St Petersburg Paradox

Stolwijk, A.

Bachelorscriptie
St Petersburg Paradox

A. Stolwijk

Begeleider: Dr E.W. van Zwet

26 augustus 2007

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Het St Petersburg Spel en de paradox

1.1 Het Spel

Bij de St Petersburg paradox gaat het om een gokspel. Paul gooit net zo lang met een eerlijke munt totdat hij kop heeft gegooid. Als Paul direct kop gooit, krijgt hij 2 dukaten van Peter. Voor iedere keer dat Paul munt gooit voordat hij uiteindelijk kop heeft gegooid, verdubbelt dit bedrag. Nu hebben we dus dat

Uitkomst	Uitkering	kans
K	2	$\frac{1}{2}$
MK	4	$\frac{1}{4}$
MMK	8	$\frac{1}{8}$
MMMK	16	$\frac{1}{16}$
MMMMK	32	$\frac{1}{32}$
MMMMMK	64	$\frac{1}{64}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

De vraag is nu wat een eerlijke inleg is, een inleg waar zowel Paul als Peter tevreden mee kunnen zijn, om dit spel te spelen. Als we kijken naar het gewonnen bedrag krijgen we

$$P(X = 2^k) = \frac{1}{2^k} \text{ voor } k \epsilon \mathbb{N}_{>0}$$

en dus is het verwachte gewonnen bedrag

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k P(X = 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \infty$$

1.2 Het Probleem

De verwachte winst is dan *het verwachte gewonnen bedrag - de inleg*. Voor iedere eindige inleg is de verwachte winst oneindig. Alleen zul je vermoedelijk erg weinig mensen vinden die meer dan 100 dukaten willen inleggen voor dit spel. Zo droeg Daniel Bernouilli de paradox voor in

1738 aan de Keizerlijke Academie der Wetenschappen te Sint Petersburg.

Ook geldt dat het spel altijd eindig is. De kans dat we oneindig vaak munt gooien, is 0. Dus winnen we altijd een eindig bedrag. Een eerlijke inleg is op het eerste gezicht dus niet te bedenken.

In deze scriptie ga ik verschillende aspecten van het St Petersburg spel behandelen. Ik ga proberen een inleg te vinden waarmee zowel Peter als Paul tevreden zijn. Dit ga ik doen door te kijken naar de limiet voor $n \to \infty$ voor het gemiddelde $\overline{X_n}$ van n St Petersburg variabelen X_i, en de limietverdeling die hierbij hoort.

Ook kijk ik naar gokstrategieën voor meerdere St Petersburg spel spelers. Doordat de verwachting van een St Petersburg spel oneindig is, is de uitkomst hiervan erg verrassend. Dit ga ik doen met twee *trucjes* uit de kansrekening: *Koppelingen* en de *Vergelijkingsoperator*.

Ik begin echter met het geven van een aantal bekende en voor de hand liggende argumenten, waarom Paul een grote inleg niet interessant zal vinden.

Hoofdstuk 2

Oplossingen van het probleem

2.1 Verwaarlozen van kleine kansen

De kans dat Paul een bedrag x (met $x \epsilon \{2, 4, 8, ...\}$) wint, is $\frac{1}{x}$. Als deze x erg groot is, is de kans dat Paul dit bedrag wint erg klein. De gebeurtenis dat Paul een heel groot bedrag wint is dus heel zeldzaam. Stel Paul verwaarloost zeldzame gebeurtenissen. Als Paul bijvoorbeeld gebeurtenissen met kans kleiner dan $\frac{1}{1000}$ verwaarloost, dan geldt

$$E(XI\{X < 1000\}) = \sum_{k=1}^{9} 2^k P(X = 2^k) = 9$$

2.1.1 Ieder vermogen is eindig

Paul kan natuurlijk nooit een oneindig bedrag uitgekeerd krijgen. Als bijvoorbeeld het nationaal product van Amerika garant zou staan voor het spel, dus Paul kan maximaal 11750 miljard dollar winnen, zakt de verwachte opbrengst naar

$$E(X \min(X, 11750 \cdot 10^9)) = \sum_{k=1}^{43} 2^k P(X = 2^k) + 11750 \cdot 10^9 \frac{1}{2^{43}} = 44$$

2.2 Het nut van de winst

Paul kan ook kijken naar het nut van zijn winst. Hoe meer winst, hoe minder het extra gewonnen bedrag aan waarde voor hem heeft. Dit fenomeen staat in de economie bekend als de *wet van het afnemend grensnut*. Laat $u(x)$ een concave functie zijn die het nut van de winst beschrijft.

Neem bijvoorbeeld $u(x) = \sqrt{x}$ als nutsfunctie. Dan

$$E(u(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} u(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}P(X = k) = 2 + \sqrt{2}$$

Hoofdstuk 3

Een eerlijke inleg

We weten, via de wet van de grote aantallen, dat het gemiddelde $\overline{X_n}$ van een rij onafhankelijke stochastische variabelen met dezelfde kansverdeling convergeert naar de gemeenschappelijke verwachtingswaarde $E(X)$.

We hebben echter dat $E(X) = \infty$, en ook dat de variantie, $Var(X) = E((X - E(X))^2)$ oneindig is. Daarom lijkt er over $\overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$ op het eerste gezicht weinig te zeggen. Daarom onderzoeken we of we toch iets meer over deze $\overline{X_n}$ te weten kunnen komen, zodat het spel misschien toch interessant wordt voor zowel Paul als Peter. Dit doen we eerst met het begrip *Eerlijke Spellen*.

3.1 Eerlijke spellen

3.1.1 De theorie achter eerlijke spellen

Laat e_n de inleg voor een spel en laat $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de som van de gewonnen bedragen in n onafhankelijke spellen. De totale winst is nu $S_n - ne_n$. Als we nu zorgen dat het verschil $|S_n - ne_n|$, dus de totale winst of het totale verlies, met hele grote kans klein is in vergelijking met n, dan kunnen we e_n als inleg voor een spelletje vragen. Dus

Definitie 1. Laat S_n de winst over n onafhankelijke spellen en ne_n de totale inleg hiervoor. We noemen een spel eerlijk als geldt dat voor iedere $\varepsilon, \delta > 0$ er een N_ϵ is zodat voor iedere $n > N_\epsilon$ geldt:

$$P\{|\frac{S_n}{ne_n} - 1| > \epsilon\} < \delta$$

3.1.2 Een eerlijk St Petersburg spel?

Als we een inleg e_n kunnen vinden zodat het St Petersburg spel eerlijk is, kunnen we deze e_n als inleg vragen aan een speler. Hiertoe gebruik ik de volgende stelling (Feller 1950). Het bewijs hiervan is in Appendix A te vinden:

Stelling 1. Het St Petersburg spel is eerlijk bij een inleg van $e_n = \log n$ met $\log n$ de logaritme met basis 2, en n het aantal gespeelde St Petersburg spellen.

3.1.3 Hoe eerlijk is het St Petersburg spel nu?

Het St Petersburg Spel

We zien dus dat de inleg, $\log n$ dukaten, voor een St Petersburg spel afhangt van het aantal spellen, n, dat Paul wil spelen.

Maar, zoals door Adler (1990) en Chow en Robbins (1961) is bewezen, doordat de $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n} = \infty$ en $\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n\log n} = 1$ hebben we dat 1 één van de vele bijna zekere limiet punten is van de rij en ieder punt in $[1,\infty)$ is een bijna zeker limiet punt van de rij. Een oneindige rij St Petersburg spellen gespeeld bij Peter zal dus oneindig vaak dichtbij het punt 1 komen, maar ook oneindig vaak bij andere punten in $[1,\infty)$. Dus zal de inleg $\log n$ aangedragen door Feller een premie zijn waar Peter niet blij van wordt.

