Universiteit Leiden
The Netherlands

Semi-Riemannse meetkunde en Robertson-Walker kosmologie

Chang, H.P.

Citation

Chang, H. P. (2007). *Semi-Riemannse meetkunde en Robertson-Walker kosmologie*.

Version:	Not Applicable (or Unknown)
License:	License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository
Downloaded from:	https://hdl.handle.net/1887/3596884

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Semi-Riemannse meetkunde en Robertson-Walker kosmologie

Hilko Chang

met medewerking van Thijs Vorselen

april 2007

Bachelorverslag Wiskunde en Natuurkunde

onder begeleiding van Dr. Martin Lübke en Dr. Yuri Levin

Mathematisch Instituut Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

De algemene relativiteitstheorie is een van de meest revolutionaire theorieën van vorige eeuw. Deze theorie spreekt erg tot de verbeelding door de op het eerste gezicht verbazende verschijnselen die ze voorspelt. Wanneer men snelheid heeft, gaat tijd langzamer en worden afstanden korter. De ruimte is niet meer een leegte waarin zich massa bevind, maar wordt juist vervormd door deze massa. Soms zelfs zoveel dat er gaten in de ruimte zelf ontstaan. Daarnaast beschrijft deze theorie ook de evolutie van het heelal. Duidelijk is dat hierdoor het wereldbeeld van de mens compleet veranderd is.
Het is natuurlijk onmogelijk om over de relativiteitstheorie te spreken, zonder de naam van Albert Einstein te noemen. Toen hij zesentwintig jaar was publiceerde Einstein de speciale relativiteitstheorie in 1905. Deze behandeld onder andere het veranderen van tijd en afstand als gevolg van snelheid en zal in dit verslag niet besproken worden. Tien jaar later verscheen de algemene relativiteitstheorie. Deze breidt de speciale relativiteitstheorie uit door ook zwaartekracht te beschouwen.

Het doel van dit verslag is de lezer met het niveau van in ieder geval een derdejaars wiskunde student bekend te maken met basisbegrippen van de semi-Riemannse meetkunde, om vervolgens met behulp hiervan de algemene relativiteitstheorie te formuleren en enkele natuurkundige consequenties af te leiden. Het is opgebouwd in twee delen. Het eerste beslaat de hoofdstukken één, twee en drie en is geschreven in samenwerking met Thijs Vorselen, met uitzondering van de paragrafen over snijkromming en constante kromming. In dit deel maakt de lezer kennis met semi-Riemannse meetkunde en worden de wiskundige begrippen opgebouwd die noodzakelijk zijn voor de relativiteitstheorie. Dit deel is ook terug te vinden in het bachelorverslag van Thijs Vorselen. Het tweede deel behandelt een toepassing van de relativiteitstheorie. In het verslag van Thijs is te lezen over Schwartschildmeetkunde en zwarte gaten. Het tweede deel van dit verslag bespreekt Robertson-Walker Kosmologie.

De scheiding tussen de twee delen en de kern van de algemene relativiteitstheorie, is de Einstein vergelijking. Dit is een vergelijking tussen twee tensorvelden op een zogenaamde semi-Riemannse variëtiet. Het doel van het eerste deel is onder andere om de betekenis van deze en andere begrippen duidelijk te maken.

Hoofdstuk één begint met het behandelen van eigenschappen van bilineaire vormen op een reële vectorruimte. Een bilineaire vorm blijkt een voorbeeld van een tensor. Vervolgens worden het tensorproduct en tensoren ofwel multilineaire afbeeldingen geïntroduceert. Heeft men eenmaal een verzameling objecten, dan ligt het voor de hand om te kijken naar afbeeldingen daartussen. Een belangrijk type afbeedingen tussen deze tensoren zijn de contracties. Een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm en een contractie zullen uiteindelijk worden gecombineerd tot een zogenaamde metrische contractie.

In het volgende hoofdstuk kijken we naar differentieerbare variëteiten. We definiëren voor elk punt in een variëteit een specifieke reële vectorruimte, de zogenaamde raakruimte. De resultaten uit het voorgaande hoofdstuk, die tot dusver van toepassing waren voor een algemene reële vectorruimte generaliseren we naar zogenaamde 'velden' op de verzameling van raakruimten van een variëteit. Een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm generaliseerd op deze manier tot een 'metrische tensor'. Hiermee breiden we de definitie van differentieerbare variëteit uit naar die van een semi-Riemannse variëteit.

Tensorvelden zijn objecten verbonden aan een differentieerbare variëteit. In het derde hoofdstuk komen verschillende afbeeldingen tussen tensorvelden aan de orde. De belangrijkste is de Levi-Civita connectie. We laten zien dat deze op elke semi-Riemannse variëteit bestaat en uniek bepaald is. Alles dat volgt hangt direct of indirect af van de Levi-Civita connectie. Zo definiëren we de covariante afgeleide en de Riemannse krommingstensor met behulp van de Levi-Civita connectie. We geven enkele eigenschappen van de Riemannse krommingstensor en definiëren hiermee de Ricci- kromming, scalaire kromming en de snijkromming.

Met zoveel manieren om kromming van een variëteit te beschrijven hebben we nu uiteindelijk voldoende middelen in handen om zwaartekracht te beschrijven door middel van kromming. Dit brengt ons bij de algemene relativiteitstheorie en het laatste hoofdstuk. We beschouwen het heelal als een semi-Riemannse variëteit en definiëren de Einstein gravitatie tensor. Dit stelt ons in staat tot het formuleren van de Einstein vergelijking. Voordat we hiermee enkele natuurkundige resultaten afleiden volgt eerst een kort intermezzo over gebogen producten. We definiëren een zogenaamde Robertson-Walker ruimtetijd en gebruiken deze in het vervolg als model van het heelal. Als voorbeeld tonen we van een specifieke ruimte aan dat het een Robertson-Walker ruimtetijd is. Twee speciale singulariteiten die mogelijk kunnen optreden noemen we een oerknal en een eindkrak. We tonen aan dat onder bepaalde voorwaarden deze singulariteiten daadwerkelijk voorkomen. Tot slot zien we onszelf in staat om na deze lange weg enkele uitspraken te doen over niets minder dan de oorsprong en toekomst van het heelal.

Ik bedank Thijs Vorselen voor zijn bijdrage aan het eerste deel van dit verslag, de goede samenwerking en de nuttige discussies die we over dit onderwerp gevoerd hebben. Ook bedank ik Yuri Levin voor zijn goede uitleg van energiedichtheid, energie-impuls en andere natuurkundige begrippen, zijn waardevolle referenties, het beoordelen van dit verslag en het onbeperkt lenen van zijn boek. Tot slot wil ik Martin Lübke zeer veel bedanken voor het verhelderen van alle moeilijke begrippen, zijn wekelijkse geduldige uitleg, het beoordelen van dit verslag en zijn goede intensieve begeleiding van begin tot eind.

