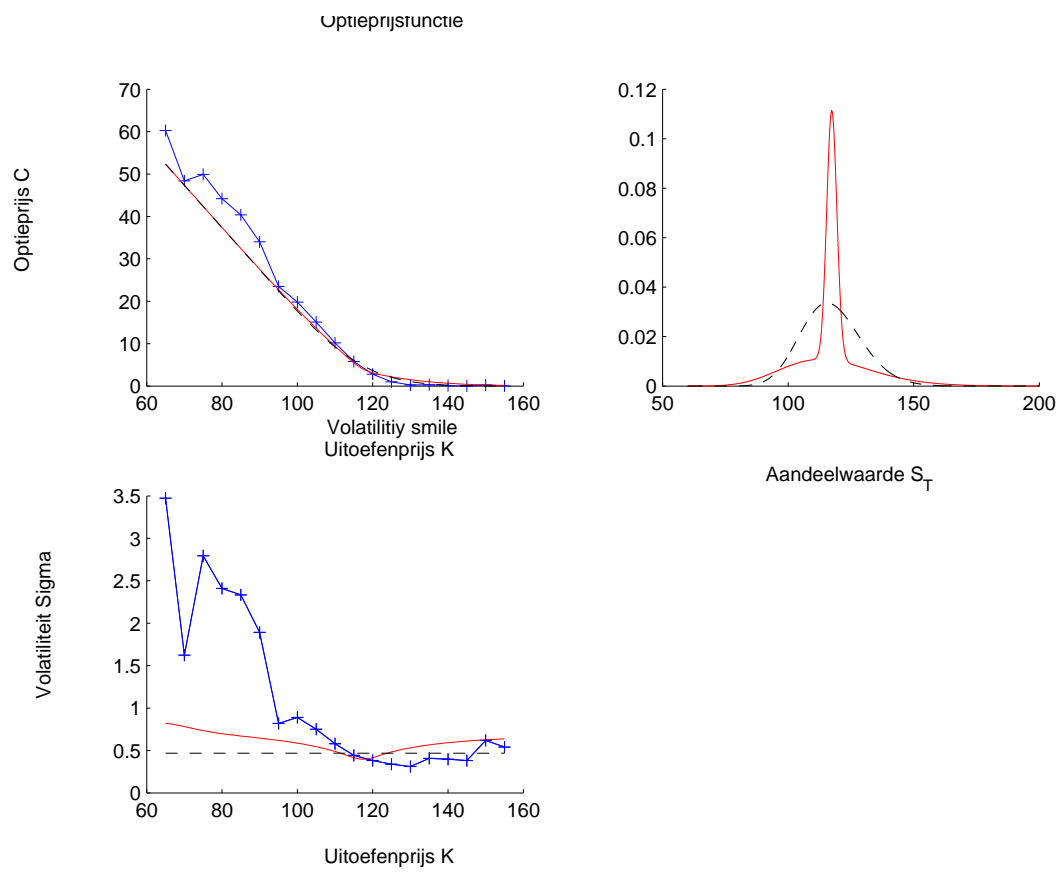
In het geval van de enkele lognormale verdeling, wanneer  $p = 1$  geldt dat

$$\sum_{i=1}^n (c_i - \hat{c}_i)^2 = 284$$

De aanname van een mengsel levert dus ook hier slechts een minieme verbetering. Deze verbetering lijkt gezien het plaatje niet significant. De significantie heb ik echter niet formeel getoetst. Het effect op de volatility smile en de vorm van de dichtheid is echter het meest interessant.

Wanneer we die hier gevonden waarden voor de kwadraatsom vergelijken met de waarden die we vonden wanneer we zowel  $\mu$  als  $\sigma$  vrij lieten, valt op dat die laatste waarden significant lager zijn. Ook hier heb ik op significantie niet getoetst, maar zowel het plaatje van volatility smile en prijsfunctie, als het grote verschil tussen de kwadraatsommen suggereert wel dat dit een significant verschil is. Opmerkelijk is wel dat kennelijk een goed (zelfs beter) passende functie gevonden kan worden, die een bij de data passende volatility smile laat zien, wanneer we de verwachting van de verdeling vrij laten, in plaats deze te kiezen volgens het theoretisch model. De optimale  $\hat{\mu}$  van de verdeling waarin we  $\mu$  en  $\sigma$  vrij lieten, ligt een stuk hoger dan wanneer we  $\mu$  zouden berekenen op basis van de theorie;  $\hat{\mu} \approx 120$  tegen  $\mu \approx 117.50$ . Dit zou kunnen komen omdat de prijzen op het moment van waarnemen niet gebaseerd waren op de toenmalige prijs, maar op de prijs van bijvoorbeeld een dag geleden; toen was de prijs van het aandeel ongeveer \$ 119.