Laat echter $X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ... \leq X_{n,n}$ Paul's geordende winsten $X_1, X_2, ..., X_n$ in n spellen zijn. Hiervoor hebben we (zie Csörgö en Simons (1996)) voor iedere vaste $m\epsilon\mathbb{N}$ en iedere rij $\{d_n\}$, een niet-dalende rij van positieve getallen $d_n \to \infty$, zodat

$$\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n-m} X_{k,n} - 1 = o\left(\frac{d_n^{1/(m+1)}}{\log n}\right) \text{ als } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{d_n} < \infty.$$

Dus, hoe groter we m, de niet uitgekeerde premies, nemen, hoe eerlijker de inleg $n\log n$ dukaten voor n spellen wordt. Natuurlijk zal Paul dit niet eerlijk vinden, omdat hij zijn grootste m winsten moet inleveren.

Een niet-eerlijk eerlijk spel

Laten we ook eens goed kijken naar de precieze definitie van eerlijke spellen, en wat deze betekent voor sommige spellen. Kijken we naar het volgende spel:

> **Voorbeeld 1.** Gegeven X_1,X_2,... onafhankelijk variabele opbrengsten zodat
>
> $$X_n = \begin{cases} n^2-1 & \text{met kans } \frac{1}{n^2}; \\ -1 & \text{met kans } 1-\frac{1}{n^2}. \end{cases}$$
>
> Dit spel lijkt voor iedere n eerlijk met inleg 0, doordat $E(X_n) = \frac{1}{n^2}\cdot(n^2-1)+(1-\frac{1}{n^2})\cdot(-1) = 0$.
>
> Maar als we naar de totale opbrengst $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ voor n spelletjes kijken, zien we dat deze voor $n\to\infty$ niet naar 0 convergeert.
>
> Laat E_i de gebeurtenis dat i^2-1 gewonnen wordt in beurt i. Er geldt dat $\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$. Nu hebben we via het eerste Lemma van Borel-Cantelli dat de kans dat oneindig veel gebeurtenissen E_i voorkomen 0 is. Dus komen er eindig veel gebeurtenissen E_i voor. Dus $\frac{S_n}{n} \to -1$ voor $n\to\infty$ en voor $n\to\infty$ dus $P\{|\frac{S_n}{n}| > \epsilon\} \to 0$. Dus zou 0 geen eerlijke inleg voor dit spel zijn volgens definitie 1.

We kunnen ons dus ook afvragen hoe 'eerlijk' een eerlijk St Petersburg spel eigenlijk wel is.

3.2 Een premie voor Peter

We hebben gezien dat $n \log n$ dukaten een premie is waarvan Paul gelukkiger wordt dan Peter. We kunnen ook kijken naar premies waarvan Peter misschien wel iets gelukkiger wordt. Hiertoe kijken we naar de verdeling van de kans dat Peter meer moet uitkeren dan de inleg van Paul. Omdat we karakteristieke functies van kansverdelingen gebruiken, volgt hieronder eerst een kleine samenvatting van wat karakteristieke functies precies zijn.

Karakteristieke functies

Definitie 2. De karakteristieke functie van een stochastische variabele X wordt gegeven door

$$\phi_X(u) = E(\exp iuX) \text{ met } i = \sqrt{-1} \tag{3.1}$$

De karakteristieke functie is continu in t. Karakteristieke functies hebben de volgende eigenschappen (X en Y zijn onderling onafhankelijke stochasten):

1. $|\phi_X(u)| \leq \phi(1) = 1$
2. $\phi_{aX+b}(u) = e^{itb}\phi_X(au)$ voor iedere $a, b \in \mathbb{R}$
3. $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$

3.2.1 De limietverdeling

Met de volgende stelling (Martin-Löf (1985)), ook bewezen in Appendix A, weten we iets over de limietverdeling van S_n:

Stelling 2. Laat $N = 2^n$ en $n \to \infty$. Dan heeft $\frac{S_N - N\log N}{N} = \frac{S_N}{N} - n = S$ een limiet verdelingsfunctie $G(x)$, waarvan de karakteristieke functie gegeven is door $E(\exp(iuS)) = \exp g(u)$, waarbij

$$g(u) = \sum_{k=-\infty}^{0} (\exp(iu2^k) - 1 - iu2^k)2^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty}(\exp(iu2^k) - 1)2^{-k} \tag{3.2}$$

Eigenschappen van de limietverdeling

We hebben nu dus een karakteristieke functie van de limietverdeling van S. Deze functie is echter ingewikkeld. We kunnen echter wel meer te weten komen over de staart van $G(x)$. Deze twee stellingen (Martin-Löf (1985)) zeggen hier iets over.

Stelling 3. Voor $m \to \infty$ en $x > 0$ geldt

$$2^m P(2^{-m}(S - m) > x) \to 2^{\log x}$$

Deze benadering laat zien dat de staart van de verdelingsfunctie van S op de staart van de verdelingsfunctie van een enkele St Petersburg variabele X lijkt. De volgende stelling zegt iets meer over het staartgedrag van $G(x)$.

Stelling 4. Als $n, m \to \infty$ geldt

$$2^m P(S > 2^m + x) \to 1 + P(S > x) = 2 - G(x)$$

We hebben nu twee eigenschappen van de limietverdeling. Voor bewijzen hiervan zie Appendix A. Als we deze twee stellingen combineren kunnen we een premie-formule voor Peter afleiden.

3.2.2 Een formule voor de inleg van een St Petersburg spel

Als we nu Stelling 3 en Stelling 4 combineren, houden we de volgende formule over voor de totale uitkering in $N = 2^n$ spellen

$$P(\frac{S_N}{N} - n > 2^m + x) \approx \frac{2 - G(x)}{2^m}$$

voor n niet te klein en $m \geq 5$. Voor Peter zegt dit dat als hij $p_N = n + 2^m + x$ dukaten per spel vraagt, de kans dat hij in N spellen meer dan Np_N moet uitkeren $r = \frac{2-G(x)}{2^m}$ is.

Laat $x = 0$ bijvoorbeeld. $G(0)$ is numeriek bepaald en $G(0) \approx 0,2075$. Nu hebben we als premieformule

$$p_N = n + 2^m$$
$$r = (1,8)2^{-m}$$

Als Peter bijvoorbeeld $r = 10^{-3}$ neemt, dus de kans dat hij meer verliest dan dat hij als inleg krijgt $\frac{1}{1000}$ kiest, moet hij $p_N = n + 2048$ als premie vragen. We kunnen hieruit ook gelijk een verband met Feller zien. Als $n \gg m$, zien we dat $p_N \approx n = \log N$.

Voor $n \ll 2^m$ kunnen we bijvoorbeeld $p_N = 2^m$ nemen, dan hebben we voor ieder spel een vaste inleg, ongeacht hoeveel spellen er gespeeld worden.

Hoofdstuk 4

Het vergelijken van oneindige verwachtingen

4.1 De 2-Paul paradox

Laten we nu naar de volgende, op het eerste gezicht misschien wat vreemde, situatie kijken: Peter speelt precies 1 St Petersburg spel met zowel $Paul_1$ als $Paul_2$. Nu is de vraag: Zijn $Paul_1$ en $Paul_2$ beter af als ze (i) hun individuele winsten, X_1 en X_2 accepteren of als ze (ii) afspreken, voordat ze spelen, hun opbrengsten te delen, zodat ze beiden $\frac{X_1+X_2}{2}$ ontvangen.