H.P.C.
Leiden, april 2007

1 Multilineaire Algebra

1.1 Niet-ontaarde symmetrische bilineaire vormen

Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte en zij $g : V \times V \to \mathbb{R}$ een bilineaire vorm op V. We noemen g symmetrisch als $g(v, w) = g(w, v)$ voor alle $v, w \in V$.

Definitie 1.1. *Een symmetrische bilineaire vorm g heet* niet-ontaard *wanneer voor alle $v \in V$ geldt dat*

$$g(v, w) = 0 \text{ voor alle } w \in V \Leftrightarrow v = 0.$$

We noemen g positief respectievelijk negatief definiet, wanneer $v \neq 0$ impliceert dat $g(v, v) > 0$ respectievelijk $g(v, v) < 0$. De index van g is de maximale dimensie van een deelruimte $W \subset V$, waarvoor $g|_W$ negatief definiet is.

Iedere bilineaire vorm op V kan ten opzichte van een basis $b_1, \ldots, b_n$ gerepresenteerd worden door de matrix G waarbij $G_{ij} = g(b_i, b_j)$. Als g symmetrisch is en niet-ontaard betekent dit dat de matrix G symmetrisch is en dat $\det G \neq 0$. In dit geval heeft G geen eigenwaarde gelijk aan nul. De index van g is het aantal negatieve eigenwaarden van G.

De duale vectorruimte van V noteren we met V^*, de verzameling van bilineaire afbeeldingen $V \times V \to \mathbb{R}$ met $\mathrm{Bil}(V)$ en de verzameling van lineaire afbeeldingen van V naar zichzelf met $\mathrm{End}(V)$.

Propositie 1.2.

i) *$m_g : V \to V^*$, gedefinieerd door $m_g(v)(w) := g(v, w)$ voor alle $v, w \in V$ is een lineair isomorfisme.*

ii) *$g^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $g^*(\nu, \mu) := g(m_g^{-1}(\nu), m_g^{-1}(\mu))$ voor alle $\nu, \mu \in V^*$ is een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm.*

iii) *$\Phi_g : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V)$ gedefinieerd door $\Phi_g(f)(v, w) := g(f(v), w)$ voor alle $f \in \mathrm{End}(V)$ en alle $v, w \in V$ is een lineair isomorfisme.*

   a) *$\Phi_g(f)$ is symmetrisch dan en slechts dan als f zelfgeadjungeerd is.*

   b) *$\Phi_g(f)$ is niet-ontaard dan en slechts dan als f bijectief is.*

Bewijs:

i) Dat g lineair is in het tweede argument geeft dat $m_g(v)$ een lineaire afbeelding is, waaruit volgt dat m_g welgedefinieerd is. Dat m_g lineair is volgt uit het feit dat g lineair is in het eerste argument. De afbeelding m_g is injectief, want $m_g(v) = 0$ impliceert $g(v, w) = 0$ voor alle $w \in V$ en g is niet-ontaard, waaruit volgt dat $v = 0$. Omdat $\dim(V) = \dim(V^*)$ is m_g ook surjectief. De conclusie is dat m_g een lineair isomorfisme is.

ii) g^* is een bilineaire vorm, want g is bilineair en m_g is een lineair isomorfisme. g^* is symmetrisch, want $g^*(\nu, \mu) = g(m_g^{-1}(\nu), m_g^{-1}(\mu)) = g(m_g^{-1}(\mu), m_g^{-1}(\nu)) = g^*(\mu, \nu)$. Wanneer $g^*(\nu, \mu) = 0$ voor alle $\mu \in V^*$, dan is $g(m_g^{-1}(\nu), w) = 0$ voor alle $w \in V$. g is niet-ontaard, dus $m_g^{-1}(\nu) = 0$ met als gevolg dat $\nu = 0$. De conclusie is dat g^* niet-ontaard is.

iii) Φ_g is lineair, omdat g bilineair is. Stel $\Phi_g(f)(v, w) = 0$ voor alle $v, w \in V$ dan geldt $f(v) = 0$ voor alle $v \in V$, omdat g niet-ontaard is. Hieruit volgt dat Φ_g injectief is. Φ_g is ook surjectief, omdat $\dim(\mathrm{Bil}(V)) = \dim(V)^2 = \dim(\mathrm{End}(V))$.

a) $\Phi_g(f)$ is symmetrisch dan en slechts dan als $g(f(v),w) = \Phi_g(f)(v,w) = \Phi_g(f)(w,v) = g(f(w),v) = g(v,f(w))$ voor alle $v,w \in V$. Dat is precies, wanneer f zelfgeadjungeerd is ten opzichte van g.

b) $\Phi_g(f)$ is niet-ontaard, wanneer alleen voor $v=0$ geldt dat $\Phi_g(f)(v,w) = g(f(v),w) = 0$ voor alle $w \in W$. $f(v) = 0$ geldt dan alleen voor $v = 0$, f is injectief en dus bijectief.

Wanneer f bijectief is, dan geldt alleen voor $v = 0$ dat $f(v) = 0$. g is niet-ontaard, waardoor alleen voor $v = 0$ geldt dat $\Phi_g(f)(v,w) = g(f(v),w) = 0$ voor alle $w \in V$. Dus $\Phi_g(f)$ is niet ontaard. $\square$

Definitie 1.3. *Het g-spoor van een biliniare vorm $h \in \mathrm{Bil}(V)$ is gegeven door* $\mathrm{Tr}_g(h) := \mathrm{Tr}(\Phi_g^{-1}(h))$.

Definitie 1.4 (Duale basis)**.** *Zij $\{b_1,\ldots,b_n\}$ een basis van V. Voor $1 \le i \le n$ definiëren we $\beta_i \in V^*$ door $\beta_i(b_j) = \delta_{ij}$. We noemen $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ dan de* duale basis *van $\{b_1,\ldots,b_n\}$.*

Een lineaire afbeelding is uniek bepaald door de beelden van de basisvectoren. Het beeld van de basisvectoren kan vrij gekozen worden. De duale basis bestaat dus voor iedere basis en is uniek.

Lemma 1.5. *Voor alle $v \in V$ geldt $v = \sum_{i=1}^n \beta_i(v) b_i$.*

Bewijs: Omdat $\{b_1,\ldots,b_n\}$ een basis van V is, zijn er reële getallen $c_1,\ldots,c_n$ zodat $v = \sum_{j=1}^n c_j b_j$. Er geldt dus voor $j = 1,\ldots,n$ dat:

$$\beta_j(v) = \beta_j(\sum_{i=1}^n c_i b_i) = \sum_{i=1}^n c_i \beta_j(b_i) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} = c_j.$$

Hieruit volgt dat $v = \sum_{j=1}^n c_j b_j = \sum_{i=1}^n \beta_i(v) b_i$. $\square$

Aangezien V de duale is van V^* en $\{b_1,\ldots,b_n\}$ de duale basis van $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ geldt ook voor alle $\nu \in V^*$, dat $\nu = \sum_{i=1}^n \nu(b_i)\beta_i$.