Het lijkt er echter op dat er helemaal geen optieprijs is vastgesteld volgens het Black-Scholes model, maar volgens een model dat een hogere  $\mu$  in rekening brengt, met een verschil wat in ons geval oploopt tot wel \$2,50. Dit zou bijvoorbeeld gebruikt kunnen worden om risico af te dekken, of te anticiperen op nieuws wat op dat moment nog niet algemeen bekend was in de markt.



Figuur 3.6: Lognormale schatter, alleen  $\sigma$  variabel.

### 3.8 Conclusie

In de voorgaande pagina's hebben we een aantal methoden gezien, die elk hun voor en nadelen hebben. De twee methoden die het meest het vergelijken waard zijn, zijn de schatters die gebruikmaken van lognormale verdelingen, en de smoothed volatility schatter. Ik zet nog kort een aantal van de resultaten van deze schatters op een rijtje.

De smoothed-volatility schatter heeft als voordeel dat de geschatte functie erg dicht bij de oorspronkelijke data blijft. Daarnaast is dit schatter die niet direct parametrisch werkt, maar alleen parametrisch in het schatten van de volatilititeit. Met een klein aantal aannamen krijgen we dus een heel aardig resultaat. Nadeel is wel, dat er niet gegarandeerd een dichtheid uit de tweede afgeleide van de prijsfunctie komt. Dit vraagt om wat voorzichtigheid, maar zou gerepareerd kunnen worden doormiddel van een aantal aanvullende technieken.

Over de lognormale schatters valt allereerst op te merken dat de verbetering van één lognormale verdeling als onderliggende verdelingsfunctie naar een mengsel van twee lognormale verdelingsfuncties in beide gevallen miniem is, althans in het schatten van de prijsfunctie.

De methode waarbij we alleen  $\sigma_1, \sigma_2$  van het mengsel schatten, laat zien dat een gepiekttere dichtheid, met iets zwaardere linkerstaart, een volatility smile kan laten zien. De vorm van deze smile is echter niet echt helder verklarend voor de waargenomen volatility smile. Het mengsel legt echter wel iets meer gewicht naar rechts, wat volgens de theorie ook de verwachting was.

De methode waarin we zowel  $\mu_1, \mu_2$  als  $\sigma_1, \sigma_2$  van het mengsel schatten, geeft een resultaat waarbij de prijsfunctie erg dicht bij de data ligt, en die veel beter lijkt te werken dan de methode waarin we alleen  $\sigma_1, \sigma_2$  schatten. Ook de volatility smile lijkt erg op de smile die de data laat zien, al neemt de afstand wel toe in dat gedeelte van de grafiek, waar de uitoefenprijs hoger ligt dan de spotprice. In deze methode zou het ook nog nader onderzoek waard zijn, te kijken welk verband er zou kunnen zijn tussen  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ , de geschatte verwachtingen van de verdelingen in het mengsel, en de parameters die waargenomen zijn. Opvallend is hierbij, dat deze grafiek een verdeling laat zien die, in tegenstelling tot de  $\sigma$ -schatter, gepiekt is met een zwaardere rechterstaart, terwijl voor equity opties een zwaardere linkerstaart werd verwacht.

De beste methode om een optieprijsfunctie te benaderen en de volatility smile goed in beeld te krijgen, is dus volgens mijn resultaten model 3.4,

$$\ln(S_T) \sim N(\mu, \sigma\sqrt{(T)})$$

## Bijlage A

# Code realisatie Aandelenkoers

```
clf
sn=10
t=0:0.001:1;
mu= 0.8;
sig= .2;
z= normrnd(0,1,1,1001);
ds= mu*0.001 + sig.*z*sqrt(0.001);
s(1)=sn;
ds(1)=0;

for i=2:1001
    s(i)=(ds(i)+1)*s(i-1);
end

hold on
plot(t,s,'r')
plot(t,sn*exp(mu*t),'b')

hold off
```



