Bindingperculatie

Kalsbeek, A.K.A.

Bindingpercolatie

A.K.A. Kalsbeek

5 juli 2007

Begeleider: Prof. Dr. W.Th.F. den Hollander

1 Abstract

Percolatietheorie is het onderdeel van de kansrekening dat zich toelegt op de studie van configurationele eigenschappen van random netwerken. We kijken naar bindingpercolatie op $\mathbb{Z}^d =$, $d \geq 2$ *(het d-dimensionale Euclidische rooster, met* $\mathbb{Z}^d$ *de roosterpunten en* $\mathbb{E}^d$ *de bindingen van het rooster) en* $\mathbb{T}_\sigma, \sigma \geq 2$ *(de gewortelde boom met vertakkingsgraad* σ*). Aan elke binding van het rooster kennen we een 'random gewicht' toe, dat we uniform trekken uit het eenheidsinterval* $[0, 1]$*. De gewichten van verschillende bindingen zijn onafhankelijk.*

Voor $p \in [0, 1]$*, zij* C_p *de cluster van de oorsprong met parameter* p*, dat wil zeggen, de verzameling van alle bindingen met gewicht* $\leq p$ *die aan elkaar hangen en de oorsprong bevatten. We zijn geïnteresseerd in de zogenaamde percolatiefunctie:*

$$\theta(p) = P(|C_p| = \infty).$$

In mijn scriptie zullen de volgende feiten bewezen worden:

1. *Voor* $d \geq 2$ *bestaat er een* $p_c \in (0, 1)$ *zodanig dat* $\theta(p) = 0$ *voor* $p < p_c$ *en* $\theta(p) > 0$ *voor* $p > p_c$.

2. *Op* $\mathbb{T}_\sigma$ *kan* $p \mapsto \theta(p)$ *bepaald worden. Er geldt* $p_c = 1/\sigma$.

3. *Op* $\mathbb{Z}^d$ *is met kans* 1 *een oneindige cluster uniek. Op* $\mathbb{T}_\sigma$ *is dit niet het geval.*

4. *De functie* $p \mapsto \theta(p)$ *is continu buiten* p_c.

Inhoudsopgave

2 Inleiding

Percolatietheorie is het onderdeel van de kansrekening dat zich toelegt op de studie van configurationele eigenschappen van random netwerken. Daarom is er een praktische richting en een theoretische richting van deze studie. In mijn scriptie heb ik me toegelegd op het begrijpen en het uitdiepen van de theoretische kant van de percolatietheorie door te gaan kijken van de meest bekende vorm van percolatie, namelijk bindingpercolatie. Voor mij leek en bleek dit een uiterst interessant onderwerp wegens twee redenen. Ten eerste omdat bindingpercolatie een totaal nieuw onderwerp voor mij was. Ten tweede omdat de mathematische problemen bij bindingpercolatie over het algemeen makkelijk te begrijpen zijn, maar het vinden van de oplossingen vaak meer moeite vergt dan verwacht. Dit laatste is uiteindelijk voor mij de doorslag geweest om (binding)percolatie te kiezen als onderwerp voor mijn bachelorscriptie aan het Mathematisch Instituut (MI) te Leiden.

De meest bekende vorm van percolatie is bindingpercolatie; dit vindt (net als percolatietheorie in zijn geheel) zijn oorsprong in een puur toegepast probleem. Een voorbeeld is het koffiezetapparaat *de percolator* (zie titelblad); hierin onstaat koffie doordat het water naar boven moet 'wandelen' door een filter met gemalen koffiebonen, dat te modelleren is als een random netwerk. Andere voorbeelden zijn: olie winnen uit poreus gesteente door er water in te pompen; verkeer in een stad; telefoonnetwerken.

Bindingpercolatie bekijkt het d-dimensionale Euclidische rooster $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, waar $\mathbb{Z}^d$ de roosterpunten zijn en $\mathbb{E}^d$ de bindingen van het rooster zijn. Vervolgens wordt onafhankelijk met dezelfde kans $p \in [0, 1]$ bepaald of een binding 'open' is of niet. Dit, met alle andere basisbegrippen voor bindingpercolatie wordt in het begin van mijn scriptie gegeven. Daarbij komt ook het belangrijke begrip open clusters naar voren. Kortweg zijn dit de maximale verbonden open componenten in $\mathbb{L}^d$. Een belangrijke gegeven in de percolatietheorie is dat er een *kritieke drempel* p_c van p bestaat, zodanig dat als $p > p_c$ elk punt $x \in \mathbb{Z}^d$ een strikt positieve kans heeft om bevat te zijn in een oneindige open cluster, en deze kans is nul als $p < p_c$. Het bestaan van deze zogenaamde percolatiedrempel zal in hoofdstuk 3 aangetoond worden, door te laten zien dat $0 < p_c < 1$ voor dimensies 2 en hoger.

Vervolgens zal in hoofdstuk 4 bindingpercolatie bekeken worden op een speciaal soort rooster, namelijk de gewortelde boom $\mathbb{T}_\sigma$ met vertakkingsgraad $\sigma \geq 2$. Hier kan in tegenstelling tot $\mathbb{L}^d$ de percolatiedrempel $p_c(\sigma)$, afhankelijk van σ, exact bepaald worden, want het blijkt dat op $\mathbb{T}_\sigma$ geldt: $p_c(\sigma) = 1/\sigma$ (alleen voor $\mathbb{L}^2$ is de waarde van p_c wel bekend, namelijk $p_c = 1/2$).

In hoofdstuk 5 zal ik dieper ingaan op de gebeurtenis dat een open cluster oneindige grootte heeft. Hierin zal ook het onderscheid gemaakt worden tussen de boom $\mathbb{T}_\sigma$ en het rooster $\mathbb{L}^d$. Want, op $\mathbb{T}_\sigma$ zorgt $p_c < p < 1$ er met kans 1 voor dat er oneindig veel oneindige open clusters zijn, terwijl op $\mathbb{L}^d$ geldt voor $p > p_c$ dat de oneindige open cluster met kans 1 uniek is. Om deze twee gevallen aan te tonen is erg veel moeite nodig; zo zal er gebruik gemaakt gaan worden van de zero-one law van Kolmogorov en de ergodenstelling. Voor de ergodenstelling zal het te ver doorvoeren om hem te bewijzen, en dus zal deze alleen gegeven worden. Maar, voor de zero-one law zal ook het bewijs volledig gegeven worden, en hiervoor is enige kennis van maat- en integratietheorie vereist.

Dan zal in hoofdstuk 6 ingegaan worden op de continuïteit van de percolatiefunctie $\theta(p)$ op $\mathbb{L}^d$, deze functie geeft voor een punt $x \in \mathbb{Z}^d$ aan wat de kans is om bevat te zijn in een oneindige open cluster. Het zal blijken dat dit een gevolg is van de zo juist genoemde uniciteit van het oneindige open cluster op $\mathbb{L}^d$.

3 Bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$

3.1 De wiskundige opbouw

Voordat we kunnen beginnen met het wiskundig bestuderen van bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$, dienen enige basisbegrippen te worden ingevoerd. Zoals, wat is $\mathbb{L}^d$? Daarom zal in deze paragraaf een aantal definities en notaties worden gegeven.

Bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$ bestudeert het d-dimensionale rooster waarbij de punten en de bindingen van dit rooster in acht moeten worden genomen. De punten van dit rooster worden gegeven door $\mathbb{Z}^d$, maar voordat de bindingen tussen deze roosterpunten gedefineerd kunnen worden moet eerst een metriek (afstandsbegrip) geïntroduceerd worden. Voor twee vectoren $x, y \in \mathbb{Z}^d$ is de afstand $\delta(x, y)$ ertussen gedefinieerd door

$$\delta(x,y) = \sum_{k=1}^{d} |x_i - y_i| \quad \text{met } x_i, y_i \text{ de } i^{\text{de}} \text{ coördinaat van, respectievelijk, } x \text{ en } y.$$

De functie δ is een metriek, omdat de absolute waarde tussen twee getallen een metriek geeft. Punten $x, y \in \mathbb{Z}^d$ met $\delta(x, y) = 1$ worden vervolgens verbonden met een recht lijnstuk dat aangeduid wordt met $<x, y>$. Op deze manier is een d-dimensionale graaf $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ ontstaan, waarbij $\mathbb{E}^d$ de verzameling is van de rechte lijnstukken, de bindingen tussen de punten $\mathbb{Z}^d$. De graaf $\mathbb{L}^d$ is op een natuurlijke manier ingebed in $\mathbb{R}^d$.

We zullen soms grote eindige deelverzamelingen van het rooster $\mathbb{L}^d$ bekijken; daarom definiëren we een doos $B(n)$ met breedte $2n$ en middelpunt in de oorsprong door

$$B(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall\ 1 \leq i \leq d \ \text{ geldt } \ |x_i| \leq n\}.$$

Laat $\mathbb{E}_{B(n)} \subset \mathbb{E}^d$ de verzameling bindingen zijn die roosterpunten in $B(n)$ met elkaar verbindt; dan is $(B(n), \mathbb{E}_{B(n)})$ een deelgraaf van $\mathbb{L}^d$.

Percolatietheorie beslaat een deelgebied in de kansrekening; daarom zal het onderwerp "kans" centraal komen te staan. De bindingen van het d-dimensionale rooster krijgen kansen toegekend die bepalen of ze open of dicht zijn. Daarom is de toestandsruimte Ω als volgt:

$$\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \{0, 1\}.$$

Een toestand $s \in \Omega$ wordt gerepresenteerd door $s = (s(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ en wordt een configuratie genoemd; $s(e) = 0$ correspondeert met de gebeurtenis dat e gesloten is, $s(e) = 1$ correspondeert met de gebeurtenis dat e open is. Er is een natuurlijke partiële ordening op de verzameling Ω, namelijk, voor $s_1, s_2 \in \Omega$ geldt

$$s_1 \leq s_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s_1(e) \leq s_2(e) \text{ voor alle } e \in \mathbb{E}^d.$$

Dus alle bindingen die open zijn in s_1 zijn ook open in s_2.

We willen een kansmaat P introduceren op de meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{F})$, met als σ-algebra $\mathcal{F}$ de verzameling deelverzamelingen van Ω die voortgebracht worden door eindig-dimensionale rechthoeken. De reden hiervoor is dat we later willen gaan praten over de lokale grootte van clusters. Derhalve nemen we als kansmaat P de productmaat met dichtheid p op $(\Omega, \mathcal{F})$ gegeven door

$$P = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} P_p^e,$$

waar P_p^e de Bernoullimaat is op $\{0,1\}$ met parameter $p \in [0,1]$, d.w.z. $P_p^e(s(e) = 0) = 1 - p$ en $P_p^e(s(e) = 1) = p$. In het vervolg zal P_p geschreven worden voor deze kansmaat P, om zodoende de afhankelijkheid van p te tonen. Dus $P_p(G)$ schrijven we voor de kans op een gebeurtenis G onder de kansmaat P_p.

3.2 De percolatiedrempel

Een belangrijk fenomeen in percolatietheorie is de zogenoemde percolatiedrempel. Dit is een kritieke drempel voor het bestaan van een oneindig groot open cluster. Wat zijn open clusters? Voordat hier het antwoord op kan worden gegeven volgt eerst een definitie van een pad in $\mathbb{L}^d$.

Een alternerende reeks $x_0, e_0, x_1, e_1, \cdots, e_{n-1}, x_n$, met $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}^d$ verschillende roosterpunten en met bindingen ertussen die gelijk zijn aan $e_0 = <x_0, x_1>, \ldots, e_{n-1} = <x_{n-1}, x_n> \in \mathbb{E}^d$, is een pad in $\mathbb{L}^d$. Dit pad heeft lengte n en het verbindt x_0 met x_n. Als alle bindingen in een pad open zijn, dan heet dit pad open, en dicht als alle bindingen dicht zijn. Een pad heet een circuit als begin- en eindpunt hetzelfde zijn.

Beschouw nu de deelgraaf van $\mathbb{L}^d$ bestaande uit alle punten in $\mathbb{Z}^d$ en alle open bindingen in $\mathbb{E}^d$. De open clusters van $\mathbb{L}^d$ zijn dan de maximaal verbonden componenten in deze deelgraaf. We schrijven $C(x)$ voor het open cluster dat het punt x bevat, wat hetzelfde is als te zeggen dat $C(x)$ het open cluster van x is. De punten van $C(x)$ vormen de verzameling van alle $y \in \mathbb{Z}^d$ die door een open pad met x verbonden zijn. En, de bindingen van $C(x)$ vormen alle $e \in \mathbb{E}^d$ die liggen in een open pad dat x met een punt y in $C(x)$ verbindt; dus dit betekent dat $C(x)$ een deelgraaf is van $\mathbb{L}^d$. Vervolgens zijn we geïnteresseerd in de grootte van $C(x)$ en schrijven we $|C(x)|$ voor het aantal roosterpunten in $C(x)$.