Definitie 1.6. *Een basis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ van V heet g-orthonormaal als*

$$g(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{-1,1\} & \text{als } i = j. \end{cases}$$

De g-orthonormale basis bestaat voor iedere niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm g. We noteren de duale basis van een g-orthonormale basis als $\{\eta_1,\ldots\eta_n\}$.

Lemma 1.7. *Wanneer $\{e_1,\ldots,e_n\}$ een g-orthonormale basis is van V dan gelden de volgende drie uitspraken:*

i) $\{\varepsilon_1 m_g(e_1),\ldots,\varepsilon_n m_g(e_n)\}$ *is de g^*-orthonormale duale basis van* $\{e_1,\ldots,e_n\}$,

ii) $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(f(e_i),e_i))$ *voor alle* $f \in \mathrm{End}(V)$,

iii) $\mathrm{Tr}_g(h) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i,e_i)$ *voor alle* $h \in \mathrm{Bil}(V)$.

Bewijs:

i) De duale basis van $\{e_1,\ldots,e_n\}$ is $\{\varepsilon_1 m_g(e_1),\ldots\varepsilon_n m_g(e_n)\}$, want

$$\varepsilon_i m_g(e_i)(e_j) = \varepsilon_i g(e_i,e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i^2 & \text{als } i = j \end{array} \right\} = \delta_{ij}.$$

Deze basis is g^*-orthonormaal, omdat

$$g^*(\varepsilon_i m_g(e_i), \varepsilon_j m_g(e_j)) = \varepsilon_i \varepsilon_j g(e_i,e_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ \varepsilon_i \in \{-1,1\} & \text{als } i = j. \end{cases}$$

ii) Zij $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeven. Ten op zichte van de basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wordt f gerepresenteerd door de matrix F met kolommen $f(e_j)$, met andere woorden $F_{ij} = f(e_j)_i$.

$$F = \big(f(e_1)| \quad \ldots \quad |f(e_n)\big) = \begin{pmatrix} f(e_1)_1 & \ldots & f(e_n)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_1)_n & \ldots & f(e_n)_n \end{pmatrix}.$$

Het spoor van f is gelijk aan dat van F. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(e_i)_i = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)_i \varepsilon_i g(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(f(e_i)_i e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\sum_{j=1}^{n} f(e_i)_j e_j, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(f(e_i), e_i). \end{aligned}$$

iii) Voor een biliniaire afbeelding $h \in$ Bil(V) geldt

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_g(h) &= \mathrm{Tr}(\Phi_g^{-1}(h)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\Phi_g^{-1}(h)(e_i), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Phi_g(\Phi_g^{-1}(h))(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i h(e_i, e_i). \end{aligned}$$

□

1.2 Tensoren

Definitie 1.8. *Zijn V, V' reële vectorruimtes, dan is het tensorproduct $V \otimes V'$ een reële vectorruimte voorzien van een bilineaire afbeelding $f : V \times V' \to V \otimes V'$, die voldoet aan de universele eigenschap: voor iedere reële vectorruimte W en iedere bilineaire afbeelding $\gamma : V \times V' \to W$ is er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\gamma} : V \otimes V' \to W$, zodanig dat $\gamma = \tilde{\gamma} \circ f$. Dat wil zeggen dat het volgende diagram commuteert.*

$$\begin{tikzcd} V \times V' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & V \otimes V' \arrow[dl, dashed, "\tilde{\gamma}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Aan gezien het tensorproduct van twee vectorruimten weer een verctorruimte is, kan men het tensorproduct voor meerdere reële vectorruimten $V_1, \ldots, V_m$ definiëren door bovenstaande te herhalen

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_m = (\cdots((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes \cdots) \otimes V_m.$$

Het tensorproduct is associatief, dus de haakjes worden weggelaten. Het meervoudige tensorproduct voldoet aan een vergelijkbare universele eigenschap, alleen zijn de bilineaire afbeeldingen γ en f nu multilineair. De dimensie van de vectorruimte $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ is $\Pi_{i=1}^{m} \dim(V_i)$.

Definitie 1.9. *Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte en r, s positieve gehele getallen. Een tensor A van het type (r, s) is een mulitilineaire afbeelding*

$$A : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

De verzameling V_s^r van tensoren van het type (r, s) is een reële vectorruimte van dimensie n^{r+s}. Daarnaast definiëren we $V_0^0 = \mathbb{R}$.

We zien dat $V_1^0 = V^*$ en $V_2^0 = \mathrm{Bil}(V)$.
We noteren $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s}$ als $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$.

Lemma 1.10. *V_s^r is op een natuurlijke manier isomorf met het tensorproduct $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$.*

Bewijs: Definieer de afbeelding $\gamma_s^r : V^r \times (V^*)^s \to V_s^r$ door

$$\begin{gathered}\gamma_s^r(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)(\zeta_1, \ldots, \zeta_r, z_1, \ldots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdot \ldots \cdot \zeta_r(z_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_s(z_s).\end{gathered}$$

Deze afbeelding is multilineair, dus het volgende diagram commuteert voor een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\gamma}_s^r$.

$$\begin{tikzcd}
V^r \times (V^*)^s \arrow[rr, "f_s^r"] \arrow[dr, "\gamma_s^r"'] & & V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s} \arrow[dl, dashed, "\tilde{\gamma}_s^r"] \\
& V_s^r &
\end{tikzcd}$$

Uit het diagram volgt dat $\tilde{\gamma}_s^r$ gegeven is door

$$\begin{gathered}\tilde{\gamma}_s^r(a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s)(\zeta_1, \ldots, \zeta_r, z_1, \ldots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdot \ldots \cdot \zeta_r(z_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdot \ldots \cdot \alpha_s(z_s).\end{gathered}$$

Zij $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis van V en $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de duale basis. Een basis van $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ is

$$\{b_I \otimes \beta_J : (I, J) \in \{1, \ldots, n\}^{r+s}\},$$

Hierbij zijn I en J multi-indices, $I = (i_1, \ldots, i_r)$ en $J = (j_1, \ldots, j_s)$. Per definitie is $b_I \otimes b_J = b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_s}$. Ook introduceren we de notatie

$$(\beta_I, b_J) = (\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_s}).$$

Dit is een element van $(V^*)^r \times V^s$ waarvoor

$$\tilde{\gamma}_s^r(b_I \otimes \beta_J)(b_{I'}, \beta_{J'}) = \delta_{II'} \cdot \delta_{JJ'},$$

waarbij we voor twee multi-indices $K = (k_1, \ldots, k_n)$ en $K' = (k'_1, \ldots, k'_s)$ van gelijke lengte n definiëren dat $\delta_{KK'} = \delta_{k_1, k'_1} \cdots \delta_{k_n, k'_n}$.