Als de verwachting van X eindig zou zijn, zou het antwoord op deze vraag luiden dat er geen verschil is. Hoewel de verwachting van zowel X_1 en $\frac{X_1+X_2}{2}$ oneindig is, zijn we intuïtief misschien nog steeds geneigd te antwoorden dat er geen verschil tussen beide strategieën is. We zullen echter laten zien dat zowel $Paul_1$ als $Paul_2$ er 1 dukaat op vooruit gaan als ze delen.

Dit staat bekend als de 2-Paul paradox. Beide Pauls gaan er op vooruit, Peter keert echter nog steeds dezelfde premies uit.

We zullen dit laten zien met behulp van koppelingen en de vergelijkingsoperator.

4.1.1 Koppelingen

Laten we eerst bekijken wat koppelingen precies zijn. Een koppeling tussen twee of meer random variabelen is een gezamenlijke constructie tussen deze variabelen. Je gebruikt deze koppelingen meestal om meer inzicht te krijgen in de eigenschappen van de variabelen. Laat ik eerst een handige notatie invoeren.

Definitie 3. Een *kopie* van een random variabele X is een random variabele $\hat{X}$ met dezelfde verdeling als X. Ik noteer dit met

$$\hat{X} \stackrel{D}{=} X$$

Een koppeling van een verzameling random variabelen X_i, met $i \in \mathbb{N}$, is een familie van random variabelen $\hat{X}_i$, weer met $i \in \mathbb{N}$, zo dat geldt

$$\hat{X}_i \stackrel{D}{=} X_i$$

De individuele $\hat{X}_i$ zijn dus kopieën van de individuele X_i, maar de hele verzameling $\hat{X}_i$ (met $i \in \mathbb{N}$) is geen kopie van de verzameling X_i ($i \in \mathbb{N}$).

Een koppeling heeft dus vaste marginale verdelingen, en de truc is een afhankelijkheids-structuur te vinden die ons uiteindelijke doel bereikt.

Om wat meer inzicht in kopieën en koppelingen te krijgen, volgt hieronder een voorbeeld van een bewijs met koppelingen.

Voorbeeld 2. Voor iedere random variabele X en niet-dalende functies f en g, geldt dat de covariantie van de random variabelen $f(X)$ en $g(X)$ positief is. Dus $Cov[f(X), g(X)] \geq 0$.

Bewijs: Laat $\hat{X}$ een onafhankelijke kopie van X zijn. Dus $(X,\hat{X})$ is een koppeling van X. Door additiviteit van covarianties hebben we

$$\begin{aligned} Cov[f(X) - f(\hat{X}), g(X) - g(\hat{X})] &= Cov[f(X), g(X)] - Cov[f(\hat{X}), g(X)] \\ &\quad - Cov[f(X), g(\hat{X})] + Cov[f(\hat{X}), g(\hat{X})] \end{aligned}$$

Doordat X en $\hat{X}$ onafhankelijk zijn, zijn $Cov[f(\hat{X}), g(X)] = Cov[f(X), g(\hat{X})] = 0$, en doordat het kopieën zijn, zijn $Cov[f(X), g(X)]$ en $Cov[f(\hat{X}), g(\hat{X})]$ gelijk.

Dus

$$Cov[f(X) - f(\hat{X}), g(X) - g(\hat{X})] = 2Cov[f(X), g(X)]$$

Maar omdat de verwachting, van $f(X) - f(\hat{X})$ en $g(X) - g(\hat{X})$ 0 is, hebben we vanuit de definitie van covarianties

$$Cov[f(X) - f(\hat{X}), g(X) - g(\hat{X})] = E((f(X) - f(\hat{X}))(g(X) - g(\hat{X})))$$

Omdat f en g niet dalend zijn hebben $(f(X) - f(\hat{X}))$ en $(g(X) - g(\hat{X}))$ hetzelfde teken, en is de $Cov[f(X) - f(\hat{X}), g(X) - g(\hat{X})] \geq 0$. Dus ook de $Cov[f(X), g(X)]$ is altijd groter of gelijk aan 0.

Een bekende veel voorkomende koppeling is de volgende. Hij staat bekend als de *Quantiel* koppeling.

Voorbeeld 3. Laat X een random variabele zijn met verdelingsfunctie F, zodat:

$$P\{X \leq x\} = F(x), x \in \mathbb{R}$$

Laat F^{-1} de Quantiel-functie zijn, gegeven door:

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, u\epsilon[0, 1].$$

Laat nu U een random variabele zijn, uniform verdeeld op [0,1]. Definieer $\hat{X} = F^{-1}(U)$. Nu is $\hat{X}$ een kopie van X:

$$P(\hat{X} \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

Als we F over de klasse van alle verdelingsfuncties laten lopen, en vaste U houden, houden we een koppeling over van allemaal verschillend verdeelde random variabelen. Noem dit de *Quantiel* koppeling.

4.1.2 De 2-Paul paradox

We willen laten zien dat $Paul_1$ en $Paul_2$ 1 dukaat meer kunnen *verwachten* als ze hun opbrengst delen. Daartoe gebruik ik de volgende koppeling (Csörgö en Simons (2002)).

Stelling 5. Laat X_1 en X_2 twee onafhankelijke St Petersburg variabelen zijn. Dan is er een koppeling $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ van X_1 en X_2 met

$$X_1 + X_2 = S_2 \quad \stackrel{D}{=} \quad T_2 = 2\hat{X}_1 + \hat{X}_2 I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\} \tag{4.1}$$

en met $I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\}$ de indicator voor de gebeurtenis $\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1$.

Het bewijs van de stelling, net als dat van alle stellingen in dit hoofdstuk, is in Appendix B te vinden.
Uit de koppeling volgt dat $T_2 \geq 2X_1$ en $T_2 > 2X_1$ als $X_1 \leq X_2$. Dus zou $Paul_1$ liever strategie (ii) willen als strategie (i). Voor $Paul_2$ geldt hetzelfde.

De volgende stelling zegt wat over hoeveel strategie (ii) beter is dan strategie (i) (Csörgö en Simons (2002)).

Stelling 6. De strategie waarin $Paul_1$ en $Paul_2$ delen levert 1 dukaat meer op in verwachting.

We hebben dus dat als $Paul_1$ en $Paul_2$ hun winsten delen, de verwachte winst groter is dan indien ze hun winst voor zichzelf houden. De verwachting is dat ze 1 dukaat meer winnen. Voor N Pauls geldt zelfs, voor $X_1, X_2, ..., X_N$, $N = 2^n$ en $n \epsilon \mathbb{N}$ onafhankelijke St Petersburg variabelen, als ze hun winsten gelijk verdelen, dat ze n dukaten meer kunnen verwachten. Om dit te bewijzen gebruik ik een nieuw gereedschap: de vergelijkingsoperator.

4.2 De vergelijkingsoperator en 2^k-Pauls

Met koppelingen is het vaak veel werk om strategieën met meerdere spelers met elkaar te vergelijken. Daarom definieer ik een nieuwe operator.