De percolatiedrempel heeft te maken met het bestaan van een oneindig groot open cluster en daarom is in de percolatietheorie een functie genaamd de *percolatiekans* $\theta(p)$ geïntroduceerd. Dit is de kans dat een gegeven $x \in \mathbb{Z}^d$ tot een oneindig groot open cluster behoort ($|C(x)| = \infty$). Omdat geldt dat de graaf $\mathbb{L}^d$ en de kansmaat P_p invariant zijn onder translatie, geldt dat de kansverdeling van $C(x)$ onafhankelijk is van x. Daarom kijkt men meestal naar het open cluster $C(0)$ in de oorspong en representeert men $C(0)$ kortweg door C. Zonder verlies van algemeenheid wordt een gegeven $x \in \mathbb{Z}^d$ daarom vervangen door de oorsprong. Hierdoor wordt $\theta(p)$ gedefinieerd als volgt:

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) \quad \text{met } p \in [0, 1].$$

Er geldt duidelijk dat $\theta(p)$ een niet-dalende functie is van p, met $\theta(0) = 0$ en $\theta(1) = 1$. De percolatiedrempel in percolatietheorie is dan die waarde van p, genaamd $p_c = p_c(d)$ en afhankelijk van d, zodanig dat

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{als} \quad p < p_c \\ > 0 & \text{als} \quad p > p_c. \end{cases}$$

Deze p_c wordt de *kritieke kans* genoemd en is formeel gedefinieerd door

$$p_c = \sup\{p \in [0, 1] : \theta(p) = 0\}.$$

In het rooster met dimensie 1 kunnen we de *kritieke kans* vrij eenvoudig bepalen.

Propositie 3.2.1. *Voor $d = 1$ geldt $p_c = 1$.*

Bewijs. Er geldt $\theta(1) = 1$, we stellen daarom $p < 1$.

We construeren een bindingconfiguratie voor p op het rooster $\mathbb{L}^d$. Voor elke binding e, laat $u(e)$ onafhankelijk getrokken zijn uit $[0, 1]$ volgens de uniforme verdeling. Dan zijn er twee mogelijkheden:

- e is open als $u(e) < p$
- e is gesloten als $u(e) \geq p$.

Een binding e is dan met strikt positieve kans $1 - p$ gesloten, en dit heeft als gevolg dat er met kans 1 oneindig veel gesloten bindingen links en rechts van de oorsprong zitten. Wegens het feit dat de dimensie gelijk is aan 1 betekent dit dat het open cluster C met kans 1 eindige grootte heeft. Met andere woorden $\theta(p) = 0$ voor $p < 1$, en dus voor de *kritieke kans* geldt $p_c = 1$. $\square$

Het zal in Stelling 3.2.3 blijken dat het een hele andere situatie is als we in dimensie 2 of hoger gaan kijken, want het blijkt dat voor $d \geq 2$ de percolatiedrempel voldoet aan $0 < p_c < 1$. Zie figuur 1 om alvast een indruk te krijgen hoe de percolatiefunctie $\theta(p)$ zich gedraagt voor $d \geq 2$.

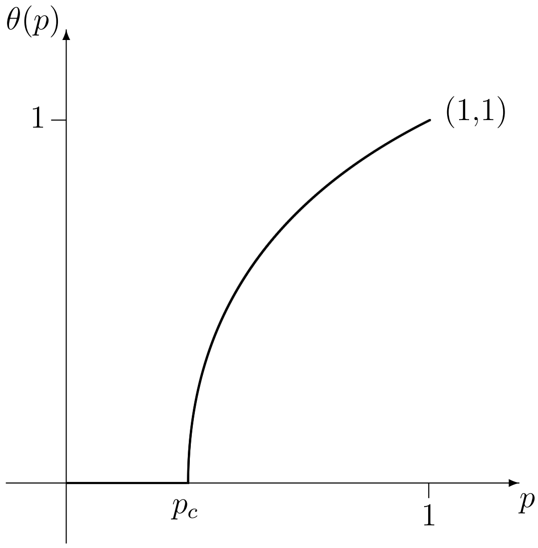

Fig. 1. Er wordt verwacht dat de percolatiefunctie $\theta(p)$ zich gedraagt voor $d \geq 2$ zoals getekend. Het is bekend (zie hoofdstuk 6) dat de percolatiefunctie continu is als functie van p, behalve mogelijk in de *kritieke kans* p_c. De mogelijkheid van een sprongdiscontinuïteit is bewezen uitgesloten te zijn voor $d = 2$ en $d \geq 19$.

Het d-dimensionale rooster $\mathbb{L}^d$ kunnen we op een natuurlijke manier inbedden in $\mathbb{L}^{d+1}$ als de projectie van $\mathbb{L}^{d+1}$ op de deelruimte voortgebracht door de eerste d coördinaten. Deze imbedding geeft ons dat als het open cluster C oneindig is in $\mathbb{L}^d$, dan ook in $\mathbb{L}^{d+1}$. Oftewel $\theta(p) = \theta_d(p)$ is een niet-dalende functie van d, waardoor geldt

$$p_c(d+1) \leq p_c(d) \quad \text{voor } d \geq 1. \tag{3.2.1}$$

Dit komt ook zeker niet als een verrassing, maar het is zodadelijk wel een belangrijk gegeven in het bewijs dat $0 < p_c < 1$ voor $d \geq 2$. We zullen daarin ook gebruik gaan maken van de zogenaamde *connectiviteitsconstante* $\lambda(d)$ gedefinieerd door

$$\lambda(d) = \lim_{n\to\infty} \sigma(n)^{1/n},$$

met $\sigma(n)$ het aantal paden van $\mathbb{L}^d$ dat begint in de oorsprong en lengte n heeft. Onze definitie van een pad is: een alternerende reeks van verschillende roosterpunten en bindingen tussen deze punten, daarom heet $\sigma(n)$ ook wel het aantal zelfmijdende paden beginnende in de oorsprong met lengte n. In tegenstelling tot $d = 1$, waar geldt $\lambda(1) = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$, is de exacte waarde van $\lambda(d)$ voor $d \geq 2$ onbekend. Er kan echter wel eenvoudig voor $d \geq 2$ een bovengrens van $\lambda(d)$ bepaald worden.

Lemma 3.2.2. *Voor $d \geq 2$ geldt $\lambda(d) \leq 2d - 1$.*

Bewijs. Voor elke nieuwe stap in een zelfmijdend pad heb je hoogstens $2d-1$ keuzes, omdat het de vorige positie moet ontwijken. Een uitzondering hiervoor is de eerste stap, want dan bestaan er nog geen voorgaande posities. Dit geeft ons dat

$$\sigma(n) \leq 2d(2d-1)^{n-1}$$

en door dit toe te passen op de definitie van $\lambda(d)$ krijgen we

$$\begin{aligned} \lambda(n) &\leq \lim_{n\to\infty} [2d(2d-1)^{n-1}]^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (2d)^{1/n}(2d-1)^{(n-1)/n} \\ &= 2d-1. \quad \square \end{aligned}$$

Nu alle basisbegrippen gegeven zijn, kunnen we een van de meest fundamentele stellingen in de percolatietheorie bewijzen. Namelijk, deze stelling gaat ons vertellen dat de kritieke drempel in dimensies 2 of hoger strikt tussen 0 en 1 ligt, wat zeker niet triviaal is. Het bestaan van deze drempel is erg interessant gebleken voor wiskundigen, en dit zorgde er dan ook voor dat veel resultaten betrekking hebben op deze kritieke drempel. We kunnen dan ook wel zeggen dat deze niet-triviale kritieke drempel een aantrekkingspunt is van de percolatietheorie.

Stelling 3.2.3. *Voor alle $d \geq 2$ geldt $0 < p_c < 1$.*

Bewijs. We zagen in (3.2.1) dat voor $d \geq 2$ geldt $p_c(d+1) \leq p_c(d)$. Hierdoor is het voldoende om te bewijzen dat $p_c(d) > 0$ voor $d \geq 2$, en $p_c(2) < 1$.

• Eerst gaan we bewijzen dat $p_c(d) > 1/(2d-1) > 0$ voor $d \geq 2$. Omdat geldt $\theta(0) = 0$, beschouwen we bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$ voor $p \in (0, 1]$ en $d \geq 2$. We definiëren $N(n)$ als het aantal open zelfmijdende paden van lengte n en beginnend in de oorsprong. Elk zelfmijdend pad van lengte n is met kans p^n open, daarom geldt het volgende:

$$\begin{aligned} E_p(N(n)) &= \sum_{i=1}^{\sigma(n)} p^n \\ &= \sigma(n)p^n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Als het open cluster C van oneindige grootte is dan bestaan er open zelfmijdende paden van elke lengte, en wegens (3.2.2) hebben we dan dat

$$\begin{aligned} \theta(p) &\leq P_p(N(n) \geq 1) \\ &\leq E_p(N(n)) \\ &= \sigma(n)p^n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Wegens de definitie van de *connectiviteitsconstante* geldt

$$\sigma(n) = [\lambda(d) + o(1)]^n,$$

en door dit substitueren in (3.2.3) krijgen we

$$\theta(p) \leq [p\lambda(d) + o(1)]^n \quad \text{als } n \to \infty. \tag{3.2.4}$$

Wanneer is voldaan aan $p\lambda(d) < 1$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} [p\lambda(d) + o(1)]^n = 0 \quad \text{als } n \to \infty,$$

dus wegens (3.2.4) is de functie $\theta(p)$ dan ook gelijk aan 0. Voor de percolatiedrempel p_c betekent dit dat $p_c(d) \geq \lambda(d)^{-1}$ en Lemma 3.2.2 geeft ons het beoogde resultaat, namelijk,

$$p_c(d) \geq \lambda(d)^{-1} \geq 1/(2d-1) > 0 \quad \text{voor } d \geq 2.$$

• In dit tweede gedeelte van het bewijs zullen we aantonen dat voor de *kritieke drempel* in twee dimensies het volgende geldt: $p_c(2) < 1$. We beschouwen daarom bindingpercolatie op $\mathbb{L}^2$; we zullen laten zien dat $\theta(p) > 0$ als p dicht genoeg bij 1 is. Hiervoor zal de planaire duale graaf van $\mathbb{L}^2$ erg handig blijken.

Laat G een planaire graaf zijn, d.w.z. G kan getekend worden in het platte vlak op zo'n manier dat de bindingen elkaar slechts snijden in de punten. Elke planaire graaf G wordt verdeeld in gebieden door zijn bindingen, dus elke binding van G is een grens tussen twee verschillende gebieden of ligt geheel binnen een gebied. Duidelijk is $\mathbb{L}^2$ een planaire graaf en daarvoor zijn we eenvoudig in staat om de gebieden te geven. Want, $\mathbb{L}^2$ is op een natuurlijke manier ingebed in $\mathbb{R}^2$ en daardoor zijn de gebieden van $\mathbb{L}^2$ de volgende vierkanten in $\mathbb{R}^2$:

$$(i, i+1) \times (j, j+1) \quad \text{met } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Nu verkrijgen we uit G de planaire duale graaf G_d op de volgende manier. We plaatsen in elk gebied van G een punt en vervolgens verbinden we twee verschillende punten in G_d als daarvan de twee corresponderende gebieden van G een grens delen. Met behulp van figuur 2 is makkelijk in te zien dat de planaire duale graaf $\mathbb{L}_d^2$ van $\mathbb{L}^2$ isomorf is aan $\mathbb{L}^2$ zelf.

Om formeel te zijn, de punten van de duale graaf $\mathbb{L}_d^2$ vormende verzameling $\mathbb{Z}_d^2 = \{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{Z}^2\}$ en de bindingen van $\mathbb{L}_d^2$ vormen de verzameling $\mathbb{E}_d^2$ bestaande uit alle rechte lijnsegmenten tussen twee punten $x, y \in \mathbb{Z}_d^2$ zodanig dat $\delta(x, y) = 1$. Merk op dat de functie δ (zie p.5) op $\mathbb{Z}_d^2$ welgedefinieerd is.