Zij $x \in V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$. Dan is $x = \sum_{I,J} c_{I,J} \cdot b_I \otimes \beta_J$ voor zekere reële coëfficiënten $c_{I,J}$. Omdat $\tilde{\gamma}_s^r$ lineair is, geldt $\tilde{\gamma}_s^r(x) = \sum_{I,J} c_{I,J} \tilde{\gamma}_s^r(b_I \otimes \beta_J)$. Stel $\tilde{\gamma}_s^r(x) = 0$, dan geldt dat $c_{I,J} = \tilde{\gamma}_s^r(x)(\beta_I, b_J) = 0$. Dus $x = 0$ dus $\tilde{\gamma}_s^r$ is injectief. Omdat $\dim(V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}) = \dim(V)^{r+s} = \dim(V_s^r)$ is $\tilde{\gamma}_s^r$ ook surjectief. Hieruit volgt dat V_s^r op een natuurlijke manier isomorf is met $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$. $\square$

Ieder element van $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ is een som van elementen van de vorm $a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s$ met $a_1, \ldots, a_r \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in V^*$. We interpreteren $a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s$ als een tensor op de volgende manier:

$$\begin{gathered}a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s(\zeta_1, \ldots, \zeta_r, z_1, \ldots, z_s) = \\ \zeta_1(a_1) \cdots \zeta_r(a_r) \cdot \alpha_1(z_1) \cdots \alpha_s(z_s)\end{gathered}$$

voor alle $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in V^*$, $z_1, \ldots, z_s \in V$. In het vervolg maken we geen onderscheid meer tussen V_s^r en $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ en noteren beiden als V_s^r.

Lemma 1.11. *Zij V een eindig dimensionale reële vector ruimte, dan is* $\mathrm{End}(V)$ *op een natuurlijke manier isomorf met V_1^1.*

Bewijs: Zij $\alpha \in V^*$, $a, v \in V$. We definieren $\Psi : V \times V^* \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ door $\Psi(a,\alpha)(v) = \alpha(v)a$. Omdat α lineair is, is $\Psi(a,\alpha)$ inderdaad een endomorfisme. Ook is onmiddelijk te zien dat Ψ een bilineaire afbeelding is.

$$\begin{tikzcd}
V \times V^* \arrow[rr, "f_1^1"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & V_1^1 \arrow[dl, dashed, "\tilde{\Psi}"] \\
& \mathrm{End}(V) &
\end{tikzcd}$$

Volgens de universele eigenschap van het tensorproduct bestaat er een unieke lineaire afbeelding $\tilde{\Psi}$ zodanig dat $\Psi = \tilde{\Psi} \circ f_1^1$. We weten dat $f_1^1(a,\alpha) = a \otimes \alpha$, dus $\tilde{\Psi}$ voldoet aan $\tilde{\Psi}(a \otimes \alpha)(v) = \alpha(v)a$.

We willen laten zien dat $\tilde{\Psi}$ een isomorfisme is. Zij $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis van V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de duale basis en $A \in \mathrm{End}(V)$. Er geldt voor alle $v \in V$:

$$\tilde{\Psi}(\sum_{i=1}^{n} Ab_i \otimes \beta_i)(v) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\Psi}(Ab_i \otimes \beta_i)(v) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(v)Ab_i = A(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(v)b_i) = A(v),$$

dus $\tilde{\Psi}$ is surjectief. Omdat de dimensies van V_1^1 en $\mathrm{End}(V)$ gelijk zijn, is $\tilde{\Psi}$ ook injectief. $\square$

1.3 Contractie

Stelling 1.12.

i) *Voor $1 \leq i \leq r$ en $1 \leq j \leq s$ bestaat er een unieke lineaire afbeelding $C_j^i : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1}$, genaamd contractie, zodanig dat voor alle $a_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in V_s^r$ geldt dat:*

$$C_j^i(a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s) = \alpha_j(a_i) \cdot a_1 \otimes \ldots \hat{i} \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \hat{j} \ldots \otimes \alpha_s.$$

In deze uitdrukking geven $\hat{i}$ en $\hat{j}$ aan dat de termen a_i en α_j in het tensorproduct ontbreken.

ii) *Wanneer $\{b_1, \ldots, b_n\}$ een basis is van V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de duale basis van V^* en $A \in V_s^r$ dan geldt voor alle $\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1} \in V^*$, $z_1, \ldots, z_{s-1} \in V$:*

$$C_j^i(A)(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} A(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \beta_k, \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{j-1}, b_k, z_j, \ldots, z_{s-1}).$$

Bewijs:

i) Definieer de volgende multilineaire afbeelding:

$$\begin{array}{rcc}
\widehat{C_j^i} : V^r \times (V^*)^s & \longrightarrow & V^{r-1} \times (V^*)^{s-1} \\
(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) & \longmapsto & \alpha_j(a_i) \cdot (a_1, \ldots \hat{i} \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots \hat{j} \ldots, \alpha_s)
\end{array}$$

De samenstelling van deze afbeelding met de afbeelding f^{r-1}_{s-1} is ook multilineair. Volgens de universele eigenschap van V^r_s bestaat er een unieke lineaire afbeelding $C^i_j : V^r_s \to V^{r-1}_{s-1}$ zodanig dat $C^i_j \circ f^r_s$.

$$\begin{tikzcd}
V^r \times (V^*)^s \arrow[r, "f^r_s"] \arrow[d, "\widehat{C^i_j}"'] & V^r_s \arrow[d, dashed, "C^i_j"'] \\
V^{r-1} \times (V^*)^{s-1} \arrow[r, "f^{r-1}_{s-1}"] & V^{r-1}_{s-1}
\end{tikzcd}$$

Hieruit volgt dat C^i_j de unieke lineaire afbeelding is die voldoet aan

$$C^i_j(a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s) = \alpha_j(a_i) \cdot a_1 \otimes \ldots \hat{i} \ldots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \hat{j} \ldots \otimes \alpha_s.$$

ii) Uit lemma 1.10 volgt, dat iedere $A \in V^r_s$ een lineaire combinatie is van basisvectoren van de vorm $b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \ldots \otimes \beta_{j_s}$ met $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$, waarvoor geldt:

$$\begin{gathered}
C^i_j(b_{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_s})(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) = \\
\beta_{j_j}(b_{i_i}) \cdot b_{i_1} \otimes \cdots \hat{i_i} \cdots \otimes b_{i_r} \otimes \beta_{j_1} \otimes \cdots \hat{j_j} \cdots \otimes \beta_{j_s}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{s-1}) = \\
\sum_{k=1}^n b_{i_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_s}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, \beta_k, \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}, z_1, \ldots, z_{j-1}, b_k, z_j, \ldots, z_{s-1}).
\end{gathered}$$

Aangezien C^i_j lineair is, is het lemma hiermee bewezen. □

Lemma 1.13. *Zij V een eindig dimensionale reële vector ruimte en zij $\tilde{\Psi}$ het natuurlijke isomorfisme van* $\mathrm{End}(V)$ *naar V^1_1, zoals gegeven in Lemma 1.11, dan is* $\mathrm{Tr} = C^1_1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}$.

