Semi-Riemannse meetkunde en de Schwarzschild meetkunde

Vorselen, T.

Semi-Riemannse meetkunde en de Schwarzschild meetkunde

Thijs Vorselen

met medewerking van Hilko Chang

mei 2007

Bachelorverslag Wiskunde en Natuurkunde
onder begeleiding van Dr. M. Lübke en Dr. Y. Levin
Mathematisch Instituut Leiden en Leiden Institute of Physics
Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Het onderwerp is de Semi-Riemannse meetkunde en de toepassing hiervan op de Algemene Relativiteitstheorie. Deze scriptie dient als bachelorscriptie voor een dubbele bachelor natuurkunde en wiskunde. Hiervoor was het noodzakelijk om een onderwerp te kiezen, waarin zowel de natuurkunde als de wiskunde goed herkenbaar zijn. Vereiste voorkennis voor een goed begrip is lineaire algebra en differentieerbare variëteiten. De Semi-Riemannse meetkunde is de studie van differentieerbare variëteiten met een niet-ontaarde metrische tensor. Dit is een generalisatie van de Riemannse meetkunde, waarbij een positief definiete metrische tensor gevraagd wordt. Het belangrijkste voorbeeld van een Semi-Riemannse variëteit in de natuurkunde is de Lorentz variëteit, die van cruciaal belang is voor de Algemene Relativiteitstheorie.

In deze scriptie worden eerst resultaten voor niet-ontaarde symmetrische bilineaire vormen besproken. Onderwerpen uit de multilineaire algebra als tensoren, contractie en metrische contractie komen hier aan bod. Van resultaten in dit eerste deel van de scriptie wordt later gebruik gemaakt in de context van Semi-Riemannse variëteiten. In het volgende deel wordt de Semi-Riemannse variëteit gedefinieerd. Hiervoor wordt eerst een definitie van de raakruimte en de definitie van vectorvelden en tensorvelden voor een differentieerbare variëteit gegeven. Vervolgens wordt de metrische tensor gedefinieerd en hiermee direct de Semi-Riemannse variëteit. Dit is namelijk een differentieerbare variëteit voorzien van zo'n metrische tensor. Vervolgens wordt een aantal belangrijke begrippen van de Semi-Riemannse meetkunde gedefinieerd. Connecties, met in het bijzonder de Levi-Civita connectie, kromming, framevelden en geodeten komen aan bod.

Wanneer de wiskundige theorie van de Semi-Riemannse meetkunde bekend is, kan de Algemene Relativiteitstheorie behandeld worden. Deze theorie is geformuleerd in een Lorentz variëteit, een Semi-Riemannse variëteit van dimensie vier met een metrische tensor van index één. De Algemene Relativiteitstheorie is een geometrische theorie, waarin wordt aangenomen dat zowel massa als energie de ruimte-tijd krommen en dat deze kromming de beweging van deeltjes, waaronder ook het licht, beïnvloedt. Deze theorie werd door Einstein in 1916 gepubliceerd en is één van de meest baanbrekende theoriën van de vorige eeuw.

In de Algemene Relativiteitstheorie geeft de Einstein vergelijking een set van differentiaalvergelijkingen, waarmee een poging gedaan kan worden de metrische tensor voor een specifiek deel van het heelal te berekenen of benaderen. Wanneer de metrische tensor bekend is, kan de theorie over geodeten gebruikt worden om banen van deeltjes in vrije val te berekenen.

In veel gevallen is het onmogelijk of heel erg lastig om een goede benadering te vinden voor deze metrische tensor. Een belangrijk geval waarin het zelfs mogelijk is om de metrische tensor exact te berekenen is de Schwarzschild ruimte-tijd. Deze is genoemd naar de ontdekker Karl Schwarzschild, die deze oplossing slechts een maand na publicatie van de Algemene Relativiteitstheorie gevonden heeft. De Schwarzschild ruimte-tijd geeft een exacte oplossing van de Einstein vergelijking voor een lege ruimte om een zware massa. Deze oplossing is geschikt om bijvoorbeeld banen van satellieten om de aarde of planeten om de zon te berekenen. De Schwarzschild straal is een belangrijke constante voor deze oplossing. Oorspronkelijk werd alleen het deel van de Schwarzschild ruimte-tijd buiten deze straal als interessant beschouwd, omdat er gedacht werd dat er alleen objecten bestaan met een straal groter dan de Schwarzschild straal. Pas rond 1960 werd concensus bereikt over objecten met een straal kleiner dan de Schwarzschild straal. Deze objecten klappen ineen en deeltjes kunnen wel binnen de Schwarzschild straal terecht komen, maar kunnen daarna nooit meer terug. Het deel van de ruimte binnen de Schwarzschild straal wordt een zwart gat genoemd.

Deze scriptie is voor een groot deel geschreven in samenwerking met Hilko Chang. Het deel van de scriptie tot en met de paragraaf over de Einstein vergelijking hebben we met uitzondering van de paragraaf over geodeten samen geschreven. De scripties liepen hierna uit elkaar. De paragrafen over geodeten en deeltjes in de Algemene Relativiteitstheorie en het hoofdstuk over de Schwarzschild ruimte-tijd zijn door mij geschreven. Na de formulering van de Einstein vergelijking introduceert Hilko Chang in zijn scriptie de Robertson-Walker ruimte-tijd om iets te zeggen over de evolutie van het heelal. Hierbij kijkt hij naar de voorwaarden, waarbij een oerknal of eindkrak plaatsvindt.

Ik wil Hilko Chang bedanken voor zijn aandeel in het schrijven van de scriptie, de goede samenwerking en als discussiepartner over de inhoud van de scriptie. Youri Levin wil ik bedanken voor zijn uitleg over de Algemene Relativiteitstheorie en voor de lange tijd dat we zijn boek mochten lenen. Heel veel dank ben ik verschuldigd aan Martin Lübke voor zijn wekelijkse begeleiding bij het schrijven van de scriptie, zijn uitleg en de vele verbeteringen.

2 Multilineaire Algebra

2.1 Niet-ontaarde symmetrische bilineaire vormen

Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte en zij $g : V \times V \to \mathbb{R}$ een bilineaire vorm op V. We noemen g symmetrisch als $g(v, w) = g(w, v)$ voor alle $v, w \in V$.

Definitie 2.1. Een symmetrische bilineaire vorm g heet *niet-ontaard* wanneer voor alle $v \in V$ geldt dat

$$g(v, w) = 0 \text{ voor alle } w \in V \Leftrightarrow v = 0.$$

We noemen g positief respectievelijk negatief definiet, wanneer $v \neq 0$ impliceert dat $g(v, v) > 0$ respectievelijk $g(v, v) < 0$. De index van g is de maximale dimensie van een deelruimte $W \subset V$, waarvoor $g|_W$ negatief definiet is.

Iedere bilineaire vorm op V kan ten opzichte van een basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ gerepresenteerd worden door de matrix G waarbij $G_{ij} = g(b_i, b_j)$. Als g symmetrisch is en niet-ontaard betekent dit dat de matrix G symmetrisch is en dat $\det G \neq 0$. In dit geval heeft G geen eigenwaarde gelijk aan nul. De index van g is het aantal negatieve eigenwaarden van G.

De duale vectorruimte van V noteren we met V^*, de verzameling van bilineaire afbeeldingen $V \times V \to \mathbb{R}$ met $\mathrm{Bil}(V)$ en de verzameling van lineaire afbeeldingen van V naar zichzelf met $\mathrm{End}(V)$.

Stelling 2.2.

i) We definiëren $m_g : V \to V^*$ door $m_g(v)(w) := g(v, w)$ voor alle $v, w \in V$. Dit is een lineair isomorfisme.

ii) We definiëren $g^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ door $g^*(\nu, \mu) := g(m_g^{-1}(\nu), m_g^{-1}(\mu))$ voor alle $\nu, \mu \in V^*$. Dit is een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm.

iii) We definiëren $\Phi_g : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V)$ door $\Phi_g(f)(v, w) := g(f(v), w)$ voor alle $f \in \mathrm{End}(V)$ en alle $v, w \in V$. Dit is een lineair isomorfisme.

a) De afbeelding $\Phi_g(f)$ is symmetrisch dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.

b) De afbeelding $\Phi_g(f)$ is niet-ontaard dan en slechts dan als f bijectief is.

Bewijs:

i) Dat g lineair is in het tweede argument geeft dat $m_g(v)$ een lineaire afbeelding is, waaruit volgt dat m_g welgedefinieerd is. Dat m_g lineair is volgt uit het feit dat g lineair is in het eerste argument. De afbeelding m_g is injectief, want $m_g(v) = 0$ impliceert $g(v, w) = 0$ voor alle $w \in V$ en g is niet-ontaard, waaruit volgt dat $v = 0$. Omdat $\dim(V) = \dim(V^*)$ is m_g ook surjectief. De conclusie is dat m_g een lineair isomorfisme is.

ii) Omdat g bilineair en m_g een lineair isomorfisme is, is g^* een bilineaire vorm. De bilineaire vorm g^* is symmetrisch, want $g^*(\nu, \mu) = g(m_g^{-1}(\nu), m_g^{-1}(\mu)) = g(m_g^{-1}(\mu), m_g^{-1}(\nu)) = g^*(\mu, \nu)$.
Wanneer $g^*(\nu, \mu) = 0$ voor alle $\mu \in V^*$, dan is $g(m_g^{-1}(\nu), w) = 0$ voor alle $w \in V$. Hieruit volgt dat $m_g^{-1}(\nu) = 0$, want g is niet-ontaard. De conclusie is dat $\nu = 0$, dus g^* is niet-ontaard.

iii) De afbeelding Φ_g is lineair, omdat g bilineair is. Stel $\Phi_g(f)(v, w) = 0$ voor alle $v, w \in V$ dan geldt $f(v) = 0$ voor alle $v \in V$, omdat g niet-ontaard is. Hieruit volgt dat Φ_g injectief is. Φ_g is ook surjectief, omdat $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = \dim(V)^2 = \dim(\mathrm{End}(V))$.

a) De afbeelding $\Phi_g(f)$ is symmetrisch dan en slechts dan als $g(f(v),w) = \Phi_g(f)(v,w) = \Phi_g(f)(w,v) = g(f(w),v) = g(v,f(w))$ voor alle $v,w \in V$. Dat is precies, wanneer f zelfgeadjungeerd is ten opzichte van g.

b) De afbeelding $\Phi_g(f)$ is niet-ontaard, wanneer alleen voor $v = 0$ geldt dat $\Phi_g(f)(v,w) = g(f(v),w) = 0$ voor alle $w \in W$. $f(v) = 0$ geldt dan alleen voor $v = 0$, f is injectief en dus bijectief.

   Wanneer f bijectief is, dan geldt alleen voor $v = 0$ dat $f(v) = 0$. Door gebruik te maken van het feit dat g niet-ontaard is, vinden we dat alleen voor $v = 0$ geldt dat $\Phi_g(f)(v,w) = g(f(v),w) = 0$ voor alle $w \in V$. Dus $\Phi_g(f)$ is niet ontaard. □

Definitie 2.3. Het g-spoor van een biliniaire vorm $h \in \mathrm{Bil}(V)$ is gegeven door $\mathrm{Tr}_g(h) := \mathrm{Tr}(\Phi_g^{-1}(h))$.

Definitie 2.4 (Duale basis)**.** Zij $\{b_1,\dots,b_n\}$ een basis van V. Voor $1 \le i \le n$ definiëren we $\beta_i \in V^*$ door $\beta_i(b_j) = \delta_{ij}$. We noemen $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ de *duale basis* van $\{b_1,\dots,b_n\}$.

Een lineaire afbeelding is uniek bepaald door de beelden van de basisvectoren. Het beeld van de basisvectoren kan vrij gekozen worden. De duale basis bestaat dus voor iedere basis en is uniek.

Lemma 2.5. *Voor alle $v \in V$ geldt $v = \sum_{i=1}^n \beta_i(v)b_i$.*

Bewijs: Omdat $\{b_1,\dots,b_n\}$ een basis van V is, zijn er reële getallen $c_1,\dots,c_n$ zodat $v = \sum_{j=1}^n c_j b_j$. Er geldt dus voor $j = 1,\dots,n$ dat:

$$\beta_j(v) = \beta_j(\sum_{i=1}^n c_i b_i) = \sum_{i=1}^n c_i \beta_j(b_i) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} = c_j.$$

Hieruit volgt dat $v = \sum_{j=1}^n c_j b_j = \sum_{i=1}^n \beta_i(v) b_i$. □

Aangezien V de duale is van V^* en $\{b_1,\dots,b_n\}$ de duale basis van $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ geldt ook voor alle $\nu \in V^*$, dat $\nu = \sum_{i=1}^n \nu(b_i)\beta_i$.

Definitie 2.6. Een basis $\{e_1,\dots,e_n\}$ van V heet g-orthonormaal als

$$g(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{-1,1\} & \text{als } i = j. \end{cases}$$

De g-orthonormale basis bestaat voor iedere niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm g. Het aantal negatieve waarden in $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$ geeft de index van g. We noteren de duale basis van een g-orthonormale basis als $\{\eta_1,\dots\eta_n\}$.

Lemma 2.7. *Wanneer $\{e_1,\dots,e_n\}$ een g-orthonormale basis is van V dan gelden de volgende drie uitspraken:*

i) $\{\varepsilon_1 m_g(e_1),\dots,\varepsilon_n m_g(e_n)\}$ *is de g^*-orthonormale duale basis van* $\{e_1,\dots,e_n\}$,

ii) $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(f(e_i),e_i))$ *voor alle* $f \in \mathrm{End}(V)$,

iii) $\mathrm{Tr}_g(h) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i,e_i)$ *voor alle* $h \in \mathrm{Bil}(V)$.

Bewijs:

i) De duale basis van $\{e_1,\dots,e_n\}$ is $\{\varepsilon_1 m_g(e_1),\dots\varepsilon_n m_g(e_n)\}$, want

$$\varepsilon_i m_g(e_i)(e_j) = \varepsilon_i g(e_i,e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i^2 & \text{als } i = j \end{array} \right\} = \delta_{ij}.$$

   Deze basis is g^*-orthonormaal, omdat

$$g^*(\varepsilon_i m_g(e_i), \varepsilon_j m_g(e_j)) = \varepsilon_i \varepsilon_j g(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{-1,1\} & \text{als } i = j. \end{cases}$$

ii) Zij $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeven. Ten opzichte van de basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wordt f gerepresenteerd door de matrix F met kolommen $f(e_j)$, met andere woorden $F_{ij} = f(e_j)_i$.

$$F = \big(f(e_1)| \quad \ldots \quad |f(e_n)\big) = \begin{pmatrix} f(e_1)_1 & \ldots & f(e_n)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_1)_n & \ldots & f(e_n)_n \end{pmatrix}.$$

Het spoor van f is gelijk aan dat van F. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(e_i)_i = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)_i \varepsilon_i g(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(f(e_i)_i e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\sum_{j=1}^{n} f(e_i)_j e_j, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(f(e_i), e_i). \end{aligned}$$

iii) Voor een bilineaire afbeelding $h \in \mathrm{Bil(V)}$ geldt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_g(h) &= \mathrm{Tr}(\Phi_g^{-1}(h)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\Phi_g^{-1}(h)(e_i), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Phi_g(\Phi_g^{-1}(h))(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h(e_i, e_i). \end{aligned}$$

□

2.2 Tensoren

Definitie 2.8. Zijn V, V' reële vectorruimtes, dan is het tensorproduct $V \otimes V'$ een reële vectorruimte voorzien van een bilineaire afbeelding $f : V \times V' \to V \otimes V'$, die voldoet aan de universele eigenschap: voor iedere reële vectorruimte W en iedere bilineaire afbeelding $\gamma : V \times V' \to W$ is er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\gamma} : V \otimes V' \to W$, zodanig dat $\gamma = \tilde{\gamma} \circ f$. Dat wil zeggen dat het volgende diagram commuteert.

$$\begin{tikzcd} V \times V' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & V \otimes V' \arrow[dl, dashed, "\tilde{\gamma}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Aangezien het tensorproduct van twee vectorruimten weer een vectorruimte is, kan men het tensorproduct voor meerdere reële vectorruimten $V_1, \ldots, V_m$ definiëren door het bovenstaande te herhalen

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_m = (\cdots((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes \cdots) \otimes V_m.$$

Het tensorproduct is associatief, dus de haakjes kunnen weggelaten worden. Het meervoudig tensorproduct voldoet aan een vergelijkbare universele eigenschap, alleen zijn de bilineaire afbeeldingen γ en f nu multilineair. De dimensie van de vectorruimte $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ is $\Pi_{i=1}^m \dim(V_i)$. Voor het tensorproduct $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}$ noteren we $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$.

Definitie 2.9. Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte en r, s positieve gehele getallen. Een tensor A van het type (r, s) is een multilineaire afbeelding

$$A : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

De verzameling V_s^r van tensoren van het type (r, s) is een reële vectorruimte van dimensie n^{r+s}. Daarnaast definiëren we $V_0^0 = \mathbb{R}$ en zien we dat $V_1^0 = V^*$ en $V_2^0 = \mathrm{Bil}(V)$.