## Bijlage B

# Code volatility smile

```
function VolatilityplotterapendixB

clf;
sn=100;
K=40:0.01:200;
diffK=40.01:0.01:199.99;
T=0.5;
r=0.025;

sig1=0.1+15./K;

[c,k]=prijsberekenen(K,r,sig1,T,sn);

figure(1);
title('Lognormale verdeling en implied
verdeling en hun bijbehorende volatility-verloop')
subplot(2,2,1)
title('Equity-opties: lognormale verdeling en implied verdeling');
hold on;
plot(diffK,exp(T*r)*k,'b')

sig2=0.3;
[c2,k2]=prijsberekenen(K,r,sig2,T,sn);
sum(k2);
plot(diffK,exp(T*r)*k2,'r')
xlabel('Prijs op tijdstip T S_T')
hold off;
subplot(2,2,2)
title('Equity-opties: volatilitateitsfunctie')
hold on;
```

```

xlabel('Uitoefenprijs K')
ylabel('volatiliteit Sigma')
plot(K,sig1,'b');
plot(K,sig2,'r');
hold off;

sig3=(1/220^2)*(K-105).^2+0.25;
[c3,k3]=prijsberekenen(K,r,sig3,T,sn);

subplot(2,2,3)
title('Currency-opties: lognormale verdeling en implied verdeling');
hold on;
plot(diffK,exp(T*r)*k2,'r');
plot(diffK,exp(T*r)*k3,'b');
xlabel('Prijs op tijdstip T S_T')
hold off;
subplot(2,2,4)
title('Currency-opties: volatiliteitsfunctie')
hold on;
plot(K,sig3,'b');
plot(K,sig2,'r');
xlabel('Uitoefenprijs K')
ylabel('volatiliteit Sigma')

function [c,k]=prijsberekenen(K,r,sig,T,sn)
de = (log(sn./K) + (r + sig.^2/2)*T)./(sig*sqrt(T));
dt = de - sig * sqrt(T);
c = sn*normcdf(de,0,1) - K*exp(-r*T).*normcdf(dt,0,1);
k=diff(c,2)/0.01;

```

# Bijlage C

## Schatters

### C.1 Code Polynomiale schatter

```
function Totaalpakket
%Programma om een polynomiale schatting voor het optie-prijs probleem te
%maken

og=65/100; %ondergrens van de waarneming, gedeeld door factor 100
bg=155/100; %bovengrens van de waarneming, gedeeld door factor 100

IBM1=((65:5:155)/100).' ; %uitoefenprijzen van de waarneming
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;
      15.10;10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05].';
%optieprijsen van de waarneming

%aanroepen van functie die matrix met restricties maakt
[m,m2,A,Ae]=Matrix2(1,og,bg);

%maken van restrictiematrixen
x0=[0 0 0 0 0 0 0];
b=zeros(m+m2,1);
Be = [exp(-0.026*13/251)]; %factor voor rente

%aanroepen minimaliseerfunctie en te minimaliseren functie
options = optimset('MaxFunEvals',10000000,'MaxIter',10000);
[x fval]=fmincon(@fun,x0,-A,b,Ae,Be,-Inf,Inf,[],options);

%plotten
plotterIBM(x,IBM1,IBM2,og,bg);
IBMdiffplot(x,og,bg);
```

```

function [m,m2,A,Ae] = Matrix2(pol,og,bg)
%functie maakt restrictiematrices

%restrictie: 2e afgeleide groter dan 0 (want dichtheid)
p=og:0.05:bg;
m=length(p);
for j=1:m
    for i=1:7
        k=i-pol;
        A(j,i)=k*(k-1)*p(j)^(k-2);
    end;
end;

%restrictie: waarden groter dan 0, prijzen (negatief niet zinnig)
p2=og:0.05:bg;
m2=length(p2);
for j=m+1:m+m2
    for i=1:7
        k=i-pol;
        A(j,i)=p(j-m)^k;
    end;
end;

%restrictie: integraal van tweede afgeleide over gebied gelijk aan
%1*rentefactor
for i=1:7
    k=i-pol;
    Ae(1,i)=(k)*bg^(k-1)-k*og^(k-1);
end;

function plotterIBM(x,IBM1,IBM2,og,bg)
%plotten uitoefenprijis-optieprijisfunctie

p=og:0.001:bg;
m=length(p);

k=1;

%doorrekenen polynoom
for i=1:m
    fup(i)= (dot([p(i)^(-1+k) p(i)^(0+k) p(i)^(1+k)
    p(i)^(2+k) p(i)^(3+k) p(i)^(4+k) p(i)^(5+k)],x));
end;