Bewijs: Zij $A \in \mathrm{End}(V)$. Uit het bewijs van Lemma 1.11 weten we dat $\tilde{\Psi}^{-1}(A) = \sum_{i=1}^n Ab_i \otimes \beta_i$, waaruit volgt dat

$$C^1_1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}(A) = C^1_1(\sum_{i=1}^n Ab_i \otimes \beta_i) = \sum_{i=1}^n C^1_1(Ab_i \otimes \beta_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i(Ab_i) = \mathrm{Tr}(A).$$ □

1.4 Metrische Contractie

Stelling 1.14. *Zij g een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm, $1 \le i \le r$ en $1 \le j \le s$.*

i) Er bestaan unieke lineaire isomorfismen

$$\downarrow^i_j : V^r_s \longrightarrow V^{r-1}_{s+1} \qquad \uparrow^i_j : V^r_s \longrightarrow V^{r+1}_{s-1}$$

zodanig dat voor alle $a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \in V^r_s$:

$$\begin{aligned}
\downarrow^i_j (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) &= a_1 \otimes \cdots \hat{i} \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \\
&\quad \alpha_{j-1} \otimes m_g(a_i) \otimes \alpha_j \otimes \cdots \otimes \alpha_s \qquad (1) \\
\uparrow^i_j (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) &= a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes m_g^{-1}(\alpha_j) \otimes a_i \otimes \cdots \otimes \\
&\quad a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \hat{j} \cdots \otimes \alpha_s \qquad (2)
\end{aligned}$$

ii) Zij $A \in V^r_s$. Dan

$$\begin{aligned}\downarrow^i_j \circ A(z_1, \ldots, z_{s+1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{r-1}) \quad &= \quad A(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_{s+1}, \\ &\qquad \zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, m_g(z_j), \zeta_i, \ldots, \zeta_{r-1}) \qquad (3)\end{aligned}$$

Bewijs:

i) Zij $(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in V^r \times (V^*)^s$. We definiëren $\widehat{\downarrow^i_j} : V^r \times (V^*)^s \longrightarrow V^{r-1} \times (V^*)^{s+1}$ door

$$\widehat{\downarrow^i_j}(a_1, \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_s) =$$
$$(a_1, \ldots \hat{i} \ldots, a_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, m_g(a_i), \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_s).$$

Het is duidelijk dat $\widehat{\downarrow^i_j}$ goed gedefinieerd is. Uit de lineariteit van m_g volgt dat $\widehat{\downarrow^i_j}$ een multilineaire afbeelding is.

$$\begin{tikzcd} V^r \times (V^*)^s \arrow[r, "f^r_s"] \arrow[d, "\widehat{\downarrow^i_j}"'] & V^r_s \arrow[d, dashed, "\downarrow^i_j"'] \\ V^{r-1} \times (V^*)^{s+1} \arrow[r, "f^{r-1}_{s+1}"] & V^{r-1}_{s+1} \end{tikzcd}$$

Dus is $f^{r-1}_{s+1} \circ \widehat{\downarrow^i_j}$ een multilineaire afbeelding. Volgens de universele eigenschap van het tensorproduct bestaat er een unieke lineaire afbeelding $\downarrow^i_j$ zodanig dat $f^{r-1}_{s+1} \circ \widehat{\downarrow^i_j} = \downarrow^i_j \circ f^r_s$. Hieruit volgt dat $\downarrow^i_j$ voldoet aan vergelijking (1).

Een basis van V^{r-1}_{s+1} is:

$$\{b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{l_{s-1}} : k_1, \ldots, k_{r-1}, l_1, \ldots, l_{s+1} \in \{1, \ldots, n\}.$$

Voor een willekeurig basiselement geldt:

$$b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{l_{s+1}} =$$
$$\downarrow^i_j (b_{k_1} \otimes \cdots \otimes b_{k_{i-1}} \otimes m_g^{-1}(\beta_{l_j}) \otimes b_{k_i} \otimes \cdots \otimes b_{k_{r-1}} \otimes \beta_{l_1} \otimes \cdots \hat{l_j} \cdots \otimes \beta_{l_{s+1}}).$$

Nu weten we dat de basiselementen van V^{r-1}_{s+1} in het beeld van de afbeelding $\downarrow^i_j$ zitten. Dit en de lineariteit van $\downarrow^i_j$ geeft dat deze afbeelding surjectief is. Omdat de dimensies van V^r_s en V^{r-1}_{s+1} gelijk zijn, kunnen we nu concluderen dat $\downarrow^i_j$ een isomorfisme is.

Het bewijs voor $\uparrow^i_j$ is soortgelijk.

ii) Het resultaat volgt direct na uitschrijven en gebruiken dat $m_g(a_i)(z_j) = g(a_i, z_j) = g(z_j, a_i) = m_g(z_j)(a_i)$. $\square$

Definitie 1.15. *Zij g een niet-ontaarde symmetrische bilineaire vorm. We definieren voor $1 \leq i, i' \leq r$, $i \neq i'$ en $1 \leq j, j' \leq s$, $j \neq j'$ de metrische contracties*

$$C^{ii'}_g : V^r_s \longrightarrow V^{r-2}_s \qquad \text{en} \qquad C^g_{jj'} : V^r_s \longrightarrow V^r_{s-2} \qquad \text{als volgt :}$$

$$C^{ii'}_g := \left\{ \begin{array}{ll} C^i_j \circ \downarrow^{i'}_j & \text{als } i < i' \\ C^{i'i}_g & \text{als } i > i' \end{array} \right\} \qquad C^g_{jj'} := \left\{ \begin{array}{ll} C^i_j \circ \uparrow^i_{j'} & \text{als } j < j' \\ C^g_{j'j} & \text{als } j > j' \end{array} \right\}$$

Lemma 1.16.

i) De definitie van $C_g^{ii'}$ is onafhankelijk van j en de definitie van $C^g_{jj'}$ is onafhankelijk van i.

ii) Het volgende diagram is commutatief:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Bil}(V) = V_2^0 \arrow[r, "\uparrow_1^1"] & V_1^1 \arrow[r, "C_1^1"] \arrow[d, "\tilde{\Psi}"] & V_0^0 = \mathbb{R} \\
& \mathrm{End}(V) \arrow[ul, "\Phi_g"] \arrow[ur, "\mathrm{Tr}"'] &
\end{tikzcd}$$

iii) $\mathrm{Tr}_g = C^g_{11}$.

