De verdeling van de eigenwaarden voor willekeurige unita matrices

Jong, R. de

De verdeling van de eigenwaarden voor willekeurige unitaire matrices

Robbert de Jong

Bachelorscriptie Wiskunde

onder begeleiding van Prof. S.J. Edixhoven

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

12 juni 2007

Contents

Chapter 1

Inleiding

In deze scriptie zullen we de verdeling van de eigenwaarden van willekeurige n bij n unitaire matrices afleiden. De groep van unitaire matrices, die we G zullen noemen, heeft ook een variëteits structuur compatibel met de groepsbewerking en is daarmee een Lie groep. Bovendien is G compact en de theorie zegt nu dat er een unieke kansmaat μ_G, ookwel Haarmaat genoemd, is op deze groep die invariant is onder translaties. De raakruimten van G zijn deelverzamelingen van de complexe $n \times n$ matrices. We hebben daarom een metriek op deze ruimte, en dit maakt van G een Riemannse variëteit. Aan de hand van deze metriek berekenen we de Haarmaat op G. Deze maat stelt ons in staat te integreren over de unitaire matrices.

De verzameling van unitaire diagonaalmatrices, T, is ook een variëteit. Ook T heeft een metriek en is dus een Riemannse variëteit. Met behulp van deze metriek kunnen we ook op T een kansmaat μ_T definiëren en dus integreren over deze variëteit.

Iedere unitaire matrix g is te diagonaliseren, d.w.z. te schrijven in de vorm dtd^{-1}, waarbij t de diagonaal matrix van eigenwaarden is, dus een element van T en d de matrix van eigenvectoren van g. We bekijken vervolgens de continue klassenfuncties $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Dit zijn de functies met de eigenschap $f(gxg^{-1}) = f(x)$. Deze eigenschap laat ons zien dat de waarde van zo'n functie alleen afhangt van de eigenwaarden van de unitaire matrix.

De intgratieformule van Weyl geeft ons voor deze functies het verband tussen integratie over G en integratie over T.

$$\int_G f\mu_G = d\int_T f|_T \cdot \phi \cdot \mu_T, \quad met \quad \phi((z_1, \dots z_n)) = \prod_{j\neq k} |z_j - z_k|$$

Uit deze formule kunnen we direct de verdeling van de eigenwaarden bepalen. Integratie van een klassen functie over G, komt namelijk neer op integratie van de functie over T met het gewicht dat wordt gegeven door de verdelingsfunctie van de eigenwaarden. Uiteindelijk volgt dan dat de verdeling van de eigenwaarden wordt gegeven door de functie:

$$g(z) = \frac{1}{n!} \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$$

In deze scriptie zullen we de integratie formule van Weyl afleiden. Hiervoor zullen we eerst alle benodigde theorie over Lie groepen en integratie hierop bespreken. Vervolgens zullen we bewijzen dat G een Lie groep is en de theorie gebruiken om de stelling te bewijzen.

Chapter 2

Variëteiten

Om de stelling van Weyl te kunnen bewijzen moeten we eerst een aantal zaken weten over variëteiten en Liegroepen. In dit hoofdstuk zullen we de benodigde theorie bespreken.

Definitie 2.1. Zij X een topologische ruimte. Laat $k \geq 0$ een geheel getal zijn, of ∞ of ω. Een C^k-atlas voor X bestaat dan uit de volgende data: een verzameling I, voor elke i in I een open deelverzameling $X_i \subset X$, een geheel getal $n_i \geq 0$, een open deelverzameling U_i van $\mathbb{R}^{n_i}$ en een homeomorfisme $\phi_i : X_i \to U_i$. Deze data moet aan de volgende eigenschappen voldoen. Allereerst moeten de X_i de verzameling X overdekken, dus $\cup_i X_i = X$. Vervolgens moeten de kaarten ϕ_i compatibel zijn met elkaar, dit betekent het volgende. Zij $i, j \in I$ en laat $X_{i,j} := X_i \cap X_j$ en $U_{i,j} = \phi_i^{-1} X_{i,j}$. De afbeelding ϕ_i induceert nu een homeomorfisme, die we ook ϕ_i noemen, tussen $U_{i,j}$ en $X_{i,j}$. Het compatibel zijn van ϕ_i met ϕ_j betekent nu dat het homeomorfisme $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : U_{i,j} \to U_{j,i}$ C^k is. De notatie C^ω betekent: reeël analytisch.

Definitie 2.2. Zij $k \geq 0$ een geheel getal, ∞ of ω. Een C^k-variëteit is dan een topologische ruimte X die hausdorffs is en een aftelbare basis heeft voor de topologie, uitgerust met een C^k-atlas. We noteren: (X, I, n, U, ϕ).

We hebben het object variëteit gedefinieerd en zoals altijd willen we nu ook weten wat de afbeeldingen tussen variëteiten zijn.

Definitie 2.3. Laat (X, I, n, U, ϕ) en (Y, J, m, V, ψ) variëteiten zijn. Zij f een continue functie van X naar Y en $x \in X$. Dan is f differentieerbaar in x, als voor elke (i, j) z.d.d. $x \in X_i$ en $f(x) \in Y_j$ de afbeelding $\psi_j f \phi_i^{-1}$ van $\phi_i((f^{-1}Y_j) \cap X_i) \subset \mathbb{R}^{n_i}$ naar $\mathbb{R}^{m_j}$ differentieerbaar is, in de zin die we kennen, in $\phi_i(x)$. De afbeelding f wordt differentieerbaar, of een morfisme tussen variëteiten genoemd, als hij differentieerbaar is in alle x in X. De afbeelding f is een diffeomorfisme als f bijectief is en zowel f als f^{-1} differentieerbaar zijn.

Laat X een C^k variëteit zijn, $V \subset X$ een open deelverzameling en f een afbeelding van deze verzameling naar $\mathbb{R}$. Deze afbeelding is C^k, d.w.z. k keer differentieerbaar in een punt $x \in V$ als hij dat is t.o.v. kaarten. Geldt dit voor elk punt $x \in V$ dan is f C^k op V.

Definitie 2.4. Laat (X, I, n, U, ϕ) een C^k variëteit zijn en $V \subset X$ een open deelverzameling. De verzameling $C_X^k(V)$ is dan de $\mathbb{R}$-algebra van functies $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die C^k zijn.

Een variëteit is lokaal homeomorf met een open deelverzameling van de $\mathbb{R}^n$. Dit stelt ons in staat de dimensie van een variëteit te definiëren. De dimensie van een variëteit X is een lokaal constante functie Dim_X op X met waarden in $\mathbb{N}$.

Definitie 2.5. Laat X een variëteit zijn en $x \in X$. Er bestaat een kaart (ϕ_i, U_i) met $x \in U_i$ en de dimensie van X is nu de functie $\mathrm{Dim}_X : X \longrightarrow \mathbb{N}$ met $\mathrm{Dim}_X(x) = dim(U_i)$.