```

```

%plotten
figure(1);
subplot(2,1,1);
hold on;
plot(IBM1,IBM2,'-+b')
plot(p,fup,'r')
hold off;
xlabel('Uitoefenprijs K, x100');
ylabel('Optieprijs C');
title('Prijsfunctie m.b.v. polynomiale schatter');

function IBMdiffplot(x,og,bg)
%plotter van tweede afgeleide
p2=og:0.001:bg;
m=length(p2);

k=-1;

difr=[0 0 2 6 12 20 30]; %vermenigvuldigt x-waarden met
de factoren van de tweede afgeleiden
dif2=difr.*x;

%doorrekenen polynoom
for i=1:m
fup2(i)= exp(0.026*13/251)*dot([p2(i)^(-1+k) p2(i)^(0+k)
p2(i)^(1+k) p2(i)^(2+k) p2(i)^(3+k) p2(i)^(4+k) p2(i)^(5+k)],dif2);
end;

%plotten
figure(1);
subplot(2,1,2);
hold on;
plot(p2,fup2,'r')
hold off;
xlabel('Uitoefenprijs K, x100');
title('Dichtheidsfunctie m.b.v. polynomiale schatter');

kurtosis(fup2)
skewness(fup2)
fupsom=sum(fup2)*0.001

```

## C.2 Code schatter Smoothed Volatility

```
function SmoothingTotaalpakket

og=65;
bg=155;
stap=0.1;
p=og:stap:bg;
p2=og+stap:stap:bg-stap;

IBM1=(65:5:155).';
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;
      15.10;10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05].';
IBM2smooth=Impliedvol(p).';

figure(1);
subplot(2,2,1)

IBM2plot=plot(IBM1,IBM2,'+-b',p,IBM2smooth,'r');
xlabel('Uitoefenprijs K');
ylabel('Optieprijs C');
title('Prijsfunctie m.b.v. volatilitysmoothing');

subplot(2,2,2);
plot(p2,(exp(0.026*13/251)*diff(IBM2smooth,2)/0.01),'r');
xlabel('Uitoefenprijs K');
title('Dichtheidsfunctie m.b.v. volatilitysmoothing');

som=(exp(0.026*13/251)*diff(IBM2smooth,2)/0.01);
sum(som)*0.1;
mean(som);

function [smoothprice]=Impliedvol(p)
%schatten van functie voor volatilititeit met paraboel

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
      10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05].';
options=optimset;

m=length(IBM2);
n=length(p);
```

```

%berekenen van implied volatility
for i=1:m
    vol(i)=blsimpv(117.29,IBM1(i),0.026,13/251,IBM2(i));
end;

global vol;

%minimaliseren van functie
x0=[0 0 0];
[x fval]=fmincon(@fun,x0,[],[],[],[],-inf,inf,[],options);

Volplot(x,IBM1,vol); %plotten
smoothvol=polynoom(p,x); %berekenen van vol. behorend bij waarnemingspunten

%terugrekenen van optieprijsen uit nieuwe volatilititeit
for i=1:n
    [CallPrice(i),PutPrice(i)]=blsprice(117.29,p(i),0.026,13/251,smoothvol(i));
end;

%teruggeven van nieuwe prijzen
smoothprice=CallPrice;

%subfunctie
function f=fun(x)
global vol;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;
    15.10;10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05].';

f1= polynoom(IBM1,x);
f2=vol;

% f is de kwadratensom; de te minimaliseren functie

f=sqrt(dot((f1-f2),(f1-f2)));

%construeren van de polynomiale schatter; subfunctie
function volsmooth=Volplot(x,IBM1,vol)

```

```

p=65:0.1:155;

fup=polynoom(p,x);

figure(1);
subplot(2,2,3);
plot(IBM1,vol,'-+b',p,fup,'r');
xlabel('Uitoefenprijs K');
ylabel('Volatiliteit sigma');
title('Smoothed volatility functie, 2e graads polynoom');

%subfunctie polynoom
function fup=polynoom(p,x)
m=length(p);

for i=1:m
fup(i)= (dot([1 p(i) p(i)^2],x));
end;

```

## C.3 Code dubbel-lognormale schatter

### C.3.1 Alleen $\sigma$ vrij

```

function [x,int]=Logarschatter2
%functie die 2 logaritmen gebruikt als schatter voor de verdelingsfunctie
%f(St)
clear;
set(gcf,'DefaultLineLineWidth',1);

options = optimset('MaxFunEvals',10000);
x0=[0.076 0.69 0.51];
x1=[0.467 0 1]; %blijken snelle startwaarden te zijn
IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';

[x,fval]=fminsearch(@fun2,x0) %minimaliseren
[x2,fval2]=fminsearch(@fun1,x1) %minimaliseren

kans=x(3);

%plotten
figure(2);