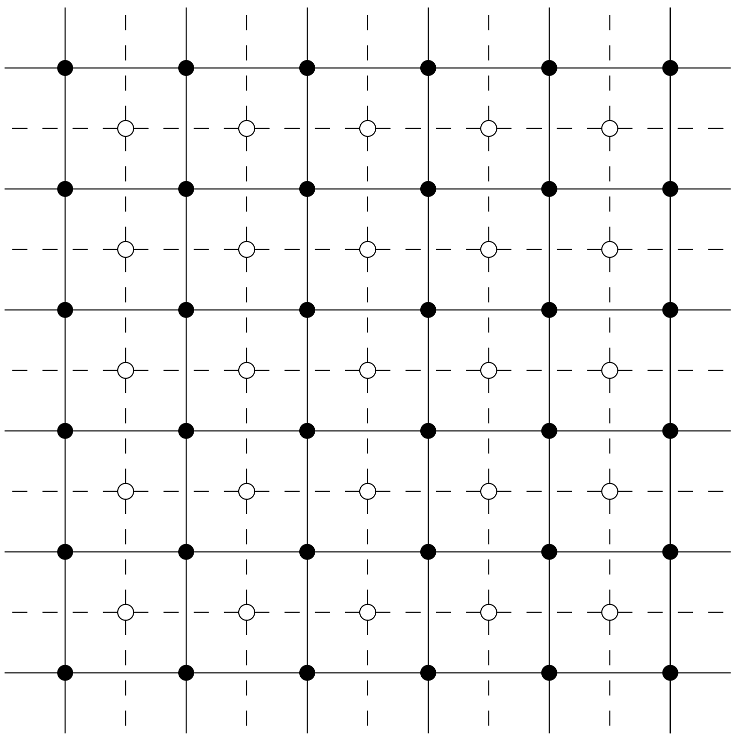

Fig. 2. Dit plaatje laat een deel van de planaire graaf $\mathbb{L}^2$ zien samen met zijn duale graaf $\mathbb{L}_d^2$ (gestippeld).

Omdat $\mathbb{L}^2$ isomorf is aan zijn duale $\mathbb{L}_d^2$ bestaat er ook een bijectie ϕ tussen $\mathbb{E}^2$ en $\mathbb{E}_d^2$ (voor dit bewijs hebben we alleen een bijectie nodig). Namelijk, ϕ is (op translaties na) gelijk aan

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{E}^2 &\rightarrow \mathbb{E}_d^2 \\ e &\mapsto e_d \quad \text{als } e \text{ doorsneden wordt door } e_d. \end{aligned}$$

Want, de functie ϕ is bijectief en welgedefinieerd omdat elke binding in $\mathbb{E}^2$ door een unieke binding in $\mathbb{E}_d^2$ gesneden wordt.

Dit geeft ons ook een bijectie η tussen de toestandsruimte Ω van $\mathbb{L}^2$ en de toestandsruimte Ω_d van $\mathbb{L}_d^2$. De functie η is dan afhankelijk van ϕ als volgt gegeven:

$$\begin{aligned} \eta : \Omega &\rightarrow \Omega_d \\ s &\mapsto s_d = (s(\phi(e)) : e \in \mathbb{E}^2). \end{aligned}$$

Door deze functie η zien we dat er een 1-1 correspondentie is tussen bindingpercolatie op $\mathbb{L}^2$ en bindingpercolatie op $\mathbb{L}_d^2$ met dezelfde dichtheid p. Door deze 1-1 correspondentie zien we duidelijk het volgende: de open cluster C in $\mathbb{L}^2$ is eindig d.e.s.d.a. de oorsprong van $\mathbb{L}^2$ binnen een gesloten circuit (zie definitie circuit p.6) van $\mathbb{L}_d^2$ ligt.

Deze relatie geeft ons dat we op dezelfde manier verder kunnen als in het eerste gedeelte van het bewijs, namelijk, het tellen van het aantal van zulk soort gesloten circuits in $\mathbb{L}_d^2$. Laat $\rho(n)$ het aantal circuits in $\mathbb{L}_d^2$ zijn dat lengte n heeft en dat de oorsprong van $\mathbb{L}^2$ omringt. We schatten $\rho(n)$ als volgt af. Elk zo'n circuit passeert minstens één punt $x = (k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}_d^2$ voor een zekere $0 \leq k < n$, wegens twee redenen. Ten eerste omringt zo'n circuit de oorsprong van $\mathbb{L}^2$ en passeert daarom een punt $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ met $k \geq 0$. En, ten tweede kan het niet een punt passeren van de vorm $(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ met $k \geq n$, omdat de lengte van het circuit dan tenminste gelijk is aan $2n$.

Een gevolg is dat zo'n circuit een zelfmijdend pad bevat van lengte $n - 1$ met een beginpunt $x = (k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}_d^2$ voor een zekere $0 \leq k < n$. Het aantal van zulke zelfmijdende paden kan ten hoogste $n\sigma(n-1)$ zijn (zie de definitie van $\sigma(n)$ op p.9), dus we hebben dat

$$\rho(n) \leq n\sigma(n-1). \tag{3.2.5}$$

Nu, laat γ een circuit zijn in $\mathbb{L}_d^2$ die de oorsprong van $\mathbb{L}^2$ omringt. We zetten $q = 1 - p$; dan hebben wegens (3.2.5) en het feit dat een circuit γ van lengte

n met kans q^n gesloten is dat

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ is gesloten}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n n\sigma(n-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} qn[q^{n-1}\sigma(n-1)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} qn[q\lambda(2)+o(1)]^{n-1} \quad \text{analoog aan (3.2.4)} \\
&< \infty \quad \text{als } q\lambda(2) < 1,
\end{aligned}$$

waar de sommatie is over alle circuits γ. Tevens geldt dat

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ is gesloten}) \to 0 \quad \text{als } q = 1-p \downarrow 0,$$

dus we kunnen een p_0 vinden die voldoet aan $0 < p_0 < 1$ zodanig dat

$$\sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ is gesloten}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{als } p > p_0. \tag{3.2.6}$$

Vervolgens defiëren we $M(n)$ als het aantal gesloten circuits γ die lengte n hebben. Dan geeft (3.2.6) dat

$$\begin{aligned}
P_p(|C| = \infty) &= P_p(M(n) = 0 \text{ voor alle } n) \\
&= 1 - P_p(M(n) \geq 1 \text{ voor een zekere } n) \\
&\geq 1 - \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ is gesloten}) \\
&\geq \frac{1}{2} \quad \text{als } p > p_0.
\end{aligned}$$

Hierdoor geldt dat $p_c(2) \leq p_0$, en omdat $0 < p_0 < 1$ hebben we bewezen dat $p_c(2) < 1$.

Nu bewijst het eerste gedeelte van dit bewijs, $p_c(d) > 0$ voor $d \geq 2$, samen met het tweede gedeelte dit bewijs, $p_c(2) < 1$, dat de *kritieke drempel* strikt tussen 0 en 1 zit voor $d \geq 2$. $\square$

Stelling 3.2.3 geeft ons al veel informatie over de waarde van p_c voor dimensies twee en hoger, maar er is al veel meer bekend over het gedrag van $p_c(d)$. Namelijk, m.b.v. de zogenaamde FKG ongelijkheid kan bewezen worden dat $p_c(2) < 1 - \lambda(2)^{-1}$ (zie Grimmett [2] p. 18). En er is bekend dat $p_c(d) \sim (2d)^{-1}$ als $d \to \infty$.

4 Bindingpercolatie op $\mathbb{T}_\sigma$

4.1 De gewortelde boom $\mathbb{T}_\sigma$

Een speciaal soort rooster is de gewortelde boom met vertakkingsgraad $\sigma \geq 2$ (notatie: $\mathbb{T}_\sigma$). Een boom $\mathbb{T}_\sigma$ begint met een wortel r, die σ kinderen produceert. Dan behoren deze eerste σ kinderen tot de 1^{ste} generatie. Vervolgens produceert elk van deze kinderen weer σ kinderen, die behoren tot de 2^e generatie, enzovoort. De producent van een kind noemt men de ouder van het kind. Zodoende kan elk kind gerepresenteerd worden als een roosterpunt, dat verbonden is met zijn ouder en met de σ kinderen die het produceert. Wanneer een kind λ uit de n^e generatie komt, dan zullen we dat noteren als $|\lambda| = n$. Op deze manier ontstaat weer een graaf $\mathbb{T}_\sigma = (K_\sigma, L_\sigma)$ met K_σ de verzameling van alle kinderen in de boom, en L_σ de verzameling voor alle bindingen in de boom. Als een $\lambda \in K_\sigma$ met een open binding verbonden is met zijn ouder, dan zullen we spreken van een voortplanting van deze ouder. Voor elke ouder gebeurt deze voortplanting onafhankelijk. Omdat $\mathbb{T}_\sigma$ een graaf is, zijn dezelfde definities van kracht voor bindingpercolatie op $\mathbb{T}_\sigma$ als op $\mathbb{L}^d$. Het zal blijken dat bindingpercolatie op $\mathbb{T}_\sigma$ simpeler is dan op $\mathbb{L}^d$, omdat het pad tussen twee verschillende kinderen uniek bepaald is. We zijn dan ook in staat om de percolatiedrempel beter te begrijpen dan voor $\mathbb{L}^d$.

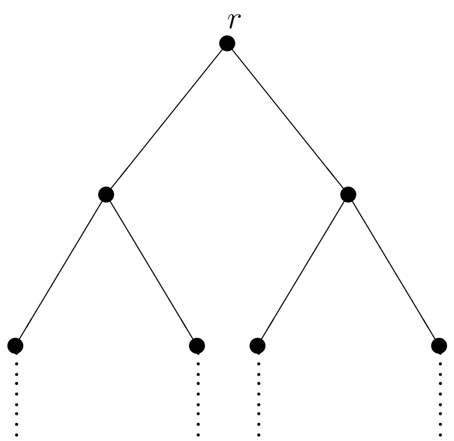

Fig. 3. Dit plaatje is de gewortelde boom met vertakkingsgraad $\sigma = 2$.

4.2 De percolatiedrempel op $\mathbb{T}_\sigma$

Allereerst schrijven we C_σ voor de open cluster van $\mathbb{T}_\sigma$ die de wortel r bevat. Het verrassende van percolatie op de boom is nu dat de *kritieke kans* $p_c(\sigma)$ exact bepaald kan worden. Dit in tegenstelling tot Bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$, waar men tot op heden met veel moeite alleen $p_c(2) = 1/2$ heeft kunnen bepalen. Voor andere dimensies is men nog steeds op zoek naar het antwoord. Dus laten we de percolatiedrempel op de boom $\mathbb{T}_\sigma$ eens nader gaan bekijken aan de hand van de volgende stelling.

Stelling 4.2.1. *Voor de boom* $\mathbb{T}_\sigma$ *geldt* $p_c(\sigma) = 1/\sigma$.