4.2.1 De vergelijkingsoperator

Definitie 4. De vergelijkingsoperator van twee niet negatieve stochasten X_1 en X_2 is gedefinieerd door

$$E[X_1, X_2] = \int_0^\infty [P\{X_1 > x\} - P\{X_2 > x\}]dx$$

De vergelijkingsoperator is het oppervlak tussen de twee verdelingsfuncties van de stochastische variabelen X_1 en X_2 en geeft het verwachte verschil tussen X_1 en X_2, als tenminste een gedefinieerd is. We hebben namelijk de volgende stelling die geldt:

Stelling 7. Stel X is een niet negatieve stochastische variabele. Dan geldt

$$E(X) = \int_0^\infty P\{X > x\}dx$$

Voor minstens één van $E(X_1)$ en $E(X_2)$ eindig vinden we dat $E[X_1, X_2] = E(X_1) - E(X_2)$, met $\pm\infty - c = \pm\infty = c - \mp\infty$, voor één van de twee oneindig en de ander eindige c.
Met het volgende triviale voorbeeld, krijgen we nog wat meer inzicht in de werking van de vergelijkingsoperator.

Voorbeeld 5. We spelen met een eerlijke dobbelsteen. Bij spel 1 gooi je 1 maal en krijg je het aantal ogen X_1 uitbetaalt. Bij spel 2 gooi je 2 maal en krijg je het hoogste aantal ogen tussen X_1 en X_2 uitbetaald. Als we voor beide spellen evenveel inleg moeten betalen, welke kunnen we beter spelen? We doen het met de vergelijkingsoperator. We hebben

X	$P(X_1 = x)$	$P(X_2 = x)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$

En dus

X	$P(X_1 > x)$	$P(X_2 > x)$
$(-\infty, 1]$	1	1
$(1, 2]$	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{36}$
$(2, 3]$	$\frac{4}{6}$	$\frac{32}{36}$
$(3, 4]$	$\frac{3}{6}$	$\frac{27}{36}$
$(4, 5]$	$\frac{2}{6}$	$\frac{20}{36}$
$(5, 6]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$
$(6, \infty)$	0	0

En we hebben dus

$$\begin{aligned} E[X_1, X_2] = \int_0^\infty [P\{X_1 > x\} - P\{X_2 > x\}]dx &= 1 - 1 + \frac{5}{6} - \frac{35}{36} + \frac{4}{6} - \frac{32}{36} + \frac{3}{6} - \frac{27}{36} \\ &+ \frac{2}{6} - \frac{20}{36} + \frac{1}{6} - \frac{11}{36} + 0 - 0 = -\frac{35}{36} \end{aligned}$$

Uit de eerste tabel kunnen we makkelijk de verwachtingswaardes bepalen, en we zien dat de waarde van de vergelijkingsoperator precies gelijk is aan $E(X_1) - E(X_2)$.

Ook over oneindige verwachtingen kan deze vergelijkingsoperator nog wel wat zeggen. Dit zullen we later zien.

Om verder te kunnen, moeten we echter eerst een aantal eigenschappen van de vergelijkingsoperator kennen.

4.2.2 Eigenschappen van de vergelijkingsoperator

Als $X_1 \overset{D}{=} X_2$ geldt, dan hebben we dat $E[X_1, X_2] = 0$, hoewel dan niet hoeft te gelden dat $E(X_1)$ en $E(X_2)$ eindig moeten zijn. Verder gelden de volgende eigenschappen:

1. $E[X_2, X_1] = -E[X_1, X_2]$
2. $E[cX_1, cX_2] = cE[X_1, X_2]$ voor $c \epsilon \mathbb{R}$
3. $E[X_1 + c_1, X_2 + c_2] = E[X_1, X_2] + c_1 - c_2$
4. $E[X_1 + X_2, X_1] = E(X_2)$
5. $E[X_1, X_3] = E[X_1, X_2] + E[X_2, X_3]$ als de waardes aan de rechterkant allebei gedefinieerd en vergelijkbaar als som zijn.

Deze eigenschappen lijken triviaal. Maattheoretische mogen we echter niet alles direct aannemen. Hiervoor verwijs ik graag naar Csörgö en Simons (2002).

Met behulp van deze eigenschappen kunnen we Stelling 8 bewijzen. Laten we zeggen dat twee variabelen X_1 en X_2 dezelfde *oneindige verwachting* hebben, als $E[X_1, X_2] = 0$ geldt.

4.2.3 2^k-Pauls

De volgende stelling (Csörgö en Simons (2002)) zegt iets over de *oneindige verwachting* van een strategie voor 2^k-Pauls.

Stelling 8. Voor $N = 2^n$ en $n \epsilon \mathbb{N}$ geldt

$$E[\frac{S_N}{N} - n, X_1] = 0$$

We kunnen echter ook nog kijken naar de situatie dat er een ander aantal Pauls is of de situatie dat ze hun opbrengsten niet gelijk delen?

4.3 Gokstrategieën

Voor we verder gaan voeren we eerst een handige notatie in voor Gokstrategieën.

Definitie 5. Stel er spelen n-spelers, $Paul_1$,$Paul_2$,....,$Paul_n$, mee bij Peter. De individuele winsten X_i voor $Paul_i$, $1 \leq i \leq n$, zijn onafhankelijke Petersburg variabelen X_i. Dan is $\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, ..., p_{n,n})$ een gokstrategie voor n St Petersburg-spel spelers, waarbij $Paul_1$ $p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + ... + p_{n,n}X_n$ ontvangt, $Paul_2$ ontvangt $p_{n,n}X_1 + p_{1,n}X_2 + ... + p_{n-1,n}X_n$,..., en $Paul_n$ ontvangt $p_{2,n}X_1 + p_{3,n}X_2 + ... + p_{1,n}X_n$.

4.3.1 Gokstrategieën voor 3 Pauls

Laten we nu naar het verschil kijken tussen de strategie dat 3 Pauls hun winst gelijk delen, dus $\mathbf{p}_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, en naar de Pauls die hun winst voor zichzelf houden, dus $\mathbf{p}_3 = (1, 0, 0)$. Nu hebben we dat $\frac{S_3}{3}$ noch stochastisch groter is dan X_1 noch kleiner; $P(\frac{S_3}{3} = 2) = \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$ terwijl $P(\frac{S_3}{3} = 8) = 0.76171875 > \frac{3}{4}$.

We hebben dat zowel het positieve deel, als het negatieve deel van de integraal $\int_0^\infty (P(\frac{S_3}{3} > x) - P(X_1 > x)dx$ oneindig is, en dus dat $E[\frac{S_3}{3}, X_1]$ niet gedefinieerd is. We kunnen deze strategieën daarom niet met elkaar vergelijken. Als we een strategie niet met X_1 kunnen vergelijken, noemen we deze strategie *niet vergelijkbaar*.

We hebben echter nog steeds als *vergelijkbare* strategie de strategie waarbij $Paul_1$ de helft van zijn opbrengst aan $Paul_2$ en de andere helft aan $Paul_3$ geeft. Deze strategie levert, zoals bewezen bij de 2-Paul paradox, 1 dukaat meer op. Het blijkt zo te zijn dat strategieën waarbij $p_{i,n} \epsilon \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..., 0\}$ wel *vergelijkbaar* zijn. Laten we deze strategieën vanaf nu de *toegestane* gokstrategieën noemen.

De volgende stelling (Csörgö en Simons (2002)) geeft echter een nog betere *toegestane* strategie.