```



```

subplot(2,2,1);
hold on;
kleur='r';
int=prijsplotter(x,IBM1,IBM2,kans,kleur);
kleur='--k';
int2=prijsplotterlogn(x2,kleur);

subplot(2,2,2);
kleur='r';
pdfplotter(x,kans,kleur);
kleur='--k';
pdfplotter(x2,1,kleur);

subplot(2,2,3);
kleur='r';
LogImpliedvol(int,kans,kleur);
kleur='--k';
LogImpliedvol(int2,1,kleur);

function int=prijsplotter(x,IBM1,IBM2,kans,kleur) %plotter
p=65:1:155;
n=length(p);
stap=0.01;
bg=200;

%functie in meer detail doorrekenen voor betere plot
for m=1:n
    xw=p(m):stap:bg;
    int(m)=exp(-0.026*12/251)*sum((logschatter(x,xw,kans)).*(xw-p(m))*stap);
end;
int;

hold on;
plot(IBM1,IBM2,'-+b');
plot(p,int,kleur);
xlabel('Uitoefenprijs K');
ylabel('Optieprijs C');
title('Optieprijsfunctie');

function int=prijsplotterlogn(x,kleur)
p=65:155;

```

```

int=blsprice(117.29,p,0.026,12/251,x(1));
plot(p,int,kleur);
hold off;

function pdfplotter(x,kans,kleur) %plotter van tweede afgeleide
p2=60:0.001:200;

pdf=logschatter(x,p2,kans);
sum(pdf)*0.001
hold on;
plot(p2,pdf,kleur);
xlabel('Aandeelwaarde S-T');
title('Optieprijverdelingsfunctie');
hold off;

function LogImpliedvol(int,kans,kleur)
%berekenen van Implied Volatility van geschatte functie
p=65:155;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';
n=length(IBM1);

r=0.026;
t=12/251;

%berekenen Implied Vol. uit data
for i=1:n
    vol(i)=blsimpv(117.29,IBM1(i),r,t,IBM2(i));
end;

hold on;
plot(IBM1,vol,'-+b');

%berekenen Implied Vol. uit geschatte functie
for i=1:91
    imp(i)=blsimpv(117.29,p(i),r,t,int(i));
end;

%plotten

plot(p,imp,kleur);

```

```

xlabel('Uitoefenprijs K');
ylabel('Volatiliteit Sigma');
title('Volatilitiy smile')
hold off;

function f=fun1(x)

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';

%per stap integreren van X tot inf
int2=blsprice(117.29,IBM1,0.026,12/251,x(1));
%doelfunctie; kwadraatsom
f=dot((IBM2-int2),(IBM2-int2));

function f=fun2(x)

stap=0.1; %integratiestap voor Riemannsom
bg=200;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';
n=length(IBM2);
kans=x(3);

%per stap integreren van X tot inf
for m=1:n
    xw=IBM1(m):stap:bg;
    int(m)=exp(-0.026*12/251)*sum(logschatter(x,xw,kans).*(xw-IBM1(m))*stap);
end;

%doelfunctie; kwadraatsom
f=dot((IBM2-int),(IBM2-int));

function fup=logschatter(x,p,kans) %subfunctie

fup= kans*lognpdf(p,log(117.29)+(0.026-0.5*x(1)^2)
*12/251,x(1)*sqrt(12/251)) + (1-kans)*lognpdf(p,log(117.29)
+(0.026-0.5*x(2)^2)*12/251,x(2)*sqrt(12/251));