Bewijs. Definieer afhankelijk van σ en n het volgende:

$$\begin{aligned} N_\sigma(n) &= \#\{\text{kinderen uit de } n^e \text{ generatie in de boom } \mathbb{T}_\sigma \\ &\qquad \text{die bevat zijn in het open cluster } C\} \\ &= \#\{\lambda \in K_\sigma \text{ zodanig dat } |\lambda| = n \text{ en } \lambda \in C\}. \end{aligned}$$

Voor $n = 0$ geldt $N_\sigma(0) = 1$. Vervolgens plant de wortel r (0^e generatie) zich voort, waardoor het aantal voortplantingen van r gelijk wordt aan $N_\sigma(1)$. Elk van deze $N_\sigma(1)$ kinderen plant zich ook weer voort, waardoor het totaal van al deze voortplantingen gelijk wordt aan $N_\sigma(2)$. En zo blijft het proces zich herhalen. We definieren nu de volgende stochast voor een kind $\lambda \in K_\sigma$:

$$X_\lambda = \#\{\text{voortplantingen van } \lambda\}.$$

Tussen twee verschillende kinderen bestaat geen verschil in hoe ze zich voortplanten. Voor elk kind wordt σ keer met kans p een voortplanting gerealiseerd. Dus er geldt

$$\forall \lambda \in K_\sigma : \; X_\lambda \sim Bin(\sigma, p).$$

Voor X_λ schrijven we daarom kortweg X. Met het vorige gegeven wordt dan bepaald

$$N_\sigma(n) = \sum_{i=1}^{N_\sigma(n-1)} X_{(i)}^{n-1}.$$

Hier is $X_{(1)}^{n-1}, X_{(2)}^{n-1}, X_{(3)}^{n-1}, \ldots$ een rijtje van onfhankelijke stochasten met allemaal dezelfde verdeling als X, en voor alle $n \geq 1$ geldt dat $N_\sigma(n)$ een $\mathbb{N}$-waardige stochast is. En, als G_X de kansgenererende functie is van X en

$G_{N_\sigma(n)}$ de kansgenerende functie is van $N_\sigma(n)$, dan geldt het volgende:

$$\begin{aligned}
G_{N_\sigma(n)}(s) &= E(s^{N_\sigma(n)}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_p(N_\sigma(n-1)=k)E_p(s^{N_\sigma(n)}|N_\sigma(n-1)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_p(N_\sigma(n-1)=k)E_p(s^{\sum_{i=1}^{k} X_{n-1}^{(i)}}|N_\sigma(n-1)=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_p(N_\sigma(n-1)=k)[E(s^X)]^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_p(N_\sigma(n-1)=k)[G_X(s)^k] \\
&= G_{N_\sigma(n-1)}(G_X(s)) \quad \text{voor } n \geq 1
\end{aligned}$$

Deze recursierelatie kan worden geitereerd: $G_{N_\sigma(n)}(s) = G_X(G_X(G_X(\ldots(s))))$, waar we gebruiken dat $N_\sigma(1)$ gelijk is aan X. Uit deze relatie volgt dan omgekeerd

$$G_{N_\sigma(n)}(s) = G_X(G_{N_\sigma(n-1)}(s)) \qquad \text{voor } n \geq 1. \tag{4.2.1}$$

Met behulp van deze kansgenerende functies kunnen we $p_c(\lambda)$ exact bepalen. Hiervoor speelt de kans dat de populatie uitsterft, dat wil zeggen na een bepaalde generatie zijn er geen nieuwe voortplantingen meer, een belangrijke rol. Daarom definieren we de kans dat er voor generatie $n \geq 1$ geen enkel punt bevat is het open cluster C_σ:

$$p_{\sigma,n} = P_p(N_\sigma(n) = 0).$$

We weten dat, zodra $N_\sigma(n) = 0$, er voor alle $n' > n$ geldt $N_\sigma(n') = 0$; dus de rij $\{p_{\sigma,n}\}_{n=1}^{\infty}$ is niet-dalend. Een kans kan nooit groter zijn dan 1, dus het getal 1 is een bovengrens voor deze rij. De Monotone Convergentiestelling zegt dan dat de rij $\{p_{\sigma,n}\}_{n=1}^{\infty}$ een limiet L heeft. En hier komen kansgenererende functies goed van pas, want er geldt wegens (4.2.1)

$$\begin{aligned}
p_{\sigma,n} &= G_{N_\sigma(n)}(0) \\
&= G_X(G_{N_\sigma(n-1)}(0)) \\
&= G_X(p_{\sigma,n-1}).
\end{aligned}$$

Per definitie geldt dat $L = \lim_{n\to\infty} p_{\sigma,n} = \lim_{n\to\infty} p_{\sigma,n-1}$, en omdat G_X continu is moet L dus een oplossing zijn van de vergelijking

$$G_X(s) = s. \tag{4.1.2}$$

Nu is $X \sim Bin(\sigma, p)$, dus zijn kansgenererende functie is gelijk aan

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} p^k (1-p)^{\sigma-k} s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{k} (ps)^k (1-p)^{\sigma-k} \\ &= (1-p+ps)^{\sigma}. \end{aligned}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} G'_X(s) &= \sum_{k=1}^{\sigma} k P_p(X=k) s^{k-1} \\ &= \sigma(1-p+ps)^{\sigma-1} p \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} G''_X(s) &= \sum_{k=2}^{\sigma} k(k-1) P_p(X=k) s^{k-2} \\ &= \sigma(\sigma-1)(1-p+ps)^{\sigma-2} p^2. \end{aligned}$$

Omdat voor alle $k \in \{0, 1 \ldots, \sigma\}$ geldt dat $P_p(X = k) \geq 0$, en omdat er minstens één k bestaat waarvoor $P_p(X = k) > 0$, weten we dat voor $0 < p < 1$ en $s \geq 0$ geldt dat

$$G'_X(s) > 0 \qquad \text{én} \qquad G''_x(s) > 0.$$

Dit is equivalent aan: voor alle $s \geq 0$ en $0 < p < 1$ is $G_X(s)$ een strikt convexe en strikt stijgende functie. Dus voor $s \geq 0$ kan de lijn $y = s$ de functie $G_X(s)$ maximaal twee keer snijden. Er geldt

$$G_X(1) = 1^{\sigma} = 1,$$

dus is $s = 1$ in ieder geval een oplossing van vergelijking (4.1.2). Omdat

$$G_X(0) = (1-p)^{\sigma} > 0 \;\text{ als } p < 1,$$

volgt dat er alleen dan een oplossing kleiner dan 1 voor vergelijking (4.1.2) bestaat wanneer geldt

$$G'_X(1) = E_p(X) > 1. \tag{4.1.3}$$

Wanneer er een oplossing kleiner dan 1 bestaat, dan is er een kans kleiner dan 1 dat de populatie uitsterft, want de oplossing van vergelijking (4.1.2) is gelijk aan de limiet L van het rijtje $\{p_{\sigma,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Nu geldt (4.1.3) als voldaan is aan

$$G'_X(1) = E_p(X) = \sigma p > 1,$$

dus als $p > 1/\sigma$. Anders sterft de populatie met kans 1 uit. De kans dat $|C_\sigma| = \infty$ is gelijk aan 1 minus de kans dat de populatie uitsterft, en daarom geldt voor de percolatiefunctie dat

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{als} \quad p \leq 1/\sigma \\ > 0 & \text{als} \quad p > 1/\sigma. \end{cases}$$

Concluderend, de *kritieke kans* is gelijk aan $1/\sigma$, en daarmee hebben we het bewijs van de stelling rond. $\square$

Op de boom $\mathbb{T}_\sigma$ kan niet alleen de waarde van de *kritieke kans* bepaald worden, maar ook de waarde van $\theta(p)$. Dit kan gedaan worden door (numeriek) de oplossingen van de vergelijking $G_X(s) = s$ te vinden. Immers, het bewijs laat zien dat $1 - \theta(p)$ de *kleinste* oplossing is van deze vergelijking.

5 Oneindige open clusters op $\mathbb{L}^d$ en op $\mathbb{T}_\sigma$

5.1 Het bestaan van een oneindig open cluster

In dit hoofdstuk zullen we de oneindige open clusters op $\mathbb{L}^d$ en op $\mathbb{T}_\sigma$ nader gaan bestuderen. Het blijkt dat er tussen het rooster $\mathbb{L}^d$ en de boom $\mathbb{T}_\sigma$ een verschil is in het bestaan van een oneindige open cluster, namelijk, op $\mathbb{L}^d$ geldt dat er met kans 1 een *uniek* oneindig open cluster is, terwijl op $\mathbb{T}_\sigma$ geldt dat er met kans 1 *oneindig veel* oneindige open clusters zijn. Deze uniciteit op $\mathbb{L}^d$ en niet-uniciteit $\mathbb{T}_\sigma$ zullen we later gaan bewijzen. We zullen eerst moeten weten wanneer er überhaupt een oneindige open cluster bestaat.

Er geldt voor $\mathbb{L}^d$ dat, zodra $p > p_c(d)$, er voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ een strikt positieve kans is dat de gebeurtenis $\{|C(x)| = \infty\}$ zich voordoet. En voor $\mathbb{T}_\sigma$ geldt dat, zodra $p > p_c(\sigma)$, er voor alle $k \in K_\sigma$ een strikt positieve kans is dat de gebeurtenis $\{|C_\sigma(k)| = \infty\}$ zich voordoet. Kiezen we σ en d vast, dan kunnen we de *kritieke drempel* voor $\mathbb{L}^d$ en $\mathbb{T}_\sigma$ allebei noteren met p_c. Dan is de volgende stelling voor beide van toepassing.

Stelling 5.1.1. *De kans $\Psi(p)$ dat er een oneindig open cluster bestaat voldoet aan*

$$\Psi(p) \begin{cases} = 0 & \text{als} \quad p < p_c \\ = 1 & \text{als} \quad p > p_c \end{cases}$$

Deze stelling zegt in feite dat als we de *kritieke drempel* gepasseerd zijn (d.w.z. als $p > p_c$) er met kans 1 *één of meer* oneindige open clusters bestaan. Hij zegt niets over het bestaan van een oneindige open cluster als $p = p_c$. Er is bewezen dat er geen oneindige open clusters bestaan wanneer $d = 2$ en $p = p_c(d)$, maar het is een open vraag of hetzelfde geldt als $d \geq 3$. Voor $d \geq 19$ is het echter weer wel bewezen.

Kolmogorov's zero-one law zal gebruikt worden om Stelling 5.1.1 te bewijzen. De zero-one law is een bijzondere stelling die veel toegepast wordt in de wiskunde en dit is dan ook de reden om eerst deze interessante stelling eens nader te gaan bekijken. We zullen deze stelling aantonen volgens het bewijs van Breiman (zie Breiman [1] p.40). De zero-one law zegt dat de kans op een staartgebeurtenis gelijk aan 0 of 1 is. Wat is een staartgebeurtenis? Denk hierbij aan een oneindig proces van willekeurige variabelen die onafhankelijk zijn van een eindig deel van het proces. Bijvoorbeeld, we gooien n keer met een eerlijke munt, waarbij 1 staat voor het gooien van kop, en 0 voor het gooien van munt. We schrijven S_n voor het empirische gemiddelde van dit proces, d.w.z. $\frac{1}{n}$ keer de som van de worpen. De sterke wet van de grote aantallen geeft ons dat $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ met kans 1, en het is evident dat de waarde van deze limiet niet verandert als je eindig veel uitkomsten van dit proces verwijdert.

De context die nodig is om Kolmogorov's zero-one law te bewijzen is een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ met een aantal definities.

Definitie 5.1.2. *Gegeven een reëel-waardige functie $X(\omega)$ op Ω. De functie $X(\omega)$ wordt een random variabele op $(\Omega, \mathcal{F})$ genoemd als voor alle B in de Borel-σ-algebra in $\mathbb{R}$ (notatie: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) geldt: $\{\omega \in \Omega$ zodanig dat $X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.*

Dit zegt dat de random variabele $X(\omega)$ een meetbare functie is van Ω naar $\mathbb{R}$. Een abstracte definitie van een random variabele is nodig, omdat zodadelijk een rijtje random variabelen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ een rol gaat spelen. Een belangrijke plaats wordt ingenomen door de σ-algebra $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ bestaande uit alle verzamelingen van de vorm

$$\{\omega \in \Omega \text{ zodanig dat } \mathbf{X}(\omega) \in B\} \quad \text{met } B \in \mathcal{B}_\infty,$$

waar $\mathcal{B}_\infty$ de Borel-σ-algebra in $\mathbb{R}^\infty$ is. Dit zegt weer dat $\mathbf{X}(\omega)$ een meetbare functie is van Ω naar $\mathbb{R}^\infty$.

Definitie 5.1.3. *Laat $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ een rijtje random variabelen op $(\Omega, \mathcal{F})$ zijn. Een verzameling $E \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$ heet een staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$ als voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $E \in \mathcal{F}(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. Equivalent, laat $\mathcal{S}$ de σ-algebra $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ zijn, dan heet $\mathcal{S}$ de staart-σ-algebra van $\mathbf{X}$ en elke verzameling $E \in \mathcal{S}$ heet een staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$.*

Deze definitie maakt de bewering formeel wanneer we willen zeggen dat bepaalde gebeurtenissen niet afhankelijk zijn van eindig veel uitkomsten, zoals in het voorbeeld van een eerlijke munt. Het stelt ons ook in staat om Kolmogorov's zero-one law precies te formuleren. Daarbij moet er onthouden worden dat bovenstaande definities zijn gegeven voor een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, waarbij P een maat is op $(\Omega, \mathcal{F})$. Omdat $\mathbf{X}(\omega)$ een rijtje random variabelen op $(\Omega, \mathcal{F})$ is, is het gezien de constructie van $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ min of meer evident dat er een unieke uitbreiding $\mathbf{P}$ van P bestaat, zodanig dat $\mathbf{P} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}^\infty$ (dit heet de Kolmogorov uitbreidingsstelling). Hierdoor is voor een staartgebeurtenis E van $\mathbf{X}$ de kans $\mathbf{P}(E)$ gedefinieerd.