Stelling 9. De strategie waarin $Paul_1$ de helft van zijn winst voor zichzelf houdt, en de rest gelijk verdeeld onder de andere 2 Pauls levert in verwachting $\frac{3}{2}$ dukaat meer op, ofwel

$$E[\frac{2X_1 + X_2 + X_3}{4}, X_1] = \frac{3}{2}$$

4.3.2 Optimale gokstrategieën

Over gokstrategieën voor meerdere Pauls staat veel geschreven in Csörgö en Simons (2002). De belangrijkste stelling (Csörgö en Simons (2006)) over *toegestane* gokstrategieën geef ik hieronder.

Stelling 10. De toegevoegde waarde $A(p_n) = E[p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + ... + p_{n,n}X_n, X_1$ voor een *toegestane* gokstrategie p_n is de entropie

$$A(p_n) = H(p_n) = -(p_{1,n} \log p_{1,n} + ... + p_{n,n} \log p_{n,n}) \tag{4.2}$$

met $p_{i,n} \log p_{i,n} = 0$ als $p_{i,n} = 0$.

De best *toegestane* strategie p_n^* voor n spelers is de strategie waarin $A(p_n)$ het grootst is. Csörgö en Simons (2006) hebben laten zien dat deze het grootst is als de waardes van $p_{i,n}$ zo dicht mogelijk bij $\frac{1}{n}$ liggen. Dus

$A_2 = 1$ voor $p_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$A_3 = 1\frac{1}{2}$ voor $p_3^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
$A_4 = 2$ voor $p_4^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
$A_5 = 2\frac{1}{4}$ voor $p_5^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$A_6 = 2\frac{1}{2}$ voor $p_6^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$A_7 = 2\frac{3}{4}$ voor $p_7^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$A_8 = 3$ voor $p_8^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$A_9 = 3\frac{1}{8}$ voor $p_9^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$
$A_{10} = 3\frac{1}{4}$ voor $p_{10}^* = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16},)$

Hoofdstuk 5

Conclusies

We hebben gezien dat de oneindige verwachting van het St Petersburg spel toch wel vreemde uitkomsten oplevert.

Zo hebben we in hoofdstuk 3 gezien dat de gemiddelde waarde van $\bar{X}_n$ niet naar een vaste waarde convergeert, maar voor $n \to \infty$ steeds groter wordt.
We hebben wel het staartgedrag van de verdeling van $\bar{X}_n - \log n$ bepaald, zodat Peter een vaste inleg kan vragen voor niet al te grote n. Wel zagen we dat deze inleg uiteindelijk ook afhankelijk van de n wordt, als deze groter wordt.

Dat de *verwachte winst* afhangt van het aantal spelers van het St Petersburg spel zagen we ook in hoofdstuk 4. Hierin vergeleken we oneindige verwachtingen bij gokstrategieën voor meerdere Pauls. We vonden de verrassende uitkomst dat het delen van het gewonnen bedrag door het aantal Pauls de verwachting van een St Petersburg spel doet stijgen, terwijl Peter natuurlijk nog steeds hetzelfde moet uitkeren.
Verder hebben we hierin ook de optimale strategie voor samenwerkende Pauls bepaald, waardoor ze een zo hoog mogelijke verwachting voor een St Petersburg spel hebben.

Wat dus in beide hoofdstukken opviel, is dat de *gemiddelde uitkering* per spel lijkt te groeien naarmate er meer spellen gespeeld worden.

Bewijzen

Bijlage A

Bewijzen uit hoofdstuk 3

Stelling 1. Het St Petersburg spel is eerlijk bij een inleg van $e_n = n \log n$ met $\log n$ de logaritme met basis 2.

Bewijs: Het St Petersburg spel is dus eerlijk als voor iedere $\epsilon > 0$ geldt

$$P\{|\frac{S_n}{e_n} - 1| > \epsilon\} = P\{|\sum_{i=1}^{n} X_i - n \log n| > \epsilon nlog(n)\} \to 0 \tag{A.1}$$

Definieer hiertoe

$$\begin{cases} U_k = X_k, V_k = 0 & \text{als } X_k \leq n \log n; \\ U_k = 0, V_k = X_k & \text{als } X_k > n \log n. \end{cases}$$

We hebben nu dus dat $X_k = U_k + V_k$ en de U_k (en ook de V_k), voor ongelijke k, onderling onafhankelijk zijn. Voor vaste k zijn de U_k en V_k natuurlijk wel afhankelijk.

Doordat voor alle t geldt dat $P\{X_k > t\} \leq \frac{2}{t}$, hebben we $P\{V_k \neq 0\} < \frac{2}{n \log n}$.
En dus $P\{V_1 + V_2 + ... + V_n > 0\} < \frac{2}{log(n)}$

En dus voor $n \to \infty$

$$P\{V_1 + V_2 + ... + V_n > 0\} \to 0$$

Het Petersburg-spel met inleg $e_n = n \log n$ voor n spelletjes is nu dus eerlijk, als we kunnen aantonen dat

$$P\{|U_1 + U_2 + ... + U_n - nlog(n)| > \epsilon n \log n\} \to 0 \tag{A.2}$$

Dit doen we met behulp van Chebyshev's ongelijkheid. Hiertoe berekenen we $\mu_n = E(U_k)$ en $\sigma_n^2 = Var(U_k)$. Deze grootheden zijn afhankelijk van de grootte van n, maar gelijk voor de verschillende U_k. Laat r nu de grootste waarde zijn waarvoor $2^r \leq n \log n$, dan is $\mu_n = \Sigma_{i=1}^{r} \frac{1}{2^i} 2^i = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = r$, en voor grote waardes van n geldt:

$$\log n < \mu_n \leq \log n + \log \log n$$

Zo hebben we ook:

$$\sigma_n^2 = E(U_k^2) - (E(U_k))^2 < E(U_k^2) = 2 + 2^2 + ... + 2^r < 2^{r+1} \leq 2n \log n$$

Omdat $U_1 + U_2 + ... + U_n$ gemiddelde $n\mu_n$ en variantie $n\sigma_n^2$ heeft, hebben we nu dus via Chebyshevs ongelijkheid

$$P\{|U_1 + U_2 + ... + U_n - nlog(n)| > \epsilon n \log n\} \leq \frac{n\sigma_{n^2}}{\epsilon^2 n^2 \mu_n^2} < \frac{2}{\epsilon \log n} \to 0$$

Dus geldt (6.1) en we hebben door (6.2) dat $\mu_n = O(\log n)$ en dus is St Petersburg spel eerlijk voor n spelletjes met inleg $n \log n$. □

Stelling 2. Laat $N = 2^n$ en $n \to \infty$. Dan heeft $\frac{S_N - N \log N}{N} = \frac{S_N}{N} - n = S$ een limiet verdelingsfunctie $G(x)$, waarvan de karakteristieke functie gegeven is door $E(\exp(iuS)) = \exp g(u)$, waarbij

$$g(u) = \sum_{k=-\infty}^{0} (\exp(iu2^k) - 1 - iu2^k)2^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\exp(iu2^k) - 1)2^{-k} \tag{A.3}$$

Bewijs: We kijken eerst naar de karakteristieke functie $\phi(u)$ van 1 St Petersburg stochast X

$$\phi(u) = E(\exp(iuX)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(iu2^k)}{2^k}$$

Dan hebben we voor de karakteristieke functie $\phi_N(u)$ voor $S = \frac{S_N}{N} - n$, met S_N de som over N onderling onafhankelijke Petersburg-stochasten X

$$\phi_N(u) = E(\exp(iu(\frac{S_N}{N} - n))) = \phi(\frac{u}{N})^N \exp(-inu)$$

Als we kijken naar $\phi(\frac{u}{N})$ hebben we

$$\begin{aligned} \phi(\frac{u}{N}) - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(iu2^{k-n}) - 1}{2^k} = 2^{-n} \sum_{k=-n+1}^{\infty} \frac{\exp(iu2^k) - 1}{2^k} \\ &= N^{-1}(\sum_{k=-n+1}^{0} \frac{\exp(iu2^k) - 1 - iu2^k}{2^k} + inu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(iu2^k - 1)}{2^k}) \\ &= N^{-1}(g(u) + inu + o(1)) \text{ voor } n \to \infty \end{aligned}$$

Dit omdat de eerste som convergeert, en de n-de term is van de orde $u^2 2^n$ voor $n \to -\infty$.