Definitie 2.6. Zij M een Dim_M-dimensionale variëteit. Een deelverzameling $M_0 \subset M$ is een Dim_{M_0}-dimensionale deelvariëteit als rond elk punt x van M_0 er een kaart (U, h) is op M, met $h(U \cap M_0) = (\mathbb{R}^{\mathrm{Dim}_{M_0}(x)} \times \{0\}) \cap h(U)$. Deze kaart wordt een flattener voor M_0 in M genoemd. De functie $\mathrm{Dim}_M |_{M_0} - \mathrm{Dim}_{M_0}$ is de co-dimensie van M_0 in M

Natuurlijk wordt M_0 in bovenstaande definitie niet voor niks een deelvariëteit genoemd; de verzameling kaarten $(U \cap M_0, h|(U \cap M_0))$ bestaande uit de flatteners is duidelijk een atlas op M_0 en met deze atlas is M_0 zelf dus een variëteit en wel van dimensie Dim_{M_0}. Wanneer we de definitie van een deelvariëteit bekijken zien we dat alle open deelverzamelingen van M deelvariëteiten zijn van dezelfde dimensie.

2.1 De reguliere waarden stelling

We hebben nu behandeld wat een variëteit is. De vraag is nu hoe je aantoont of een bepaald object een variëteit is. Dit is vaak niet makkelijk, maar er is wel een theorie die hier ons in helpt, de zogenaamde "Reguliere waarden stelling". Om te begrijpen wat deze theorie inhoudt moeten we eerst het begrip reguliere waarde bespreken.

Definitie 2.7. Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ en $V \subset \mathbb{R}^p$ open deelverzamlingen en $f : U \longrightarrow V$ een differentieerbare afbeelding (C^∞). Dan is f een submersie in $u \in U$ als de Jacobiaan in u rang p heeft, oftewel de afgeleide $(Df)u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ is surjectief. Het punt u wordt nu ookwel een regulier punt van f genoemd. We zeggen dat f een submersie is als hij een submersie is in alle u in U.

Stel dat f een submersie is in $u \in U$, dan zien we dat na een geschikte hernummering van de coördinaten van $\mathbb{R}^n$, de afbeelding $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ gegeven door $\phi(x) := (f(x), x_1, \ldots, x_{n-p})$ een bijectieve afgeleide $(D\phi)u$ in u heeft. Er geldt $f = pr_{\leq p} \circ \phi$, met $pr_{\leq p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de projectie op de eerste p coördinaten. De "impliciete functie stelling" zegt ons nu dat ϕ een diffeomorfisme induceert van een geschikte open omgeving van u in U naar een open deelverzameling U' van $\mathbb{R}^n$, en dit geeft ons de formule:

$$(f \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p)$$

voor alle $(x_1, \ldots, x_n)$ in U'. In andere woorden, op een lokaal diffeomorfisme na, is een submersie de natuurlijke projectie. Wanneer we differentieerbare afbeeldingen tussen variëteiten lokaal bekijken, dus t.o.v. kaarten, hebben we te maken met differentieerbare afbeeldingen tussen opens in de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, voor zekere n en m. We kunnen dus bovenstaande begrippen toepassen op variëteiten.

Definitie 2.8. Zij $f : M \longrightarrow N$ een differentieerbare afbeelding tussen variëteiten, dan noemen we een punt p in M een regulier punt van f, als dit lokaal (t.o.v. geschikte kaarten) waar is. Een punt q in N noemen we een reguliere waarde van f als alle punten in het inverse beeld $f^{-1}q$ reguliere punten zijn.

We zagen boven dat een submersie, op lokaal diffeomorfisme na,
de natuurlijke projectie is, en voor variëteiten vertaalt dit zich als volgt;

Stelling 2.9. *Zij $f : M \to N$ een differentieerbaar afbeelding en $p \in M$ een regulier punt van f, dan is f lokaal in p een projectie.*

Uit het bovenstaande kunnen we nu de "Reguliere waarden stelling" bewijzen.

Stelling 2.10. *Zij $f : M \longrightarrow N$ een differentieerbare afbeelding tussen variëteiten, en q in N een reguliere waarde, dan is het inverse beeld $f^{-1}(q) \subset M$ een deelvariëteit, wiens co-dimensie gelijk is aan de dimensie van N.*

Bewijs: Zij M en N variëteiten met dimensies respectievelijk m, n. Als $q \in N$ een reguliere waarde is van de differentieerbare afbeelding $f : M \longrightarrow N$, dan is elk punt p in zijn inverse beeld $M_0 := f^{-1}(q)$ een regulier punt. Stelling 2.9 zegt ons nu dat er kaarten (U, h) rond p en (V, k) rond q zijn met de eigenschap dat de afbeelding $pr := k \circ f \circ h^{-1} : h(U) \longrightarrow k(V)$ wordt gegeven door $(x_1, \dots, x_{m-n}, x_{m-n+1}, \dots, x_m) \mapsto (x_{m-n+1}, \dots, x_m)$. Het levert geen problemen om te eisen dat $k(q) = 0$ (we kunnen de kaarten samenstellen met de verschuiving over een punt). Per constructie geldt dan voor een verzameling $Y \subset M$ dat;
$f(Y) = 0 \Leftrightarrow (Y \neq \emptyset$ en $Y \subset M_0)$, dus $pr(h(Y)) = 0 \Leftrightarrow (Y \neq \emptyset$ en $Y \subset M_0)$ en we zien dat $h(M_0) = \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}$ en dus $h(U \cap M_0) = h(U) \cap (\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\})$. We zien nu dat $M_0 = f^{-1}(q)$ een submanifold is met co-dimensie n. □

2.2 Raakruimten en de raakbundel

Zij X een C^k variëteit met $k \geq 1$. Voor $x \in X$ willen we nu zijn raakruimte $T_X(x)$ definiëren. Er zijn verschillende manieren om dit te doen, die allen equivalent zijn natuurlijk. We zullen een van deze manieren bespreken, de geometrische versie.

Definitie 2.11. Zij X een C^k variëteit met $k \geq 1$ en zij $x \in X$. Een kromme in x is een C^k afbeelding $c : U \longrightarrow X$ met $U \subset \mathbb{R}$ een open interval waar 0 in bevat is en met $c(0) = x$. Voor c zo'n curve en $V \subset X$ een open deelverzameling die 0 bevat, hebben we de volgende afbeelding:

$$\partial_c : C^k_X(V) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto (f \circ c)'0$$

We definiëren $T_X(x)$ als de verzameling van equivalentieklassen van krommen in x, voor de volgende equivalentierelatie. Twee krommen c_1 en c_2 zijn equivalent d.e.s.d.a. voor elke open omgeving V van x er geldt dat $\partial_{c_1} = \partial_{c_2}$.

Definitie 2.12. Zij X een C^k variëteit met $k \geq 1$. We noemen de disjuncte vereniging van alle raakruimten $T_X(x)$, met $x \in X$, de raakbundel T_X.

De raakbundel zelf is ook weer een C^{k-1}-variëteit, voor de constructie van de variëteitsstructuur op T_X verwijs ik naar [1].

2.3 Differentiaal

We willen nu ook de differentiaal, dus de lokale lineaire benadering van een differentieerbare afbeelding, definiëren.

Definitie 2.13. Zij $f : M \longrightarrow N$ een differentieerbare afbeelding tussen variëteiten, en $m \in M$ dan is de afbeelding

$$Df(m) : T_M(m) \longrightarrow T_N(f(m)), \quad [c] \mapsto [f \circ c]$$

de differentiaal van f in het punt m.