Stelling 5.1.4. *(Kolmogorov's zero-one law.) Zij de kansmaat $\mathbf{P}$ de unieke uitbreiding van P, zodanig dat $\mathbf{P} : \mathcal{F}(\mathbf{X}) \to \mathbb{R}^\infty$. Laat $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ een rijtje onafhankelijke random variabelen op $(\Omega, \mathcal{F})$ zijn. Als de verzameling E een staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$ is, dan geldt: $\mathbf{P}(E) = 0$ of $\mathbf{P}(E) = 1$.*

Bewijs. Per aanname geldt: $E \in \mathcal{F}(\mathbf{X})$. Voor twee verzamelingen V en V' is het symmetrische verzamelingsverschil $V \triangle V'$ gedefinieerd door

$$V \triangle V' = (V \cup V') \setminus (V \cap V').$$

Een approximatieresultaat (zie Breiman [1] p.30) volgend uit de Carathéodory extension theorem (zie Verduyn Lunel, Hille [4] p.30), een algemene stelling in de maat- en integratietheorie, is dat er voor de verzameling E geldt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \epsilon > 0 :\ \exists E_n \in \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n) \text{ zodanig dat } \hat{P}(E \triangle E_n) \leq \epsilon.$$

Voor een gegeven n kunnen we $\epsilon > 0$ van n laten afhangen, zodanig dat $\epsilon \to 0$ als $n \to \infty$. Volgens bovenstaand resultaat ontstaat er dan een rijtje $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ waarvoor geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E \triangle E_n) = 0.$$

We bepalen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E \triangle E_n) &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[(E \cup E_n) \setminus (E \cap E_n)] &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} [\mathbf{P}(E \cup E_n) - \mathbf{P}(E \cap E_n)] &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} [\mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(E_n) - 2\mathbf{P}(E \cap E_n)] &= 0.
\end{aligned}$$

En, omdat $(E \cap E_n) \subset E$ en $(E \cap E_n) \subset E$, moet gelden

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(E) \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \quad \mathbf{P}(E \cap E_n) = \mathbf{P}(E). \tag{5.1.1}$$

We hebben een rijtje onafhankelijke random variabelen $X_1, X_2, \ldots$ op $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dit betekent dat voor alle verzamelingen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ geldt:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in B_k) \quad \text{voor alle } n.$$

Nu zijn de σ-algebra's $\mathcal{F}(X_1), \mathcal{F}(X_2), \ldots \subset \mathcal{F}(\mathbf{X})$ onafhankelijk van elkaar als voor alle verzamelingen $F_1 \in \mathcal{F}(X_1), F_2 \in \mathcal{F}(X_2), \ldots,$ geldt:

$$\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(F_k) \quad \text{voor alle } n,$$

en merk hierbij op dat $\mathbf{P}(F_k) = P(F_k)$.

Duidelijk zijn de random variabelen $X_1, X_2 \ldots$ onafhankelijk van elkaar d.e.s.d.a. $\mathcal{F}(X_1), \mathcal{F}(X_2), \ldots$ onfhankelijke σ-algebra's zijn. Per constructie geldt dat $E_n \in \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$ en, omdat E een staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$ is, geldt $E \in \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$. Dus E en E_n zijn bevat in onafhankelijke σ-algebra's. Hierdoor geldt:

$$\mathbf{P}(E \cap E_n) = \mathbf{P}(E)\mathbf{P}(E_n).$$

Door de limiet $n \to \infty$ te nemen krijgen we wegens (5.1.1) de volgende vergelijking

$$\mathbf{P}(E) = [\mathbf{P}(E)]^2.$$

De enige oplossingen hiervan zijn: $\mathbf{P}(E) = 0$ en $\mathbf{P}(E) = 1$. $\square$

Met de zero-one law tot onze beschikking zijn we vrij eenvoudig in staat om het bewijs van Stelling 5.1.1 te geven, omdat het bestaan van een oneindige open cluster een staartgebeurtenis is.

Bewijs van Stelling 5.1.1. Herinner dat we voor $\mathbb{L}^d$ (en ook voor $\mathbb{T}_\sigma$) een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ hebben (zie §4.2 p.5-6). Dit geeft ons een functie $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ van $(\Omega, \mathcal{F})$ naar $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}_\infty)$, $\mathbf{X}: \ \Omega \to \mathbb{R}^\infty$, met $X_1, X_2, \ldots$ onafhankelijke random variabelen die elk voor een andere binding $e \in \mathbb{E}^d$ (en voor de boom $e \in L_\sigma$) aangeeft of e open of gesloten is.

Een oneindig open cluster bestaat uit oneindig veel open bindingen, dus de gebeurtenis $G = \{\mathbb{L}^d$ bevat een oneindig open cluster$\}$ is duidelijk niet afhankelijk van een willekeurig eindig aantal onafhankelijke random variabelen $X_1, \ldots, X_n$ (dit geldt ook als we $\mathbb{L}^d$ vervangen door $\mathbb{T}_\sigma$). Dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ is de gebeurtenis G bevat in $\mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$.

Per definitie is G dan een staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$ en Stelling 5.1.4 geeft ons $P_p(G) = 0$ of $P_p(G) = 1$. Merk op dat $\Psi(p) = P_p(G)$. Als $p < p_c$, dan

$$\Psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(|C(x)| = \infty) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} 0 = 0.$$

In dit geval is $\Psi(p)$ dus gelijk aan 0. Aan de andere kant, als $p > p_c$ dan

$$\Psi(p) \geq P_p(|C| = \infty) > 0.$$

In dit geval is $\Psi(p)$ dus gelijk aan 1. $\square$

Door deze laatste stelling weten we nu dat, als we de *kritieke drempel* voor $\mathbb{L}^d$ of voor $\mathbb{T}_\sigma$ gepasseerd zijn ($p > p_c(d)$ en $p > p_c(\sigma)$), er dan voor allebei geldt dat er met kans 1 minstens één oneindig open cluster bestaat. Maar, over hoeveel het er precies zijn zegt deze stelling niets.

5.2 De Ergodenstelling

In de vorige paragraaf wilden we weten of er minstens één oneindig open cluster bestaat zodra $p > p_c$. Het antwoord is met kans 1 ja. Nu is de vraag hoeveel het er zijn. Er blijkt dat dit aantal gelijk is aan 1 met kans 1 (uniciteit) óf ∞ met kans 1. Echter, voordat we dit kunnen bewijzen is eerst nog wat extra wiskundig materiaal nodig. Eerder hadden we de Kolmogorov's zero-one law nodig, en zo hebben we nu een andere stelling uit de wiskunde nodig, namelijk de Ergodenstelling (zie Breiman [1] p109-110, 112-113). We zullen deze theoretische stelling in dit geval alleen formuleren, omdat het veel te ver doorvoert om hem te bewijzen.

De Ergodenstelling is toepasbaar voor functies die translatie-invariant zijn, en als we nu een functie $N_{\mathbb{L}^d}$ definiëren die zegt hoeveel oneindig open clusters er bestaan op $\mathbb{L}^d$, dan is dit een voorbeeld van een translatie-invariante functie. Dit zou misschien al een idee kunnen geven waarom de Ergodenstelling zo belangrijk voor ons zal zijn.

Alvorens wij de Ergodenstelling kunnen formuleren, zullen we eerst een aantal definities moeten geven. De definities zullen gegeven zijn voor de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ op $\mathbb{L}^d$, want hiervoor zullen we de Ergodenstelling ook gaan toepassen. Een translatie-invariante functie van Ω zullen we definiëren voor functies die waarden aannemen in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$; de reden hiervoor is dat voor de functie $N_{\mathbb{L}^d}$ geldt $\mathrm{Im}[N_{\mathbb{L}^d}] = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Echter, voor een translatie-invariante functie zou elke willekeurige verzameling X als beeldruimte gekozen kunnen worden.

Definitie 5.2.2. *Voor een gegeven $x \in \mathbb{Z}^d$ definiëren we een translatie τ_x op Ω door*

$$\begin{aligned} \tau_x : \Omega &\rightarrow \Omega \\ s &\mapsto s' \quad \text{met } \forall y \in \mathbb{E}^d : \ s'(y) = s(x+y). \end{aligned}$$

Definitie 5.2.3. *Een functie $f : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heet translatie-invariant als voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ geldt:*

$$f[s] = f[\tau_x(s)].$$

Definitie 5.2.4. *Een gebeurtenis $E \in \mathcal{F}$ heet translatie-invariant als voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ geldt:*

$$s \in E \iff \tau_x(s) \in E.$$

Merk op: een translatie-invariante gebeurtenis $E \in \mathcal{F}$ impliceert dat de indicatorfunctie $1_E : \Omega \to \{0,1\}$ translatie-invariant is.

Definitie 5.2.5. *De maat $P_p : \mathcal{F} \to [0,1]$ heet ergodisch als voor alle translatie-invariante gebeurtenissen $E \in \mathcal{F}$ geldt:*

$$P_p(E) = 0 \quad of \quad P_p(E) = 1.$$

Met behulp van bovenstaande definities zijn we voor nette functies f (meer precies: $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, P_p)$, zie Verduyn Lunel, Hille [4] p.52) in staat om de Ergodenstelling te formuleren. Er valt op te merken dat de Ergodenstelling equivalent is aan Definitie 5.2.5.

Stelling 5.2.6. *(Ergodenstelling [i].) Als de toestandsruimte Ω een triviale staart heeft, d.w.z. de kans op een staartgebeurtenis van Ω is gelijk aan 0 of 1 en $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, P_p)$, dan geldt voor een stijgend rijtje $\Lambda(n)$, bestaande uit eindige deelverzamelingen van $\mathbb{Z}^d$ die convergeren naar $\mathbb{Z}^d$ voor $n \to \infty$ (i.h.b. voor de doos $B(n)$ (zie p.5)), het volgende:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda(n)} f[\tau_x(s)] = \int f \, dP_p = E_p(f) \quad \textit{met kans } 1.$$

Er bestaat ook een tweede formulering van de Ergodenstelling, wat eigenlijk een gevolg is van de eerste formulering.

Gevolg 5.2.7. *(Ergodenstelling [ii].) Zij $f : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ een translatie-invariante functie, en $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, P_p)$. Dan geldt:*

$$f = \int f \, dP_p = E_p(f) \quad \textit{met kans } 1.$$

Met behulp van Definitie 5.2.4 valt in te zien dat dit een gevolg is van Stelling 5.2.6, want Definitie 5.2.4 geeft dat voor elke translatie τ_x de functiewaarde $f[\tau_x(s)]$ gelijk is aan $f(s)$. Daardoor geldt voor Stelling 5.2.6 dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda(n)} f[\tau_x(s)] = f,$$

en dit levert precies Gevolg 5.2.7. Dit gevolg, ook wel Ergodenstelling [ii] genoemd, is dan weer equivalent aan Ergodenstelling [i] en Definitie 5.2.5.

Deze tweede formulering van de Ergodenstelling geeft ons dat een translatie-invariante functie $f : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ constant is met kans 1. Dit gegeven is van groot belang om met kans 1 het aantal oneindige open clusters te kunnen bepalen.

5.3 Het aantal oneindige open clusters

Het fundamentele resultaat van deze paragraaf is het volgende: voor elke waarde van p waarvoor er een strikt positieve kans is op het bestaan van een oneindige open cluster, bestaat er met kans 1 een uniek oneindige open cluster óf bestaan er met kans 1 oneindig veel oneindige open clusters (we hebben al bewezen dat er met kans 1 minstens één oneindige open cluster bestaat). Hetgene wat we moeten aantonen is: dit aantal is met kans 1 niet bevat in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Stelling 5.3.1. Laat $N_{\mathbb{L}^d}$ en $N_{\mathbb{T}_\sigma}$ het aantal oneindige open clusters zijn op, respectievelijk, $\mathbb{L}^d$ en $\mathbb{T}_\sigma$. Als $p > p_c(d)$, dan

$$P_p(N_{\mathbb{L}^d} = 1) = 1 \quad \text{of} \quad P_p(N_{\mathbb{L}^d} = \infty) = 1$$

en als $p > p_c(\sigma)$, dan

$$P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = 1) \quad \text{of} \quad P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = \infty) = 1.$$

Bewijs. We bewijzen de stelling eerst voor $\mathbb{L}^d$ en merken aan het einde op dat alle stappen ook opgaan voor $\mathbb{T}_\sigma$.