Lemma 2.10. *V_s^r is op een natuurlijke manier isomorf met het tensorproduct $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$.*

Bewijs: Definieer de afbeelding $\gamma_s^r : V^r \times (V^*)^s \to V_s^r$ door

$$\gamma_s^r(a_1, \dots, a_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s)(\zeta_1, \dots, \zeta_r, z_1, \dots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdot \ldots \cdot \zeta_r(z_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_s(z_s).$$

Deze afbeelding is multilineair, dus het volgende diagram commuteert voor een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\gamma_s^r}$.

$$\begin{tikzcd} V^r \times (V^*)^s \arrow[r, "f_s^r"] \arrow[dr, "\gamma_s^r"'] & V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} \arrow[d, dashed, "\tilde{\gamma_s^r}"] \\ & V_s^r \end{tikzcd}$$

Uit het diagram volgt dat $\tilde{\gamma_s^r}$ gegeven is door

$$\tilde{\gamma_s^r}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s)(\zeta_1, \dots, \zeta_r, z_1, \dots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdot \ldots \cdot \zeta_r(z_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_s(z_s).$$

Zij $\{b_1, \dots, b_n\}$ een basis van V en $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ de duale basis. Een basis van $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ is

$$\{b_I \otimes \beta_J : I \in \{1, \dots, n\}^r, J \in \{1, \dots, n\}^s\}.$$

Hierbij zijn I en J multi-indices, $I = (i_1, \dots, i_r)$ en $J = (j_1, \dots, j_s)$. Per definitie is $a_I \otimes a_J = a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_r} \otimes \alpha_{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{j_s}$ voor $a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \in V$, $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_s} \in V^*$. We introduceren voor elementen in $(V^*)^r \times V^s$ de notatie:

$$(\alpha_I, a_J) = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, a_{j_1}, \dots, a_{j_s}).$$

Het is duidelijk dat geldt:

$$\tilde{\gamma_s^r}(b_I \otimes \beta_J)(b_{I'}, \beta_{J'}) = \delta_{II'} \cdot \delta_{JJ'},$$

waarbij we voor twee multi-indices $K = (k_1, \dots, k_n)$ en $K' = (k'_1, \dots, k'_n)$ van gelijke lengte n definiëren dat $\delta_{KK'} = \delta_{k_1, k'_1} \cdots \delta_{k_n, k'_n}$.

Zij $x \in V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$. Dan is $x = \sum_{I,J} c_{I,J} \cdot b_I \otimes \beta_J$ voor zekere reële coëfficiënten $c_{I,J}$. Omdat $\tilde{\gamma_s^r}$ lineair is, geldt $\tilde{\gamma_s^r}(x) = \sum_{I,J} c_{I,J} \tilde{\gamma_s^r}(b_I \otimes \beta_J)$. Stel $\tilde{\gamma_s^r}(x) = 0$, dan geldt dat $c_{I,J} = \tilde{\gamma_s^r}(x)(\beta_I, b_J) = 0$. Hieruit volgt dat $x = 0$, dus $\tilde{\gamma_s^r}$ is injectief. Omdat $\dim(V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}) = \dim(V)^{r+s} = \dim(V_s^r)$ is $\tilde{\gamma_s^r}$ ook surjectief. Hieruit volgt dat V_s^r op een natuurlijke manier isomorf is met $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$. $\square$

Ieder element van $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ is een som van elementen van de vorm $a_I \otimes \alpha_J$ met $a_1, \dots, a_r \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in V^*$. We interpreteren $a_I \otimes \alpha_J$ als een tensor op de volgende manier:

$$a_I \otimes \alpha_J(\zeta_1, \dots, \zeta_r, z_1, \dots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdots \zeta_r(a_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdots \alpha_s(z_s)$$

voor alle $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in V^*$, $z_1, \dots, z_s \in V$. In het vervolg maken we geen onderscheid meer tussen V_s^r en $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ en noteren beiden als V_s^r.

Lemma 2.11. *Zij V een eindig dimensionale reële vector ruimte, dan is $\mathrm{End}(V)$ op een natuurlijke manier isomorf met V_1^1.*

Bewijs: Zij $\alpha \in V^*$, $a, v \in V$. We definiëren $\Psi : V \times V^* \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ door $\Psi(a,\alpha)(v) = \alpha(v)a$. Omdat α lineair is, is $\Psi(a,\alpha)$ inderdaad een endomorfisme. Het is tevens direct duidelijk dat Ψ een bilineaire afbeelding is.

$$\begin{tikzcd}
V \times V^* \arrow[rr, "f_1^1"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & V_1^1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\Psi}"] \\
& \mathrm{End}(V) &
\end{tikzcd}$$

Volgens de universele eigenschap van het tensorproduct bestaat er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\Psi}$ zodanig dat $\Psi = \tilde{\Psi} \circ f_1^1$. We weten dat $f_1^1(a,\alpha) = a \otimes \alpha$, dus $\tilde{\Psi}$ voldoet aan $\tilde{\Psi}(a \otimes \alpha)(v) = \alpha(v)a$.

We willen laten zien dat $\tilde{\Psi}$ een isomorfisme is. Zij $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis van V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de duale basis en $A \in \mathrm{End}(V)$. Er geldt voor alle $v \in V$:

$$\tilde{\Psi}(\sum_{i=1}^{n} Ab_i \otimes \beta_i)(v) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Psi}(Ab_i \otimes \beta_i)(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(v)Ab_i = A(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(v)b_i) = A(v),$$

dus $\tilde{\Psi}$ is surjectief. Omdat de dimensies van V_1^1 en $\mathrm{End}(V)$ gelijk zijn, is $\tilde{\Psi}$ ook injectief. $\square$

2.3 Contractie

Stelling 2.12.

i) *Voor $1 \leq i \leq r$ en $1 \leq j \leq s$ bestaat er een unieke lineaire afbeelding $C_j^i : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$, genaamd contractie, zodanig dat voor alle $a_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in V_s^r$ geldt dat:*

$$C_j^i(a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s) = \alpha_j(a_i) \cdot a_1 \otimes \ldots \hat{i} \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \hat{j} \ldots \otimes \alpha_s.$$

In deze uitdrukking geven $\hat{i}$ en $\hat{j}$ aan dat de termen a_i en α_j in het tensorproduct ontbreken.

ii) *Wanneer $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis is van V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de duale basis van V^* en $A \in V_s^r$ dan geldt voor alle $\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1} \in V^*$, $z_1, \ldots, z_{s-1} \in V$:*

$$C_j^i(A)(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) = \\ \sum_{k=1}^{n} A(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \beta_k, \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{j-1}, b_k, z_j, \ldots, z_{s-1}).$$

Bewijs:

i) Definieer de volgende multilineaire afbeelding:

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{C_j^i} : V^r \times (V^*)^s & \longrightarrow & V^{r-1} \times (V^*)^{s-1} \\
(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) & \longmapsto & \alpha_j(a_i) \cdot (a_1, \ldots \hat{i} \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots \hat{j} \ldots, \alpha_s)
\end{array}$$

De samenstelling van deze afbeelding met de afbeelding f_{s-1}^{r-1} is ook multilineair. Volgens de universele eigenschap van V_s^r bestaat er een unieke lineaire afbeelding $C_j^i : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$ zodanig dat $C_j^i \circ f_s^r = f_{s-1}^{r-1} \circ \widehat{C_j^i}$.

$$\begin{tikzcd}
V^r \times (V^*)^s \arrow[r, "f_s^r"] \arrow[d, "\widehat{C_j^i}"'] & V_s^r \arrow[d, dashed, "C_j^i"'] \\
V^{r-1} \times (V^*)^{s-1} \arrow[r, "f_{s-1}^{r-1}"] & V_{s-1}^{r-1}
\end{tikzcd}$$

Hieruit volgt dat C^i_j de unieke lineaire afbeelding is die voldoet aan

$$C^i_j(a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s) = \alpha_j(a_i) \cdot a_1 \otimes \ldots \hat{i} \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \hat{j} \ldots \otimes \alpha_s.$$

ii) Uit lemma 2.10 volgt, dat iedere $A \in V^r_s$ een lineaire combinatie is van basisvectoren van de vorm $b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_s}$ met $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$, waarvoor geldt:

$$\begin{gathered} C^i_j(b_{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_s})(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) = \\ \beta_{j_j}(b_{i_i}) \cdot b_{i_1} \otimes \cdots \hat{i_i} \cdots \otimes b_{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \cdots \hat{j_j} \cdots \otimes \beta_{j_s}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) = \\ \sum_{k=1}^n b_{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_s}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \beta_k, \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{j-1}, b_k, z_j, \ldots, z_{s-1}). \end{gathered}$$

Aangezien C^i_j lineair is, is het lemma hiermee bewezen. □

Lemma 2.13. *Zij V een eindig dimensionale reële vector ruimte en zij $\tilde{\Psi}$ het natuurlijke isomorfisme van $\mathrm{End}(V)$ naar V^1_1, zoals gegeven in Lemma 2.11, dan is $\mathrm{Tr} = C^1_1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}$.*

Bewijs: Zij $A \in \mathrm{End}(V)$. Uit het bewijs van Lemma 2.11 weten we dat $\tilde{\Psi}^{-1}(A) = \sum_{i=1}^n Ab_i \otimes \beta_i$, waaruit volgt dat

$$C^1_1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}(A) = C^1_1(\sum_{i=1}^n Ab_i \otimes \beta_i) = \sum_{i=1}^n C^1_1(Ab_i \otimes \beta_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i(Ab_i) = \mathrm{Tr}(A).$$ □

2.4 Metrische Contractie

Stelling 2.14. *Zij g een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm, $1 \leq i \leq r$ en $1 \leq j \leq s$.*

i) Er bestaan unieke lineaire isomorfismen

$$\downarrow^i_j \colon V^r_s \longrightarrow V^{r-1}_{s+1} \qquad \uparrow^i_j \colon V^r_s \longrightarrow V^{r+1}_{s-1}$$

zodanig dat voor alle $a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in V^r_s$:

$$\begin{aligned} \downarrow^i_j (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) &= a_1 \otimes \cdots \hat{i} \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \\ &\quad \alpha_{j-1} \otimes m_g(a_i) \otimes \alpha_j \otimes \cdots \otimes \alpha_s \qquad (1) \\ \uparrow^i_j (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) &= a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes m_g^{-1}(\alpha_j) \otimes a_i \otimes \cdots \otimes \\ &\quad a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \hat{j} \cdots \otimes \alpha_s \qquad (2) \end{aligned}$$

ii) Zij $A \in V^r_s$. Dan

$$\begin{aligned} \downarrow^i_j \circ A(z_1, \ldots, z_{s+1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}) &= A(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{s+1}, \\ &\quad \zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, m_g(z_j), \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}) \qquad (3) \end{aligned}$$

Bewijs:

i) Zij $(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in V^r \times (V^*)^s$. We definiëren $\widehat{\downarrow}^i_j : V^r \times (V^*)^s \longrightarrow V^{r-1} \times (V^*)^{s+1}$ door

$$\begin{gathered} \widehat{\downarrow}^i_j(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \\ (a_1, \ldots \hat{i} \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, m_g(a_i), \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s). \end{gathered}$$

Het is duidelijk dat $\widehat{\downarrow}^i_j$ goed gedefinieerd is. Uit de lineariteit van m_g volgt dat $\widehat{\downarrow}^i_j$ een multilineaire afbeelding is.

$$\begin{tikzcd}
V^r \times (V^*)^s \arrow[r, "f^r_s"] \arrow[d, "\widehat{\downarrow}^i_j"'] & V^r_s \arrow[d, dashed, "\downarrow^i_j"'] \\
V^{r-1} \times (V^*)^{s+1} \arrow[r, "f^{r-1}_{s+1}"] & V^{r-1}_{s+1}
\end{tikzcd}$$

Dus is $f^{r-1}_{s+1} \circ \widehat{\downarrow}^i_j$ een multilineaire afbeelding. Volgens de universele eigenschap van het tensorproduct bestaat er een unieke lineaire afbeelding $\downarrow^i_j$ zodanig dat $f^{r-1}_{s+1} \circ \widehat{\downarrow}^i_j = \downarrow^i_j \circ f^r_s$. Hieruit volgt dat $\downarrow^i_j$ voldoet aan vergelijking (1).

Een basis van V^{r-1}_{s+1} is:

$$\{b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{l_{s-1}} : k_1, \ldots, k_{r-1}, l_1, \ldots, l_{s+1} \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Voor een willekeurig basiselement geldt:

$$\begin{gathered}
b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{l_{s+1}} = \\
\downarrow^i_j (b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{i-1}} \otimes m_g^{-1}(\beta_{l_j}) \otimes b_{k_i} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \hat{l_j} \cdots \otimes \beta_{l_{s+1}}).
\end{gathered}$$

Nu weten we dat de basiselementen van V^{r-1}_{s+1} in het beeld van de afbeelding $\downarrow^i_j$ zitten. Dit en de lineariteit van $\downarrow^i_j$ geven dat deze afbeelding surjectief is. Omdat de dimensies van V^r_s en V^{r-1}_{s+1} gelijk zijn, kunnen we nu concluderen dat $\downarrow^i_j$ een isomorfisme is.

Het bewijs voor $\uparrow^i_j$ is soortgelijk.

ii) Het resultaat volgt direct na uitschrijven en gebruiken dat $m_g(a_i)(z_j) = g(a_i, z_j) = g(z_j, a_i) = m_g(z_j)(a_i)$. $\square$

Definitie 2.15. Zij g een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm. We definiëren voor $1 \leq i, i' \leq r,\ i \neq i'$ en $1 \leq j, j' \leq s,\ j \neq j'$ de metrische contracties

$$C^{ii'}_g : V^r_s \longrightarrow V^{r-2}_s \qquad \text{en} \qquad C^g_{jj'} : V^r_s \longrightarrow V^r_{s-2} \qquad \text{als volgt :}$$

$$C^{ii'}_g := \begin{cases} C^i_j \circ \downarrow^{i'}_j & \text{als } i < i' \\ C^{i'i}_g & \text{als } i > i' \end{cases} \qquad C^g_{jj'} := \begin{cases} C^i_j \circ \uparrow^i_{j'} & \text{als } j < j' \\ C^g_{j'j} & \text{als } j > j' \end{cases}$$

Lemma 2.16.

i) De definitie van $C^{ii'}_g$ is onafhankelijk van j en de definitie van $C^g_{jj'}$ is onafhankelijk van i.

ii) Het volgende diagram is commutatief:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bil}(V) = V^0_2 \arrow[r, "\uparrow^1_1"] & V^1_1 \arrow[r, "C^1_1"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}"] & V^0_0 = \mathbb{R} \\
 & \mathrm{End}(V) \arrow[ul, "\Phi_g"] \arrow[ur, "\mathrm{Tr}"'] &
\end{tikzcd}$$

iii) $\mathrm{Tr}_g = C^g_{11}$.

Bewijs:

i) We kiezen j willekeurig en schrijven de definitie van $C_g^{ii'}$ uit.

$$\begin{gathered} C_j^i \circ \downarrow_j^{i'} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) = \\ C_j^i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i'-1} \otimes a_{i'+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{j-1} \otimes m_g(a_{i'}) \otimes \alpha_j \otimes \cdots \otimes \alpha_s) = \\ m_g(a_{i'})(a_i) \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i'-1} \otimes a_{i'+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \end{gathered}$$

We zien dat de laatste uitdrukking niet van de keuze van j afhangt. Het bewijs voor $C^g_{jj'}$ gaat hetzelfde.

ii) Het is voldoende te laten zien dat:

- $\mathrm{Tr} = C_1^1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}$
- $\tilde{\Psi}^{-1} = \uparrow_1^1 \circ \Phi_g$

De eerste van deze twee is reeds bewezen in lemma 2.13. Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthonormale basis, zij $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de duale basis, dan geldt voor iedere $v, w \in V$ en $A \in \mathrm{End}(V)$:

$$\Phi_g(A)(v,w) = g(Av,w) = g(A(\sum_{i=1}^n \eta_i(v)e_i), \sum_{j=1}^n \eta_j(w)e_j) = \left(\sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j)\eta_j \otimes \eta_i\right)(w,v).$$

Wanneer we hier vervolgens gebruik van maken en $\uparrow_1^1 \circ\Phi_g(A)$ uitwerken dan volgt:

$$\begin{aligned} \uparrow_1^1 \circ\Phi_g(A) &= \uparrow_1^1 (\sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j)\eta_j \otimes \eta_i) = \sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j) \uparrow_1^1 (\eta_i \otimes \eta_j) \\ &= \sum_{i,j}^n \varepsilon_j g(Ae_i, e_j) e_j \otimes \eta_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_j(Ae_i) e_j \otimes \eta_i \\ &= \sum_{i=1}^n Ae_i \otimes \eta_i = \tilde{\Psi}^{-1}(A). \end{aligned}$$

iii) Zoals gedefinieerd in definitie 2.3 geldt $\mathrm{Tr}_g = \mathrm{Tr} \circ \Phi_g^{-1}$. Uit de commutativiteit van het diagram in deel ii) van dit lemma volgt nu dat $\mathrm{Tr} \circ \Phi_g^{-1} = C_1^1 \circ \uparrow_1^1 = C_{11}^g$. $\square$

3 Semi-Riemannse Variëteiten

3.1 Raakruimte

We geven hieronder twee definities van een raakruimte en we zullen vervolgens laten zien dat deze overeenkomen.

Definitie 3.1. Zij M een differentieerbare variëteit en $p \in M$. $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f$ is differentieerbaar$\}$ is de reële algebra van differentieerbare functies op M. Een raakvector van M in p is een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\tilde{v} : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de productregel:

$$\tilde{v}(fg) = \tilde{v}(f)g(p) + f(p)\tilde{v}(g) \qquad \text{voor alle}\, f, g \in \mathfrak{F}(M).$$

De verzameling raakvectoren van M in p noemen we de raakruimte $\widetilde{T}_pM$ van M in p.

Definitie 3.2. De verzameling van kiemen rond p duiden we aan met de reële algebra $\mathcal{E}_p(M)$. Hierbij is een kiem een equivalentieklasse van differentieerbare functies op open omgevingen om p in M. Twee differentieerbare functies, elk gedefinieerd op een open omgeving, zijn equivalent, wanneer ze gelijk zijn op een open omgeving om p. We noteren een kiem als $[f, \mathcal{U}]$, waarbij de representant $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd is op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. Een raakvector van M in p is een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de productregel:

$$v([f, \mathcal{U}][g, \mathcal{V}]) = v([f, \mathcal{U}])g(p) + f(p)v([g, \mathcal{V}]) \qquad \text{voor alle}\, [f, \mathcal{U}], [g, \mathcal{V}] \in \mathcal{E}_p(M).$$

De verzameling raakvectoren van M in p noemen we de raakruimte $T_p^{alg}M$ van M in p.