We moeten nu natuurlijk laten zien dat deze afbeelding welgedefinieerd is, dus onafhankelijk van de representant die we voor de equivalentieklasse $[c]$ kiezen. Laat c, d twee equivalente curves zijn, dus $[c] = [d]$. Zij V een open omgeving van m. We moeten nu laten zien dat voor elke $g \in C^k_N(V)$ geldt: $(g \circ f \circ c)'(0) = (g \circ f \circ d)'(0)$. Om dit te laten zien gebruiken we een kaart (h, U) met $x \in U$. Er geldt nu voor een zekere open interval $(-\delta, \delta) \in \mathbb{R}$ de gelijkheden $g \circ f \circ c = g \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ c$ en $g \circ f \circ c = g \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ d$. De kettingregel geeft ons nu de gelijkheid $(g \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ c)'(0) = (g \circ h \circ h^{-1} \circ f \circ d)'(0)$ dus $(g \circ f \circ c)'(0) = (g \circ f \circ c)'(0)$. Hiermee is aangetoond dat de afbeelding goed gedefinieerd is.

Het is na te gaan dat wegens de equivalentie van de verschillende definities van de raakruimte, ook de differentiaal gedefinieerd aan de hand elk van de definities, dezelfde afbeelding geeft. We kunnen dus spreken over "de differentiaal", gedefinieerd op bovenstaande manier.

2.4 Integreren

Met behulp van de raakruimte kunnen we ook integreren op manifolds. We integreren dan de zogenaamde volume vormen.

Definitie 2.14. Zij V een eindig dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte, zeg dimensie d. Een afbeelding $\mathrm{Vol} : V^d \longrightarrow \mathbb{R}$ is dan een volume vorm op V als het aan de volgende eisen voldoet:

1 $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$ en $\forall v \in V^d$ geldt: $\mathrm{Vol}(\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_d v_d) = |\lambda_1 \cdots \lambda_d| \, \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_d)$;

2 $\forall \sigma \in S_d$ en $\forall v \in V$ geldt: $\mathrm{Vol}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(d)}) = \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_d)$;

3 $\forall v \in V^d$ $(d \geq 2)$ geldt: $\mathrm{Vol}(v_1 + v_2, v_2, \ldots, v_d) = \mathrm{Vol}(v_1, \ldots, v_d)$;

Uit deze definitie volgt dat een volume vorm op V wordt vastgelegd door zijn waarde op een basis voor V. We hebben het nu over volume vormen op een reële vectorruimte. De raakruimten van een variëteit zijn dit ook. We kunnen nu een volume vorm op een variëteit definiëren. Zij X een C^k variëteit, met

$k \geq 1$. Een volume vorm op X is dan het object dat aan ieder punt $x \in X$ een volume vorm Vol_x op de raakruimte $T_X(x)$ toekent. Als X een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^d$, dan is iedere volume vorm Vol op X van de vorm $\mathrm{Vol} = f|dx_1 \cdots dx_n|$, met $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ een functie uniek bepaald door Vol, en waar $|dx_1 \cdots dx_n|$ waarde één heeft op de standaardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ van $\mathbb{R}^n$. Een volume vorm Vol op X noemen we C^k als hij lokaal van de bovenstaande vorm is met f een C^k-functie.

De volume vormen op een variëteit zijn de objecten die we kunnen integreren. Voor Vol een C^0 volume vorm op een variëteit X en voor $f \in C_c^0(X)$, d.w.z. een continue functie met compacte support, bestaat de integraal $\int_X f \cdot \mathrm{Vol}$ met waarden in $\mathbb{R}$. Om deze integraal uit te rekenen doen we het volgende; we nemen een eindige verzameling van kaartdomeinen X_i op X die de support overdekken, dit is mogelijk omdat de support compact is. Aangezien X_i homeomorf is met een open deelverzameling van de $\mathbb{R}^n$ kunnen we de integraal over X_i uitrekenen zoals we gewend zijn integralen uit te rekenen. We tellen vervolgens de integralen over al de X_i's op. De kaartdomeinen kunnen overlappen, dus om te zorgen dat we elke bijdrage aan de intergraal precies een keer tellen halen we de integralen over de doorsneden $X_i \cap X_j$ ervan af, tellen vervolgens de drievoudig doorsnijdingen hierbij op enz. Voor een gedetailieerdere beschrijving van de integraal en de precieze condities waarvoor de integraal bestaat verwijs ik naar [2]. Volume vormen worden ook wel maten genoemd en genoteerd met μ.

De raakruimte van een variëteit X in een punt x is een vectorruimte. We kunnen hierop dus een inproduct $\langle , \rangle_x$ definiëren. Een metriek op de raakbundel T_X is een familie van inproducten, $\langle , \rangle = \{\langle , \rangle_x\}_{x \in X}$. Deze metriek $\langle , \rangle$ is differentieerbaar in x als de functies $g_{\mu\nu} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $x \mapsto \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$, C^k zijn t.o.v. kaarten. Is de metriek differentieerbaar, dan noemen we het paar $(X, \langle , \rangle)$ Riemannse variëteit. De verzameling $\langle , \rangle$ heet de Riemannse metriek van X. Deze metriek geeft ons een natuurlijke volume vorm μ: voor $x \in X$ zeggen we dat $\mu(e) = 1$, voor e een orthonormale basis van de raakruimte $T_X(x)$.

Definitie 2.15. Een (reëele) Lie groep is een groep G met daarop een variëteits structuur van een C^∞ variëteit, zodanig dat de afbeelding:

$$G \times G \longrightarrow G, (x, y) \mapsto xy \quad en\ G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

diffeomorfismen zijn.

Een morfisme tussen Lie groepen is een groepsmorfisme dat een differentieerbare afbeelding is.

Zij G een Lie groep, dan hebben we de volgende acties van G op zichzelf:

1 de links actie door links translaties: voor $x \in G$ hebben we $l_x : G \to G,\ y \mapsto xy$

2 de rechts actie door rechts translaties: voor $x \in G$ hebben we $r_x : G \to G,\ y \mapsto yx$

3 de conjugatie actie: voor $x \in G$ hebben we $c_x : G \to G,\ y \mapsto xyx^{-1}$

Alle drie de acties zijn automorfismen van G als variëteit. De rechts- en links translaties zijn vrij en transitief: $xy = y$ impliceert $x = e$, $yx = y$ impliceert $x = e$, en voor $y \in G$ geldt $y = ye = ey$. Deze acties zijn echter geen groepsmorfismen. Het is duidelijk dat de conjugatie actie niet vrij en niet transitief is wanneer $G \neq \{e\}$. Deze actie is echter wel een groepsmorfisme, dus c_x is een automorfisme van G als Lie groep. Ook is $c : G \to Aut_{Lie}(G),\ x \mapsto c_x$ een groepsmorfisme.

Laat L de vectorruimte $T_G(e)$ zijn. Voor alle x in G hebben we twee isomorfismen T_{l_x} en T_{r_x} van L naar $T_G(x)$. Deze twee ismorfismen hoeven niet hetzelfde te zijn, aangezien $c_x = r_x^{-1} \circ l_x$, geldt er dat $T_{r_x}(e)^{-1}T_{l_x}(e) = T_{c_x}(e)$. Ook geldt per constructie dat $T_{c_x}(e)T_{c_y}(e) = T_{c_{xy}}(e)$, hetgeen betekent dat we het volgende morfismen van Lie groepen hebben:

$$G \longrightarrow GL(L), x \mapsto T_{c_x}(e).$$

Dit morfisme wordt de geadjungeerde representatie van G genoemd, oftewel de actie op de raakruimte in e geïnduceerd door de conjugatie actie.