En dus

$$\begin{aligned} \phi_N(u) &= (1 + N^{-1}(g(u) + inu + o(1))^N \exp(-inu) \\ &= \exp g(u) + o(1) \text{ voor } n \to \infty. \end{aligned} \tag{A.4}$$

□

We hebben het volgende lemma nodig om Stelling 3 te kunnen bewijzen. Het bewijs hiervan staat in Martin-Löf (1985).

Lemma 1. $g(u)$ uit Stelling 2 voldoet aan de 'scaling law'

$$g(2^m u) = 2^m(g(u) - imu)$$

Voor $m \in \mathbb{Z}$.

Stelling 3. Voor $m \to \infty$ en $x > 0$ geldt

$$2^m P(2^{-m}(S - m) > x) \to 2^{\log x}$$

Bewijs: Laten we naar de karakteristieke functie van $2^{-m}(S - m)$ kijken, deze is, via Lemma 1

$$\begin{aligned} h_m(u) &= E(\exp(iu2^{-m}(S - m)) = \exp(g(2^{-m}u) - im2^{-m}u) \\ &= \exp(2^{-m}g(u)) \approx 1 + \frac{g(u)}{2^m} \text{ voor } m \to \infty \end{aligned}$$

Dus

$$2^m(h_m(u) - 1) \to g(u) \text{ voor } m \to \infty$$

Via continuïteit van karakteristieke functies, zie Feller (1966), hebben we hier uit dat

$$2^m P(2^{-m}(S - m) > x) \to 2^{\log x}$$

□

Om Stelling 4 te kunnen bewijzen hebben we de volgende 2 Lemma's nodig (Martin-Löf (1985)):

Lemma 2. Op ieder eindig interval $1 \leq x \leq A$ geldt

$$P(S_m^{(n)} \geq x2^m) \leq C_A 2^{-mx}$$

Voor $S_m^{(n)}$ zoals in het bewijs van Stelling 4 en voor een constante C_A en $m > 3$.

Lemma 3. Voor $S_0^{(n)}$ als in het bewijs van Stelling 4 geldt

$$P(S_0^{(n)} \leq -x) \leq \exp(\frac{-x^2}{4}) \text{ als } x > 0$$

omdat $S_m^{(n)} \geq S_0^{(n)}$ geldt ook $P(S_m^{(n)} \leq -x) \leq \exp(\frac{-x^2}{4})$

Stelling 4. Als $n, m \to \infty$ geldt

$$2^m P(S > 2^m + x) \to 1 + P(S > x) = 2 - G(x)$$

Bewijs: We splitsen $S^{(n)} = \frac{S_N}{N} - n$ op in aantallen verschillende uitkomsten. Deze noemen we $Z_k^{(n)} = Z_{N,n+k}$, die een multinomiale verdeling hebben met $p_k = \frac{2^{-k}}{N}$. $Z_1^{(n)}$ is bijvoorbeeld het aantal keer in N spellen dat er direct kop wordt gegooid. Omdat er totaal N spellen gespeeld zijn is $\sum Z_k^{(n)} = N$:

$$S^{(n)} = \sum_{k=-n+1}^{0} (Z_k^{(n)} - 2^{-k})2^k + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^{(n)} 2^k$$

Laat nu

$$S_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k^{(n)} - 2^{-k})2^k$$

en

$$S_m^{(n)} = S_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{m} Z_k^{(n)} 2^k$$

Deze variabelen hebben beide een moment genererende functie die we kunnen afschatten met

$$\begin{aligned} E(\exp(uS_0^{(n)})) &= \exp(-nu)(\sum_{k=-n+1}^{0} p_k \exp(u2^k) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k)^N \\ &= \exp(-nu)(1 + \sum_{k=-n+1}^{0} p_k(\exp(u2^k) - 1))^N \\ &\leq \exp \sum_{k=-\infty}^{0} (\exp(u2^k) - 1 - u2^k)2^{-k} \\ &= \exp g_0(u) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} E(\exp(uS_m^{(n)})) &= \exp(-nu)(\sum_{k=-n+1}^{m} p_k \exp(u2^k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_k)^N \\ &\leq \exp g_0(u) + \sum_{k=1}^{m} (\exp(u2^k) - 1)2^{-k}) \\ &= \exp g_m(u) \end{aligned}$$

Deze zijn allebei eindig, dus heeft $S^{(n)}$ een eindige moment genererende functie. Nu splitsen we $S^{(n)}$ op in de som van $S_{m-1}^{(n)} + R_m^{(n)}$ met $R_m^{(n)} = \sum_{k=m}^{\infty} Z_k^{(n)} 2^k$. $R_m^{(n)}$ neemt nu de waardes 0,2^m of waardes groter of gelijk aan 2^{m+1} aan, met de volgende kansen

$$\begin{aligned} P(R_m^{(n)} = 0) &= P(\sum_{k=m}^{\infty} (Z_k^{(n)} = 0) = (1 - \sum_{k=m}^{\infty} p_k)^N = (1 - \frac{2^{-m+1}}{N})^N = 1 - 2^{-m+1} + O(2^{-2m}) \\ P(R_m^{(n)} = 2^m) &= P(Z_m^{(n)} = 1, \sum_{k=m+1}^{\infty} (Z_k^{(n)} = 0) = Np_m(1 - \sum_{k=m}^{\infty} p_k)^{N-1} = 2^{-m} + O(2^{-2m}) \\ P(R_m^{(n)} \geq 2^{m+1}) &= 1 - P(R_m^{(n)} = 0) - P(R_m^{(n)} = 2^m) = 2^{-m} + O(2^{-2m}) \end{aligned}$$

Laten we nu $P(S^{(n)} > 2^m + x)$ in drie delen splitsen, om $2^m P(S^{(n)} > 2^m + x)$ af te schatten

$$\begin{aligned} P(S_{m-1}^{(n)} + R_m^{(n)} > 2^m + x) &= P(S_{m-1}^{(n)} > 2^m + x, R_m^{(n)} = 0) + P(S_{m-1}^{(n)} > x, R_m^{(n)} = 2^m) \\ &\quad + P(S_{m-1}^{(n)} + R_m^{(n)} > x, R_m^{(n)} \geq 2^m) \\ &= p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