Lemma 3.3. *Voor iedere open omgeving $\mathcal{U}$ om p bestaat er een differentieerbare functie f op M, genaamd de bultfunctie, die de volgende drie eigenschappen heeft:*

i) $0 \leqslant f \leqslant 1$ *op* M,

ii) $f = 1$ *op een open omgeving van* p,

iii) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ *met* $\operatorname{supp}(f)$ *de afsluiting van de verzameling punten* $p \in M$ *met* $f(p) \neq 0$.

Zie [N][1] hoofdstuk 1 lemma 8 voor een bewijs.

Lemma 3.4. *Zij $\tilde{v}$ een raakvector in $\widetilde{T}_pM$. Als $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ gelijk zijn op een open omgeving om p dan geldt $\tilde{v}(f) = \tilde{v}(g)$.*

Zie [N] hoofdstuk 1 lemma 11 voor een bewijs.

Stelling 3.5. *Er is een natuurlijk isomorfisme tussen de raakruimtes $T_p^{alg}M$ en $\widetilde{T}_pM$.*

Bewijs: Zij $\pi : \mathfrak{F}(M) \to \mathcal{E}_p(M)$ gegeven door $f \mapsto [f, M]$. Dit is een $\mathbb{R}$-algebra homomorfisme. Definieer nu

$$\begin{array}{rcl} \psi : T_p^{alg}M & \longrightarrow & \widetilde{T}_pM \\ v & \longmapsto & v \circ \pi. \end{array}$$

We kunnen een kiem $\pi(f)$ evalueren in p door $\pi(f)(p) = f(p)$. Dit hangt niet af van de keuze van een representant f, omdat representanten overeenkomen op een open omgeving om p. ψ is goed gedefinieerd, want de productregel blijft behouden:

$$\psi(v)(fg) = v \circ \pi(fg) = v(\pi(f)\pi(g)) = \psi(v)(f)g(p) + f(p)\psi(v)(g).$$

ψ is een lineaire afbeelding, want voor $v, v' \in T_p^{alg}M$ en $r \in \mathbb{R}$ geldt:

[1] zie de referenties

$$\psi(rv) = (rv) \circ \pi = r(v \circ \pi) = r\psi(v),$$
$$\psi(v + v') = (v + v') \circ \pi = v \circ \pi + v' \circ \pi = \psi(v) + \psi(v').$$

Zij $[f, \mathcal{V}]$ een kiem. Neem een representant f en vermenigvuldig deze met een bultfunctie waarvan het support bevat is in $\mathcal{V}$. Het product is differentieerbaar op heel M. Dus bestaat er een functie $g : M \to \mathbb{R}$ met $[g, M] = [f, \mathcal{V}]$. Hieruit volgt dat de quotientafbeelding π surjectief is.

De afbeelding ψ is injectief: Stel $\psi(v) = 0$. Dan is $v \circ \pi(f) = v(\pi(f)) = 0$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$. Omdat π surjectief is, geldt $v([g, \mathcal{U}]) = 0$ voor alle $[g, \mathcal{U}] \in \mathcal{E}_p(M)$, dus $v = 0$.

De afbeelding ψ is surjectief: Zij $\tilde{v} \in \widetilde{T}_pM$ gegeven. Definieer vervolgens v door $v([g, \mathcal{U}]) = \tilde{v}(f)$, waarbij $f \in \mathfrak{F}(M)$ met $\pi(f) = [g, \mathcal{U}]$. Zo'n f bestaat altijd omdat π surjectief is. Uit lemma 3.4 volgt dat $v([f, M])$ onafhankelijk is van de gekozen representant. Dus v is goedgedefinieerd. We kunnen nu concluderen dat $v \in T_p^{alg}M$ een raakvector is, omdat

$$v(a[f, M] + b[g, M]) = \tilde{v}(af + bg) = \tilde{v}(af) + \tilde{v}(bg) = av([f, M]) + bv([g, M]) \quad \text{en}$$
$$v([f, M][g, M]) = \tilde{v}(fg) = f(p)\tilde{v}(g) + \tilde{v}(f)g(p) = f(p)v([g, M]) + v([f, M])g(p).$$

We concluderen dat $T_p^{alg}M$ en $\widetilde{T}_pM$ isomorf zijn. □

Wanneer we het in het vervolg over de raakruimte hebben, bedoelen we de raakruimte als in definitie 3.1. Deze noteren we vanaf nu als T_pM.

3.2 Tensorvelden

Zij M een n-dimensionale variëteit.

Definitie 3.6. Een vectorveld V is een afbeelding, die aan ieder punt $p \in M$ een raakvector $V_p \in T_pM$ toekent. Voor $f \in \mathfrak{F}(M)$ is $Vf : M \to \mathbb{R}$ de afbeelding gegeven door $Vf(p) = V_p(f)$ voor alle $p \in M$. Een vectorveld V heet differentieerbaar als $Vf \in \mathfrak{F}(M)$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$, De verzameling differentieerbare vectorvelden $\mathfrak{X}(M)$ is een reële vectorruimte en een module over $\mathfrak{F}(M)$. Als we het in het vervolg over vectorvelden hebben, bedoelen we differentieerbare vectorvelden.

Zij $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U} \subset M$. Voor $1 \leq i \leq n$ geldt

$$\partial_i|_p f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)),$$

waarbij $u^1, \ldots, u^n$ de standaard coördinaten van $\mathbb{R}^n$ zijn. De verzameling $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ is een basis van T_pM. Een bewijs hiervan kan bijvoorbeeld gevonden worden in [N] hoofdstuk 1 stelling 12.

Voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ is $\partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ het vectorveld, dat $p \in \mathcal{U}$ naar $\partial_i|_p$ stuurt. Dit vectorveld is differentieerbaar, want $\partial_i f$ is differentieerbaar voor iedere $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Lemma 2.5 geeft dat $v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i|_p$, dus is ieder vectorveld V lokaal ten opzichte van ξ van de vorm $V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i$ met $V^i = Vx^i$.

Definitie 3.7. Het Lie-haakje is een $\mathbb{R}$-bilineaire afbeelding $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$. Deze heeft voor alle $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ de volgende twee eigenschappen:

i) $[V, W] = -[V, W]$

ii) $[X, [V, W]] + [V, [W, X]] + [W, [X, V] = 0$

Uit de definitie van het Lie-haakje is af te leiden dat

$$[fV, gW] = fg[V, W] + f(Vg)W - g(Wf)V$$

voor $f, g \in \mathfrak{F}(M), V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Definitie 3.8. Een differentieerbare 1-vorm θ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding $\theta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$. $\mathfrak{X}^*(M)$ is de verzameling van differentieerbare 1-vormen. Een tensorveld A van type (r, s) op een variëteit M is een $\mathfrak{F}(M)$-multilineaire afbeelding:

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M).$$

De verzameling $\mathfrak{T}^r_s(M)$ van tensorvelden van type (r, s) is een module over $\mathfrak{F}(M)$. Daarnaast definiëren we $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Uit deze definitie blijkt dat een 1-vorm een tensorveld is van type (0,1). Dus $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. We kunnen een vectorveld $X \in \mathfrak{X}(M)$ opvatten als een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding $X : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ door $\theta \mapsto \theta(X)$ voor alle 1-vormen $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Op deze manier is een vectorveld dus een tensorveld van type (1,0). Dus $\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$.

Definitie 3.9. We definiëren de differentiaal van een functie $f \in \mathfrak{F}(M)$ als de 1-vorm df, waarvoor voor iedere $p \in M$ geldt dat $(df|_p)(v_p) = v_p(f)$ voor iedere raakvector $v_\in T_pM$ aan M in p.

Op ieder punt $p \in M$ is $(df)_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding en voor vectorvelden $V \in \mathfrak{X}(M)$ is $df(V) = V(f) \in \mathfrak{X}(M)$ een vectorveld. Hieruit volgt dat de differentiaal inderdaad een 1-vorm is. Ook zien we dat $dx^i(\partial_j|_p) = \partial_j(x^i)|_p = \delta_{ij}$, dus in elk punt van $\mathcal{U}$ is $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ de duale basis van $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$.

We willen onze resultaten voor tensoren generaliseren naar tensorvelden. Daarvoor gebruiken we de volgende stelling.

Stelling 3.10. *Zij $p \in M$, $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Wanneer $\theta_1, \ldots, \theta_r, \theta'_1, \ldots, \theta'_s \in \mathfrak{X}^*(M)$ voldoen aan $\theta_i(p) = \theta'_i(p)$ voor $1 \leq i \leq r$ en $X_1, \ldots, X_s$, $X'_1, \ldots X'_s \in \mathfrak{X}(M)$ voldoen aan $X_i(p) = X'_i(p)$ voor $1 \leq i \leq s$, dan geldt:*

$$A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = A(\theta'_1, \ldots, \theta'_s, X'_1, \ldots X'_s)(p).$$

Zie [N] hoofdstuk 2 propositie 2 voor een bewijs. Uit dit lemma volgt dat een tensorveld A van type (r, s) in elk punt $p \in M$ aanleiding geeft tot een tensor

$$A_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}.$$

Samenvattend: als $p \in M$ en $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ dan $A_p \in (T_pM)^r_s$.

Definitie 3.11. Zij $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. We definiëren de contractie C^i_j voor tensorvelden door op ieder punt $p \in M$ de contractie te nemen van de tensor A_p van het tensorveld A in het punt $p \in M$.

Lemma 3.12. *De contractie C^i_j is een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding van $\mathfrak{T}^i_j$ naar $\mathfrak{T}^{i-1}_{j-1}$ en deze wordt lokaal ten opzichte van een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ gegeven door*

$$C^i_j(A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) = \sum_{k=1}^{n} A(\theta^1, \ldots, dx^k, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}, \ldots, X^{s-1}).$$

Bewijs: Op ieder punt in de kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ is $dx^1, \ldots, dx^n$ de duale basis van $\partial_1, \ldots, \partial_n$, dus volgt uit propositie 2.12 ii) dat op ieder punt in de kaart aan de te bewijzen vergelijking wordt voldaan. □

Definitie 3.13. We definiëren $\downarrow^i_j$ en $\uparrow^i_j$ voor tensorvelden puntsgewijs door op ieder punt $p \in M$ de afbeelding $\downarrow^i_j$ respectievelijk $\uparrow^i_j$ toe te passen op de tensor A_p van een tensorveld A in het punt $p \in M$.

Lemma 3.14. *De afbeelding $\downarrow^i_j$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isormorfisme van $\mathfrak{T}^r_s$ naar $\mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}$ en $\uparrow^i_j$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isomorfisme van $\mathfrak{T}^r_s$ naar $\mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}$.*

Bewijs: Na 2.14 is het voldoende te laten zien dat $\downarrow^i_j$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair is, dat wil zeggen $\downarrow^i_j (fA) = f \downarrow^i_j (A)$. Dit is triviaal. □

Definitie 3.15. We definiëren de metrische contracties

$$C^{ii'}_g : \mathfrak{T}^r_s \longrightarrow \mathfrak{T}^{r-2}_s \quad \text{en} \quad C^g_{jj'} : \mathfrak{T}^r_s \longrightarrow \mathfrak{T}^r_{s-2}$$

voor tensorvelden hetzelfde als in definitie 2.15. Nu echter met C^i_j, $\downarrow^i_j$ en $\uparrow^i_j$ als in definitie 3.11 resp. 3.13. Uit lemma's 3.12 en 3.14 volgt dat $C^{ii'}_g$ en $C^g_{jj'}$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair zijn.

3.3 Semi-Riemannse Variëteiten

Definitie 3.16. Een *metrische tensor* g is een symmetrisch niet-ontaard tensorveld van type $(0,2)$ met constante index. Dat wil zeggen dat de index van g_p gelijk is voor alle $p \in M$. We noteren voor $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $v, w \in T_pM$ in plaats van $g(V,W)$ en $g_p(v,w)$ ook wel $\langle V, W\rangle$ respectievelijk $\langle v, w\rangle$. Voor vectorvelden $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ schrijven we $V \perp W$ als $\langle V, W\rangle = 0$.

Zij $(x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$, dan definiëren we de componenten g_{ij} van de metrische tensor als $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ voor $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Deze componenten zijn differentieerbare functies in $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Op ieder punt $p \in M$ is de matrix $(g_{ij}(p))$ inverteerbaar, omdat g niet-ontaard is. De inverse matrix van $(g_{ij}(p))$ noteren we met $(g^{ij}(p))$. Deze matrices zijn symmetrisch aangezien g symmetrisch is.

Definitie 3.17. Een *semi-Riemannse variëteit* (M, g) is een differentieerbare variëteit M voorzien van een metrische tensor g.

Als de index van g gelijk is aan nul noemen we (M, g) een *Riemannse variëteit*. Als de index van g gelijk is aan één en de dimensie van M groter is dan één, noemen we (M, g) een *Lorentz variëteit*.

Een voorbeeld van een semi-Riemannse variëteit van dimensie n en index ν is $(\mathbb{R}^n, g)$. Vergeten we de metrische tensor, dan is dit de differentieerbare variëteit $\mathbb{R}^n$. Nadat we $T_p\mathbb{R}^n$ geïdentificeerd hebben met $\mathbb{R}^n$, dat wil zeggen we vervangen ∂_i door e_i, kunnen we vectorvelden V en W uitdrukken als $V = \sum_{i=1}^n V^i e_i$ en $W = \sum_{i=1}^n W^i e_i$. De metrische tensor g is gedefinieerd door

$$g(V, W) = -\sum_{i=1}^{\nu} V^i W^i + \sum_{i=\nu+1}^{n} V^i W^i.$$

Deze semi-Riemannse variëteit wordt aangeduid met $\mathbb{R}^n_\nu$.

Voor semi-Riemannse variëteiten wordt vaak in plaats van de metrische tensor het lijnelement gegeven:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Differentieerbare variëteiten hebben een differentieerbare structuur, dat wil zeggen een maximale differentieerbare atlas. De afbeeldingen die deze structuur bewaren zijn diffeomorfismen. Semi-Riemannse variëteiten hebben een extra structuur, namelijk de metrische tensor. Een afbeelding tussen twee semi-Riemannse variëteiten die de structuur behoudt zal dus in ieder geval een diffeomorfisme zijn.

Zij (M, h) en (N, g) twee semi-Riemannse variëteiten en zij $f : M \to N$ een diffeomorfisme. Deze afbeelding induceert voor elk punt $p \in M$ een lineair isomorfisme df_p tussen de raakruimten T_pM en $T_{f(p)}N$. Op deze manier verkrijgen we het $\mathfrak{F}(M)$-lineaire isomorfisme $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$, deze noemen we de raakafbeelding. Met deze raakafbeelding kunnen we de metrische tensor g van N terugtrekken naar M. Dit levert een symmetrische niet-ontaard tensorveld f_*g op M, genaamd de pullback, op de volgende manier

$$f_*g(V, W) = g(df(V), df(W)) \qquad \text{voor alle } V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

De pullback f_*g is dus een metrische tensor op M. Als $f_*g = h$ noemen we f een *isometrie.*

Lemma 3.18. *Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit. De afbeelding $m_g : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ gedefinieerd door $m_g(V)(X) = \langle V, X\rangle$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isomorfisme.*

Bewijs: Uit stelling 2.2 *i*) volgt dat m_g een bijectieve afbeelding is van niet-differentieerbare vectorvelden naar niet differentieerbare 1-vormen. Er moet slechts bewezen worden dat voor een differentieerbaar vectorveld V de 1-vorm $m_g(V)$ differentieerbaar is en dat voor iedere differentieerbare 1-vorm θ het vectorveld $m_g^{-1}(\theta)$ differentieerbaar is. $m_g(V)$ is differentieerbaar omdat g $\mathfrak{F}(M)$-bilineair is. Het is nu voldoende te laten zien dat $m_g^{-1}(\theta)$ lokaal differentieerbaar is. Lokaal geldt ten opzichte van een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ dat $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx^i$ met θ_i differentieerbaar. Hieruit volgt dat $m_g^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\theta_i\partial_i$ differentieerbaar is. $\square$

Tijd-oriëntatie

Definitie 3.19. Een raakvector v aan een semi-Riemannse variëteit heet

ruimte-achtig	als $\langle v, v\rangle > 0$	of $v = 0$.
nul	als $\langle v, v\rangle = 0$	en $v \neq 0$.
tijd-achtig	als $\langle v, v\rangle < 0$.	

Zij M een Lorentz variëteit en $p \in M$. Zij $\mathcal{T}$ de verzameling van alle tijdachtige raakvectoren in $T_p(M)$ en zij $u \in \mathcal{T}$ een tijdachtige raakvector. De verzameling $\mathcal{T}$ is de vereniging van precies twee tijdkegels. De tijdkegel die de vector u bevat is

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle < 0\}.$$

De tegenoverliggende tijdkegel is

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle > 0\}.$$

De keuze van u is volstrekt willekeurig. Twee vectoren in dezelfde tijdkegel definiëren namelijk dezelfde tijdkegel. Met andere woorden, voor twee tijdachtige vectoren u en v geldt

$$v \in C(u) \Leftrightarrow u \in C(v) \Leftrightarrow C(u) = C(v).$$

De twee tijdkegels zijn vanuit $T_p(M)$ gezien, niet te onderscheiden. Door een keuze te maken voor één van de twee kegels geeft men $T_p(M)$ een *tijd-oriëntatie.* De gekozen kegel heet de *toekomst*, tijdachtige vectoren in de gekozen kegel noemt men *toekomstwijzend.*

Definitie 3.20. Zij τ een afbeelding op M die aan ieder punt $p \in M$ een tijdkegel τ_p in $T_p(M)$ toekent. De afbeelding τ is een *tijd-oriëntatie* op M als voor iedere $p \in M$ er een open omgeving $\mathcal{U}$ van p is en een differentieerbaar vectorveld V op $\mathcal{U}$ zodanig dat $V_q \in \tau_q$ voor alle $q \in \mathcal{U}$.