Bewijs:

i) We kiezen j willekeurig en schrijven de definitie van $C_g^{ii'}$ uit.

$$C^i_j \circ \downarrow^{i'}_j (a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) =$$
$$C^i_j(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i'-1} \otimes a_{i'+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{j-1} \otimes m_g(a_{i'}) \otimes \alpha_j \otimes \cdots \otimes \alpha_s) =$$
$$m_g(a_{i'})(a_i) \cdot a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{i'-1} \otimes a_{i'+1} \otimes \cdots \otimes a_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s$$

We zien dat de laatste uitdrukking niet van de keuze van j afhangt. Het bewijs voor $C^g_{jj'}$ gaat hetzelfde.

ii) Het is voldoende te laten zien dat:

- $\mathrm{Tr} = C_1^1 \circ \tilde{\Psi}^{-1}$
- $\tilde{\Psi}^{-1} = \uparrow_1^1 \circ \Phi_g$

De eerste van deze twee is reeds bewezen in lemma 1.13. Zij $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthonormale basis, zij $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de duale basis, dan geldt voor iedere $v, w \in V$ en $A \in \mathrm{End}(V)$:

$$\Phi_g(A)(v,w) = g(Av,w) = g(A(\sum_{i=1}^n \eta_i(v)e_i), \sum_{j=1}^n \eta_j(w)e_j) = (\sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j)\eta_j \otimes \eta_i)(w,v).$$

Wanneer we hier vervolgens gebruik van maken en $\uparrow_1^1 \circ \Phi_g(A)$ uitwerken dan volgt:

$$\begin{aligned}
\uparrow_1^1 \circ \Phi_g(A) &= \uparrow_1^1 (\sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j)\eta_j \otimes \eta_i = \sum_{i,j}^n g(Ae_i, e_j) \uparrow_1^1 (\eta_i \otimes \eta_j) \\
&= \sum_{i,j}^n \varepsilon_j g(Ae_i, e_j) e_j \otimes \eta_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_j(Ae_i) e_j \otimes \eta_i \\
&= \sum_{i=1}^n Ae_i \otimes \eta_i = \tilde{\Psi}^{-1}(A).
\end{aligned}$$

iii) Zoals gedefinieerd in definitie 1.3 geldt $\mathrm{Tr}_g = \mathrm{Tr} \circ \Phi_g^{-1}$. Uit de commutativiteit van het diagram in deel ii) van dit lemma volgt nu dat $\mathrm{Tr} \circ \Phi_g^{-1} = C_1^1 \circ \uparrow_{=}^{1} C^g_{11}$. □

2 Semi-Riemannse Variëteiten

2.1 Raakruimte

We geven hieronder twee definities van een raakruimte en we zullen vervolgens laten zien dat deze overeenkomen.

Definitie 2.1. *Zij M een differentieerbare variëteit en $p \in M$. $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f$ is differentieerbaar$\}$ is de reële algebra van differentieerbare functies op M. Een raakvector van M in p is een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $\tilde{v} : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de productregel:*

$$\tilde{v}(fg) = \tilde{v}(f)g(p) + f(p)\tilde{v}(g) \qquad \text{voor alle}\, f, g \in \mathfrak{F}(M).$$

De verzameling raakvectoren van M in p noemen we de raakruimte $\widetilde{T}_pM$ van M in p.

Definitie 2.2. *De verzameling van kiemen rond p duiden we aan met de reëele algebra $\mathcal{E}_p(M)$. Hierbij is een kiem een equivalentieklasse van differentieerbare functies op open omgevingen om p in M. Twee differentieerbare functies, elk gedefinieerd op een open omgeving, zijn equivalent, wanneer ze gelijk zijn op een open omgeving om p. We noteren een kiem als $[f,\mathcal{U}]$, waarbij de representant $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd is op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. Een raakvector van M in p is een $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de productregel:*

$$v([f,\mathcal{U}][g,\mathcal{V}]) = v([f,\mathcal{U}])g(p) + f(p)v([g,\mathcal{V}]) \qquad \text{voor alle}\, [f,\mathcal{U}], [g,\mathcal{V}] \in \mathcal{E}_p(M).$$

De verzameling raakvectoren van M in p noemen we de raakruimte $T_p^{alg}M$ van M in p.

Lemma 2.3. *Voor iedere open omgeving $\mathcal{U}$ om p bestaat er een differentieerbare functie f op M, genaamd de bultfunctie, die de volgende drie eigenschappen heeft:*

i) $0 \leqslant f \leqslant 1$ *op* M,

ii) $f = 1$ *op een open omgeving van* p,

iii) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ *met* $\operatorname{supp}(f)$ *de afsluiting van de verzameling punten* $p \in M$ *met* $f(p) \neq 0$.

Zie [N][1] hoofdstuk 1 lemma 8 voor een bewijs.

Lemma 2.4. *Zij $\tilde{v}$ een raakvector in $\widetilde{T}_pM$. Als $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ gelijk zijn op een open omgeving om p dan geldt $\tilde{v}(f) = \tilde{v}(g)$.*

Zie [N] hoofdstuk 1 lemma 11 voor een bewijs.

Stelling 2.5. *Er is een natuurlijk isomorfisme tussen de raakruimtes $T_p^{alg}M$ en $\widetilde{T}_pM$.*

Bewijs: Zij $\pi : \mathfrak{F}(M) \to \mathcal{E}_p(M)$ gegeven door $f \mapsto [f, M]$. Dit is een $\mathbb{R}$-algebra homomorfisme. Definieer nu

$$\begin{array}{rcl} \psi : T_p^{alg}M & \longrightarrow & \widetilde{T}_pM \\ v & \longmapsto & v \circ \pi. \end{array}$$

We kunnen een kiem $\pi(f)$ evalueren in p door $\pi(f)(p) = f(p)$. Dit hangt niet af van de keuze van een representant f, omdat representanten overeenkomen op een open omgeving om p. ψ is goed gedefinieerd, want de productregel blijft behouden:

$$\psi(v)(fg) = v \circ \pi(fg) = v(\pi(f)\pi(g)) = \psi(v)(f)g(p) + f(p)\psi(v)(g).$$

ψ is een lineaire afbeelding, want voor $v, v' \in T_p^{alg}M$ en $r \in \mathbb{R}$ geldt:

[1] zie de referenties

$$\psi(rv) = (rv) \circ \pi = r(v \circ \pi) = r\psi(v),$$
$$\psi(v + v') = (v + v') \circ \pi = v \circ \pi + v' \circ \pi = \psi(v) + \psi(v').$$

Zij $[f, \mathcal{V}]$ een kiem. Neem de representant f en vermenigvuldig deze met een bultfunctie waarvan het support bevat is in $\mathcal{V}$. Het product is differentieerbaar op heel M. Dus bestaat er een functie $g : M \to \mathbb{R}$ met $[g, M] = [f, \mathcal{V}]$. Hieruit volgt dat de quotientafbeelding π surjectief is.

ψ is injectief: Stel $\psi(v) = 0$. Dan is $v \circ \pi(f) = v(\pi(f)) = 0$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$. Omdat π surjectief is, geldt $v([g,\mathcal{U}]) = 0$ voor alle $[g,\mathcal{U}] \in \mathcal{E}_p(M)$, dus $v = 0$.