```

### C.3.2 $\mu$ en $\sigma$ vrij

```
function [x,int]=Logarschatter4
%functie die 2 logaritmen gebruikt als schatter voor de verdelingsfunctie
%f(St)
clear;
set(gcf,'DefaultLineLineWidth',1);

options = optimset('MaxFunEvals',10000);
x0=[4.8 0.042 4.8 0.013 0.44];
x1=[4.8 0.042 1] %blijken snelle startwaarden te zijn
IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';

[x,fval]=fminsearch(@fun4,x0) %minimaliseren
[x2,fval]=fminsearch(@fun4b,x1) %minimaliseren
x2=[x2 1 1]
kans=x(5);

%plotten
figure(2);
subplot(2,2,1);
hold on;
kleur='r';
int=prijsplotter(x,IBM1,IBM2,kans,kleur);
kleur='--k';
int2=prijsplotter(x2,IBM1,IBM2,1,kleur);
int
int2

subplot(2,2,2);
kleur='r';
pdfplotter(x,kans,IBM2,kleur);
kleur='--k';
pdfplotter(x2,1,IBM2,kleur);

subplot(2,2,3);
kleur='r';
LogImpliedvol(int,kans,kleur);
kleur='--k';
LogImpliedvol(int2,1,kleur);
```

```

function int=prijsplotter(x,IBM1,IBM2,kans,kleur) %plotter
p=65:1:155;
n=length(p);
stap=0.1;
bg=200;

%functie in meer detail doorrekenen voor betere plot
for m=1:n
    xw=p(m):stap:bg;
    int(m)=exp(-0.026*12/251)*sum(
(logschatter(x,xw,kans)).*(xw-p(m))*stap);
end;

hold on;
plot(IBM1,IBM2,'-+b');
plot(p,int,kleur);
xlabel('Uitoefenprijs K');
ylabel('Optieprijs C');
title('Optieprijsfunctie')
hold off;

function pdfplotter(x,kans,IBM2,kleur) %plotter van tweede afgeleide
p2=100:0.001:160;

pdf=logschatter(x,p2,kans);
sum(pdf)*0.001
hold on;
plot(p2,pdf,kleur);
xlabel('Aandeelwaarde S-T');
title('Optieprijsverdelingsfunctie')
hold off;

function LogImpliedvol(int,kans,kleur)
%berekenen van Implied Volatility van geschatte functie
p=65:155;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';
n=length(IBM1);

r=0.026;
t=12/251;

```

```

%berekenen Implied Vol. uit data
for i=1:n
    vol(i)=blsimpv(117.29,IBM1(i),r,t,IBM2(i));
end;

%berekenen Implied Vol. uit geschatte functie
for i=1:91
    imp(i)=blsimpv(117.29,p(i),r,t,int(i));
end;

%plotten
hold on;
plot(IBM1,vol,'-+b');
plot(p,imp,kleur);
xlabel('Uit oefenprijs K');
ylabel('Volatiliteit Sigma');
title('Volatility smile')
hold off;

function f=fun4(x)

stap=0.1; %integratiestap voor Riemansom
bg=200;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05].';
n=length(IBM2);
kans=x(5);
%per stap integreren van X tot inf
for m=1:n
    xw=IBM1(m):stap:bg;
    int(m)=exp(-0.026*12/251)*sum(logschatter
(x,xw,kans).*(xw-IBM1(m))*stap);
end;

%doelfunctie; kwadraatsom
f=dot((IBM2-int),(IBM2-int));

function f=fun4b(x)

```

```

stap=0.1; %integratiestap voor Riemansom
bg=200;
x(4)=1;
x(5)=1;

IBM1=(65:5:155);
IBM2=[60.3;48.4;49.9;44.2;40.38;34;23.5;19.82;15.10;
10.2;5.8;2.8;1;0.25;0.28;0.09;0.02;0.25;0.05] .';
n=length(IBM2);

%per stap integreren van X tot inf
for m=1:n
    xw=IBM1(m):stap:bg;
    int(m)=exp(-0.026*12/251)*sum(logschatter(x,xw,1).*(xw-IBM1(m))*stap);
end;

%doelfunctie; kwadraatsom
f=dot((IBM2-int),(IBM2-int));

function fup=logschatter(x,p,kans) %subfunctie

fup=kans*lognpdf(p,x(1),x(2)) + (1-kans)*(lognpdf(p,x(3),x(4)));

```

# Bibliografie

- [1] Bhupinder Bahra. Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application. Technical report, Bank of England, 1997.
- [2] D.T. Breeden en R.H. Litzenberger. Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, Vol. 51, no.4, 1978.
- [3] M. Scholes F. Black. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, Vol. 81:637–654, 1973.
- [4] John C. Hull. *Options, Futures and other Derivatives, 6th edition*. Pearson Prentice Hall, 2006.
- [5] K. Itô. On stochastic differential equations. *Memoirs of the American Mathematical Society*, pages 1–51, 1951.
- [6] D. Shimko. Bounds of probability. *Risk*, Vol. 6:33–37, 1993.
- [7] Charles P. Thomas William R. Melick. Recovering an asset's implied pdf from option prices: An application to crude oil during the gulf crisis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 32, no.1:91–115, 1997.