Is het mogelijk een tijd-oriëntatie te geven op M, dan heet M *tijd-oriënteerbaar.* Door vervolgens daadwerkelijk een tijd-oriëntatie te kiezen maakt men M *tijd-georiënteerd.* Vectoren in de gekozen oriëntatie heten *toekomstwijzend.* Er is geen verband tussen oriënteerbaarheid en tijd-oriënteerbaarheid.

3.4 Framevelden

Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit.

Definitie 3.21. Voor elk punt $p \in M$ is er een orthonormale basis van T_pM. Zo'n orthonormale basis wordt ook wel een *frame* genoemd. We noemen $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een *frameveld* van M, wanneer voor vectorvelden $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ op ieder punt $p \in M$ de verzameling $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ een frame is.

Er bestaat niet altijd een frameveld voor de gehele variëteit M. We zullen namelijk laten zien dat er op een variëteit die niet oriënteerbaar is geen frameveld kan bestaan. Daarentegen is het altijd wel mogelijk om rond elk punt van M een lokaal frameveld te vinden. Dat wil zeggen dat er voor een open omgeving $\mathcal{U}$ een verzameling vectorvelden $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ bestaat, waarvoor $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ een frame is voor alle $p \in \mathcal{U}$.

Lemma 3.22. *Als er een frameveld van M bestaat, dan is M oriënteerbaar.*

Bewijs: Zij $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een frameveld van M. We laten zien dat er een differentieerbare n-vorm $\omega \in \Omega(M)$ is waarvoor $\omega(p) \neq 0$ voor alle $p \in M$. Wanneer deze bestaat betekent dat, dat M oriënteerbaar is. Neem ω gegeven door $\omega(p) = \omega_p$, waarbij ω_p de afbeelding van $T_pM^n \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} m_g(E_1(p))(v_1) & \ldots & m_g(E_1(p))(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_g(E_n(p))(v_1) & \ldots & m_g(E_n(p))(v_n) \end{pmatrix}.$$

De determinant is een multilineaire afbeelding en $m_g(E_i(p))$ is een lineaire afbeelding, dus ω_p is multilineair. Uit het feit dat de determinant alternerend is in zijn argumenten, volgt dat ω_p alternerend is. Hieruit volgt dat ω een n-vorm is. Omdat $m_g(E_i)$ differentieerbaar is, is ω dat ook. Aangezien $\{m_g(E_1(p)), \ldots, m_g(E_n(p))\}$ een basis is van T_pM^* is $\omega_p \neq 0$. De conclusie is dat M oriënteerbaar is.

Nu kunnen we eenvoudig een voorbeeld geven van een variëteit waarin geen globaal frameveld bestaat. We weten namelijk dat er niet-oriënteerbare variëteiten zijn, zoals de Möbius band.

Stelling 3.23. *Voor alle $p \in M$ bestaat er een lokaal frameveld op een open omgeving $\mathcal{U}$ van p.*

Bewijs: Merk op dat uit de definitie volgt dat als $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een frameveld van M is, dan is de dimensie van M gelijk aan n. Zij $p \in M$. Er is een orthonormale basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van T_pM. Neem $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ met $X_i(p) = e_i$ voor $i = 1, \ldots, n$. Dit kan volgens lemma 4.5. $\langle X_1, X_1 \rangle \in \mathfrak{F}(M)$, dus er is een open omgeving $\mathcal{U}_1$ om p met $|\langle X_1(p), X_1(p) \rangle| > 0$ en differentieerbaar. Hieruit volgt dat E_1 gedefinieerd door

$$E_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_1)$$

met $\|X_1\| = \sqrt{|\langle X_1, X_1 \rangle|}$ differentieerbaar is. De definitie van E_1 geeft dat $E_1(p) = e_1$ en $\langle E_1, E_1 \rangle(q) = \pm 1$ voor alle $q \in \mathcal{U}_1$. Aangezien $\langle E_1, E_1 \rangle(p) = \varepsilon_1$ en $\langle E_1, E_1 \rangle$ differentieerbaar is en dus ook continu is, geldt dat $\langle E_1, E_1 \rangle(q) = \varepsilon_1$ voor alle $q \in \mathcal{U}_1$.

Stel nu dat $E_1, \ldots, E_{k-1}$ orthonormale vectorvelden zijn op $\mathcal{U}_{k-1}$ met $\mathcal{U}_{k-1}$ een open omgeving om p zodanig dat $E_i(p) = e_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Definieer

$$Y(q) = X_k(q) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle E_i(q), X_k(q) \rangle E_i(q) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_{k-1}).$$

Er geldt $Y(q) \neq 0$ voor alle q in een open omgeving $\mathcal{V}$ om p, want $Y(p) = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, e_k \rangle e_i \neq 0$ en Y is differentieerbaar. Neem nu $\mathcal{U}_k = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}_{k-1}$. Definieer

$$E_k = \frac{Y}{\|Y\|} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_k).$$

$E_k(p) = e_k$, $\langle E_k, E_k \rangle = \varepsilon_k$ volgens het eerder genoemde argument en $\langle E_i, E_k \rangle = 0$ voor $i = 1, \ldots, k-1$ dus $E_1, \ldots, E_k$ zijn orthonormaal.

Op deze wijze construeren we de set $\{E_1, \ldots, E_n\}$. We concluderen dat er voor alle $p \in M$ een open omgeving $\mathcal{U} = \mathcal{U}_n$ van p bestaat en een frameveld $\{E_1, \ldots, E_n\}$ op $\mathcal{U}$.

Gevolg 3.24. Zij M een samenhangende differentieerbare variëteit en zij g een symmetrisch niet-ontaard (0,2) tensorveld. Dan is g een metrische tensor.

Bewijs: We hoeven slechts te laten zien dat de index van g constant is. Voor iedere $p \in M$ is er een lokaal frameveld $\{E_1, \ldots, E_n\}$ op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. Definieer $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle \in \{-1, 1\}$. De index van g is het aantal waarden gelijk aan -1 in de verzameling $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Deze index is dus constant in een open omgeving van een punt in M. De index van g kan maximaal $n+1$ verschillende waarden aannemen. De verzameling punten voor één waarde van deze index is de vereniging van open omgevingen. Dit is dus een open verzameling. Zo is de verzameling punten voor de andere waarden ook open. We concluderen dat M niet samenhangend is, wanneer de index van g verschillende waarden aan kan nemen.

4 Kromming

4.1 Connecties

Definitie 4.1. Een connectie D op een variëteit M is een afbeelding $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, die aan de volgende drie eigenschappen voldoet:

D1) $D_V W = D(V, W)$ is $\mathfrak{F}(M)$-lineair in V,

D2) $D_V W$ is $\mathbb{R}$ - lineair in W,

D3) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$ voor $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Hierbij kan opgemerkt worden dat D2) uit D3) volgt, doordat $(Vf)W$ wegvalt voor een constante functie $f \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.2. *Zij $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ een connectie, $p \in M$ en $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ met $X_1(p) = X_2(p)$, dan geldt $D_{X_1}Y(p) = D_{X_2}Y(p)$.*

Bewijs: $DY : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $X \mapsto D_X Y$ is $\mathfrak{F}(M)$-lineair, dus een tensorveld. Het resultaat volgt nu direct uit [N] hoofdstuk 2 propositie 2. □

Lemma 4.3. *Zij $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ een connectie, $\mathcal{U}$ een open omgeving in M en $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ met $Y_1|_{\mathcal{U}} = Y_2|_{\mathcal{U}}$, dan geldt $D_X Y_1|_{\mathcal{U}} = D_X Y_2|_{\mathcal{U}}$.*

Bewijs: Neem f de bultfunctie met $f = 1$ in een open omgeving om een punt $p \in \mathcal{U}$ met $\text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$. Er geldt dan $fY_1 = fY_2$, want $f = 0$ buiten $\mathcal{U}$ en in $\mathcal{U}$ zijn Y_1 en Y_2 gelijk: $D_X fY_1 = D_X fY_2$. Volgens eigenschap D3) wordt nu aan de volgende vergelijking voldaan: $(Xf)Y_1 + fD_X Y_1 = (Xf)Y_2 + fD_X Y_2$. $f = 0$ op een open omgeving rond ieder punt buiten $\text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$. Volgens [N] hoofdstuk 1 lemma 11 valt $X_q(f)$ daarom weg voor ieder punt $q \in M \setminus \mathcal{U}$. Hieruit volgt dat $(Xf)Y_1 = (Xf)Y_2$, dus $fD_X Y_1 = fD_X Y_2$ en omdat $f = 1$ rond p is $D_X Y_1(p) = D_X Y_2(p)$. Aangezien hetzelfde argument geldt voor iedere $p \in \mathcal{U}$ concluderen we dat $D_X Y_1|_{\mathcal{U}} = D_X Y_2|_{\mathcal{U}}$. □

Lemma 4.4. *Voor iedere open omgeving $\mathcal{U} \subset M$, $p \in \mathcal{U}$ en ieder lokaal differentieerbaar vectorveld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ bestaat er een open omgeving $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ met $p \in \mathcal{V}$ en een globaal vectorveld $Y \in \mathfrak{X}(M)$, zodanig dat $Y|_{\mathcal{V}} = X|_{\mathcal{V}}$.*

Bewijs: Zij f de bultfunctie met $\text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ een open omgeving met $p \in \mathcal{V}$ en $\mathcal{V} \subset \text{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ waarvoor $f|_{\mathcal{V}} = 1$. Definieer $Y \in \mathfrak{X}(M)$ door $Y_q = f(q)X_q$ voor $q \in \mathcal{U}$ en 0 elders. Y is differentieerbaar, want zowel f als X zijn differentieerbaar op $\mathcal{U}$ en Y gaat op een differentieerbare wijze naar 0. Omdat $f|_{\mathcal{V}} = 1$ is $Y|_{\mathcal{V}} = fX|_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}}X|_{\mathcal{V}} = X|_{\mathcal{V}}$. □

Lemma 4.5. *Voor iedere $p \in M$ en $v \in T_pM$ is er een vectorveld $V \in \mathfrak{X}(M)$ met $V(p) = v$.*

Bewijs: Zij $(x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. De vector v is lokaal van de vorm $v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i(p)$. Voor het vectorveld $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, gedefinieerd door $W = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i$, geldt $W(p) = v$. Dit vectorveld is differentieerbaar, want $v(x^i) \in \mathbb{R}$ is differentieerbaar voor alle $1 \leq i \leq n$. Nu is er volgens lemma 4.4 een vectorveld $V \in \mathfrak{X}(M)$ met $V(p) = v$. □

4.2 De Levi-Civita connectie

Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit.

Definitie 4.6. De Levi-Civita connectie is een connectie D op een semi-Riemannse variëteit, die voldoet aan:

D4) $[V, W] = D_V W - D_W V$ voor alle $V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

D5) $X\langle V, W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$ voor alle $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Stelling 4.7. *Er is een unieke connectie, die voor alle $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ voldoet aan de Koszul formule:*

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle = \quad & V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ & -\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle \end{aligned}$$

en dat is de Levi-Civita connectie.

Bewijs): Definieer $F(X, V, W)$ als de rechterkant van de Koszul formule. Uit het uitschrijven van de eerste drie termen van $F(X, V, W)$ met behulp van eigenschap D5) en de laatste drie termen van $F(X, V, W)$ met eigenschap D4) volgt dat de Levi-Civita connectie aan de Koszul formule voldoet.

De termen $X\langle V, W\rangle$ en $\langle X, [V, W]\rangle$ zijn $\mathfrak{F}(M)$-lineair in X. Voor de eerste twee termen geldt met behulp van de productregel:

$$\begin{aligned} V\langle W, fX\rangle &= fV\langle W, X\rangle + V(f)\langle W, X\rangle, \\ W\langle fX, V\rangle &= fW\langle X, V\rangle + W(f)\langle X, V\rangle. \end{aligned}$$

Uitwerken van het Lie-haakje geeft voor de overgebleven termen dat:

$$-\langle V, [W, fX]\rangle = -f\langle V, [W, X]\rangle - W(f)\langle V, X\rangle, \ \langle W, [fX, V]\rangle = f\langle W, [X, V]\rangle - V(f)\langle W, X\rangle.$$

De niet-lineaire termen vallen precies tegen elkaar weg, waaruit volgt dat de afbeelding $X \mapsto F(X, V, W)$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair is.

Volgens lemma 3.18 is er een uniek vectorveld $D_V W$, die voldoet aan $\langle D_V W, X\rangle = F(X, V, W)$ voor alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Hieruit volgt dat de connectie, die aan de Koszul formule voldoet uniek is. Waarmee bewezen is dat de Levi-Civita connectie uniek is.

Stel nu dat D voldoet aan de Koszul formule. De claim is dat D dan een connectie is en aan de eisen van de Levi-Civita connectie voldoet. Hiervoor zullen we de eigenschappen D1) tot en met D5) één voor één bewijzen.

D1) Wanneer we $F(X, fV, W)$ op dezelfde manier uitwerken als $F(fX, V, W)$, dan volgt hieruit voor $f \in \mathfrak{F}(M)$ dat $F(X, fV, W) = fF(X, V, W)$. We kunnen concluderen dat $2\langle D_{fV} W, X\rangle = F(fX, fV, W) = 2\langle fD_V W, X\rangle$. Uit lemma 3.18 volgt nu dat $D_{fV} W = fD_V W$.

D3) In dit geval kijken we naar $F(X, V, fW)$. De termen $W\langle X, V\rangle$ en $\langle W, [X, V]\rangle$ kunnen we buiten beschouwing laten, want deze zijn $\mathfrak{F}(M)$-lineair in W. We zien met behulp van de productregel en door uitwerken van de Lie-haakjes dat $-X\langle V, W\rangle - \langle V, [fW, X]\rangle$ samen ook lineair in W zijn. De niet-lineaire termen vallen wederom tegen elkaar weg. Voor de twee overgebleven termen geldt dat

$$\begin{aligned} V\langle fW, X\rangle + \langle X, [V, fW]\rangle = \quad & fV\langle W, X\rangle + f\langle X, [V, W]\rangle \\ & +2\langle (Vf)W, X\rangle. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} 2\langle D_V fW, X\rangle \quad &= F(V, fW, X) = fF(V, W, X) + 2\langle (Vf)W, X\rangle \\ &= 2\langle fD_V W + (Vf)W, X\rangle. \end{aligned}$$

Uit lemma 3.18 volgt nu D3).

D4) Aan de hand van de Koszul formule kan berekend worden, wat $D_V W - D_W V$ is door $F(V,W,X) - F(W,V,X)$ uit te rekenen. Wanneer we dit uitschrijven en gebruiken dat de metrische tensor g symmetrisch is, dan vallen de eerste drie termen van $F(V,W,X)$ weg tegen de eerste drie van $F(W,V,X)$. Van de laatste drie termen zal $2\langle[V,W],X\rangle$ overblijven bij het uitschrijven. Hierbij is dan nog extra gebruik gemaakt van het feit dat voor twee vectorvelden $V,W \in \mathfrak{X}(M)$ geldt dat $[V,W] = -[W,V]$. We krijgen dus de volgende vergelijking

$$2\langle D_V W - D_W V, X\rangle = F(V,W,X) - F(W,V,X) = 2\langle[V,W],X\rangle,$$

waaruit volgt dat een connectie, die aan de Koszul formule voldoet ook aan eigenschap D4) voldoet.

D5) Voor D5) schrijven we uit wat $\langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$ is. Dit komt neer op het berekenen van $\frac{1}{2}F(X,V,W) + \frac{1}{2}F(X,W,V)$. De laatste drie termen van $F(X,V,W)$ vallen tegen de laatste drie van $F(X,W,V)$ weg. De eerste drie termen van $F(X,V,W)$ en $F(X,W,V)$ leveren samen $2X\langle V,W\rangle$ op. Dit geeft de vergelijking $X\langle V,W\rangle = \frac{1}{2}F(X,V,W) + \frac{1}{2}F(X,W,V)$, waaruit D5) direct volgt.

D2) volgt uit D3), zoals al eerder opgemerkt. Hiermee is bewezen dat D gedefinieerd aan de hand van de Koszul formule voldoet aan de vijf eigenschappen van de Levi-Civita connectie. We concluderen dat de Levi-Civita connectie bestaat en uniek is. $\square$

Definitie 4.8. Zij $(x_1,\dots,x_n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$ in een semi-Riemannse variëteit M. Zij D de Levi-Civita connectie. De *Christoffel symbolen* voor deze kaart zijn de functies Γ^k_{ij} op $\mathcal{U}$ zodanig dat

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k \qquad (1 \le i,j \le n). \tag{4}$$

Omdat $[\partial_i,\partial_j] = 0$, volgt uit (D4) dat $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ en dus $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Merk op dat ∂_i alleen lokaal gedefinieerd is op $\mathcal{U}$ en een connectie D slechts gedefinieerd is voor twee globale vector velden. Uitdrukking (4) behoeft dus enige toelichting. We evalueren $D_{\partial_i}(\partial_j)$ op een punt $p \in \mathcal{U}$ door middel van twee globale vectorvelden X en Y die op een open omgeving $\mathcal{V}$ om het punt p gelijk zijn aan ∂_i en ∂_j. Zulke vectorvelden bestaan altijd volgens lemma 4.4. Volgens lemma's 4.2 en 4.3 hangt de waarde van $D_X Y$ in een punt $q \in \mathcal{V}$ alleen af van X in het punt q en van Y op een open omgeving van q. Hieruit volgt dat $D_{\partial_i}(\partial_j)$ goedgedefinieerd en differentieerbaar is in $\mathcal{V}$. De Christoffel symbolen zijn op deze manier lokaal gedefinieerd voor elk punt in de kaart $\mathcal{U}$ en zijn afhankelijk van de keuze van deze kaart. Buiten $\mathcal{U}$ heeft (4) geen betekenis, dus is $D_{\partial_i}(\partial_j)$ lokaal op $\mathcal{U}$ een differentieerbaar vectorveld.