Door gebruik te maken van de linkstranslatie kunnen we de raakruimte $T_G(x)$ identificeren met $T_G(e)$. We zouden hiervoor ook de rechts translaties kunnen gebruiken, maar aangezien de afbeelding $x \mapsto x^{-1}$ van G naar G links in rechts translaties transformeert is de keuze niet van belang. De afbeelding:

$$L \times G \longrightarrow T_G,\ (v, g) \mapsto T_{l_g}(v) \in T_G(g)$$

is duidelijk bijectief, zijn inverse wordt gegeven door:

$$T_G \longrightarrow L \times G,\ t \mapsto (T_{l_{p(t)}}(e)^{-1}(t), p(t)),$$

met $p : T_G \to G$ de projectie. Aangezien beiden afbeelding worden gegeven in formules die samenstellingen zijn van diffeomorfismen tussen variëteiten, zijn ze zelf diffeomorfismen tussen variëteiten. We zien dus dat wanneer we de raakruimte $T_G(e)$ weten we alle raakruimten weten, omdat deze verkregen worden uit linkstranslatie van $T_G(e)$. De raakbundel wordt dus getrivialiseerd.

Wanneer we te maken hebben met een Lie groep kunnen we de links translaties dus gebruiken om de raakbundel te trivialiseren. Een volume vorm v op een Lie groep G wordt links-invariant genoemd als hij invariant is onder links translaties, d.w.z. voor elke $g \in G$ beeldt het isomorfisme $T_{l_g} : T_G(e) \to T_G(g)$, geïnduceerd door de links translatie l_g, de volume vorm v_e af op v_g. Deze links-invariante volume vormen worden ook wel Haar maten genoemd. Men kan laten zien dat er voor elke lokaal compacte topologische groep zulke Haar maten bestaan, uniek op scalar na en niet allen nul. Een volume vorm die zowel rechts- als links-invariant is wordt bi-invariante volume vorm genoemd. Wanneer G compact is, zijn de links-invariante volume vormen ook rechts-invariant [1]. In een compacte Lie groep G kan een Haar maat, ongelijk nul, uniek genormaliseerd worden door te eisen dat $\int_G v = 1$. In dit geval wordt v de invariante kansmaat op G genoemd.

Chapter 3

Weyl's integratie formule

3.1 De Liegroep van unitaire matrices

We zullen nu de integratie formule van Weyl gaan afleiden, deze zegt iets over integratie over de groep van unitaire matrices $U(n)$. Wat de precieze mededeling is van de stelling zien we later. Zij $n \geq 1$ en $G := U(n) :=$ $\{u \in M_n(\mathbb{C}) \mid uu^* = 1\}$, dan is G een ondergroep van de groep van inverteerbare complexe matrices $Gl_n(\mathbb{C})$. De verzameling van alle complexe matrices $M_n(\mathbb{C})$ is isomorf met de $\mathbb{R}^{2n^2}$ als $\mathbb{R}$-vectorruimte en dus op natuurlijke wijze een variëteit. De groep G is een deelvariëteit van $M_n(\mathbb{C})$, bewijs:

Proposition 3.1. *De groep G is een deelvariëteit van $M_n(\mathbb{C})$.*

Bewijs:

Zij

$$\begin{array}{rccl} f: & M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C})^+ = \{a \in M_n(\mathbb{C}) |\ a^* = a\} \\ & g & \mapsto & g^* g \end{array}$$

Er geldt $\dim_{\mathbb{R}}(M_n(\mathbb{C})^+) = \frac{1}{2} \cdot 2n(n+1) - n = n(n+1) - n = n^2$ en $U(n) := f^{-1}(I)$.

De afbeelding f is differentieerbaar, want $(g^*g)_{j,k} = \sum_l (g^*)_{j,l} \cdot g_{l,k} = \sum_l \overline{g_{l,j}} g_{l,k}$. Dus coordinaatsgewijs is f differentieerbaar, en dus is f differentieerbaar. We bewijzen nu eerst dat f regulier is in alle $g \in U(n)$; de rang van de Jacobiaan in g bereken we aan de hand van de relatie tussen de Jacobi-matrix en de richtingsafgeleide: In het algemeen hebben we,

$$J_f(p) \cdot v = \frac{d}{d\lambda} |_0\, f(p + \lambda v)$$

Dus als we bewijzen dat voor elke $g \in U(n)$ en elke $B \in M_n^+(\mathbb{C})$ er een matrix $X \in M_n(\mathbb{C})$ is z.d.d.

$$\frac{d}{d\lambda}\,|_0\,(g+\lambda X)^* \cdot (g+\lambda X) = B$$

in andere woorden $J_f(A)X = B$, dan is $J_f(p) : \mathbb{R}^{2n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)}$ surjectief dus $J_f(p)$ heeft rang $n(n+1)$ in g.

We moeten dus laten zien dan voor elke $B \in M_n(\mathbb{C})^+$ er een $X \in M_n(\mathbb{C})$ is met:

$$X^* \cdot g + g^* \cdot X = B$$

Omdat B een zelfgeadjungeerde matrix is en $(X^* \cdot g)^* = g^* \cdot X$ volstaat het een matrix X te vinden z.d.d.

$$g^* \cdot X = \frac{1}{2}B$$

Deze matrix kunnen we vinden, namelijk $X = \frac{1}{2}(g^*)^{-1}B = \frac{1}{2}gB$.

Dus f is regulier in alle $g \in G$ en volgens de "Regular value theorem" is $G = f^{-1}(I)$ een subvariëteit van $M_n(\mathbb{C})$, met co-dimensie n^2. Dus dim$G = 2n^2 - n^2 = n^2$. □

Proposition 3.2. *De variëteit G is een Liegroep.*

Bewijs: Om dit aan te tonen moeten we laten zien dat

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x,y) \mapsto xy \text{ en } G \longrightarrow G, \; x \mapsto x^{-1}$$

differentieerbaar zijn.

Een atlas van $M_n(\mathbb{C})$ kunnen we op een natuurlijk manier maken, namelijk de verzameling van alle opens in $M_n(\mathbb{C})$, waarbij de bijbehorende kaarten de natuurlijke afbeelding (identiteit) van $M_n(\mathbb{C})$ naar $\mathbb{R}^{2n^2}$ zijn, beperkt tot de open deelverzamelingen. De variëteit G is een deelvariëteit van $M_n(\mathbb{C})$, dus de atlas op $M_n(\mathbb{C})$ induceert een atlas op G, namelijk de verzameling kaarten $(U \cap G\ ,\ h|_{U\cap G})$, waarbij de kaarten (U, h) de flatteners zijn voor G in $M_n(\mathbb{C})$. Zij $f : G \longrightarrow G$ een afbeelding, dan is f differentieerbaar in een punt $g \in G$ als hij dat is t.o.v. de kaarten in g en $f(g)$. We zien nu dat differentieerbaarheid van f in een punt neer komt op differentieerbaarheid van een afbeelding van $\mathbb{R}^{n^2}$ naar $\mathbb{R}^2$. Dus om te bepalen of f differentieerbaar is, kunnen we coördinaatsgewijs bekijken of de afbeelding differentieerbaar is.