Nu kunnen we p_1 afschatten met behulp van Lemma 2

$$p_1 = P(S_{m-1}^{(n)} > 2^m + x) = P(S_{m-1}^{(n)} > 2^{m-1}(2 + x2^{-m+1}) \leq C_A 2^{-(m-1)(2+x2^{-m+1})}$$

en dus $2^m p_1 \to 0$.
Voor p_2 hebben we

$$\begin{aligned} E(\exp(itS_{m-1}^{(n)} + uZ_m^{(n)} + v \sum_{k=m+1}^{\infty} Z_k^{(n)})) &= \\ \exp(-int)(\sum_{k=-n+1}^{m-1} p_k \exp(it2^k) + p_m e^u &+ (\sum_{k=m+1}^{\infty} p_k)e^v)^N \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} E(\exp(itS_{m-1}^{(n)}, uZ_m^{(n)} = & \; 1 \quad , \sum_{k=m+1}^{\infty} Z_k^{(n)} = 0) = Np^m \exp(-int)(\sum_{k=-n+1}^{m-1} p_k \exp(it2^k))^{N-1} \\ &= 2^{-m} \exp(-int)(1 + \frac{(\sum_{k=-n+1}^{m-1} \exp(it2^k) - 1)2^{-k} - 2^{-m+1}}{N})^{N-1} \\ &= 2^{-m} \exp(-int)(1 + \frac{int + g(t) + O(2^{-m} + 2^{-n}}{N})^{N-1} \end{aligned}$$

en net als in het bewijs van Stelling 2 zien we dat

$$2^m E(\exp(itS_{m-1}^{(n)}, R_m^{(n)} = 2^m) \to e^{g(t)} \text{als } m, n \to \infty \tag{A.5}$$

en dus hebben we dat $2^m p_2 \to 1 - G(x)$.

We hebben ook

$$p_3 = P(R_m^{(n)} \geq 2^{m+1}) - P(S_{m-1}^{(n)} \leq 2^m + x - R_m^{(n)}, R_m^{(n)} \geq 2^{m+1}) \tag{A.6}$$

het laatste deel hiervan is kleiner dan $P(S_{m-1}^{(n)} \leq 2^m + x - 2^{m+1})$. Deze is door Lemma 3 begrensd door $exp(-\frac{(2^m-x)^2}{4})$, en dus gaat $2^m p_3 \to 1$.
En dus hebben we nu $P(S > 2^m + x) = p_1 + p_2 + p_3 \to 2^{-m}(0 + 1 - G(x) + 1)$. $\square$

Bijlage B

Bewijzen uit hoofdstuk 4

Stelling 5. Laat X_1 en X_2 twee onafhankelijke St Petersburg variabelen zijn. Dan is er een koppeling $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ van X_1 en X_2 met

$$X_1 + X_2 = S_2 \overset{D}{=} T_2 = 2\hat{X}_1 + \hat{X}_2 I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\} \tag{B.1}$$

en met $I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\}$ de indicator voor de gebeurtenis $\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1$.

Bewijs: Om te laten zien dat deze koppeling geldt, moeten we laten zien dat S_2 en T_2 allebei de som van 2 onafhankelijke St Petersburg variabelen zijn en dat ze dus dezelfde marginale verdeling hebben. Laat hiertoe X_3 een derde St Petersburg variabele zijn zodat X_1,X_2 en X_3 onafhankelijk. Neem

$$\hat{X}_1 = X_1 I\{X_1 = X_2\} + \frac{\max(X_1, X_2)}{2} I\{X_1 \neq X_2\}$$

en neem

$$\hat{X}_2 = X_1 X_3 I\{X_1 = X_2\} + \min(X_1, X_2) I\{X_1 \neq X_2\}$$

Deze koppeling voldoet. Kijken we namelijk eerst naar de som van de twee, dan hebben we als $X_1 = X_2$,

$$\begin{aligned} 2\hat{X}_1 + \hat{X}_2 I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\} &= 2X_1 + X_1 X_3 I\{X_1 X_3 \leq X_1\} \\ &= 2X_1 = X_1 + X_2 \end{aligned}$$

en als $X_1 \neq X_2$

$$\begin{aligned} 2\hat{X}_1 + \hat{X}_2 I\{\hat{X}_2 \leq \hat{X}_1\} &= \frac{\max(X_1, X_1)}{2} + \min(X_1, X_2) I\{\min(X_1, X_2) \leq \frac{\max(X_1, X_2}{2}\} \\ &= \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \end{aligned}$$

Kijken we naar de marginale verdeling, dan hebben we voor $j, k \epsilon N$

$$\begin{aligned} P\{\hat{X}_1 = 2^j, \hat{X}_2 = 2^k\} &= P\{\hat{X}_1 = 2^j, \hat{X}_2 = 2^k, X_1 = X_2\} + P\{\hat{X}_1 = 2^j, \hat{X}_2 = 2^k, X_1 > X_2\} \\ &\quad + P\{\hat{X}_1 = 2^j, \hat{X}_2 = 2^k, X_1 < X_2\} \\ &= P\{X_1 = 2^j, X_1 X_3 = 2^k, X_1 = X_2\} + P\{X_1 = 2^{j+1}, X_2 = 2^k, X_1 > X_2\} \\ &\quad + P\{X_1 = 2^{j+1}, X_2 = 2^k, X_1 < X_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{X_1 = 2^j, X_2 = 2^k, X_3 = 2^{k-j} + 2P\{X_1 = 2^{j+1}, X_2 = 2^k, X_1 > X_2\} \\
&= \begin{cases} P\{X_1 = 2^j, X_2 = 2^j, X_3 = 2^{k-j}\}, & \text{als } k \geq j+1; \\ 2P\{X_1 = 2^{j+1}, X_2 = 2^k, X_1 > X_2\}, & \text{als } k < j+1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} P\{X_1 = 2^j, X_2 = 2^j, X_3 = 2^{k-j}\}, & \text{als } k \geq j+1; \\ 2P\{X_1 = 2^{j+1}, X_2 = 2^k\}, & \text{als } k < j+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nu hebben we in beide gevallen dat

$$P\{\hat{X}_1 = 2^j, \hat{X}_2 = 2^k\} = \frac{1}{2^j}\frac{1}{2^k} = P\{X_1 = 2^j, X_2 = 2^k\}$$

en dus hebben we een koppeling. □

Stelling 6. De strategie waarin $Paul_1$ en $Paul_2$ delen levert 1 dukaat meer op in verwachting.

Bewijs: We weten dat X_1 en X_2 dezelfde verwachting hebben, dus $E(T_2)-E(S_2) = E(X_2 I\{X_2 \leq X_1\})$. We weten dat $P\{X_1 \geq 2^k | X_2 = 2^k\} = P\{X_1 \geq 2^k\} = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} = \frac{2}{2^k}$
voor iedere $k \epsilon \mathbb{N}$. Doordat $P\{X_1 \geq X_2 | X_2\} = \frac{2}{X_2}$ hebben we:

$$E(X_2 I\{X_2 \leq X_1\}) = E(X_2 P\{X_1 \geq X_2 | X_2\}) = E(X_2 \frac{2}{X_2}) = 2$$

We hebben dus dat de *verwachting* is dat $Paul_1$ en $Paul_2$ totaal 2 dukaten meer winnen, en als ze hun winst delen ieder 1 dukaat meer kunnen verwachten. □

Stelling 7. Stel X is een niet negatieve stochastische variabele. Dan geldt

$$E(X) = \int_0^\infty P\{X > x\} dx$$

Bewijs: Doordat X niet negatief is, geldt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x f(x) dx = [xF(x)]_0^\infty - \int_0^\infty F(x) dx \\
&= 0 - \int_0^\infty F(x) dx = \int_0^\infty P\{X > x\} dx
\end{aligned}$$