Stelling 4.9. *Voor een kaart $(x^1,\dots,x^n)$ zijn de Christoffel symbolen van de vorm:*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k} g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$$

Voor een bewijs zie [N] hoofdstuk 3 propositie 13.

Lemma 4.10. *Voor een g-orthogonale kaart $(x^1,\dots,x^n)$ zijn de Christoffel symbolen van de vorm:*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Bewijs: Als $(x^1,\dots,x^n)$ g-orthogonaal is, dan geldt $g^{km} = 0$ wanneer $k \ne m$. Wanneer we nu de vergelijking van stelling 4.9 invullen volgt het resultaat direct. $\square$

4.3 De Covariante Afgeleide

Zij $(M.g)$ een semi-Riemannse variëteit met Levi-Civita connectie D. Zij $V, X \in \mathfrak{X}(M)$. We kunnen $D_V X$ interpreteren als de afgeleide van X in de richting V. Houden we X vast dan krijgen we de afbeelding $DX : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $V \mapsto D_V X$. Volgens eigenschap D1) is de afbeelding $\mathfrak{F}(M)$-lineair. Dit betekent dat we DX kunnen interpreteren als een (1,1) tensorveld $DX : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$. Want de afbeelding $(\theta, V) \mapsto DX(\theta, V) = \theta(D_V X)$ is ook $\mathfrak{F}(M)$-lineair in θ en dus $\mathfrak{F}(M)$-bilineair. Het tensorveld DX noemen we de covariante afgeleide van het tensorveld X.

We zullen nu voor een willekeurige tensorveld A de covariante afgeleide DA definiëren. We doen dit op de volgende manier. We nemen een vectorveld V en definiëren eerst voor iedere tensor A een tensor $D_V A$ van het zelfde type. De covariante afgeleide van $A \in \mathfrak{T}^r_s$ wordt de tensor $DA \in \mathfrak{T}^r_{s+1}$ die we evalueren door het laatste argument de rol van V te geven en vervolgens $D_V A$ te evalueren in de overige $r + s$ argumenten.

We beginnen met een (0,0) tensorveld $f \in \mathfrak{F}(M)$. We laten $D_V f$ de functie Vf zijn. De covariante afgeleide van f is dus de 1-vorm Df gegeven door $Df(V) = D_V f = Vf$ voor alle $V \in \mathfrak{X}(M)$. We kunnen deze keuze enigszins motiveren. Aangezien $Vf = df(V)$, volgt uit deze definitie voor Df de relatie $Df = df$. De covariante afgeleide van een functie is dus gelijk aan de raakafbeelding. Bovendien krijgt eigenschap D3) nu de vorm van een productregel voor differentiëren

$$D_V(fW) = (D_V f)W + fD_V W.$$

Vervolgens laten we voor een 1-vorm $\theta \in \mathfrak{T}^0_1$ de 1-vorm $D_V\theta$ gegeven zijn door

$$D_V\theta(X) = D_V(\theta(X)) - \theta(D_V X).$$

Merk op dat $\theta(X)$ een differentieerbare functie is en dat $D_V(\theta(X))$ betekenis heeft gekregen in de voorgaande definitie. Ook nu geeft deze definitie een productregel $D_V(\theta(X)) = (D_V\theta)(X) + \theta(D_V X)$. De covariante afgeleide $D\theta$ van θ is dus gegeven door $D\theta(X, V) = D_V\theta(X)$.

Definitie 4.11. Tot slot definiëren we voor $A \in \mathfrak{T}^r_s$ het tensorveld $D_V A \in \mathfrak{T}^r_s$ door

$$\begin{aligned}(D_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) \;&=\; D_V(A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)) \\ -\sum_{i=1}^{r} A(\theta_1, \ldots, D_V\theta_i, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) &- \sum_{i=1}^{s} A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots X_i, \ldots, X_s).\end{aligned}$$

De covariante afgeleide van een tensor $A \in \mathfrak{T}^r_s$ is het tensorveld $DA \in \mathfrak{T}^r_{s+1}$ gegeven door

$$(DA)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s).$$

Deze definitie geeft analoog aan het voorgaande aanleiding tot een algemene productregel voor de covariante afgeleide van een reële functie die het beeld is van een tensorveld.

4.4 Kromming

In het vervolg van dit hoofdstuk is M een semi-Riemannse variëteit en is D de Levi-Civita connectie.

Definitie 4.12. De Riemannse krommingstensor $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ is gegeven door

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z.$$

M heet *vlak* als de Riemannse krommingstensor R nul is op heel M.

Zij $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ een 1-vorm. We hanteren de volgende notatie: $R(\theta, Z, X, Y) = \theta(R_{XY}Z)$ en $R^i_{XY}Z = R(dx^i, Z, X, Y)$. Dit komt er op neer dat $R_{XY}Z = \sum_{i=1}^n R^i_{XY}Z\partial_i$.

Lemma 4.13. *R is een (1,3) tensorveld.*

Bewijs: Het is voldoende te laten zien dat R in alle argumenten $\mathfrak{F}(M)$-lineair is. Lineariteit in θ is triviaal. Voor lineariteit in X gebruiken we $[fX, Y] = f[X, Y] - Yf \cdot X$ en $D_Y f = Yf$.

$$\begin{aligned}
R_{fX,Y}Z &= D_{[fX,Y]}Z - [D_{fX}, D_Y]Z \\
&= D_{f[X,Y]-Yf\cdot X}Z - D_{fX}D_YZ + D_YD_{fX}Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z - (Yf)D_XZ - fD_XD_YZ + D_Y(fD_XZ) \\
&= fD_{[X,Y]}Z - (Yf)D_XZ - fD_XD_YZ + (Yf)D_XZ + fD_YD_XZ \\
&= fR_{X,Y}Z.
\end{aligned}$$

Voor de lineariteit in Y merken we op dat uit de definitie direct volgt dat $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$. Tot slot volgt lineariteit in Z uit herhaaldelijk toepassen van (D3).

$$\begin{aligned}
R_{XY}fZ &= D_{[X,Y]}fZ - [D_X, D_Y]fZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - D_XD_YfZ + D_YD_XfZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - D_XfD_YZ - D_X(Yf)Z + D_YfD_XZ + D_Y(Xf)Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - (Xf)D_YZ - fD_XD_YZ - X(Yf)Z - (Yf)D_XZ \\
&\quad +(Yf)D_XZ + fD_YD_XZ + Y(Xf)Z + (Xf)D_YZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - fD_XD_YZ - X(Yf)Z + fD_YD_XZ + Y(Xf)Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z + fD_YD_XZ - fD_XD_YZ + ([X,Y]f)Z + Y(Xf)Z - X(Yf)Z \\
&= fR_{XY}Z + ([X,Y]f)Z + ([Y,X]f)Z \\
&= fR_{XY}Z.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.14. $R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^n R^i_{jkl}\partial_i$, *waarbij de componenten* R^i_{jkl} *van de Riemannse krommingstensor* R *voor een kaart* $(x^1, \ldots, x^n)$ *gegeven worden door:*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_{m=1}^n \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_{m=1}^n \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Zie voor een bewijs [N] hoofdstuk 3 lemma 38.

Voor $x = X_p,\ y = Y_p,\ z = Z_p$ in $T_p(M)$ definiëren we R_{xy} als het endomorfisme van $T_p(M)$ gegeven door $z \mapsto R_{xy}z := R_{XY}Z|_p$.

Lemma 4.15. *Zij* $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ *dan*

(1) $R_{xy} = -R_{yx}$

(2) $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$

(3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$

(4) $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$

We definiëren $R_{ijkl} =\downarrow^1_1 R^i_{jkl} = \langle R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j), \partial_i\rangle$. Er geldt volgens het bovenstaande lemma dat $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$.

Lemma 4.16 (tweede Bianchi identiteit)**.** *Zij* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, *dan*

$$(D_XR)_{YZ} + (D_YR)_{ZX} + (D_ZR)_{XY} = 0.$$

Voor de bewijzen van bovenstaande twee lemma's verwijzen we naar [N] hoofdstuk 3 propositie 36 en 37.

Definitie 4.17. Zij R de Riemannse krommingstensor van een variëteit M. De *Ricci-krommingstensor* van M is de contractie $C^1_3(R) \in \mathfrak{T}^0_2$ en is gegeven door

$$\mathrm{Ric}(X, Y)(p) = \mathrm{Tr}(z \mapsto R_{X(p)z}Y(p))$$

Vanwege lemma 4.15(4) is Ric symmetrisch. De componenten R_{ij} van de Ricci krommingstensor Ric worden voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ gegeven door:

$$R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} R^m_{ijm}.$$

Dit volgt direct uit stelling 2.12.*ii*).

Definitie 4.18. De *scalaire kromming* $S \in \mathfrak{F}(M)$ van een variëteit M is de metrische contractie $C_{12}(\mathrm{Ric}) \in \mathfrak{F}(M)$ van de Ricci tensor.

Opmerking: $S = \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric})$.

Definitie 4.19. De divergentie van een symmetrische $(0, 2)$-tensor A wordt gegeven door $\mathrm{div}(A) = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in \mathfrak{X}^*(M)$.

We kunnen hierbij opmerken dat $\mathrm{div}(A)(X) = \mathrm{Tr}_g(DA_X)$. De $(0, 2)$-tensor DA_X wordt gegeven door $DA_X(Y, Z) = (D_Y A)(Z, X)$.

De sommaties-indices beginnen bij 1 en eindigen bij n in de rest van dit hoofdstuk.

Lemma 4.20. *Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit en $f \in \mathfrak{F}(M)$, dan is $\mathrm{div}(fg) = df$.*

Bewijs: Zij $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een frameveld en $V = \sum_i \varepsilon_i g(E_i, V)E_i \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fg)(V) &= C_{23}(Dfg)(V) = \sum_i \varepsilon_i (D_{E_i} fg)(V, E_i) \\
&= \sum_i \varepsilon_i D_{E_i}(fg(V, E_i)) - \varepsilon_i fg(D_{E_i} V, E_i) - \varepsilon_i fg(V, D_{E_i} E_i) \\
&= \sum_i \varepsilon_i g(V, E_i) D_{E_i} f + \varepsilon_i f D_{E_i} g(V, E_i) - \varepsilon_i fg(D_{E_i} V, E_i) - \varepsilon_i fg(V, D_{E_i} E_i) \\
&= \sum_i \varepsilon_i g(V, E_i) df(E_i) = df(\sum_i \varepsilon_i g(E_i, V)E_i) = df(V).
\end{aligned}$$

□

We zullen nu gaan bewijzen dat $dS = 2$ div Ric. Hiervoor hebben we echter eerst het volgende lemma nodig.

Lemma 4.21. *Zij $(x_1, \ldots, x_n)$ een kaart op een open omgeving in M en zij R de Riemannse krommingstensor, dan is*

$$R(\sum_s g_{ms} dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R(\sum_s g_{ls} dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = R(\sum_s g_{ks} dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j).$$

Bewijs: Voor de eerste gelijkheid gebruiken we de $\mathfrak{F}(M)$-lineariteit van R in g en van de tweede naar de derde regel lemma 4.15(4).

$$\begin{aligned}
R(\sum_s g_{ms}dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) &= \sum_s g_{ms}dx^s(R_{\partial_k\partial_l}\partial_j) = \sum_s \langle \partial_m, \partial_s\rangle R^s_{\partial_k\partial_l}\partial_j \\
&= \sum_s \langle \partial_m, (R^s_{\partial_k\partial_l}\partial_j)\partial_s\rangle = \langle R_{\partial_k\partial_l}\partial_j, \partial_m\rangle \\
&= \langle R_{\partial_j\partial_m}\partial_k, \partial_l\rangle = \langle \sum_s (R^s_{\partial_j\partial_m}\partial_k)\partial_s, \partial_l\rangle \\
&= \sum_s \langle \partial_l, \partial_s\rangle R^s_{\partial_j\partial_m}\partial_k = \sum_s g_{ls}dx^s(R_{\partial_j\partial_m}\partial_k) \\
&= \sum_s g_{ls}R(dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = R(\sum_s g_{ls}dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m).
\end{aligned}$$

De tweede gelijkheid volgt geheel analoog aan bovenstaande, alleen van lemma 4.15 gebruiken we in plaats van (4), nu (1) en (2).

$$R(\sum_s g_{ls}dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = \langle R_{\partial_j\partial_m}\partial_k, \partial_l\rangle = \langle R_{\partial_m\partial_j}\partial_l, \partial_k\rangle = R(\sum_s g_{ks}dx^s, \partial_l.\partial_m, \partial_j). \quad \square$$

Lemma 4.22. $dS = 2$ div Ric.

Bewijs: We berekenen $dS(\partial_l)$.

$$\begin{aligned}
dS(\partial_l) &= D_{\partial_l}S = D_{\partial_l}C_{12}(\mathrm{Ric}) = D_{\partial_l}C^1_1{\uparrow}^1_2\ (\mathrm{Ric}) \\
&= D_{\partial_l}\sum_k {\uparrow}^1_2(\mathrm{Ric})(dx^k, \partial_k) = \sum_k D_{\partial_l}(\mathrm{Ric})(\sum_j g^{jk}\partial_j, \partial_k) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}D_{\partial_l}(\mathrm{Ric})(\partial_j, \partial_k) = \sum_{j,k} g^{jk}D_{\partial_l}C^1_3R(\partial_j, \partial_k) \\
&= \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_l}R)(dx^r, \partial_j, \partial_k, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_l}R)^r_{\partial_k\partial_r}\partial_j.
\end{aligned}$$

Ook berekenen we div Ric(∂_l).

$$\begin{aligned}
\text{div Ric}(\partial_l) &= C_{13}(D\mathrm{Ric})(\partial_l) = C^1_1\ {\uparrow}^1_3\ (D\mathrm{Ric})(\partial_l) \\
&= \sum_k {\uparrow}^1_3\ (D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(dx^k, \partial_l) = \sum_k (D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(\sum_j g^{jk}\partial_j, \partial_l) \\
&= \sum_{j,k} g^{jk}(D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(\partial_j, \partial_l) = \sum_{j,k} g^{jk}(D_{\partial_k}C^1_3R)(\partial_j, \partial_l) \\
&= \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_k}R)(dx^r, \partial_j, \partial_l, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_k}R)^r_{\partial_l\partial_r}\partial_j.
\end{aligned}$$

Vervolgens herschrijven we $\sum_{r,j,k} g^{jk}(D_{\partial_r}R)^r_{\partial_k\partial_l}\partial_j$ om aan te tonen dat dit een tweede uitdrukking voor div Ric(∂_l) is.

$$\sum_{r,j,k} g^{jk}(D_{\partial_r}R)^r_{\partial_k\partial_l}\partial_j = \sum_{r,j,k,s} g^{jk}\delta_{rs}(D_{\partial_r}R)^s_{\partial_k\partial_l}\partial_j =$$

$$\sum_{r,j,k,s,m} g^{jk}g^{rm}g_{ms}(D_{\partial_r}R)(dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_{r,j,k,m} g^{jk}g^{rm}(D_{\partial_r}R)(\sum_s g_{ms}dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$

uit lemma 4.21 volgt dat dit gelijk is aan

$$\sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} (D_{\partial_r} R)(\sum_s g_{ks} dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j) = \sum_{r,j,k,m,s} g^{rm} g^{jk} g_{ks} (D_{\partial_r} R)(dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j) =$$

$$\sum_{j,r,m} g^{rm} (D_{\partial_r} R)(dx^j, \partial_l, \partial_m, \partial_j).$$

We hernoemen de indices als volgt $r \to k,\ j \to r,\ m \to j$ en vinden op deze manier dat dit gelijk is aan

$$\sum_{r,k,j} g^{kj} (D_{\partial_k} R)(dx^r, \partial_l, \partial_j, \partial_r).$$

Nogmaals 4.21 gebruiken geeft

$$\sum_{r,k,j} g^{jk} (D_{\partial_k} R)(dx^r, \partial_j, \partial_l, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk} (D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j = \text{div Ric}(\partial_l).$$

Voor de coördinaatvectorvelden neemt de tweede Bianchi identiteit de volgende vorm aan:

$$(D_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l} \partial_j + (D_{\partial_k} R)_{\partial_l \partial_r} \partial_j + (D_{\partial_l} R)_{\partial_r \partial_k} \partial_j = 0.$$

In de laatste term verwisselen we ∂_k en ∂_r ten koste van een minteken en stoppen het resultaat in de 1-vorm dx^r :

$$(D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j + (D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j - (D_{\partial_l} R)^r_{\partial_k \partial_r} \partial_j = 0.$$

Vervolgens vermenigvuldigen we met g^{jk} en sommeren over j, k en r

$$\sum_{j,k,r} g^{jk} (D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j + g^{jk} (D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j - g^{jk} (D_{\partial_l} R)^r_{\partial_k \partial_r} \partial_j = 0.$$

De laatste term is gelijk aan $dS(\partial_l)$ en de eerste twee zijn elk gelijk aan div Ric(∂_l), dit geeft

$$2 \text{ div Ric} - dS = 0.$$

□

4.5 Geodeten

Definitie 4.23. Een differentieerbare afbeelding α van een open interval van de reële getallen I naar een variëteit M noemen we een kromme. Als deelvariëteit van $\mathbb{R}$ heeft het interval I een coördinatenstelsel bestaande uit de identiteitsafbeelding u van I. Op ieder punt $t \in \mathbb{R}$ is de coördinaatvector $\frac{d}{du}(t) \in T_t(\mathbb{R})$ de eenheidsvector in de positieve u-richting op het punt t. De snelheidsvector van een kromme α in een punt $\alpha(s)$ met $s \in I$ wordt gegeven door:

$$\alpha'(s) = d\alpha \left(\left. \frac{d}{du} \right|_s \right) \in T_{\alpha(s)} M.$$

We noemen α regulier, wanneer in geen enkel punt $p \in \alpha[I]$ de snelheidsvector van α nul is.