De afbeelding $(x, y) \mapsto xy$, komt coordinaatsgewijs neer op het nemen van eindige sommen van producten van twee coordinaten, dus is differentieerbaar. Door gebruik te maken van Cramer's rule voor het vinden van de inverse van een matrix, zien we dat de afbeelding $x \mapsto x^{-1}$, neer komt op eindige sommen van producten van de coordinaten van x of zijn geconjugeerde. Dus de afbeelding is differentieerbaar en hiermee is bewezen dat G een Liegroep is. $\square$

Proposition 3.3. *De Liegroep G is compact.*

Bewijs: De Liegroep G wordt gegeven door de volgende vergelijking voor de coordinaten:

$$\delta_{j,k} = (g^* \cdot g)_{j,k} = \sum_l (g^*)_{i,l} \cdot g_{l,k} = \sum_l \overline{g_{l,j}} g_{l,k}$$

Dus de absolute waarde van de coordinaten is begrensd en daarom is G begrensd en de coordinaten moeten voldoen aan een stelsel vergelijkingen. Hieruit volgt dat G is gesloten, dit zien we als volgt. De afbeelding $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})^+$ is C^∞, dus continu. Er geldt $G = f^{-1}1$, dus G is gesloten. Hieruit volgt dat G compact is. $\square$

We weten dat een compacte Liegroep een unieke invariante kansmaat heeft, deze gaan we nu berekenen.

Om de kansmaat te krijgen, maken we van de Liegroep van G ook een Riemannse variëteit. Hiervoor moeten we een metriek toekennen aan de raakruimtes van G.

We definiëren de volgende afbeeldingen $\langle \ , \ \rangle$ van $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$\langle a, b \rangle = Re(tr(a^* \cdot b)) = \sum_{j,k} (Re(a_{j,k})Re(b_{j,k}) + Im(a_{j,k})Im(b_{j,k})).$$

Voor deze afbeelding geldt:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \langle \lambda a, b \rangle = Re(tr((\lambda a)^* \cdot b)) = \lambda Re(tr(a^* \cdot b)) = \lambda \langle a, b \rangle$. Idem geldt $\langle a, \lambda b \rangle = \lambda \langle a, b \rangle$.
- $\forall a, b \in M_n(\mathbb{C}) : \langle a, b \rangle = Re(tr(a^* \cdot b)) = Re(tr((a^* \cdot b)^*)) = Re(tr(b^* \cdot a)) = \langle b, a \rangle$.
- $\forall a \in M_n(\mathbb{C}) : \langle a, a \rangle = Re(tr(a^* \cdot a)) = \sum_{j,k}((Re(a_{j,k}))^2 + (Im(a_{j,k}))^2)$ dus $\langle a, a \rangle \geq 0$ en $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Dus $\langle\ ,\ \rangle$ is een inproduct op $M_n(\mathbb{C})$. We berekenen nu de raakruimte in 1, deze geeft ons via linkstranslaties alle raakruimten van G. Er geldt:
$f(1+\epsilon\cdot a) = (1+\epsilon\cdot a)^*(1+\epsilon\cdot a) = 1+\epsilon(a^*+a)+\cdots$.
Dus $D_f(1)(a) = a^*+a$. De raakruimte $T_G(1)$ van G in het punt 1 is de verzameling elementen van $M_n(\mathbb{C})$ die door $D_f(1)$ op nul worden afgebeeld, dus

$$T_G(1) = \{a \in M_n(\mathbb{C})|\ a^*+a = 0\}.$$

We zien dat de raakruimtes van G deelruimten zijn van $M_n(\mathbb{C})$, dus de metriek die we hierboven hebben gedefinieerd kunnen we toekennen aan deze raakruimtes en dit maakt van G een Riemannse variëteit.

De Riemannse metriek op G is nu bi-invariant, want dat is de metriek op $M_n(\mathbb{C})$. Uit de lineaire algebra weten we namelijk dat het spoor van een product van twee matrices invariant is onder verwisseling van matrices in het product, dus:

$$\langle ga, gb\rangle = Re(tr(a^*g^*gb)) = Re(tr(a^*b)) = \langle a, b\rangle$$

en

$$\langle ag, bg\rangle = Re(tr(g^*a^*bg)) = Re(tr(bgg^*a^*)) = Re(tr(ba^*)) = Re(tr(a^*b)) = \langle a, b\rangle$$

We definiëren nu een Haarmaat μ_G op G, met de eigenschap dat voor $g \in G$ en $(v_1,\ldots,v_{n^2})$ een orthonormale basis van $T_G(g)$ geldt:

$$\mu_G(g)(v_1,\ldots,v_{n^2}) = 1$$

Er geldt dat μ_G bi-invariant is omdat de metriek bi-invariant is op G.

Als laatste voorbereiding kijken we naar de volgende verzameling T;

$$\begin{array}{rcl} T = \{g \in G|\ g_{j,k} = 0\ als\ j \neq k\} & \cong & (S^1)^n \\ \mathrm{diag}(z_1,\ldots,z_n) & \mapsto & z \end{array}$$

Proposition 3.4. *De verzameling T is een variëteit.*

Bewijs: De afbeelding $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = \|x\|$ is overal C^∞, behalve in 0. In het bijzonder is $1 \in \mathbb{R}$ een reguliere waarde, en het inverse beeld $f^{-1}(1)$ is de S^1. Dus S^1 is een 1-dimensionale variëteit. Het product $(S^1)^n$ is dan ook een variëteit, van dimensie n. □

Ook is T compact, want S^1 is compact. De raakruimte van S^1 in 1 is $i\mathbb{R}$, dus de raakruimte $T_T(e)$ van T, in het punt $e \in T$, is $\{diag(ia_1,\ldots,ia_n) \mid a_j \in \mathbb{R}\}$. De raakruimte van T in een punt $t \in T$ ligt in $M_n(\mathbb{C})$ en we maken van T nu ook een Riemannse variëteit, door de metriek van $M_n(\mathbb{C})$ te nemen. Net zo definiëren we nu de bi-invariante haarmaat μ_T.

3.2 Weyl's integratie formule

We komen nu tot de hoofdstelling.

Stelling 3.5 (Weyl's integratie formule)**.** *Er is een constante $d \in \mathbb{R}$ zodat voor alle continue functies $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ met $f(gxg^{-1}) = f(x),\ \forall g, x \in G$:*

$$\int_G f\mu_G = d \int_T f|_T \cdot \phi \cdot \mu_T, \quad \textit{met } \phi(z) = \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$$

Het bewijs voor deze stelling is vrij lang. We zullen het bewijs daarom ophakken in verschillende proposities en lemma's. We moeten eerst een aantal verzameling definiëren en hier eigenschappen over bewijzen:

Zij $U \subset U(n)$ de volgende verzameling, $U := \{u \in U(n) |\ u_{j,j} \neq 0 \ \ \forall j\}$. Dan is U open in $U(n)$, dus U is een deelvariëteit.

We definieëren de verzameling $V \subset U$ als
$V := \{u \in U(n) |\ u_{j,j} \neq 0 \textit{ en } \frac{u_{j,j}}{|u_{j,j}|} = 1\}$. Zij $t \in T$ en $v \in V$ dan geldt $(v \cdot t)_{j,j} = v_{j,j} \cdot t_j$, dus $v \cdot t \in V$ d.e.s.d.a. $t = 1$.

Lemma 3.6. *De verzameling V is een variëteit*

Bewijs: Bekijk de volgende afbeelding;

$$\begin{array}{rcl} f : U & \longrightarrow & (S^1)^n = T \\ u & \mapsto & (\frac{u_{1,1}}{|u_{1,1}|}, \ldots, \frac{u_{n,n}}{|u_{n,n}|}) \end{array}$$

Dan geldt $f^{-1}(1) = V$. We moeten dus bewijzen dat voor alle $v \in V$, v een regulier punt is, dus dat de afbeelding $Df(v) : T_U(v) \longrightarrow T_T(f(v))$ surjectief is. We kunnen dit expliciet laten zien, of op een meer abstracte manier, we doen beiden.