En dus klopt de stelling. □

Stelling 8. Voor $N = 2^n$ en $n \epsilon \mathbb{N}$ geldt

$$E[\frac{S_N}{N} - n, X_1] = 0$$

Bewijs: Met inductie naar n. Het geval $n = 1$ is bewezen met koppelingen.
Merk eerst op dat we weten dat, via de koppeling van de 2-Paul paradox (vergelijking (4.1)) en de X_i onderling onafhankelijk

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^n X_k + X_{n+k} \stackrel{D}{=} \sum_{k=1}^n (2\hat{X}_k + \hat{X}_{n+k} I\{\hat{X}_{n+k} \leq \hat{X}_k\} = T_{2m}$$

voor $2m = n$. Verder weten we dat

$$E[S_{2m}, 2S_{2m}] = E[S_{2m}, T_{2m}] + E[T_{2m}, 2S_{2m}] = 0 + 2m = 2m$$

en dus, dat

$$E[\frac{S_{2m}}{2m} - \log 2m, \frac{S_m}{m} - \log m] = 0$$

Nu de inductiestap. We hebben voor een $m > 0$ dat $E[\frac{S_m}{m} - \log m, X_1] = 0$ geldt, en dus, voor deze $m = 2^{k-1}$ en $n = 2m = 2^k$

$$E[\frac{S_n}{n} - \log n, X_1] \quad = \quad E[\frac{S_n}{n} - \log n, \frac{S_m}{m} - \log m] + E[\frac{S_m}{m} - \log m, X_1] = 0$$

□

Stelling 9. De strategie waarin $Paul_1$ de helft van zijn winst voor zichzelf houdt, en de rest gelijk verdeelt onder de andere 2 Pauls levert in verwachting $\frac{3}{2}$ dukaat meer op, ofwel

$$E[\frac{2X_1 + X_2 + X_3}{4}, X_1] = \frac{3}{2}$$

Bewijs: Merk eerst op dat er een koppeling $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4)$ van (X_1, X_2, X_3, X_4) bestaat zodat

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\stackrel{D}{=} 2\hat{X}_1 + \hat{X}_4 I\{\hat{X}_4 \leq \hat{X}_1\} + \hat{X}_2 + \hat{X}_3 \\ &= V_1 + V_2 \end{aligned}$$

met $V_1 = 2\hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \hat{X}_3$ en $V_2 = \hat{X}_4 I\{\hat{X}_4 \leq \hat{X}_1\}$. We weten via Stelling 6 dat $E(V_2) = 2$, dus via Stelling 8 en de eigenschappen van de vergelijkingsoperator

$$\begin{aligned} E[V_1, 4X_1] &= E(V_1, V_1 + V_2) + E(V_1 + V_2, S_4) + E(S_4, 4X_1) \\ &= -2 + 0 + 8 = 6 \end{aligned}$$

en dus

$$E[\frac{2X_1 + X_2 + X_3}{4}, X_1] \quad = \quad E(\frac{V_1}{4}, X_1) = \frac{6}{4}$$

□

Voor Stelling 10 hebben we de volgende 3 Lemma's nodig (bewezen in Csörgö en Simons (2002)):

Lemma 4. Als X_1 en X_2 onafhankelijke St Petersburg variabelen dan is $E(\min(X_1, X_2) < \infty)$.

Lemma 5. Laat $U_1, U_2, ..., U_n$ niet negatieve variabelen en $n \epsilon \mathbb{N}$. Als $E(U_j, U_k) < \infty$, dan is voor iedere $n \epsilon \mathbb{N}$

$$\int_0^\infty (P(\sum_{j=1}^n U_j > x) - \sum_{j=1}^n P(U_j > x))dx = 0$$

Lemma 6. Als X_1 een St Petersburg variabele is en $b \geq 1$, dan is

$$\int_0^b P(X_1 > x)dx = 1 + \log b + \delta(b)$$

met

$$\delta(s) = 1 + \langle \log s \rangle - 2^{\langle \log s \rangle}$$

en $\langle y \rangle = y - \lfloor y \rfloor$.

Nu is de uiteindelijke stelling, waarmee we wat meer over toegevoegde waardes voor *toegestane* strategieën kunnen zeggen:

Stelling 10. De toegevoegde waarde $A(p_n) = E[p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + ... + p_{n,n}X_n, X_1$ voor een *toegestane* gokstrategie p_n is de entropie

$$A(p_n) = H(p_n) = -(p_{1,n} \log p_{1,n} + ... + p_{n,n} \log p_{n,n}) \tag{B.2}$$

met $p_{i,n} \log p_{i,n} = 0$ als $p_{i,n} = 0$.

Bewijs: Zet $U_j = p_{j,n}X_j$. Nu hebben we via Lemma 4 dat $E(\min(U_j, U_k)) < \infty$, voor $j \neq k$. Nu via Lemma 5 hebben we

$$\int_0^\infty (P(\sum_{j=1}^n p_{j,n}X_j > x) - \sum_{j=1}^n P(p_{j,n}X_j > x))dx = 0$$

en dus dat geldt

$$\int_0^b P(\sum_{j=1}^n p_{j,n}X_j > x)dx = \sum_{j=1}^n \int_0^b P(p_{j,n}X_j > x))dx + o(1) = 0 \quad \text{als } b \to \infty$$

Dus is

$$\begin{aligned} A(p_n, b) &= \int_0^b P(\sum_{j=1}^n p_{j,n}X_j > x)dx - \int_0^b P(X_1 > x)dx + o(1) = 0 \text{ als } b \to \infty \\ &= \sum_{j=1}^n p_{j,n} \int_0^{\frac{b}{p_{j,n}}} P(X_j > y)dy - \int_0^b P(X_1 > x)dx + o(1) = 0 \text{ als } b \to \infty \end{aligned}$$

Via Lemma 6 hebben we nu dat, omdat $\delta(\frac{b}{p_{j,n}}) = \delta(b)$ voor als $p_{j,n}$ een macht van $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} H(p_n, b) &= \sum_{j=1}^n p_{j,n}(1 + \log \frac{b}{p_{j,n}} - \delta(\frac{b}{p_{j,n}}) - (1 + \log b - \delta(b) + o(1) \\ &= \sum_{j=1}^n p_{j,n} \log \frac{1}{p_{j,n}} + o(1) = H(p_n) + o(1) \to H(p_n) \text{ als } b \to \infty \end{aligned}$$

□

Bijlage C

Bibliografie

Adler, A. (1990) *Generalized one-sided laws of the iterated logarithm for random variables barely with or without finite mean,* J. Theoret. Probab., **3**, 587-597.

Chow Y.S. and H. Robbins (1960) *On sums of independent random variables with infinite moments and "fair"games,* Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A., **47**, 330-335

Csörgö, S. (2002) *Rates of merge in generalized St.Petersburg games* Acta Sci. Math. **68**, 815-847.

Csörgö S. and G. Simons, (1996) *A strong law of large numbers for trimmed sums, with applications to generalized St.Petersburg games* Statis. Prob. Letters, **26**, 65-73.

Csörgö S. and G. Simons, (2002) *The two-Paul paradox and the comparison of infinite expectations* Proceedings of the Fourth Hungarian Colloquium on Limit Theorems in Probability and Statistics, Vol I, 427-456.

Csörgö S. and G. Simons, (2006) *Pooling strategies for St Petersburg gamblers* Bernoulli, **12**, 971-1002.

Feller, W. (1950) *An introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. I.

Feller, W. (1966) *An introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. II.

Martin-Löf, A. (1985) *A Limit Theorem which clarifies the 'Petersburg Paradox'* J. Appl. Prob. **22**, 634-643.

Thorisson, H. (2000) *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York.