Definitie 4.24. Een kromme α op een semi-Riemannse variëteit (M, g) heet *ruimte-achtig*, wanneer alle snelheidsvectoren $\alpha(s)$ met $s \in I$ ruimte-achtig zijn. Zo kunnen krommen ook *licht-achtig* en *tijd-achtig* zijn. We noemen dit het causale karakter van een kromme. Een kromme hoeft niet één van deze causale karakters te bezitten.

Een vectorveld Z op een kromme α kent aan iedere $s \in I$ een raakvector $Z_{\alpha(s)}$ toe in $T_{\alpha(s)} M$. We noemen Z differentieerbaar, wanneer $Zf \in \mathfrak{F}(I)$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Voor een vectorveld $V \in \mathfrak{X}(M)$ en een kromme α van I naar een variëteit M is $V_\alpha \in \mathfrak{X}(\alpha)$ het vectorveld beperkt tot de kromme α. Vectorvelden op reguliere krommen blijken lokaal uitgebreid te kunnen worden naar vectorvelden op de variëteit.

Lemma 4.25. *Zij Z een vectorveld op een kromme α van I naar variëteit M. Wanneer $\alpha'(s_0) \neq 0$, dan is er een differentieerbaar vectorveld $\tilde{Z}$ op een omgeving van $\alpha(s_0)$ met $\tilde{Z}_\alpha(s) = Z(s)$ voor $s \in I$ in een open omgeving van s_0.*

Bewijs: Zij $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$ om $\alpha(s_0)$. Het vectorveld α' is lokaal van de vorm:

$$\alpha'(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_s(x^i)\partial_i|_{\alpha(s)}.$$

Hieruit volgt dat $\alpha'(s_0) \neq 0$, dus $\alpha'|_{s_0}(x^i) \neq 0$ voor een $i \in \{1, \ldots, n\}$. Er bestaat een open interval J met $J \subset I$ en $s_0 \in J$ zodanig dat $\left|\frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}\right|\Big|_s = |\alpha'_s(x^i)| > 0$ voor alle $s \in J$, omdat $\alpha'(x^i)$ continu is. Nu weten we dat $x^i \circ \alpha$ een bijectieve afbeelding is van J naar $x^i \circ \alpha[J]$. Er is een open verzameling $\mathcal{V} = (x^i)^{-1}[J] \subset M$ rond $\alpha(s_0)$ bestaande uit punten p met de eigenschap dat $x^i(p) \in J$. Deze verzameling is open, omdat J open is en x^i continu. We definiëren nu het vectorveld $\tilde{Z}$ op $\mathcal{V}$ als volgt:

$$p \quad \longmapsto \quad \sum_{j=1}^{n} Z(x^j)_{(x^i \circ \alpha)^{-1} \circ x^i(p)}\partial_i|_p$$

Dan geldt:

$$\tilde{Z}_\alpha(s) = \sum_{i=1}^{n} Z_{(x^i \circ \alpha)^{-1} \circ x^i(\alpha(s))}(x^i)\partial_i|_{\alpha(s)} = Z_{(x^i \circ \alpha)^{-1} \circ x^i}(\alpha(s)) = Z(s).$$

De afbeeldingen $Z(x^j)$ en $(x^i \circ \alpha)^{-1} \circ x^i$ zijn differentieerbaar, met als gevolg dat de samenstelling ook differentieerbaar is: $\tilde{Z}$ is lokaal een diffentieerbaar vectorveld. $\square$

In het vervolg is (M, g) een Semi-Riemannse variëteit en α een reguliere kromme van I naar M. Met lemma 4.2 is $D_{\alpha'}V$ gedefinieerd door de definitie van $D_{\alpha'(s)}V$ in ieder punt $\alpha(s)$. Nu volgt uit lemma 4.25 dat $D_{\alpha'}V$ een differentieerbaar vectorveld in $\mathfrak{X}(\alpha)$ is. Voor een lokale omgeving om een punt $\alpha(s)$ is er namelijk een differentieerbaar vectorveld $\tilde{\alpha'}$, waarvoor $D_{\tilde{\alpha'}}V$ een differentieerbaar vectorveld is in een omgeving van $\alpha(s)$. De beperking van dit vectorveld tot de curve α geeft dat $D_{\alpha'}V$ differentieerbaar is.

Lemma 4.26. *Er bestaat een unieke afbeelding van $\mathfrak{X}(\alpha)$ naar $\mathfrak{X}(\alpha)$, die Z naar Z' stuurt zodanig dat voor $Z, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$ en $V \in \mathfrak{X}(M)$ geldt:*

i) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ'_1 + bZ'_2$.

ii) $(hZ)' = h'Z + hZ'$.

iii) $(V_\alpha)'(s) = D_{\alpha'(s)}V$.

Deze afbeelding is genaamd de geïnduceerde covariante afgeleide en voldoet tevens aan:

iv) $\frac{d}{ds}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z'_1, Z_2\rangle + \langle Z_1, Z'_2\rangle$.

Bewijs van het bestaan en de uniciteit van de covariante afgeleide: We bewijzen dat Z' lokaal uniek is en bestaat. Dit is voldoende aangezien uit lokale uniciteit volgt dat Z' op overlappingen van kaarten overeenkomt. Hieruit volgt dat Z' ook globaal gedefinieerd is, wanneer Z' lokaal bestaat.

Ieder punt op de kromme α is bevangen in een kaart. Neem zo'n kaart $(x^1, \ldots, x^n)$, dan geldt $Z = \sum_{i=1}^n Z^i\partial_i$. Uit de drie eigenschappen van de geïnduceerde covariante afgeleide volgt direct dat:

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \frac{dZ^i}{ds}\partial_i + \sum_{i=1}^{n} Z^i D_{\alpha'}(\partial_i). \tag{5}$$

Hiermee is de uniciteit lokaal bewezen. Te bewijzen is nog dat Z' lokaal bestaat. Hiervoor bewijzen we dat het vectorveld in vergelijking (5) lokaal een differentieerbaar vectorveld op α is, die aan de eerste drie eigenschappen van de covariante afgeleide voldoet. Uit lemma 4.25 volgt dat het vectorveld Z' differentieerbaar is. De eerste drie eigenschappen volgen direct uit het uitschrijven met behulp van vergelijking (5). Voor de derde eigenschap zullen we dit laten zien. Zij V een willekeurig vectorveld op M. Uit vergelijking (5) volgt:

$$V_{\alpha'}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dV^i_{\alpha'}}{ds}(s)\partial_i|_{\alpha(s)} + \sum_{i=1}^{n} Z^i(s) D_{\alpha'(s)}(\partial_i).$$

Uit D5 volgt dat

$$D_{\alpha'(s)}\left(\sum_{i=1}^{n} V^i\partial_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D_{\alpha'(s)}(V^i\partial_i).$$

Wanneer we nu de rechter kant van de vergelijking uitschrijven en vervolgens gebruik maken van eigenschap D3, dan krijgen we:

$$D_{\alpha'(s)}V = \sum_{i=1}^{n} D_{\alpha'(s)}(V^i\partial_i|_{\alpha(s)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha'(s)(V^i)\partial_i + \sum_{i=1}^{n} V^i D_{\alpha'(s)}(\partial_i).$$

Vergelijking van de twee uitdrukkingen geeft het gewenste resultaat. $\square$

Bewijs van eigenschap iv): Om te bewijzen dat geïnduceerde covariante afgeleide ook aan de vierde eigenschap voldoet is het voldoende om beide kanten van de vergelijking lokaal uit te schrijven en te laten zien dat ze gelijk zijn. We krijgen dan voor de linker kant van de vergelijking:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \\ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{d}{dt}\langle Z_1^i\partial_i, Z_2^j\partial_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dZ_1^i}{dt} Z_2^j g_{ij} + Z_1^i \frac{dZ_2^j}{dt} g_{ij} + Z_1^i Z_2^j \frac{dg_{ij}}{dt} \end{gathered} \tag{6}$$

en voor de rechter kant:

$$\begin{gathered} \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle = \\ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{dZ_1^i}{dt} Z_2^j g_{ij} + Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_i), \partial_j\rangle + Z_1^i \frac{dZ_2^j}{dt} g_{ij} + Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_j), \partial_i\rangle \right). \end{gathered} \tag{7}$$

Wanneer we $\langle D_{\partial_k}(\partial_i), \partial_j\rangle$ uitschrijven met behulp van de Koszul formule, dan krijgen we de volgende vergelijking:

$$\langle D_{\partial_k}(\partial_i), \partial_j\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right)$$

Hiervan maken we gebruik om de volgende vergelijking verder uit te werken:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_i), \partial_j\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^k \circ \alpha}{dt} \langle D_{\partial_k}(\partial_i), \partial_j\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^k \circ \alpha}{dt}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right). \end{aligned}$$

Zo geldt ook:

$$\sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_i), \partial_j\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^k \circ \alpha}{dt}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right).$$

Wanneer we deze twee vergelijkingen bij elkaar optellen dan volgt dat:

$$\sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_i), \partial_j \rangle + Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\partial_i), \partial_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \sum_{k=1}^{n} \frac{dx^k \circ \alpha}{dt} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} Z_1^i Z_2^j \frac{dg_{ij}}{dt}.$$

Nu volgt direct dat de uitdrukking (6) en (7) aan elkaar gelijk zijn. □

Een vectorveld $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ noemen we parallel, wanneer $Z' = 0$ en voor een kromme α noemen we α'' de versnelling.

Lemma 4.27. *Zij $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, dan is Z' lokaal voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ van de vorm:*

$$Z' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dZ^k}{ds} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{ds} Z^j \right) \partial_k.$$

Bewijs: Zij $(x^1, \ldots, x^n)$ een kaart. Uit D4 en D5 in combinatie met lemma 3.18 volgt dat $D_{\alpha'}(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n} D_{\alpha'(x^j)\partial_j}(\partial_i)$. Wanneer we nu D3 gebruiken volgt dat:

$$D_{\alpha'}(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha'(x^j) D_{\partial_j}(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha'(x^j) \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Nu volgt het resultaat uit het invullen en omschrijven van vergelijking (5). □

Definitie 4.28. Een geodeet is een reguliere kromme γ, waarvoor geldt dat γ' parallel is.

Voor een geodeet geldt per definitie dat $\gamma''(s) = 0$ voor alle $s \in I$. Vergelijking *iv)* van lemma 4.26 geeft dat $\frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle + \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, dus is er een constante C met $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = C$. Hieruit volgt dat een geodeet zijn causale karakter behoudt. Het is nu duidelijk dat we een geodeet, die niet lichtachtig is, altijd zo kunnen parametriseren dat $\|\gamma(\tau)\| = 1$ voor alle τ in een interval I. Hierbij noemen we τ de eigentijd.

Lemma 4.29. *Een geodeet voldoet voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ op een open omgeving $\mathcal{U}$ aan de volgende vergelijkingen:*

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \text{ voor } 1 \leq k \leq n.$$

In de vergelijking hierboven is $x^i \circ \gamma$ afgekort met x^i. Wat met de geodetische differentiaalvergelijkingen precies bedoeld wordt is:

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{ds^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma)}{ds} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{ds} = 0 \text{ voor } 1 \leq k \leq n.$$

Wanneer we nu gebruik maken van het feit dat $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ in ieder punt $p \in \mathcal{U}$ een basis is van T_pM dan volgt het resultaat direct uit lemma 4.27 na invullen van γ' voor Z en gelijkstellen van Z' aan nul. □

Voor een g-orthogonale kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ kunnen we deze vergelijkingen vereenvoudigen.

Stelling 4.30. *De geodetische differentiaalvergelijkingen zijn voor een g-orthogonale kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ van de volgende vorm:*

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kk} \frac{dx^k}{ds} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \quad \text{voor } 1 \leq k \leq n.$$

Bewijs: De geodetische differentiaalvergelijkingen zijn voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ ter herinnering zoals in lemma 4.29:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \text{ voor } 1 \leq k \leq n.$$

In lemma 4.10 is gegeven dat de Christoffel symbolen van de volgende vorm zijn:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \cdot \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Nu kunnen we berekenen dat:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} g^{kk} \cdot \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \\
&= g^{kk} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \frac{1}{2} g^{kk} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \\
&= g^{kk} \frac{dg_{kk}}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \frac{1}{2} g^{kk} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2.
\end{aligned}$$

Omdat de kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ g-orthonormaal is en niet-ontaard geldt $g_{kk} = \frac{1}{g^{kk}}$. Wanneer we dit toepassen op de geodetische differentiaalvergelijkingen krijgen we de gevraagde vergelijking:

$$\begin{aligned}
0 &= g_{kk} \left(\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{dt} \right) \\
&= g_{kk} \frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{dg_{kk}}{ds} \frac{dx^k}{ds} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \\
&= \frac{d}{ds} \left(g_{kk} \frac{dx^k}{ds} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \quad \text{voor } 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.31. *Zij $v \in T_pM$, $s \in I$, dan is er precies één geodeet met $\gamma'(s) = v$.*

Een geodeet voldoet aan een systeem van n tweede orde differentiaal vergelijkingen voor n coördinaten. Aangezien de conditie inhoudt dat $\gamma(s) = p$ en $\gamma'(s) = v$, wordt hiermee de geodeet uniek vastgelegd. □

5 De Algemene Relativiteitstheorie

De relativiteitstheorie modelleert het heelal waarin wij leven als een zogenaamde ruimte-tijd. Dat wil zeggen een vier dimensionale samenhangende tijd-georiënteerde Lorentz variëteit. In het speciale geval dat we M gelijk nemen aan de Minkowski ruimte $\mathbb{R}^4_1$ is er geen kromming en hebben we te maken met de speciale relativiteitstheorie. Deze theorie verwaarloost de zwaartekracht. Voor iedere ruimte-tijd is de raakruimte isomorf met $\mathbb{R}^4_1$ en kan dus lokaal benaderd worden door een vlakke ruimte. De speciale relativiteitstheorie is dus een lokale theorie. In het algemeen is een ruimte-tijd niet vlak, maar is er kromming. De algemene relativiteitstheorie beschrijft zwaartekracht door middel van kromming. De bron van zwaartekracht ofwel kromming is niet alleen massa, maar ook energie. Materie dient als drager van massa en energie, ook wel energie-impuls genoemd. De stroming van deze energie-impuls beschrijven we met een *stress-energie tensorveld* T op M. Dit is een symmetrische (0,2) tensor. Behoud van energie-impuls kan men beschrijven door div $T = 0$.

5.1 De Einstein vergelijking

Wat is nu het verband tussen zwaartekracht en energie-impuls? Aangezien zwaartekracht wordt beschreven door kromming en energie-impuls door T, zocht Einstein een verband tussen T en de Ricci kromming. Hij bedacht de zogenaamde gravitatie tensor.

Definitie 5.1. De Einstein gravitatie tensor G van een ruimte-tijd M is

$$G = \mathrm{Ric} - \tfrac{1}{2} S g.$$

Hierbij is g de metrische tensor van M.

Aangezien $S = C_{12}(\mathrm{Ric})$ is de gravitatie tensor G volledig bepaald door de Ricci-kromming. Ook omgekeerd kan men uit G de Ricci-kromming berekenen.

Lemma 5.2.

(1) G is een symmetrisch (0,2) tensorveld en div $G = 0$.

(2) $\mathrm{Ric} = G - \frac{1}{2} C_{12}(G) g$.

Bewijs:

(1) Zowel Ric als g zijn symmetrische (0,2) tensoren, dus G ook. Volgens lemma 4.20 is $\mathrm{div}(Sg) = dS$. We weten van lemma 4.22 dat div Ric $= \frac{1}{2} dS$, dus div $G = \mathrm{div}(\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} Sg) = \mathrm{div}\ \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\mathrm{div}\ Sg = \frac{1}{2} dS - \frac{1}{2} dS = 0$.

(2) De contractie van de metrische tensor $C_{12}(g) = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i g(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i^2 = 4$ is de dimensie van de ruimte-tijd. We berekenen $C_{12}(G) = C_{12}(\mathrm{Ric}) - \frac{1}{2} S C_{12}(g) = S - 2S = -S$. Herschrijven van de definitie van G geeft

$$\mathrm{Ric} = G + (\tfrac{1}{2} S) g = G - \tfrac{1}{2} C_{12}(G) g.$$

□

Met deze gravitatie tensor kon Einstein het verband tussen energie-impuls en kromming, ofwel de zwaartekracht, beschrijven.

Definitie 5.3 (De Einsteinvergelijking)**.** Zij M een ruimte-tijd die materie bevat met stress-energie tensor T, dan geldt:

$$G = 8\pi T.$$

Hierbij is G de Einstein gravitatie tensor.

Deze fundamentele vergelijking beschrijft alle beweging van de materie in het heelal. Duidelijk is dat volgens de vergelijking de stress-energie tensor een symmetrische (0,2) tensor moet zijn met div $T = 0$. Dit heeft behoud van energie-impuls tot gevolg. Aan de andere kant bepaalt T via lemma 5.2(2) de Ricci kromming. Vervolgens bepaalt div $T = 0$ hoe de Ricci kromming de materie verplaatst.