ψ is surjectief: Zij $\tilde{v} \in \widetilde{T}_pM$ gegeven. Definieer vervolgens v door $v([g,\mathcal{U}]) = \tilde{v}(f)$, waarbij $f \in \mathfrak{F}(M)$ met $\pi(f) = [g,\mathcal{U}]$. Zo'n f bestaat altijd omdat π surjectief is. Uit lemma 2.4 volgt dat $v([f, M])$ onafhankelijk is van de gekozen representant. Dus $v \in T_p^{alg}M$, want:

$$v(a[f, M] + b[g, M]) = \tilde{v}(af + bg) = \tilde{v}(af) + \tilde{v}(bg) = av([f, M]) + bv([g, M]),$$
$$v([f, M][g, M]) = \tilde{v}(fg) = f(p)\tilde{v}(g) + \tilde{v}(f)g(p) = f(p)v([g, M]) + v([f, M])g(p).$$

We concluderen dat $T_p^{alg}M$ en $\widetilde{T}_pM$ isomorf zijn. □

Wanneer we het in het vervolg over de raakruimte hebben, bedoelen we de raakruimte als in definitie 2.1. Deze noteren we vanaf nu als T_pM.

2.2 Vectorvelden

Zij M een n-dimensionale variëteit.

Definitie 2.6. *Een vectorveld V is een afbeelding, die aan ieder punt $p \in M$ een raakvector $V_p \in T_pM$ toekent. Voor $f \in \mathfrak{F}(M)$ is $Vf : M \to \mathbb{R}$ de afbeelding gegeven door $Vf(p) = V_p(f)$ voor alle $p \in M$. Een vectorveld V heet differentieerbaar als $Vf \in \mathfrak{F}(M)$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$, De verzameling differentieerbare vectorvelden $\mathfrak{X}(M)$ is een reële vectorruimte en een module over $\mathfrak{F}(M)$. Als we het in het vervolg over vectorvelden hebben, bedoelen we differentiëerbare vectorvelden.*

Zij $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U} \subset M$. Voor $1 \leq i \leq n$ is

$$\partial_i|_p f = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))$$

waarbij $u^1, \ldots, u^n$ de standaard coördinaten van $\mathbb{R}^n$ zijn. De verzameling $\{\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p\}$ is een basis van T_pM. De duale basis van $\{\partial_1|p, \ldots, \partial_n|p\}$ is $\{dx_p^1, \ldots, dx_p^n\}$,

Voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ is $\partial_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ het vectorveld, dat $p \in \mathcal{U}$ naar $\partial_i|_p$ stuurt. Dit vectorveld is differentieerbaar, want $\partial_i f$ is differentieerbaar voor iedere $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$.

Een vector $v \in T_pM$ werkt op de coördinaatfucties x^i door $v(x^i) = dx^i(v)$. De set $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ is in elk punt van $\mathcal{U}$ de duale basis van $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$, dus $v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i|_p$ volgens lemma 1.5. Hieruit volgt dat ieder vectorveld V lokaal ten opzichte van ξ van de vorm $V = \sum_{i=1}^n V^i\partial_i$ met $V^i = Vx^i$ is.

Definitie 2.7. *Het Lie-haakje is een $\mathbb{R}$-bilineaire afbeelding $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)$ voor alle $f \in \mathfrak{F}(M)$. Deze heeft voor alle $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ de volgende twee eigenschappen:*

i) $[V, W] = -[V, W]$

ii) $[X, [V, W]] + [V, [W, X]] + [W, [X, V] = 0$

Uit de definitie van het Lie-haakje is af te leiden dat

$$[fV, gW] = fg[V, W] + f(Vg)W - g(Wf)V$$

voor $f, g \in \mathfrak{F}(M), V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

2.3 Tensorvelden

Zij M een differentieerbare variëteit. Een differentieerbare 1-vorm θ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding $\theta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$.

Definitie 2.8. *$\mathfrak{X}^*(M)$ is de verzameling van differentiëerbare 1-vormen. Een tensorveld A van type (r, s) op een variëteit M is een $\mathfrak{F}(M)$-multilineaire afbeelding:*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M).$$

De verzameling $\mathfrak{T}^r_s(M)$ van tensorvelden van type (r, s) is een module over $\mathfrak{F}(M)$. Daarnaast definiëren we $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Uit deze definitie blijkt dat een 1-vorm een tensorveld is van type (0,1). Dus $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$. We kunnen een vectorveld $X \in \mathfrak{X}(M)$ opvatten als een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding $X : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{F}(M)$ door $\theta \mapsto \theta(X)$ voor alle 1-vormen $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Op deze manier is een vectorveld dus een tensorveld van type (1,0). Dus $\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$.

Definitie 2.9. *De raakafbeelding van een functie $f \in \mathfrak{F}(M)$ in het punt $p \in M$ is de $\mathbb{R}$-lineaire afbeelding $df|_p : T_pM \to T_p\mathbb{R}$ gegeven door $df|_p(v) = v(f)$ voor alle $v \in T_pM$. We identificeren $T_p\mathbb{R}$ met $\mathbb{R}$. Op deze manier kunnen we $df|_p$ interpreteren als een duale raakvector in T^*_pM. De differentiaal van $f \in \mathfrak{F}(M)$ is de 1-vorm df die in ieder punt gelijk is aan de raakafbeelding van f, dat wil zeggen $df(V) = V(f)$ voor alle $V \in \mathfrak{X}(M)$.*

We zien dat $dx^i(\partial_j) = \partial_j(x^i) = \delta_{ij}$, dus in elk punt van $\mathcal{U}$ is $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ de duale basis van $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

We willen onze resultaten voor tensoren generaliseren naar tensorvelden. Daarvoor gebruiken we de volgende stelling.

Stelling 2.10. *Zij $p \in M$, $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Wanneer $\theta_1, \dots, \theta_r, \theta'_1, \dots, \theta'_s \in \mathfrak{X}^*(M)$ voldoen aan $\theta_i(p) = \theta'_i(p)$ voor $1 \leq i \leq r$ en $X_1, \dots, X_s$, $X'_1, \dots X'_s \in \mathfrak{X}(M)$ voldoen aan $X_i(p) = X'_i(p)$ voor $1 \leq i \leq s$, dan geldt:*

$$A(\theta_1, \dots, \theta_r, X_1, \dots, X_s)(p) = A(\theta'_1, \dots, \theta'_s, X'_1, \dots X'_s)(p).$$

Zie [N] hoofdstuk 2 propositie 2 voor een bewijs. Uit dit lemma volgt dat een tensorveld A van type (r, s) in elk punt $p \in M$ aanleiding geeft tot een tensor

$$A_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}.$$

Samenvattend: als $p \in M$ en $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ dan $A_p \in (T_pM)^r_s$.