We nemen aan dat $p > p_c(d)$. Stelling 3.2.1 geeft ons dan dat $0 < p \leq 1$. Wanneer p gelijk is aan 1, dan zijn alle bindingen open en is de stelling triviaal, dus in de rest van het bewijs geldt: $0 < p < 1$. Laat $B \subset \mathbb{Z}^d$ eindig zijn, met $\mathbb{E}_B \subset \mathbb{E}^d$ de verzameling bindingen die de roosterpunten in B met elkaar verbindt. We schrijven $N_B(0)$ (respectievelijk $N_B(1)$) voor het aantal oneindige open clusters wanneer alle bindingen in $\mathbb{E}_B$ gesloten (respectievelijk open) zijn. Als laatste, laat M_B het aantal oneindige open clusters zijn die de verzameling B doorsnijden en laat $\mathbf{X}$ gedefinieerd zijn als in Stelling 5.1.1.

Zij $k \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$. We gaan kijken naar de gebeurtenis dat $\mathbb{L}^d$ k oneindige open clusters bevat, $N_{\mathbb{L}^d} = k$, en we willen laten zien dat $P_p(N_{\mathbb{L}^d} = k)$ gelijk is aan 0 of 1. Hiervoor kunnen we echter niet onze eerdere Stelling 5.1.4 (zero-one law) gebruiken, want het veranderen van een eindig aantal random variabelen $X_1, \dots, X_n$ kan ervoor zorgen dat twee of meer oneindige open clusters met elkaar verbonden worden door middel van open bindingen. We hebben dan minder dan k oneindige open clusters en dus is de gebeurtenis $\{N_{\mathbb{L}^d} = k\}$ geen staartgebeurtenis van $\mathbf{X}$.

Om dit toch te bewerkstelligen zullen we iets anders moeten gebruiken, namelijk, het feit dat het aantal oneindige open clusters onveranderd blijft na een translatie τ_x op Ω, d.w.z. $N_{\mathbb{L}^d} : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ is een translatie-invariante functie. Met Stelling 5.2.7 in ons achterhoofd, merken we op dat $\mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de discrete topologie heeft; dit induceert de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{N}_\infty}$ in $\mathbb{N}_\infty$. En, de verzameling bindingen in een oneindig open cluster $C(x)$ wordt voortgebracht door eindig-dimensionale rechthoeken. Daarom is voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ van kracht dat $\{e \in \mathbb{L}^d : \ e \in C(x)\} \subset \mathcal{F}$. Dit betekent dat $(N_{\mathbb{L}^d})^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ voor iedere $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}_\infty}$, en per definitie is de functie $N_{\mathbb{L}^d}$ dan meetbaar. Als laatste, P_p is een kansmaat en dus is $N_{\mathbb{L}^d} \in \mathcal{L}^1(\Omega, P_p)$. Wegens Gevolg 5.2.7, Ergodenstelling [ii], geldt dan

$$N_{\mathbb{L}^d} = \int N_{\mathbb{L}^d} \, dP_p = E_p(N_{\mathbb{L}^d}) \quad \text{met kans 1.}$$

Dus de functie $N_{\mathbb{L}^d}$ is constant met kans 1, d.w.z. dat er één k is waarvoor $P_p(N_{\mathbb{L}^d} = k) = 1$:

$$\exists k \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\} \text{ zodanig dat } P_p(N_{\mathbb{L}^d} = k) = 1. \tag{5.3.1}$$

Vervolgens laten we zien dat k in (5.3.1) moet voldoen aan $k \in \{1, \infty\}$. Stel daarom dat (5.3.1) geldt voor een k met $2 \leq k < \infty$. De gebeurtenissen $N_B(0)$ en $N_B(1)$ hebben een strikt positieve kans. En, omdat de verzameling B eindig is en $N_{\mathbb{L}^d}$ constant is met kans 1, voldoet k in (5.3.1) dan ook aan

$$P_p(N_B(0) = k) = P_p(N_B(1) = k) = P_p(N_{\mathbb{L}^d} = k) = 1.$$

Dit geeft ons dat

$$N_B(0) = N_B(1) = k \ \text{ met kans 1} \quad \Longleftrightarrow \quad M_B \leq 1 \ \text{ met kans 1,} \tag{5.3.2}$$

waar herinnerd moet worden dan M_B het aantal oneindige open clusters is dat de verzameling B doorsnijdt. Het is belangrijk dat we hiervoor hebben aangenomen dat $N_{\mathbb{L}^d} \neq \infty$, want er geldt als $M_B > 1$ met kans 1 dat $N_B(0) \geq N_B(1)$ met kans 1. En wanneer $N_{\mathbb{L}^d} = \infty$ dan zou dit betekenen dat $N_B(0)$ en $N_B(1)$ beiden gelijk zouden blijven aan oneindig. Dus voor deze bewering is het echt van belang dat $k < \infty$.

Wegens (5.3.2) hebben we voor alle eindige verzamelingen $B \subset \mathbb{Z}^d$ dat

$$P_p(M_B \geq 2) = 0 \quad \text{met kans 1.} \tag{5.3.3}$$

Neem nu de voor B de diamant $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d$ zodanig dat $\delta(0,x) \leq n\}$ voor $n \geq 1$. Er geldt:

$$M_{S(1)} \leq M_{S(2)} \leq M_{S(3)} \leq \ldots,$$

en dan geeft dit samen met (5.3.3) dat

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 &= \lim_{n\to\infty} P_p(M_{S(n)} \geq 2) \\ &= P_p(\cup_{n\geq 1} M_{S(n)} \geq 2) \\ &= P_p(N_{\mathbb{L}^d} \geq 2). \end{aligned}$$

Dit betekent voor (5.3.1) dat $P_p(N_{\mathbb{L}^d} = 1) = 1$, want er geldt $p > p_c$. Dit is in tegenspraak met de veronderstelling dat $2 \leq k < \infty$, dus

$$P_p(N_{\mathbb{L}^d} = 1) = 1 \ \text{ of } \ P_p(N_{\mathbb{L}^d} = \infty) = 1.$$

Tenslotte, alle bewijsstappen gaan ook op voor de boom $\mathbb{T}_\sigma$ als $p > p_c(\sigma)$. Ten eerste, het aantal oneindig open clusters op de boom, $N_{\mathbb{T}_\sigma}$, is ook een translatie-invariante functie. En ten tweede, in plaats van de verzameling $S(n)$ voor de eindige verzameling B te kiezen, nemen we als eindige verzameling B voor de boom het volgende:

$$B = G(n) = \{\lambda \in K_\sigma \text{ zodanig dat } |\lambda| \leq n\}.$$

Duidelijk geldt: M_B is niet-dalend in B, en $G(n) \uparrow K_\sigma$ als $n \to \infty$, dus is er van kracht dat $M_{G(n)} \to N_{\mathbb{T}_\sigma}$ als $n \to \infty$. Conclusie: we vinden voor de boom $\mathbb{T}_\sigma$ ook dat

$$P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = 1) = 1 \ \text{ of } \ P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = \infty) = 1.$$

Dit resultaat brengt ons al een stuk dichterbij de volgende twee gevallen voor oneindige open clusters: één op $\mathbb{L}^d$ en oneindig veel op $\mathbb{T}_\sigma$. Het bewijs van uniciteit op $\mathbb{L}^d$ zal zelfs met de beschikking over Stelling 5.3.1 nog steeds erg moeilijk zijn (het blijkt een erg ingenieus bewijs), terwijl oneindig veel voor $\mathbb{T}_\sigma$ heel eenvoudig te bewijzen valt met behulp van Stelling 5.3.1.

5.4 Uniciteit op $\mathbb{L}^d$

In deze paragraaf zal aangetoond worden dat voor bindingpercolatie op $\mathbb{L}^d$ met kans 1 van kracht is, dat als er een oneindige open cluster is, er precies één oneindige open cluster is. We weten door Stelling 5.2.1 dat het met kans 1 niet k kunnen zijn met $2 \leq k < \infty$, dus in het bewijs van de uniciteit op $\mathbb{L}^d$ gaan we een tegenspraak afleiden voor het geval dat $k = \infty$.

Wij zullen hiervoor het bewijs van Burton en Keane uit 1989 (zie Grimmett [3] p.198-202) volgen. Zij maken daarin heel slim gebruik van zogenaamde *trifurcatie* punten. De definitie daarvan zal hieronder in het bewijs van Stelling 5.4.4 gegeven worden, maar de tegenspraak van het bewijs komt er op neer dat het gemiddelde aantal van deze punten net zo snel groeit als het aantal punten in de doos $B(n)$, en ook net zo snel als het aantal punten op de rand $\partial B(n)$ van de doos. Dit is een tegenspraak als $n \to \infty$. Een gevolg van deze stelling is dat op $\mathbb{L}^d$ de percolatiefunctie $\theta(p)$ continu is op het interval $(p_c, 1]$, en dit zullen we behandelen in hoofdstuk 6.

Om deze tegenspraak aan te tonen zullen we voor eindige deelverzamelingen $Y \subset \mathbb{Z}^d$ gebruik gaan maken van 3-partities van Y. Daarom eerst de volgende twee definities en een lemma.

Definitie 5.4.1. *Laat Y een eindige verzameling zijn met $|Y| \geq 3$. Dan is een 3-partitie $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ van Y een partitie van Y, d.w.z. een geordende verzameling van disjuncte deelverzamelingen $P_1, P_2, \ldots P_n$ van Y zodanig dat $\cup_{i=1}^n P_i = Y$, bestaande uit drie niet-lege verzamelingen P_1, P_2, P_3.*

Definitie 5.4.2. *Laat $\Pi = \{P_1, P_2, P_3\}$ en $\Pi' = \{P_1', P_2', P_3'\}$ 3-partities zijn van Y. Dan zijn Π en Π' compatibel als er een ordening van hun elementen bestaat zodanig dat $P_2' \cup P_3' \subset P_1$. En, een collectie $\mathcal{P}$ van 3-partities is compatibel als elke twee verschillende elementen van $\mathcal{P}$ compatibel zijn.*

Lemma 5.4.3. *Als $\mathcal{P}$ een compatibele collectie is van verschillende 3-partities van Y, dan geldt*

$$|\mathcal{P}| \leq |Y| - 2.$$

Bewijs. We zullen deze claim bewijzen met inductie naar $|Y|$ en merken daarbij op dat Definitie 5.4.1 ons geeft dat $|Y| \geq 3$. Nu, als $|Y| = 3$ dan hebben we dat $|\mathcal{P}| \leq 1$ en dus is de ongelijkheid van kracht. Laat Y voldoen aan $|Y| = n + 1$ met $n \in \mathbb{N}$, en we nemen aan dat de ongelijkheid ook van kracht is als $|Y| \leq n$ (inductiehypothese).

Kies $y \in Y$ willekeurig, en schrijf $Z = Y \setminus \{y\}$. Elke $\Pi \in \mathcal{P}$ kan geschreven worden in de vorm $\Pi = \{P_1 \cup \{y\}, P_2, P_3\}$, waar P_1, P_2, P_3 zekere disjuncte deelverzamelingen zijn van Z die voldoen aan: P_2 en P_3 zijn niet-leeg, en $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = Z$. Laat $\mathcal{P}'$ de verzameling zijn van alle Π die hieraan voldoen met $P_1 \neq \emptyset$. Definieer vervolgens $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$.

Het is duidelijk dat $\mathcal{P}'$ een compatibele collectie is van 3-partities van Z, waar

$$|\mathcal{P}'| \leq |Z| - 2 = |Y| - 3,$$

wegens de inductiehypothese. Als laatste moeten we laten zien dat $|\mathcal{P}''| \leq 1$. Stel dat dit niet geldt en dus $\mathcal{P}''$ twee verschillende 3-partities $\{\{y\}, A_2, A_3\}$ en $\{\{y\}, B_2, B_3\}$ van Y bevat. Omdat $\mathcal{P}$ compatibel is kunnen we de elementen van deze twee verzamelingen ordenen zodanig dat $\{y\} \cup B_2 \subset A_2$. Dit is een tegenspraak wegens het feit dat $y \notin A_2$.

Dus er geldt

$$|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{P}'| + |\mathcal{P}'' \leq |Y| - 2,$$

wat de stelling bewijst. $\square$

Met behulp van o.a. deze definities en dit lemma kunnen we de stelling bewijzen die zegt dat de oneindige open cluster op $\mathbb{L}^d$ met kans 1 uniek is.