5.2 Deeltjes in de Algemene Relativiteitstheorie

De Algemene Relativiteitstheorie modelleert het heelal als een tijd-georiënteerde Lorentz variëteit M. In deze theorie bewegen deeltjes met massa zich langs tijdachtige toekomstgerichte reguliere krommen $\alpha : I \to M$. Deze kunnen we zodanig parametriseren dat $\|\alpha'(\tau)\| = 1$ voor alle $\tau \in I$. Hierbij noemen we de parameter τ de eigentijd en we nemen aan dat de tijd voor het deeltje verloopt als de eigentijd. Dat wil zeggen dat het tijdsinterval tussen twee gebeurtenissen $\alpha(\tau_1) = p_1$ en $\alpha(\tau_2) = p_2$ dat een klok zou meten, wanneer deze met een deeltje langs de kromme α zou meereizen, gelijk is aan $\tau_2 - \tau_1$. Er is dus geen uniforme tijd in de algemene relativiteitstheorie. Het tijdsinterval tussen twee gebeurtenissen is afhankelijk van de waarnemer.

Een auxioma van de Algemene Relativiteitstheorie is dat een materie deeltje in vrije val, dat de ruimte-tijd om zich heen niet beïnvloedt, de baan van een tijdachtige toekomstgerichte geodeet volgt. We noemen zo'n deeltje ook wel een testdeeltje. Materie deeltjes hebben in het heelal wel een massa en beïnvloeden hiermee de ruimte-tijd. Wanneer zo'n deeltje echter weinig massa heeft, beïnvloedt het de ruimte-tijd om zich heen nauwelijks. We kunnen dan de baan, die het deeltje volgt, goed benaderen met behulp van geodeten. Lichtachtige deeltjes, zoals fotonen, volgen de banen van lichtachtige toekomstgerichte geodeten.

De Speciale Relativiteitstheorie

De Speciale Relativiteitstheorie is een speciaal geval van de Algemene Relativiteitstheorie en geldt in gebieden van het heelal, waar de zwaartekracht te verwaarlozen is. Het heelal wordt net als in de Algemene Relativiteitstheorie gemodelleerd met een tijd-georiënteerde Lorentz variëteit. De metriek van de Speciale Relativiteitstheorie kunnen we vinden door te bedenken dat er in deze theorie geen stroming plaatsvindt van energie en impuls: $T = 0$. Nu volgt uit de Einstein vergelijking dat de gravitatietensor $G = 0$. Met deze informatie kan de metriek voor een ruimte-tijd in de Speciale Relativiteitstheorie berekend worden. Dan blijkt voor een $g-$orthonormale kaart (t, x^1, x^2, x^3) dat de metriek de volgende vorm heeft:

$$g = -dt \otimes dt + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$$

met t de tijdcoördinaat en x^1, x^2 en x^3 de ruimtecoördinaten. De Speciale Relativiteitstheorie vindt dus plaats in de Semi-Euclidische ruimte $\mathbb{R}^4_1$: de $\mathbb{R}^4$ met een metriek van index 1. Deze ruimte-tijd noemen we de Minkowski ruimte-tijd.

De wetten van de Speciale Relativiteitstheorie kunnen ook afgeleid worden uit twee postulaten.

1) De lichtsnelheid heeft in elk inertiaalstelsel dezelfde waarde.

2) In elk inertiaalstelsel gelden dezelfde natuurwetten.

Hierbij is een inertiaalstelsel een coördinatenstelsel, waarin de bewegingswetten van Newton geldig zijn. In zo'n stelsel is een voorwerp in vrije val in rust of beweegt eenparig rechtlijnig. Wanneer de lichtsnelheid in elk inertiaalstelsel dezelfde waarde heeft, zeggen we ook wel dat deze absoluut is.

Nu gaan we laten zien dat uit de aannames van de Algemene Relativiteitstheorie volgt dat de lichtsnelheid absoluut is in de Minkowski ruimte-tijd. Wanneer we gebruik maken van lemma

4.9 zien we direct dat de Christoffelsymbolen Γ^k_{ij} allemaal nul zijn. We kiezen de coördinaten zodanig, dat de oorsprong van het coördinaatstelsel meereist met de waarnemer. Voor de geodeet γ die de waarnemer volgt geparametriseerd in de eigentijd τ geldt: $-1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$. Aangezien een lichtdeeltje een lichtachtige geodetische baan γ' volgt kunnen we nu de vergelijking van lemma 4.29 invullen en dan krijgen we de volgende vier vergelijkingen:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \text{ en } \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0 \text{ voor i = 1,2,3.}$$

Voor de lichtachtige geodeet γ' geldt $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$ en dus vinden we voor een parametrisatie van γ' in een parameter s dat

$$\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dt^1}{ds}\right)^2 = 0.$$

Wanneer we nu parametriseren in τ in plaats van in s dan volgt uit vermenigvuldiging met $(\frac{ds}{d\tau})^2 = (\frac{ds}{dt})^2 \cdot (\frac{dt}{d\tau})^2 = -(\frac{ds}{dt})^2$ dat:

$$\sqrt{\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2} = 1.$$

De lichtsnelheid is absoluut.

6 Schwarzschild

De eerste exacte oplossing van de Einstein vergelijking is in 1916 door Schwarzschild gevonden. De Schwarzschild ruimte-tijd is een model voor een ruimte, waarin zich één zware niet-roterende bolsymmetrische massa bevindt. Het beschrijft overigens niet de ruimte-tijd in dit object, maar de lege ruimte er om heen. Deze beschrijving is bijvoorbeeld geschikt voor planeten, sterren en zwarte gaten.

Er kan aangenomen worden dat de Schwarzschild ruimte-tijd statisch en bolsymmetrisch is. Zoals al eerder genoemd beschrijven we een ruimte-tijd, die buiten de massa in het centrum, vacuüm is. Hier vindt dus geen stroming van energie en impuls plaats, waaruit volgt dat de stress-energie tensor in het gebied nul is. We zullen voor de afleiding van dit model ook gebruik maken van de constatering dat de invloed van de massa willekeurig klein wordt, naarmate de afstand tot dit object groter wordt. Hieruit volgt dat de ruimte-tijd in de limiet oneindig ver van de massa verwijderd Minkowski is.

6.1 Schwarzschild metrische tensor

Zoals al eerder genoemd probeert men het heelal te modelleren met tijd-georiënteerde 4-dimensionale Lorentz variëteiten. Om het heelal lokaal te beschrijven is het noodzakelijk de metrische tensor of lijnelement te vinden. We weten dat het lijnelement voor een kaart (x^1, x^2, x^3, x^4) van de vorm

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx^i dx^j$$

is. Wanneer we nu de Ricci-kromming uitdrukken in de metrische tensor en daarop de Einstein vergelijking loslaten dan krijgen we een stelsel differentiaalvergelijkingen, waarmee we een poging kunnen doen de metrische tensor te berekenen. Voor veel situaties zal dit een ingewikkeld stelsel van differentiaalvergelijkingen opleveren, waarvoor het heel lastig of onmogelijk is een oplossing te vinden. Of er een oplossing gevonden kan worden, kan afhangen van de keuze van de coördinaten. In het geval van de Schwarzschild ruimte-tijd blijkt er een exacte oplossing te bestaan en nadat we gebruik gemaakt hebben van een aantal symmetrieën in de Schwarzschild ruimte-tijd blijken de differentiaalvergelijkingen eenvoudig te zijn.

Een geschikte keuze van coördinaten

Zoals we al eerder genoemd hebben is het lijnelement voor een kaart (x^1, x^2, x^3, x^4) van de vorm:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx^i dx^j.$$

We gaan nu eerst proberen met behulp van symmetrieën in de Schwarzschild ruimte-tijd deze uitdrukking te vereenvoudigen. We nemen voor de eerste coördinaat de tijd $x^1 = t$. De Schwarzschild ruimte-tijd is statisch, dus onafhankelijk van de tijd. Dus de metrische tensor blijft per definitie hetzelfde, wanneer we deze zouden uitdrukken in $-t$ in plaats van t. Hieruit volgt dat geldt $g_{1i} dx^i dt = -g_{1i} dx^i dt$ voor $i = 2, 3, 4$, dus $g_{1i} = 0$ voor $i = 2, 3, 4$. Dit geeft:

$$ds^2 = A(x^2, x^3, x^4) dt^2 + \sum_{i,j=2}^{4} g_{ij}(x^2, x^3, x^4) dx^i dx^j.$$

Aangezien de Schwarzschild ruimte-tijd bolsymmetrisch is, is het handig om dit probleem in bolcoördinaten te berekenen: we nemen $x^2 = \rho, x^3 = \theta, x^4 = \phi$. Het is meteen duidelijk dat de componenten van de metrische tensor niet hoek-afhankelijk zijn. Omdat het niet uit mag maken of we de tensor uitdrukken in θ en ϕ of $-\theta$ en $-\phi$ geldt dat $g_{23} = g_{32} = 0 = g_{24} = g_{42}$. De metriek in een bolschil moet invariant zijn onder rotaties, waaruit volgt dat de metriek het product moet zijn van een constante en de standaardmetriek in de eenheidsbolschil: $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Dit geeft:

$$ds^2 = A(\rho)dt^2 + B(\rho)d\rho^2 + C(\rho)d\sigma^2.$$

We nemen aan dat $C(\rho)$ een stijgende functie is, dat bolschillen voor een grotere ρ-coördinaat een grotere omtrek moeten hebben. We willen nu dat de bol met straal $C(\rho) = r$ een oppervlak van $4\pi r^2$ heeft. Aangezien $C(\rho) \in \mathfrak{F}(M)$ een differentieerbare stijgende functie is, weten we dat $C(\rho)$ bijectief is. We kunnen dus de volgende substitutie toepassen: $r = \sqrt{C(\rho)}$. Het lijnelement in de Schwarzschild ruimte-tijd wordt hiermee:

$$ds^2 = P(r)dt^2 + Q(r)dr^2 + r^2 d\sigma^2 \tag{8}$$

met $P(r)$ en $Q(r)$ differentieerbare functies.

Christoffel symbolen

We kunnen met behulp van lemma 4.10 voor $n = 4$ de Christoffel symbolen uitrekenen. De Christoffel symbolen zijn van de vorm Γ^k_{ij}, waarbij voor i, j en k vier mogelijkheden zijn. Er zijn dus $4^3 = 64$ Christoffel symbolen te berekenen. We kunnen direct uit lemma 4.10 zien dat de Christoffel symbolen nul zijn voor drie verschillende coördinaten. Tevens weten we uit vergelijking 8, dat alleen de coördinaat ϕ afhankelijk is van θ en dat de vier coördinaten verder alleen afhankelijk zijn van r. Wanneer we nu ook nog gebruik maken van de symmetrie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ hoeven we nog maar 9 verschillende Christoffel Symbolen te berekenen. De andere zijn nul of kunnen we direct afleiden uit de symmetrie.

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^t_{tr} = \dfrac{1}{2P}\dfrac{dP}{dr} & \Gamma^r_{tt} = \dfrac{1}{2Q}\dfrac{dP}{dr} & \Gamma^r_{rr} = \dfrac{1}{2Q}\dfrac{dQ}{dr} \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -\dfrac{r}{Q} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r_{\phi\phi} = \dfrac{-r\sin^2\theta}{Q} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}
\end{array}$$

Riemansse krommingstensor

We kunnen met behulp van lemma 4.14 en de eerder uitgerekende Christoffel symbolen de Riemannse krommingstensor uitrekenen. $R^i_{jkl} = 0$ wanneer i, j, k en l verschillend zijn aangezien de Christoffelsymbolen voor drie verschillende coördinaten nul is. Voor drie verschillende of vier dezelfde coördinaten blijkt de Riemannse krommingstensor na berekening nul te zijn. Zoals al eerder opgemerkt is bij lemma 4.15 gelden de volgende symmetrieën $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$. Hierbij is R_{ijkl} gedefinieerd als $R_{ijkl} =\downarrow^1_1 R^i_{jkl} = \langle R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j), \partial_i \rangle$. Hieronder zijn een aantal componenten van de Riemannse krommingstensor gegeven. De andere componenten zijn nul of kunnen met behulp van één van de symmetrieën en de definitie van R_{ijkl} berekend worden.

$$
\begin{aligned}
R^t_{rtr} &= \frac{1}{2P}\frac{d^2P}{dr^2} + \frac{1}{4P^2}\left(\frac{dP}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4PQ}\frac{dP}{dr}\frac{dQ}{dr} \\
R^t_{\theta t\theta} &= \frac{r}{2PQ}\frac{dP}{dr} \\
R^t_{\phi t\phi} &= \frac{r\sin^2\theta}{2PQ}\frac{dP}{dr} \\
R^r_{\phi r\phi} &= -\frac{r\sin^2\theta}{2Q^2}\frac{dQ}{dr} \\
R^r_{\theta r\theta} &= -\frac{r\theta}{2Q^2}\frac{dQ}{dr} \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} &= \left(\frac{1}{Q} - 1\right)\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Ricci krommingstensor

Zoals al eerder opgemerkt is bij definitie 4.17 geldt lokaal $R_{ij} = \sum_{m=1}^{n} R^m_{ijm}$. We kunnen dus met de eerder berekende Riemannse krommingstensor de Ricci kromming uitrekenen. Dan blijkt dat $R_{ij} = 0$ voor de componenten van de Ricci kromming met $i \neq j$. De overige componenten worden gegeven door:

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{PR^t_{rtr}}{Q} - \frac{1}{rQ}\frac{dP}{dr} \\
R_{rr} &= -R^t_{rtr} - \frac{1}{rQ}\frac{dQ}{dr} \\
R_{\theta\theta} &= -\frac{r}{2PQ}\frac{dP}{dr} + \frac{r}{2Q^2}\frac{dQ}{dr} - \frac{1}{Q} + 1 \\
R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta}\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

Toepassen van de Einstein vergelijking

We modelleren een ruimte-tijd die vacuüm is, behalve in het centrum waar zich de massa bevindt. Er bevinden zich dus geen deeltjes en we weten van de natuurkunde dat deeltjes de drager zijn van energie en impuls. Hieruit volgt dat er buiten het centrum geen stroming van energie en impuls is en de stress-energie tensor T nul is. De Einsteinvergelijking geeft nu dat $G = 0$ en dan volgt uit lemma 5.2 ii) dat dan ook geldt $\mathrm{Ric} = 0$. De Schwarzschild ruimte-tijd is Ricci-vlak. Aangezien de Ricci krommingstensor nul is zijn de componenten R_{ij} gelijk aan nul. Dit levert ons vier differentiaalvergelijkingen: $R_{ii} = 0$.

Uit de eerste twee volgt:

$$
\frac{1}{P}\frac{dP}{dr} + \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dr} = \frac{Q}{P}R_{tt} + R_{rr} = 0.
$$

Door te vermenigvuldigen met PQ en de productregel toe te passen, zien we dat PQ constant is. In de limiet van r naar oneindig heeft de massa geen invloed meer op de metriek en verwachten we de Minkowski metriek terug te vinden. De Minkowski metriek wordt in bolcoördinaten gegeven door: $-dt^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2$. Hieruit volgt dat $\lim_{r\to\infty} PQ = -1$ en aangezien PQ constant is volgt dat $PQ = -1$.

Wanneer we nu de vergelijking $R_{\theta\theta} = 0$ bekijken volgt:

$$r\frac{\partial P}{\partial r} + P + 1 = -\frac{r}{2PQ}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{r}{2Q^2}\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{1}{Q} + 1 = R_{\theta\theta} = 0.$$

We hebben dus de volgende eenvoudige differentiaalvergelijking overgehouden:

$$\frac{\partial(rP)}{\partial r} = -1.$$

Deze heeft de volgende oplossing:

$$P = -1 + \frac{R_s}{r},$$

waarbij de constante R_s de Schwarzschild straal genoemd wordt. Deze ligt op basis van de gegevens die we nu gebruiken nog niet vast. Invullen van P en Q in de vier differentiaalvergelijkingen laat zien dat we nu inderdaad een metrische tensor hebben die voldoet aan de eisen. We hebben nu aangetoond dat de Schwarzschild metriek van de volgende vorm is:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \text{ met } h(r) = 1 - \frac{R_s}{r}.$$

Benadering van de Schwarzschild straal

De Schwarzschild straal kunnen we bij benadering bepalen door te kijken naar een testdeeltje dat zich bevindt in de Schwarzschild ruimte-tijd in de limiet van de klassieke mechanica. De beweging van dit deeltje wordt in deze limiet gegeven door de gravitatiewet in combinatie met de Tweede Wet van Newton. Een testdeeltje gedraagt zich klassiek, wanneer de snelheid 'klein' is: $\frac{dr}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau}$, $\frac{rd\theta}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau}$ en $\frac{rd\phi}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau}$, en het deeltje zich 'ver genoeg' van de massa bevindt: $r >> R_s$.

Het deeltje voldoet aan de geodetische differentiaalvergelijkingen voor een orthogonale kaart zoals in propositie 4.30:

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{kk}\frac{dx^k}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 \quad \text{voor } 0 \leq k \leq 3.$$

Aangezien g_{ii} onafhankelijk is van de tijd volgt dat:

$$\left(\frac{dx^k}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}g^{kk}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2 \quad \text{voor } 0 \leq k \leq 3.$$

Wanneer we nu gebruik maken van de eis dat de snelheid 'klein' is dan volgt dat de vergelijkingen van de volgende vorm worden:

$$\left(\frac{dx^k}{d\tau}\right)^2 \approx \frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{tt}}{\partial x^k}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad \text{voor } 0 \leq k \leq 3.$$

Nu kunnen we gebruiken dat alleen g_{rr} afhankelijk is van de tijd om te laten zien dat $\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = 0$ oftwel de hoeksnelheden en $\frac{dt}{d\tau}$ zijn constant.