Het is duidelijk dat voor $t \in T$ en voor alle $u \in U$ geldt $f(t \cdot u) = t \cdot f(u)$. De abstracte manier maakt gebruik van de sectie s_u, met $u \in U$:

$$\begin{array}{rcl} s_u : T & \longrightarrow & U \\ t & \mapsto & (f(u))^{-1} \cdot t \cdot u \end{array}$$

We zien nu dat $(f \circ s_u)t = f((f(u))^{-1} \cdot t \cdot u) = (f(u))^{-1} \cdot t \cdot f(u) = t$, dus $f \circ s_u(t) = \mathrm{id}_T$. De afbeelding s_u is duidelijk differentieerbaar, en we zien nu dat $D\,\mathrm{id}_T(1) = Df(u) \circ Ds_u(1)$, dus $Df(u)$ is surjectief.

We bewijzen het nu expliciet. Voor de raakruimte gebruiken we de geometrische definitie. Er geldt $\mathrm{Dim}(T_T(f(v)) = \mathrm{Dim}(T) = n$. Zij $f(v) = (t_1, \ldots, t_n)$. Nu construeren we de volgende basis voor de raakruimte in $f(v)$; Zij $c_1, \ldots, c_n$ de volgende krommen:

$$\begin{aligned} c_j : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow T \\ \phi &\mapsto (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j e^{i\phi}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

We weten dat $\mathrm{Dim}(T_T(f(v)) = \mathrm{Dim}(T) = n$, dus wanneer we n lineair onafhankelijke vectoren vinden is dit een basis voor de vectorruimte. Bekijk de functie $f_T \in C_T^k(T)$. De afgeleide c_k op de k-de coordinaat is $t_k i e^{i\phi}$, welke niet nul is voor $\phi = 0$ en c_j wel. Dus $\partial_{c_1}, \ldots, \partial_{c_n}$ is een basis voor $T_T(f(v))$. Kies nu de volgende krommen $d_1, \ldots, d_n$;

$$\begin{aligned} d_j : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow U \\ \phi &\mapsto t_j \cdot v \end{aligned}$$

waarbij $t_{k,l} = \delta_{k,l}$ als $k \neq j$ en $t_{j,j} = e^{i\phi}$.

Nu geldt:

$$\begin{aligned} f \circ d_j : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow T \\ \phi &\mapsto f(t_j \cdot v) = t_j \cdot f(v) = (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j e^{i\phi}, t_{j+1}, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

Dus $f \circ d_j = c_j$, dus $Df(v)$ is surjectief en V is een variëteit. □

We definiëren de volgende equivalentie relatie op U: voor $u, v \in U$ is u equivalent met v als er een $t \in T$ bestaat met $ut = v$. De verzameling U uitgedeeld naar deze equivalentierelatie noemen we het quotiënt U/T. Met de quotiënttopologie is dit een topologische ruimte.

Lemma 3.7. *Het quotiënt U/T is een variëteit*

Bewijs: Zij ϕ de volgende afbeelding.

$$\begin{aligned} \phi : V \times T &\longrightarrow U \\ (v, t) &\mapsto v \cdot t \end{aligned}$$

Zowel V als T zijn variëteiten, dus $V \times T$ is een variëteit, evenals U. De afbeelding ϕ is een diffeomorfisme; ϕ^{-1} wordt gegeven op de volgende manier:

De afbeelding ϕ^{-1} stuurt $u \in U$ naar (v,t), met $t = diag(\frac{u_{1,1}}{|u_{1,1}|}, \ldots, \frac{u_{n,n}}{|u_{n,n}|})$ en v de matrix met $v_{j,k} = u_{j,k}\frac{|u_{k,k}|}{u_{k,k}}$. Al de coordinaatsgewijze afbeeldingen zijn differentieerbaar, dus ϕ^{-1} is differentieerbaar en ϕ is een diffeomorfisme.

Bekijk nu het volgende diagram:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \times T \cong U \\ v & \mapsto & (v,1) \end{array}$$

We kunnen $(V \times T)/T$ opvatten als V, welke een variëteit is, dus $(V \times T)/T$ is een variëteit. Aangezien U diffeomorf is met $V \times T$, kunnen we aan de hand van de variëteit $(V \times T)/T$ een atlas construeren voor U/T, dus U/T is een variëteit. $\square$

We kunnen nu de volgende propositie bewijzen:

Proposition 3.8. *Het quotiënt G/T is op natuurlijke wijze een variëteit.*

Bewijs: De quotiënttopologie maakt G/T een topologische ruimte. De linksvermenigvuldiging met een element $g \in G$, $L_g : G \longrightarrow G$, is een diffeomorfisme, omdat G een Liegroep is. Dus gU is diffeomorf met U en we kunnen nu voor gU/T op een natuurlijke manier een atlas construeren uit de atlas van de variëteit U/T en gU/T is dus ook een variëteit. We hebben dus rond ieder punt $\bar{g} \in G/T$ een open omgeving, die een variëteit is. We construeren nu een differentieerbare atlas voor G/T, aan de hand van deze open variëteiten. De atlas B_g van gU/T is te constueren uit de atlas A van V, namelijk $B_g = \{(L_g \circ \phi(V_i), h_i \circ \phi^{-1} \circ L_{g^{-1}}) \mid (V_i, h_i) \in A\}$. We definiëren nu als atlas C van G/T, een topologische ruimte met de quotiënttopologie; $C := \cup_g B_g$. De openverzameling van C overdekken G/T zeker. Het rest nu nog te laten zien dat de kaarten compatibel zijn;
Zij $(L_{g_1} \circ \phi(V_i), h_i \circ \phi^{-1} \circ L_{g_1^{-1}}), (L_{g_2} \circ \phi(V_j), h_j \circ \phi^{-1} \circ L_{g_2^{-1}}) \in C$, dan geldt voor de volgende functie beperkt tot $L_{g_1} \circ \phi(V_i) \cap L_{g_2} \circ \phi(V_j)$;
$(h_i \circ \phi^{-1} \circ L_{g_1^{-1}}) \circ (h_j \circ \phi^{-1} \circ L_{g_2^{-1}})^{-1} = (h_i \circ \phi^{-1} \circ L_{g_1^{-1}} \circ L_{g_2} \circ \phi \circ h_j^{-1})$
De samenstelling $\phi^{-1} \circ L_{g_1^{-1}} \circ L_{g_2} \circ \phi$ is een diffeomorfisme, van opens van V, aangezien elke afbeelding uit de samenstelling een diffeomorfisme is. Deze afbeelding is alleen een diffeomorfisme als hij dit is t.o.v. alle kaarten van V. Dus de gehele samenstelling $h_i \circ \phi^{-1} \circ L_{g_1^{-1}} \circ L_{g_2} \circ \phi \circ h_j^{-1}$ is differentieerbaar, en de kaarten in C zijn compatibel, dus C is een differentieerbare atlas en G/T een variëteit. $\square$

We weten dat G/T, G, T, variëteiten zijn en kunnen nu het volgende diagram bekijken:

$$\begin{tikzcd} G \times T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & G \\ G/T \times T \arrow[ur, "c"] & \end{tikzcd}$$

Hierbij definiëren we h als $h(g,t) = gtg^{-1}$. De afbeelding q is de quotiëntafbeelding. De afbeelding h is surjectief, want voor alle $x \in G$ bestaat er een orthonormale basis van eigenvectoren van x, dus $x = gtg^{-1}$ voor een $t \in T$ en $g \in G$ de matrix met de eigenvectoren als kolommen. Voor alle $t' \in T$ geldt: $gt'^{-1}t(gt'^{-1})^{-1} = gtg^{-1}$. Dus we kunnen nu een afbeelding c definiëren als volgt: $c(\bar{g}, t) = gtg^{-1}$. We zien nu dat $h = c \circ q$.