Stelling 5.4.4. *Op $\mathbb{L}^d$ geldt voor alle $p > p_c$ dat*

$$P_p(\textit{er bestaat precies een oneindige open cluster}) = 1.$$

Bewijs. De claim is triviaal als $p = 1$, dus we beschouwen $p_c < p < 1$. We gebruiken de definities gegeven in de formulering en het bewijs van Stelling 5.3.1 (zie p.22). Herinner dat Stelling 5.3.1 ons ook het volgende geeft:

$$\exists k \in \{1\} \cup \{\infty\} \text{ zodanig dat } P_p(N_{\mathbb{L}^d} = k) = 1. \tag{5.4.1}$$

Er moet dus alleen uitgesloten worden dat $k = \infty$. We stellen daarom dat $k = \infty$, en zullen hieruit een tegenspraak gaan afleiden. Een $x \in \mathbb{Z}^d$ is een *trifurcatie* punt als:

1. het open cluster $C(x)$ is oneindig;
2. er bestaan drie open bindingen $<a,x>,<b,x>,<c,x> \in \mathbb{E}^d$ met roosterpunten $a \neq b, a \neq c$ en $b \neq c$;
3. $\mathbb{L}^d$ zonder het roosterpunt x en zonder de bindingen in (2) splitst het oneindige open cluster $C(x)$ in precies drie disjuncte oneindige open clusters.

Laat R_x de gebeurtenis zijn dat het roosterpunt x een *trifurcatie* punt is. Voor een staartgebeurtenis E van Ω geldt wegens Stelling 5.1.4 (zero-one law) dat $P_p(E)$ gelijk is aan 0 of 1. Dit betekent per definitie dat Ω een triviale staart heeft. Omdat P_p een kansmaat is, geldt duidelijk dat voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ de indicatorfunctie $1_{R_x} \in \mathcal{L}^1(\Omega, P_p)$. Dan zegt Stelling 5.2.6 (Ergodenstelling [i]) dat voor de doos $B(n)$ geldt

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B(n)|}\Big(\sum_{x\in B(n)} 1_{R_x}\Big) = E_p(1_{R_x}) \quad \text{met kans 1.}$$

Omdat voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$ van kracht is dat de kans $P_p(R_x)$ gelijk is aan $E_p(1_{R_x})$, volgt

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B(n)|} E_p\Big(\sum_{x\in B(n)} 1_{R_x}\Big) = P_p(R_x) \quad \text{met kans 1.} \tag{5.4.2}$$

Als we nu kunnen aantonen dat $P_p(R_x)$ strikt positief is, dan geeft (5.4.2) ons dat het gemiddelde aantal *trifurcatie* punten binnen de doos $B(n)$ net zo snel groeit als $|B(n)|$ als $n \to \infty$.

Om aan te tonen dat $P_p(R_0) > 0$ gaan we gebruik maken van de veronderstelling dat er oneindig veel oneindige open clusters zijn. Laat $M_B(0)$ het aantal oneindige open clusters zijn dat B doorsnijdt wanneer alle bindingen in $\mathbb{E}_B$ gesloten zijn (herinner: $B \subset \mathbb{Z}^d$ eindig). Omdat B eindig is, hebben we dat

$$P_p(M_B(0) \geq M_B) = 1.$$

Nemen we nu de eindige verzameling B weer gelijk aan de diamant $S(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d \text{ zodanig dat } \delta(0,x) \leq n\}$ voor $n \geq 1$, dan geldt wegens de aanname dat $k = \infty$ in (5.4.1) dat

$$P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq P_p(M_{S(n)} \geq 3) \to P_p(N_{\mathbb{L}^d} \geq 3) = 1 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Daarom kunnen we een n vinden zodanig dat

$$P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq \frac{1}{2}. \tag{5.4.3}$$

We merken op dat voor $S(n)$ het volgende van kracht is

(a) de gebeurtenis $\{M_{S(n)}(0) \geq 3\}$ is onafhankelijk van de toestanden van bindingen in $\mathbb{E}^d$;

(b) als de gebeurtenis $\{M_{S(n)}(0) \geq 3\}$ plaatsvindt, dan bestaan er punten $x, y, z \in \partial B$ zodaning dat ze met kans 1 in disjuncte oneindige open clusters van $\mathbb{E}^d \setminus \mathbb{E}_{S(n)}$ liggen.

Laat $s \in \{M_{S(n)}(0) \geq 3\}$, en neem $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ volgens (b). Er valt na te gaan dat er in $\mathbb{E}_{S(n)}$ drie paden bestaan die de oorsprong 0 verbinden met (respectievelijk) x, y en z (zie figuur 4). Deze paden kunnen ook zo gekozen worden dat het volgende geldt:

- de oorsprong 0 is het unieke roosterpunt gemeenschappelijk tussen elk paar van deze paden; en
- elk pad heeft precies een roosterpunt op de rand ∂B.

Definieer $J_{x,y,z}$ als de gebeurtenis dat alle bindingen in deze drie paden open zijn, en dat alle andere bindingen in $\mathbb{E}_{S(n)}$ gesloten zijn. Wegens het feit dat $S(n)$ eindig is voor alle $n \geq 1$ hebben we dan dat

$$P_p(J_{x,y,z} | M_{S(n)}(0) \geq 3) \geq (\min\{p, 1-p\})^R > 0,$$

waar R het aantal bindingen is in $\mathbb{E}_{S(n)}$. Dan geeft (5.4.3) ons dat

$$\begin{aligned} P_p(R_0) &\geq P_p(J_{x,y,z} | M_{S(n)}(0) \geq 3) P_p(M_{S(n)}(0) \geq 3) \\ &\geq \frac{1}{2}(\min\{p, 1-p\})^R > 0, \end{aligned}$$

wat betekent dat $P_p(R_x) > 0$ in (5.4.2).

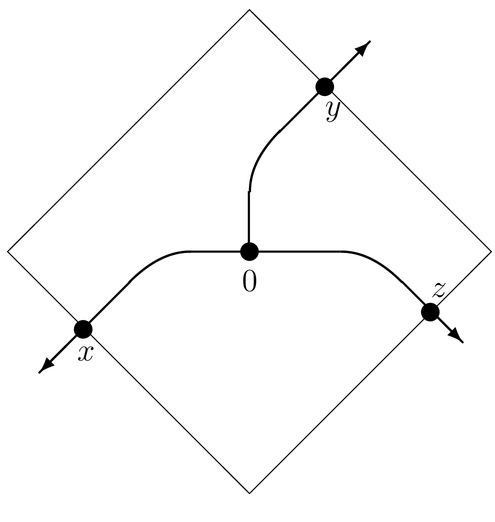

Fig. 4. Beschouw de diamant $S(n)$ met $M_{S(n)} \geq 3$. Verander vervolgens de configuratie binnen B zodanig dat er een configuratie ontstaat waarin de oorsprong 0 een *trifurcatie* punt is.

We zullen nu gebruik gaan maken van 3-partities (zie Definitie 5.4.1) om een tegenspraak af te gaan leiden. Laat K een open cluster zijn van $B(n)$, d.w.z. dat $K = C(x) \cap (B(n), \mathbb{E}_{B(n)})$ voor een zeker punt $x \in B(n)$ (herinner dat een open cluster $C(x)$ een deelgraaf is van $\mathbb{L}^d$). Om verwarring te voorkomen zullen we verzameling roosterpunten van K noteren met K_x (en de verzameling bindingen van K met K_e).

Als $x \in K_x \cap B(n-1)$ een *trifurcatie* punt is, dan induceert de verwijdering van het punt x een partitie van $K_x \cap \partial B(n)$ in drie deelverzamelingen. Namelijk, elk van de drie deelverzamelingen bestaat uit punten die door een pad met x verbonden zijn met één van drie open bindingen aangrenzend aan x (zie eigenschap 2. van een *trifurcatie* punt). Daarom correspondeert x met een 3-partitie $\Pi(x) = \{P_1, P_2, P_3\}$ van $K_x \cap \partial B(n)$ met voor $i, j \in \{1, 2, 3\}$ de volgende eigenschappen:

- $P_i \neq \emptyset$;
- P_i is een deelverzameling van de verzameling punten in een open cluster van $B(n) \setminus \{x\}$;
- als $i \neq j$, dan bestaan er geen $x \in P_i, y \in P_j$ zodanig dat er open pad is in $B(n) \setminus \{x\}$ dat x en y verbindt.

Verder, als $x, x' \in K_x \cap B(n-1)$ verschillende *trifurcatie* punten zijn, dan zijn $\Pi(x)$ en $\Pi(x')$ verschillende en compatibele 3-partities van $K_x \cap \partial B(n)$ (zie figuur 5). Wegens Lemma 5.4.3 voldoet het aantal *trifurcatie* punten $\tau(K)$ in $K_x \cap \partial B(n)$ aan

$$\tau(K) \leq |K_x \cap \partial B(n)| - 2.$$

We sommeren dit over alle open clusters K van $B(n)$, en dan vinden we dat

$$\sum_{x \in B(n-1)} 1_{R_x} \leq |\partial B(n)|.$$

Neem verwachtingen en gebruik (5.4.2). Dan krijgen we de volgende ongelijkheid (er nemen voor het gemak de gebeurtenis R_0, want $P_p(R_x)$ is gelijk en constant voor alle $x \in \mathbb{Z}^d$):

$$|B(n-1)| P_p(R_0) \leq |\partial B(n)|.$$

Dit is onmogelijk als $n \to \infty$, want $B(n)$ groeit als n^d en $\partial B(n)$ als n^{d-1}. Hiermee hebben we bewezen dat k in (5.4.1) gelijk is aan 1, en dat bewijst de stelling.

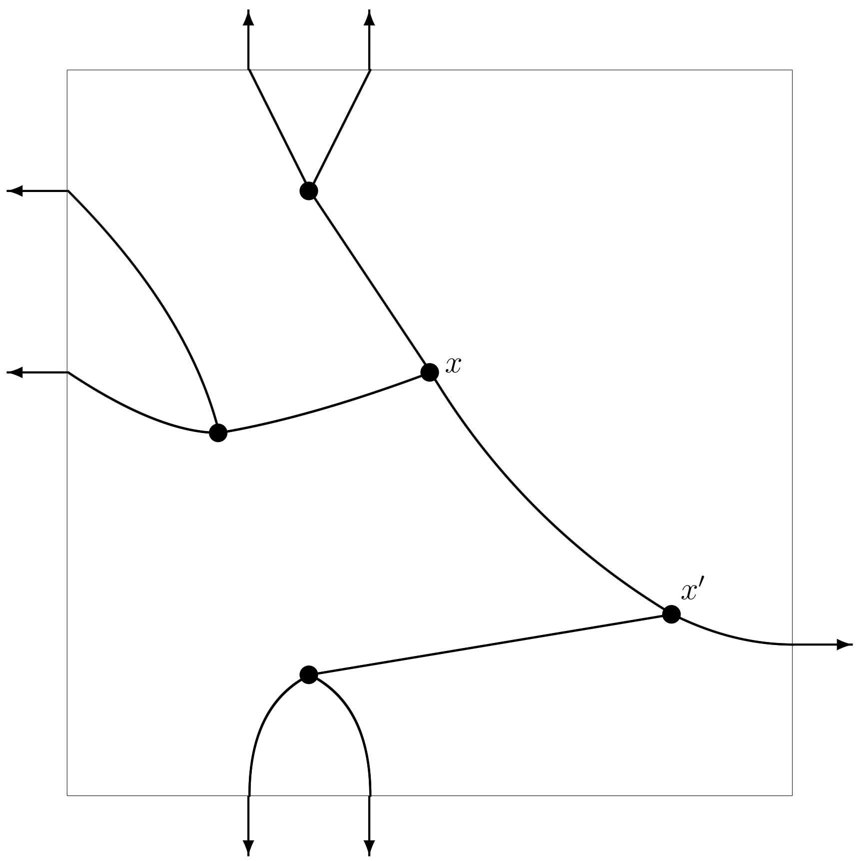

Fig. 5. Twee *trifurcatie* punten x en x' die tot hetzelfde cluster K van $B(n)$ behoren. Zij induceren twee verschillende en compatibele 3-partities van $K_x \cap \partial B(n)$.

5.5 Oneindig veel oneindige open clusters op $\mathbb{T}_\sigma$

Op de boom $\mathbb{T}_\sigma$ is met kans 1 de oneindige open cluster niet uniek. De reden hiervoor is dat elk kind k van de boom $\mathbb{T}_\sigma$ de wortel is van een nieuwe boom $T_\sigma^{(k)}$. Dus als er op de boom $\mathbb{T}_\sigma$ met kans 1 geldt dat er een oneindig open cluster bestaat, zal dit net zo goed gelden voor elke “deelboom” $T_\sigma^{(k)}$. Daarom verwachten we dat als er een oneindig open cluster bestaat in $\mathbb{T}_\sigma$, er dan gelijk oneindig veel bestaan. We gaan dit formeel maken aan de hand van de volgende stelling.