Voor r houden we na deling door $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ de volgende vergelijking over:

$$\frac{d^2r}{dt^2} \approx \frac{1}{2}g^{rr}\frac{dg_{tt}}{dr} \approx \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{R_s}{r}\right). \tag{9}$$

De klassieke mechanica geeft de volgende uitdrukking voor de versnelling $\mathbf{a}$ van een lichaam bij een gravitatiepotentiaal Φ: $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$. Hierbij is Φ een functie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}$ en $\mathbf{a}$ een vector in $\mathbb{R}^3$. In het geval dat we te maken hebben met een gravitatiepotentiaal gegeven door één massief object is het handig om het probleem in bolcoördinaten te bekijken. Er geldt $\Phi(r,\theta,\phi) = -\frac{GM}{r}$ met G Newton's gravitatieconstante en M de massa van het object. Hieruit volgt voor de radiële component $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{GM}{r}\right)$. Wanneer we dit vergelijken met vergelijking (9) dan volgt dat $R_s \approx 2GM$.

Commentaar op de Schwarzschild coördinaten

We hebben aangetoond dat de Schwarzschildmetriek er in Schwarzschildcoördinaten als volgt uitziet:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{h(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \text{ met } h(r) = 1 - \frac{R_s}{r}.$$

Er valt echter direct iets op, wanneer we deze oplossing bekijken. Eén van de metrische coëfficiënten wordt oneindig voor $r = 0$ en $r = R_s$. Dit lijkt er op te wijzen dat er iets niet helemaal klopt. Wanneer metrische coëfficiënten naar oneindig gaan op een punt kunnen hiervoor twee oorzaken zijn. De eerste is dat er een singulariteit is in de ruimte-tijd, de tweede is dat de coördinaatfuncties van de gekozen kaart dit veroorzaken. Er zijn ook coördinaten bekend, bijvoorbeeld de Kruskal coördinaten, waarop alleen een singulariteit is op $r = 0$. Hieruit volgt dat één van de metrische coëfficiënten op $r = R_s$ naar oneindig gaat door de gekozen coördinaten. Op $r = 0$ blijkt een singulariteit in de ruimte-tijd te zijn.

We hebben nu dus een Schwarzschild metriek gevonden voor $r > R_s$ en voor $r < R_s$. De eerste ruimte $r > R_s$ kunnen we gebruiken om banen te berekenen van deeltjes in de buurt van een zwaar object, de tweede ruimte $r < R_s$ noemen we een zwart gat. Het is geen probleem dat we geen oplossing hebben op $r = R_s$. We weten dat de banen van deeltjes continu differentieerbaar zijn op alle punten buiten $r = R_s$ en dit geeft genoeg informatie om deze banen uit te kunnen rekenen.

Zoals we al eerder vermeld hebben is de Schwarzschild ruimte-tijd alleen een oplossing op het gebied buiten de massa. In veel gevallen zal de straal van het object groter zijn dan de Schwarzschild straal en dan hebben we dus alleen te maken met de Schwarzschild ruimte-tijd in het gebied $r > R_s$. Wanneer de straal van een object kleiner is dan de Schwarzschild straal dan hebben we te maken met een zwart gat en bevindt alle massa zich in het centrum $r = 0$.

6.2 Zware objecten in het heelal

Nu we de Schwarzschild oplossing gevonden hebben, kunnen we ons afvragen voor wat voor objecten deze theorie betere beschrijvingen geeft dan de klassieke natuurkunde. De rol van de algemene relativiteitstheorie geeft in het geval van ons zonnestelsel kleine verbeteringen. Er zijn echter ook gevallen, waarin de benadering van Newton heel grof is of zelfs verkeerd. Hiervoor is het interessant om de objecten in het heelal te bekijken, waarvoor dit geldt.

Een ster ontstaat, wanneer een gaswolk onder invloed van de zwaartekracht samentrekt en uiteindelijk ineenstort. De dichtheid van het gas wordt dan steeds groter en het gas wordt steeds warmer. Uiteindelijk wordt de temperatuur in zo'n gaswolk zo hoog dat er kernreacties plaats gaan vinden. In deze kernreacties wordt waterstof omgezet in helium. Dit wordt 'waterstofverbranding' genoemd. Wanneer de ster warm genoeg wordt, zal er ook 'heliumverbranding' plaatsvinden. In dit proces kan de ster zodanig op gaan zwellen dat deze een deel van zijn massa af gaat stoten. Wanneer de massa niet veel groter is dan de massa van onze zon dan zal de ster ineenklappen tot een witte dwerg. Zwaardere sterren kunnen zo ver ineenklappen dat protonen en elektronen tot neutronen omgevormd worden. Dit levert een neutronen ster met een straal van ongeveer 10 tot 15 kilometer. Wanneer de massa groter dan 2 tot 3 keer de massa van de zon is, zal de ster zo ver inklappen dat de straal kleiner wordt dan de Schwarzschild straal. De ster wordt dan een zwart gat. Voor een goed model van het heelal in de buurt van neutronen sterren of zwarte gaten zijn de relativistische effecten van groot belang.

6.3 Deeltjes in de Schwarzschild ruimte-tijd

Zoals we al eerder genoemd hebben kunnen we de baan van deeltjes met weinig massa of zonder massa goed benaderen met behulp van geodeten. Wanneer we de baan van een deeltje in de Schwarzschild ruimte-tijd willen berekenen moeten we de geodetische differentiaalvergelijkingen in de Schwarzschild ruimte-tijd bekijken. Wanneer we dit doen komen we tot het volgende resultaat.

Lemma 6.1. *Wanneer γ een geodeet is in de Schwarzschild ruimte-tijd, dan geldt voor constanten E, L, dat:*

i) $h\frac{dt}{ds} = E$

ii) $r^2 sin^2\theta \frac{d\phi}{ds} = L$

iii) $\frac{d}{ds}(r^2\frac{d\theta}{ds}) = r^2 sin\theta cos\theta(\frac{d\phi}{ds})^2$.

Bewijs: Aangezien de Schwarzschild coördinaten orthogonaal zijn kunnen we lemma 4.30 toepassen:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kk}\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 \quad \text{voor } 1 \leq k \leq 3.$$

Hierbij is $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ en $x^3 = \phi$ en g de Schwarzschild metrische tensor.

i) Wanneer we deze vergelijking bekijken voor $k = 0$ dan volgt: $\frac{d}{ds}\left(-h\frac{dt}{ds}\right) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{3}\frac{\partial g_{ii}}{\partial t}(\frac{dx^i}{ds})^2$.
Omdat de metriek tijdsonafhankelijk is, geldt $\frac{\partial g_{ii}}{\partial t} = 0$. Nu vinden we dat: $\frac{d}{ds}\left(-h\frac{dt}{ds}\right) = 0$, dus $h\frac{dt}{ds} = E$ met E een constante.

ii), iii) De tweede en derde vergelijking volgen respectievelijk uit de geodetische differentiaalvergelijking voor $k = 3$ en $k = 2$. □

Voor geodeten met r constant geldt dat:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 = 0 \text{ voor } 1 \leq k \leq 3.$$

De geodetische differentiaalvergelijkingen van lemma 4.30 krijgen dan de volgende vorm:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{kk}\frac{dx^k}{ds}\right) = 0 \text{ voor } 1 \leq k \leq 3.$$

Het is duidelijk dat voor $k = 2$ aan deze vergelijking voldaan wordt met r constant. De andere drie vergelijkingen blijven hetzelfde als in lemma 6.1. Uit lemma 4.31 volgt dat wanneer r constant is op een interval, dat dit de geodeet is met r constant op ieder interval.

Lemma 6.2. *Wanneer γ de baan van een testdeeltje in vrije val in een Schwarzschild ruimte-tijd is geparametriseerd in de eigentijd τ, dan geldt voor constanten E, L, dat:*

i) $h\frac{dt}{d\tau} = E$

ii) $r^2\frac{d\phi}{d\tau} = L$

iii) $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

iv) Wanneer r niet constant is dan geldt ook: $\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV}{dr}$ *met* $V(r) = \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)h(r) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{R_sL^2}{r^3}$.

Bewijs:

iii) De kromme, die een deeltje in vrije val volgt, voldoet aan de geodetische differentiaalvergelijkingen. We kiezen de coördinaten door middel van rotaties zodanig dat voor het deeltje op τ_0 geldt $\theta(\tau_0) = \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{d\theta}{d\tau}(\tau_0) = 0$. Het is duidelijk dat $\theta = \frac{1}{2}\pi$ aan lemma 6.1 vergelijking *iii)* voldoet. Wanneer we $\theta = \frac{1}{2}\pi$ invullen in de andere drie vergelijkingen van de vier geodetische differentiaal vergelijkingen, dan hebben we voor een gegeven beginpositie en raakvector voor de drie tweede orde differentiaalvergelijkingen precies één oplossing. Aangezien er zoals in lemma 4.31 precies één geodeet is, die aan zulke beginvoorwaarden voldoet, volgt hieruit dat voor een geodeet $\theta = \frac{1}{2}\pi$ de unieke oplossing is.

i), ii) Wanneer we vergelijking *i)* en *ii)* vergelijken met vergelijking *i)* en *ii)* van lemma 6.1, dan is de eerste onveranderd en de tweede volgt uit het toepassen van vergelijking *iii)* uit dit lemma.

iv) Zoals al eerder opgemerkt volgt een deeltje de baan van een tijd-achtige geodeet γ, waarvoor geldt dat $\|\gamma'(\tau)\| = 1$ met τ met eigentijd. Aangezien γ een toekomstgerichte kromme is weten we dat $\langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle = -1$. We kunnen ook berekenen dat $\gamma' = \frac{E}{h}\partial_t + \frac{dr}{d\tau}\partial_r + \frac{L^2}{r^2}\partial_\phi$. Wanneer we dit gebruiken om $\langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle$ te berekenen dan volgt de vergelijking die ook wel de energie vergelijking genoemd wordt:

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 + \frac{L^2}{(r(\tau))^2}\right) h(r(\tau)) = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r(\tau)).$$

Wanneer r niet constant is voor de gehele geodeet, dan is r ook niet constant op een interval zoals opgemerkt onder lemma 6.1. Wanneer we de energie vergelijking differentiëren naar τ en delen door de radiële snelheid $\frac{dr}{d\tau}$ dan volgt de vierde vergelijking op de punten waar $\frac{dr}{d\tau} \neq 0$. Wanneer $\frac{dr}{d\tau} = 0$ op een geïsoleerd punt dan wordt aan de vierde vergelijking voldaan in een omgeving van het punt en dan volgt uit de continuïteit van $\frac{dr}{d\tau}$ en $V(r(\tau))$ dat de gehele geodeet aan de vierde vergelijking voldoet. □

Geodeten met r constant voldoen dus wel aan de eerste drie vergelijkingen van lemma 6.2, maar hoeven niet aan de vierde te voldoen. Voor deze geodeten volgt uit dit lemma dat de hoeksnelheid en $h(r)$ constant zijn en de eigentijd τ en de Schwarzschild tijd t evenredig verlopen.

Nu gaan we de geodetische vergelijkingen bekijken voor een lichtachtig deeltje. In dit geval parametriseren we in een parameter s en wordt voldaan aan dezelfde vergelijkingen.

Lemma 6.3. *Wanneer γ de baan van een lichtachtig deeltje in vrije val in een Schwarzschild ruimte-tijd is, dan geldt voor constanten E, L, dat:*

i) $h\frac{dt}{ds} = E$

ii) $r^2\frac{d\phi}{ds} = L$

iii) $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

iv) *Wanneer r niet constant is dan geldt ook:* $\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV}{dr}$ *met* $V(r) = \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)h(r) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{R_sL^2}{r^3}$.

Voor de eerste drie vergelijkingen geldt exact hetzelfde bewijs. De energievergelijking krijgt voor een lichtdeeltje echter de volgende vorm:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = -\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)h(r(s)) = -V(r(s)),$$

omdat $\|\gamma'(\tau)\| = 0$ voor een lichtachtig deeltje. Wanneer we deze vergelijking differentiëren volgt de vierde vergelijking na deling door de radiële snelheid op de punten waar deze niet nul is. Dit geeft op dezelfde manier als bij materiële deeltjes alleen de vierde vergelijking wanneer r niet constant is op een interval.

Hierbij noemen we E en L de behouden energie en het impulsmoment per massaéénheid voor een deeltje met massa en de behouden energie en het impulsmoment voor een lichtachtig deeltje. V is de potentiële energie.

6.4 Passage van de Schwarzschild straal

We gaan nu de gebeurtenis bekijken van een deeltje, dat in een zwart gat valt. In de Algemene Relativiteitstheorie nemen waarnemers gebeurtenissen in het algemeen niet op dezelfde tijd en plaats waar. We zeggen ook wel dat tijd en plaats in deze theorie niet absoluut zijn. Hierdoor is het belangrijk af te spreken, wat de baan is van de waarnemer, voordat we iets kunnen zeggen over hoe hij een bepaalde gebeurtenis waarneemt.

Een deeltje dat de Schwarzschild straal passeert

We willen weten wat er gebeurt, wanneer een deeltje de Schwarzschild straal passeert. Maar voordat we hier iets over kunnen zeggen, moeten we ons eerst afvragen of deze situatie wel plaatsvindt. We parametriseren dit deeltje in zijn eigentijd τ. Een deeltje dat de Schwarzschild straal zal gaan passeren beweegt zich met een snelheid $\frac{dr}{d\tau} < 0$. Wanneer we de Schwarzschild potentiaal $V(r)$ differentiëren dan vinden we:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{R_s}{r^2} - \frac{2L^2}{r^3} + \frac{3R_sL^2}{r^4}.$$

Invullen geeft dat

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV}{dr} \leq 0$$

in een omgeving van de Schwarzschild straal R_s. In deze omgeving wordt de radiële snelheid richting het zwarte gat $-\frac{dr}{d\tau}$ dus steeds groter. Wanneer een deeltje deze omgeving bereikt zal het deeltje in het zwarte gat vallen. Hieruit volgt dat we de situatie kunnen bekijken, waarin een deeltje in zijn eigentijd de Schwarzschild straal passeert. We parametriseren nu zo'n deeltje in zijn eigentijd τ. We kiezen een tijdstip τ_1, zodanig dat $r(\tau_1) > R_s$ en $\frac{dr}{d\tau} \leq -C$ voor een constante $C > 0$ voor alle $\tau \geq \tau_1$. Het deeltje bevindt zich op tijdstip τ_1 op een afstand ϵ van de Schwarzschild straal en zal op een tijdstip τ_2 de Schwarzschild straal passeren. Nu gaan we berekenen hoeveel tijd er verstrijkt tussen deze twee gebeurtenissen in Schwarzschild coördinaten.

Uit de energievergelijking volgt:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{dV}{dr} \text{ met } V(r) = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{R_sL^2}{r^3}.$$

Het is éénvoudig om te zien dat $V(R_s) = 0$ en dat $V(r) \geq 0$ voor $r \geq R_s$, dus $-E \leq \frac{dr}{d\tau} \leq 0$.

Wanneer we nu de vergelijking van lemma 6.2 i) gebruiken dan volgt dat de Schwarzschild tijd Δt die verstrijkt tussen twee tijdstippen τ_1 en τ_2 met $r(\tau_1) = R_s + \epsilon$ en $r(\tau_2) = R_s$ gelijk is aan:

$$\Delta t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{E}{h(r(\tau))} d\tau.$$

Nu kunnen we gebruik maken van $-E \leq \frac{dr}{d\tau} \leq 0$ bij substitutie van τ door r. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{E}{h(r(\tau))} d\tau \geq \int_{R_s+\epsilon}^{R_s} \frac{-1}{h(r)} dr = \int_{R_s}^{R_s+\epsilon} \frac{r}{r - R_s} dr = [1 + R_s \ln(r - R_s)]_{R_s}^{R_s+\epsilon} \\ &= R_s \ln(\epsilon) - \lim_{r \downarrow R_s} (R_s \ln(r - R_s)) = \infty.\end{aligned}$$

In Schwarzschild coördinaten zal het deeltje het zwarte gat dus nooit bereiken. Overigens zal het deeltje in Schwarzschild coördinaten uiteindelijk wel willekeurig dichtbij de Schwarzschild straal komen. Voor dit geval kunnen we bij de substitutie van de eigentijd τ door r gebruiken dat $\frac{dr}{d\tau} \leq -C$ voor een zekere snelheid $C > 0$. Voor een willekeurig kleine afstand ϵ' met $0 \leq \epsilon' \leq \epsilon$ is $\Delta t'$ de Schwarzschild tijd, die verstrijkt tussen twee tijdstippen τ_1 en τ_2' met $r(\tau_1) = R_s + \epsilon$ en $r(\tau_2') = R_s + \epsilon'$. Deze is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\Delta t' &= \int_{\tau_1}^{\tau_2'} \frac{E}{h(r(\tau))} d\tau \leq \int_{R_s+\epsilon}^{R_s+\epsilon'} \frac{-E}{Ch(r)} dr = \frac{E}{C} \int_{R_s+\epsilon'}^{R_s+\epsilon} \frac{r}{r - R_s} dr = \frac{E}{C} [1 + R_s \ln(r - R_s)]_{R_s+\epsilon'}^{R_s+\epsilon} \\
&= \frac{E}{C} (R_s \ln(\epsilon) - R_s \ln(\epsilon')) < \infty.
\end{aligned}$$

Waarnemers in de Schwarzschild ruimte-tijd

Een waarnemer van deze situatie zou zich bijvoorbeeld kunnen bevinden op een constante afstand $r >> R_s$. Zoals eerder genoemd verloopt de eigentijd van de waarnemer dan evenredig met de Schwarzschild tijd. Hieruit volgt dat de waarnemer ook ziet dat het deeltje de Schwarzschild straal nooit zal bereiken. Dit resultaat lijkt op het eerste gezicht vreemd. Een deeltje zal in zijn eigentijd de Schwarzschild straal wel passeren, maar een waarnemer zal dit nooit zien gebeuren.

Referenties

[N] O'Neill, B. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, *Academic Press*, 1983.

[J] Jänich, K. Vector Analysis, *Springer*, 2000.

[C] Carroll, S.M. Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity *Pearson Addison Wesley*, 2004.