Lemma 3.9. *Zij $x \in G$ met verschillende eigenwaarden $z_1, \ldots, z_n$, dan bestaat de vezel $c^{-1}(x)$ uit de $n!$ elementen $(\bar{g}\sigma, \sigma^{-1}z\sigma)$ met $\sigma \in S_n$ en $(g,t) \in G \times T$ met $gtg^{-1} = x$.*

Bewijs: Zij $x \in G$ en $z_1, \ldots, z_n$ zijn verschillende eigenwaarden, dan geldt voor een zekere $g \in G$, $x = gzg^{-1}$, met $z = diag(z_1, \ldots, z_n)$. De orde van de permutatiegroep S_n is $n!$ en $g\sigma^{-1}\sigma z\sigma^{-1}\sigma g^{-1} = gzg^{-1}$, dus de $n!$ elementen $(\bar{g}\sigma, \sigma^{-1}z\sigma)$ zijn zeker bevat in $c^{-1}(x)$. Al de elementen zijn verschillend, aangezien de eigenwaarden verschillend zijn. Stel $a \in G$, $t \in T$, met $ata^{-1} = gzg^{-1}$, dan $z = g^{-1}ata^{-1}g = g^{-1}at(g^{-1}a)^{-1}$, dus t is gelijkvormig met z, dus ze hebben dezelfde eigenwaarden, en $z, t \in T$, dus $t = \sigma^{-1}z\sigma$ v.e.z. $\sigma \in S_n$. Dus $ata^{-1} = a\sigma^{-1}z\sigma a^{-1} = gzg^{-1}$, dus $g^{-1}a\sigma^{-1}z = zg^{-1}a\sigma^{-1}$, dus $g^{-1}a\sigma^{-1}$ commuteert met z. Het linksvermenigvuldigen met z komt neer op het vermenigvuldigen van de i-de rij met z_i en het vermenigvuldigen van rechts op het vermenigvuldigen van de j-de kolom met z_j. Aangezien $z_1, \ldots, z_n$ verschillend zijn, commuteert een matrix alleen met z als deze alleen niet nul elementen op de diagonaal heeft. Dus $g^{-1}a\sigma^{-1} = l \in T$ en $a = lg\sigma = g\sigma$ $(modT)$. Dus ieder element in $c^{-1}(x)$ is van de vorm $(\bar{g}\sigma, \sigma^{-1}z\sigma)$ en de vezel bestaat dus uit $n!$ elementen. □

De verzameling van matrices in G die twee of meer dezelfde eigenwaarden hebben heeft maat 0 in G, dus dragen niet bij aan de integraal. De andere elementen van G, hebben $n!$ originelen in $G/T \times T$, dus we zien nu dat er geldt:

$$\int_G f\mu_G = \frac{1}{n!}\int_{G/T\times T} (c^* f) c^* \mu_G$$

Hierbij is per definitie $c^*f = f \circ c$ en
$(c^*\mu_G)_{(\bar{g},z)}(v_1, \ldots, v_{n^2}) := (\mu_G)_{c(\bar{g},z)}(D_c(\bar{g},z)v_1, \ldots, D_c(\bar{g},z)v_{n^2})$.

De Liegroep G werkt op $G/T \times T$ op de volgende manier; $g \bullet (x,t) \mapsto (g \cdot x, t)$. Nu zijn c^*f en $c^*\mu_G$ invariant onder G, want $c(gx,t) = gxtx^{-1}g^{-1} = g \cdot c(x,t) \cdot g^{-1}$ en $\forall q \in G: \ f(qxq^{-1}) = f(x)$ en μ_G is bi-invariant.

We zagen dat G/T een variëteit is. De raakruimte van G/T in het punt $\bar{e}$ is op te vatten als het quotiënt van de raakruimtes van G en T in e, dus de raakruimte in het eenheidselement is de loodrechte op $T_T(e)$ in $T_G(e)$, dus $T_{G/T}(\bar{e}) = \{a \in M_n(\mathbb{C}) | \ a^* + a = 0 \text{ en } a_{j,j} = 0 \ \forall j\}$.

Omdat de metriek op $M_n(\mathbb{C})$ bi-invariant is onder G, geeft dit ons ook een metriek op G/T en we kunnen deze metriek weer toekennen aan elke raakruimte van G/T. Dit maak van G/T ook een Riemannse variëteit en geeft ons nu een $\mu_{G/T}$ als hiervoor.

We komen nu tot het bewijs van de integratie formule van Weyl. Hiervoor bekijken we het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd} G/T \times T \arrow[r, "Pr_{G/T}"] \arrow[d, "Pr_T"] & G/T \\ T & \end{tikzcd}$$

Er geldt; $c^*f(\bar{g},t) = f(gtg^{-1}) = f(t) = (Pr_T^* f_T)(\bar{g},t)$, met $f_T = f|_T$. De volumevorm $c^*\mu_G$, leeft op de variëteit $G/T \times T$. Het product $(Pr_{G/T}^*\mu_{G/T})(Pr_T^*\mu_T)$ is een volumevorm op $G/T \times T$, die de eigenschap heeft dat iedere volumevorm op $G/T \times T$ van de vorm $\psi(Pr_{G/T}^*\mu_{G/T})(Pr_T^*\mu_T)$, met ψ een unieke continue reële functie op $G/T \times T$. We gaan nu op zoek naar de functie ψ z.d.d. $c^*\mu_G = \psi(Pr_{G/T}^*\mu_{G/T})(Pr_T^*\mu_T)$. Deze functie is G invariant want $(c^*\mu_G)$ is dat ook, dus de functie is van de vorm $Pr_T^*\phi$, met $\phi: \ T \longrightarrow \mathbb{R}$. We berekenen nu ϕ. We kunnen ϕ nu dus berekenen door voor een willekeurige $z \in T$ een orthonormale basis $v_1, \ldots, v_{n^2}$ van de raakruimte in $(\bar{e}, z)$ te nemen en $(c^*\mu_G)_{(\bar{e},z)}(v_1, \ldots, v_{n^2})$ uit te rekenen. De raakruimte in $(\bar{e}, z)$ van $G/T \times T$ kunnen we zien als de directe som $T_{G/T}(\bar{e}) \oplus T_T(z)$, waarbij $T_{G/T}(\bar{e}) = \{a \in M_n(\mathbb{C}) | \ a^* + a = 0 \ en \ a_{j,j} = 0 \ \forall j\}$. We kiezen nu een orthonormale basis, $v_1, \ldots, v_{n^2}$ die bestaat uit de volgende elementen; kies voor alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ en $k < j$: $v_{j,k} = (\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0)$ waarbij $a \in M_n(\mathbb{C})$ met ($a_{j,k} = 1$ en $a_{k,j} = -1$ en 0 op alle andere coordinaten), en $v'_{j,k} = (\frac{1}{\sqrt{2}}a, 0)$ waarbij $a \in M_n(\mathbb{C})$ met ($a_{j,k} = i$ en $a_{k,j} = i$ en 0 op alle andere coordinaten), en voor $j = k$ kies $v_{j,j} = (0, it_j)$ waarbij ($t_j \in T$ met $t_{j,j} = z_j$ en verder 0). Dan is het makkelijk na te gaan dat de vereniging van al deze elementen lineair onafhankelijk is en orthonormaal. Nummer nu zo dat $\{v_1, \dots, v_{\frac{1}{2}(n^2-n)}\} = \{v_{j,k} | j \in \{1, \dots, n\}$ en $k < j\}$ en $\{v_{\frac{1}{2}(n^2-n)+1}\}, \dots, v_{(n^2-n)} = \{v'_{j,k} | j \in \{1, \dots, n\}$ en $k < j\}$ en $\{v_{(n^2-n+1)}, \dots, v_{n^2}\} = \{v_{j,j} |\ j \in \{1, \dots, n\}\}$.