Stelling 5.5.1. *Op $\mathbb{T}_\sigma$ geldt voor alle $p \in (p_c, 1)$ dat*

$$P_p(\textit{er bestaan oneindig veel oneindige open clusters}) = 1.$$

Bewijs. We nemen aan dat $p_c < p < 1$ en definiëren $N_{\mathbb{T}_\sigma}$ weer als het aantal oneindige open clusters op $\mathbb{T}_\sigma$. Herinner dat stelling 5.3.1 ons dan het volgende geeft:

$$\exists k \in \{1\} \cup \{\infty\} \text{ zodanig dat } P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = k) = 1. \tag{5.5.1}$$

Er moet dus uitgesloten worden dat $k = 1$. Daarom stellen we dat $k = 1$ in (5.5.1) en zullen hieruit een tegenspraak gaan afleiden.

Beschouw de boom $\mathbb{T}_\sigma$. Noem de σ kinderen uit de eerste generatie respectievelijk van links naar rechts: $1, 2, \ldots, \sigma$. Vervolgens bekijken we de linkerboom $T_\sigma^{(l)}$ gedefinieerd door

$$T_\sigma^{(l)} = \{\text{de gewortelde boom met vertakkingsgraad } \sigma \text{ en wortel } 1\}$$

en de rechterboom $T_\sigma^{(r)}$ gedefinieerd door

$$T_\sigma^{(r)} = \{\text{de gewortelde boom met vertakkingsgraad } \sigma \text{ en wortel } \sigma\}.$$

Per constructie geldt dat $T_\sigma^{(l)}, T_\sigma^{(r)} \subset \mathbb{T}_\sigma$. Omdat $T_\sigma^{(l)}$ en $T_\sigma^{(r)}$ beiden gewortelde bomen zijn met vertakkingsgraad $\sigma \geq 2$ is hiervoor Stelling 5.3.1 ook van kracht. Dit geeft ons dat er met kans 1 een oneindige open cluster in $T_\sigma^{(l)}$ en in $T_\sigma^{(r)}$ is. Bekijk nu de twee bindingen in $\mathbb{T}_\sigma$ die 1 en σ met de wortel r van $\mathbb{T}_\sigma$ verbinden. De gebeurtenis dat we allebei deze bindingen gesloten maken en alle andere bindingen in $\mathbb{T}_\sigma$ onveranderd laten heeft een strikt positieve kans. Dit geeft ons dat er dan ook een strikt positieve kans is dat $\mathbb{T}_\sigma$ twee oneindige open clusters bevat, en dat is een tegenspraak wegens (5.5.1).

Conclusie: we vinden voor de boom $\mathbb{T}_\sigma$ dat $P_p(N_{\mathbb{T}_\sigma} = \infty) = 1$. $\square$

6 Continuïteit van de percolatiefunctie $\theta(p)$

Duidelijk is de percolatiefunctie $\theta(p)$ continu voor $p \in [0, p_c)$, want dan geldt $\theta(p) = 0$. Het is een gevolg van de uniciteit van de oneindige open cluster op $\mathbb{L}^d$ (zie stelling 5.4.4) dat $\theta(p)$ voor $\mathbb{L}^d$ ook continu is voor $p \in (p_c, 1]$.

We zullen deze continuïteit op $\mathbb{L}^d$ in twee stappen aantonen. Zo zullen we eerst laten zien dat $\theta(p)$ rechtscontinu is op het interval $[0, 1]$ (zie Grimmett [3] p.203). Merk op dat $\theta(p)$ dus wel rechtscontinu is in $p = p_c$, maar blijkbaar niet zondermeer linkscontinu in $p = p_c$ (dan moet gelden $\theta(p_c) = 0$). Vervolgens zullen we laten zien dat $\theta(p)$ linkscontinu is op het interval $(p_c, 1]$ (zie Grimmett [3] p.204).

We zullen voor de reëlwaardige functie $\theta(p)$ gebruik gaan maken van een zwakkere conditie dan continuïteit, namelijk boven semi-continuïteit.

Definitie 6.1.1. *Laat X een topologische ruimte zijn, met een punt $p \in X$ en een functie $f : X \to \mathbb{R}$. We zeggen dat f boven semi-continu is in p als het volgende geldt:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists O \ni p \text{ open}: \ f(p^*) < f(p) + \epsilon \quad \text{voor alle } p^* \in O.$$

De functie f heet boven semi-continu als f boven semi-continu is in elk punt p van zijn domein.

Het volgende lemma heeft betrekking op Definitie 6.1.1, waarna het gebruikt zal worden voor het bewijzen van de eerdergenoemde rechtscontinuïteit van $\theta(p)$ op het interval $[0, 1]$.

Lemma 6.1.2. *Als een functie f gelijk is aan de limiet van een dalende rij continue functies $[f_n]$, dan is f boven semi-continu.*

Bewijs. Kies $\epsilon > 0$ en $p \in X$ willekeurig. Omdat $[f_n(p)]$ een dalende rij is die naar $f(p)$ convergeert, hebben we voor n voldoende groot dat

$$f_n(p) < f(p) + \epsilon.$$

Nu is f_n continu voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus

$$\exists O \ni p \text{ open en zodanig dat } \forall x \in O: \ f_n(x) \leq f(p) + \epsilon. \tag{6.1.1}$$

Als laatste, omdat voor alle $x \in X$ geldt dat $[f_n(x)]$ een dalende rij is die naar $f(x)$ convergeert hebben we dat $f(x) \leq f_n(x)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (dit gegeven gebruikten we ook in het begin van het bewijs). Hierdoor geldt wegens (6.1.1) dat

$$\exists O \ni p \text{ open en zodanig dat } \forall x \in O: \; f(x) \leq f(p) + \epsilon,$$

en per definitie is $\theta(p)$ dan boven semi-continu in p. $\square$

Stelling 6.1.3. *De percolatiefunctie $\theta(p)$ is rechtscontinu op het interval $[0, 1]$.*

Bewijs. Als er voor twee verzamelingen $X, Y \subset \mathbb{Z}^d$ punten $x \in X$ en $y \in Y$ bestaan die door een open pad met elkaar verbonden zijn, dan noteren we dat door $X \leftrightarrow Y$. Vervolgens definiëren we

$$f_n(p) = P_p(\{0\} \leftrightarrow \partial B(n)).$$

Duidelijk geldt dat

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; f_n(p) \geq f_{n+1}(p),$$

en

$$\theta(p) = \lim_{n \to \infty} f_n(p).$$

Omdat de gebeurtenis $\{\{0\} \leftrightarrow \partial B(n)\}$ afhankelijk is van de toestand van een eindig aantal bindingen is de functie $f_n(p)$ continu voor $p \in [0, 1]$ en $n \in \mathbb{N}$. Dus voor alle $p \in [0, 1]$ is $\theta(p)$ gelijk aan de dalende limiet van een rij continue functies $[f_n(p)]$ en lemma 6.1.3 geeft dan dat θ boven semi-continu is. Aan de andere kant, de functie θ is monotoon niet-dalend, en dus is $\theta(p)$ rechtscontinu voor $p \in [0, 1]$ (zie figuur 6). $\square$

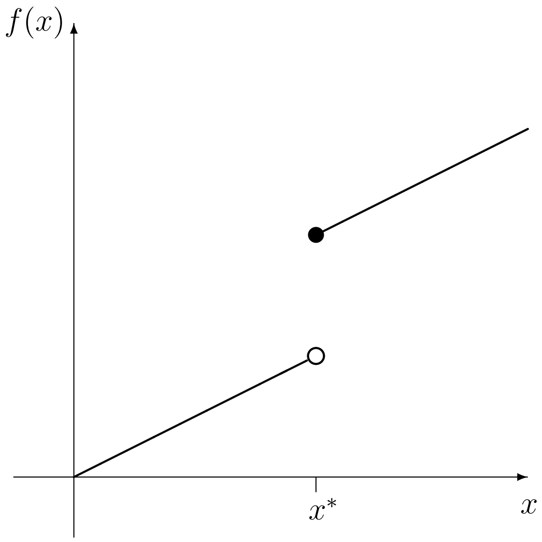

Fig. 6. Een monotoon niet-dalende boven semi-continue functie is rechtscontinu.

Stelling 6.1.4. *De percolatiefunctie $\theta(p)$ is linkscontinu op het interval $(p_c, 1]$.*

Bewijs. Voor dit bewijs zullen we gebruik gaan maken van het feit dat de oneindige open cluster op $\mathbb{L}^d$ uniek is met kans 1 (zie Stelling 5.4.4). Laat $(X(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ een collectie onafhanklijke random variabelen zijn die geindexeerd is door $\mathbb{E}^d$, zodanig dat elke $X(e)$ getrokken is uit $[0,1]$ volgens de uniforme verdeling. Voor $0 \leq p \leq 1$, definiëren we

$$\eta_p(e) \begin{cases} = 1 & \text{als } X(e) < p \\ = 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

We zeggen voor een binding e dat hij p-*open* is als $\eta_p(e) = 1$, en p-*gesloten* als $\eta_p(e) = 0$. We schrijven C_p voor het p-*open* cluster van $\mathbb{L}^d$ dat de oorsprong bevat, en merken op dat $C_{p^*} \subset C_p$ als $p^* \leq p$. Nu is $\theta(p)$ ook gedefinieerd als

$$\theta(p) = P(|C_p| = \infty),$$

dus hebben we dat

$$\begin{aligned} \lim_{p^* \uparrow p} \theta(p^*) &= \lim_{p^* \uparrow p} P(|C_{p^*}| = \infty) \\ &= P(|C_{p^*}| = \infty \text{ voor zekere } p^* < p), \end{aligned}$$

omdat de gebeurtenis $\{|C_{p^*}| = \infty\}$ stijgend is in p^*. Oftewel voor linkscontinuïteit op het interval $(p_c, 1]$ moet gelden dat

$$P(\exists p^* \in (p_c, p) : |C_{p^*}| = \infty) = P(|C_p| = \infty) \quad \text{voor } p \in (p_c, 1].$$

Dit is hetzelfde als

$$P(\exists p^* \in (p_c, p) : |C_{p^*}| = \infty,\ |C_p| = \infty) - P(|C_p| = \infty) = 0 \quad \text{voor } p \in (p_c, 1],$$

omdat $C_{p^*} \subset C_p$ als $p^* \leq p$. Dus we moeten het volgende aantonen:

$$P(\forall p^* \in (p_c, p) : |C_{p^*}| < \infty,\ |C_p| = \infty) = 0 \quad \text{voor } p \in (p_c, 1]. \tag{6.1.2}$$

We nemen $p \in (p_c, 1]$ en veronderstellen dat $|C_p| = \infty$. Als $p_c < \alpha < p$, dan geeft Stelling 5.4.4 dat er met kans 1 een oneindige α-open cluster I_α bestaat op $\mathbb{L}^d$. Dan zijn er twee mogelijkheden; de clusters I_α, C_p zijn disjunct of $I_\alpha \subset C_p$. Wegens Stelling 5.4.4 moet met kans 1 gelden dat $I_\alpha \subset C_p$, want anders bestaan er met kans 1 ten minste twee oneindige p-open clusters (immers, open clusters zijn maximaal open samenhangende componenten).

Nu volgt voor een willekeurig gekozen punt x in I_α dat er een p-open pad $l(x)$ bestaat die x verbindt met de oorsprong. Zo'n pad $l(x)$ heeft eindige lengte en elke binding e in het pad $l(x)$ voldoet aan $X(e) < p$; daarom is $\mu(x) = \max\{X(e) : e \text{ is een binding in } l(x)\}$ kleiner dan p. Dus voor alle p^* zodanig dat $p^* \geq \alpha$ en $\mu(x) \leq p^* < p$, bestaat er een p^*-open pad dat de oorsprong verbindt met x, en derhalve $|C_{p^*}| = \infty$.

M.a.w. $P(|C_{p*}| = \infty \mid\mid C_p| = \infty) = 1$ voor elke $p_c < p^* < p$ (gebruik weer de monotoniciteit) en daarmee hebben we bewezen dat (6.1.2) geldt, en dit geeft dat $\theta(p)$ linkscontinu is op het interval $(p_c, 1]$.

Referenties

[1] Breiman, L., 1968, *Probability*, Addison-Wesley Publishing Company, California.

[2] Grimmett, G., 1989, *Percolation*, Springer-Verslag, New York First Edition.

[3] Grimmett, G., 1999, *Percolation*, Springer-Verslag, New York Second Edition.

[4] Verduyn Lunel, S., Hille, S., 2006, *Maat- en Integratietheorie*, Universiteit Leiden, Syllabus.