We moeten nu voor elk van deze matrices v_i het beeld $D_c(\bar{e}, z)(v_i)$ onder D_c uitrekenen. Er geldt $c(1 + \epsilon a, z + \epsilon b) = (1 + \epsilon a)(z + \epsilon b)(1 + \epsilon a^*) = z + \epsilon(az + za^* + b) + \epsilon^2 \dots$. Dus $D_c(\bar{a}, b) = az + za^* + b = az - za + b$. Nu berekenen we dat $w_{j,k} := D_c(v_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, waarbij $a \in M_n(\mathbb{C})$ met $(a_{j,k} = a_{j,k} = (z_k - z_j)$ en 0 op alle andere coordinaten), $w'_{j,k} := D_c(v'_{j,k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, waarbij $a \in M_n(\mathbb{C})$ met $(a_{j,k} = i(z_k - z_j)$ en $a_{k,j} = i(z_j - z_k)$ en 0 op alle andere coordinaten), en $w_{j,j} := D_c(v_{j,j}) = it_j$. Het is nu ook weer makkelijk in te zien dat deze matrices samen een orthogonale basis vormen. Er geldt; $\langle w_{j,k}, w_{j,k} \rangle = (Re(z_j - z_k))^2 + (Im(z_j - z_k))^2 = |z_j - z_k|^2$ en net zo $\langle w'_{j,k}, w'_{j,k} \rangle = |z_j - z_k|^2$ en $\langle w_{j,j}, w_{j,j} \rangle = 1$. Dus de verzameling bestaande uit de matrices $\frac{w_{j,k}}{|z_j - z_k|}, \frac{w'_{j,k}}{|z_j - z_k|}$ en $w_{j,j}$ is een orthonormale basis, dus $(c^*\mu_G)_{(\bar{e},z)}(v_1, \dots, v_{n^2}) = (\mu_G)_z(D_c(v_1), \dots, D_c(v_{n^2})) = \prod_{k<j} |z_j - z_k|^2 \cdot 1 = \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$.

Dus $\phi(z) = \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$, want $((Pr^*_{G/T}\mu_{G/T})(Pr^*_T\mu_T))(v_1, \dots, v_{n^2}) = 1$.

We komen nu dus tot het volgende resultaat:

$$\int_G f\mu_G = \frac{1}{n!} \int_{G/T \times T} c^* f c^* \mu_G = \frac{1}{n!} \int_{G/T \times T} Pr^*_T \phi Pr^*_T f_T (Pr^*_{G/T}\mu_{G/T})(Pr^*_T \mu_T) = \frac{1}{n!} \int_{G/T} \mu_{G/T} \cdot \int_T f_T \phi \mu_T = d \cdot \int_T f_T \phi \mu_T$$

Hiermee is de stelling bewezen. $\square$

Chapter 4

De verdeling van de eigenwaarden

We kunnen de verdeling van de eigenwaarden van elementen in G verkrijgen door te kijken naar de continue klassenfuncties $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. De waarde van deze functies in een punt $g \in G$ is hetzelfde als de waarde in de matrix van zijn eigenwaarden. Wanneer we deze functie integreren over G, kunnen we de functie dus ook alleen integreren over T, waarbij de kansmaat waarover we integreren de standaard kansmaat μ'_T is vermenigvuldigd met de verdelingsfunctie van de eigenwaarden. De integraal formule van Weyl zegt ons dat voor alle continue klassenfuncties geldt;

$$\int_G f\mu_G = d\int_T f|_T \cdot \phi \cdot \mu_T,$$

met d een constante

We werken met kansmaten, dus we moeten μ_G en μ_T in de formule normaliseren, we krijgen dan $\mu'_G := \frac{\mu_G}{\int_G \mu_G}$ en $\mu'_T := \frac{\mu_T}{(2\pi)^n}$, dit geeft ons dan;

$$\int_G f\mu'_G = d'\int_T f|_T \cdot \phi \cdot \mu'_T$$

We zien nu dat de distributie functie $g(z)$ van de eigenwaarden gegeven wordt door, $d'\phi(z)$. We bepalen nu de constante d' door $f = 1$ te nemen. Dan geldt $\int_G f\mu'_G = 1$ en we hebben $d' = \frac{1}{\int_T \phi\mu'_T}$.
De functie $\phi(z)$ wordt gegeven door $\phi(z) = \prod_{j\neq k}|z_j - z_k| = \prod_{j<k}|z_j - z_k|^2 = \prod_{j<k}(z_j - z_k)\overline{(z_j - z_k)} = \prod_{j<k}(z_j - z_k)(z_j^{-1} - z_k^{-1})$, dus $\phi \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$. De integraal over T van de niet constante

monomen is nul, dus we moeten de constante term van ϕ bepalen. Boven zien we $\phi(z) = \prod_{j<k}(z_j - z_k) \cdot \prod_{j<k}(z_j^{-1} - z_k^{-1})$, dus $\phi = \phi' \cdot \bar{\phi}'$, met $\phi' = \prod_{j<k}(z_j - z_k)$. Dus ϕ' is de som van verschillende monomen en ϕ'^{-1} de som de inverses van deze monomen, dus de enige constanten in het product komen van het product van een monoom met zijn inverse, dus de constante term in ϕ is de som van de kwadraten van de coëfficienten in ϕ'.

De functie ϕ' is de determinant van de van der Monde matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dus $\phi' := \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} z_{\sigma(j)}^{j-1}$ en we zien dat ϕ bestaat uit $n!$ verschillende monomen met coëfficienten ± 1. Dus $d' = \frac{1}{\int_T \mu'_T} = \frac{1}{n!}$ en we krijgen als verdelings functie $g(z)$ voor de eigenwaarden;

$$g(z) = \frac{1}{n!} \prod_{j \neq k} |z_j - z_k|$$

Bibliography

[1] Edixhoven, B. - Lie groups and Lie algebras, D.E.A., 2000-2001

`www.math.leidenuniv.nl/~edix/public_html_rennes/cours/dea0001.pdf`

[2] Janich, K. -Vector Analysis - Springer-Verlag New York, Inc - 1993

[3] John F. Price - Lie Groups and Compact Groups

[4] Freeman Dyson - Statistical Theorie of the Energy Levels of Complex Systems 1.

[5] C.W.J. Beenakker - Universality in the Random-Matrix Theory of Quantum Transport

[6] C.W.J. Beenakker - Random matrix theory of quantum transport

[7] Pier A. Mello and Jean-Louis Pichard - Symmetries and parametrization of the transfer matrix in electronic quantum transport theory

[8] Harold U. Baranger and Pier A. Mello - Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach.

[9] Rodolfo A. Jalabert and Jean-Louis Pichard - Quantum mesoscopics scattering: Disorderd systems and Dyson circular ensembles.