Definitie 2.11. *Zij $A \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. We definiëren de contractie C^i_j voor tensorvelden door op ieder punt $p \in M$ de contractie te nemen van de tensor A_p van het tensorveld A in het punt $p \in M$.*

Lemma 2.12. *De contractie C^i_j is een $\mathfrak{F}(M)$-lineaire afbeelding van $\mathfrak{T}^i_j$ naar $\mathfrak{T}^{i-1}_{j-1}$ en deze wordt lokaal ten opzichte van een kaart $(x^1, \dots, x^n)$ gegeven door*

$$C^i_j(A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{k=1}^{n} A(\theta^1, \dots, dx^k, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}, \dots, X^{s-1}).$$

Bewijs: Op ieder punt in de kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ is $dx^1, \ldots, dx^n$ de duale basis van $\partial_1, \ldots, \partial_n$, dus volgt uit propositie 1.12 ii) dat op ieder punt in de kaart aan de te bewijzen vergelijking wordt voldaan. $\square$

Definitie 2.13. *We definieren $\downarrow^i_j$ en $\uparrow^i_j$ voor tensorvelden puntsgewijs door op ieder punt $p \in M$ de afbeelding $\downarrow^i_j$ respectievelijk $\uparrow^i_j$ toe te passen op de tensor A_p van een tensorveld A in het punt $p \in M$.*

Lemma 2.14. *De afbeelding $\downarrow^i_j$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isormorfisme van $\mathfrak{T}^r_s$ naar $\mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}$ en $\uparrow^i_j$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isomorfisme van $\mathfrak{T}^r_s$ naar $\mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}$.*

Bewijs: Na 1.14 is het voldoende te laten zien dat $\downarrow^i_j$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair is, dat wil zeggen $\downarrow^i_j (fA) = f \downarrow^i_j (A)$. Dit is triviaal. $\square$

Definitie 2.15. *We definiëren de metrische contracties*

$$C^{ii'}_g : \mathfrak{T}^r_s \longrightarrow \mathfrak{T}^{r-2}_s \quad \text{en} \quad C^g_{jj'} : \mathfrak{T}^r_s \longrightarrow \mathfrak{T}^r_{s-2}$$

voor tensorvelden het zelfde als in definitie 1.15. Nu echter met C^i_j, $\downarrow^i_j$ en $\uparrow^i_j$ als in definitie 2.11 resp. 2.13. Uit lemma's 2.12 en 2.14 volgt dat $C^{ii'}_g$ en $C^g_{jj'}$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair zijn.

2.4 Semi-Riemannse Variëteiten

Definitie 2.16. *Een* metrische tensor g *is een symmetrisch niet-ontaard tensorveld van type $(0, 2)$ met constante index. Dat wil zeggen dat de index van g_p gelijk is voor alle $p \in M$. We noteren voor $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $v, w \in T_pM$ in plaats van $g(V, W)$ en $g_p(v, w)$ ook wel $\langle V, W\rangle$ respectievelijk $\langle v, w\rangle$. Voor vectorvelden $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ schrijven we $V \perp W$ als $\langle V, W\rangle = 0$.*

Zij $(x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$, dan definiëren we de componenten g_{ij} van de metrische tensor als $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j\rangle$ voor $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Deze componenten zijn differentieerbare functies in $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$. Op ieder punt $p \in M$ is de matrix $(g_{ij}(p))$ inverteerbaar, omdat g niet-ontaard is. De inverse matrix van $(g_{ij}(p))$ noteren we met $(g^{ij}(p))$. Deze matrices zijn symmetrisch aangezien g symmetrisch is.

Definitie 2.17. *Een* Semi-Riemannse variëteit (M, g) *is een differentieerbare variëteit M voorzien van een metrische tensor g.*

Als de index van g gelijk is aan nul noemen we (M, g) een *Riemannse* variëteit. Als de index van g gelijk is aan één en de dimensie van M groter is dan één, noemen we (M, g) een *Lorentz* variëteit.

Een voorbeeld van een semi-Riemannse variëteit van dimensie n en index ν is $(\mathbb{R}^n, g)$. Vergeten we de metrische tensor, dan is dit de differentieerbare variëteit $\mathbb{R}^n$. Nadat we $T_p\mathbb{R}^n$ geïdentificeerd hebben met $\mathbb{R}^n$ (dat wil zeggen $\partial_i = e_i$) kunnen we vectorvelden V en W uitdrukken als $V = \sum_{i=1}^n V^i e_i$ en $W = \sum_{i=1}^n W^i e_i$. De metrische tensor g is gedefinieerd door

$$g(V, W) = -\sum_{i=1}^{\nu} V^i W^i + \sum_{i=\nu+1}^{n} V^i W^i.$$

Deze semi-Riemannse variëteit wordt aangeduid met $\mathbb{R}^n_\nu$.

Voor Semi-Riemannse variëteiten wordt vaak in plaats van de metrische tensor het lijnelement gegeven:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j.$$

Differentieerbare variëteiten hebben een differentieerbare structuur, dat wil zeggen een maximale differentieerbare atlas. De afbeeldingen die deze structuur bewaren zijn diffeomorfismen. Semi-Riemannse variëteiten hebben een extra structuur, namelijk de metrische tensor. Een afbeelding tussen twee semi-Riemanse variëteiten die de structuur behoud zal dus in ieder geval een diffeomorfisme zijn.

Zij (M, h) en (N, g) twee semi-Riemannse variëteiten en zij $f : M \to N$ een diffeomorfisme. Deze afbeelding induceert voor elk punt $p \in M$ een lineair isomorfisme df_p tussen de raakruimten T_pM en $T_{f(p)}N$. Op deze manier verkrijgen we het $\mathfrak{F}(M)$-lineaire isomorfisme $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$. Met deze raakafbeelding df kunnen we de metrische tensor g van N terugtrekken naar M. Dit levert een symmetrische niet-ontaard tensorveld f_*g op M, genaamd de pullback, op de volgende manier

$$f_*g(V, W) = g(df(V), df(W)) \qquad \text{voor alle } V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

De pullback f_*g is dus een metrische tensor op M. Als $f_*g = h$ noemen we f een *isometrie.*

Lemma 2.18. *Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit. De afbeelding $m_g : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ gedefinieerd door $m_g(V)(X) = \langle V, X\rangle$ is een $\mathfrak{F}(M)$-lineair isomorfisme.*

Bewijs: Uit stelling 1.2 *i)* volgt dat m_g een bijectieve afbeelding is van niet-differentieerbare vectorvelden naar niet differentieerbare 1-vormen. Er moet slechts bewezen worden dat voor een differentieerbaar vectorveld V de 1-vorm $m_g(V)$ differentieerbaar is en dat voor iedere differentieerbare 1-vorm θ het vectorveld $m_g^{-1}(\theta)$ differentieerbaar is. $m_g(V)$ is differentieerbaar omdat g $\mathfrak{F}(M)$-bilineair is. Het is nu voldoende te laten zien dat $m_g^{-1}(\theta)$ lokaal differentieerbaar is. Lokaal geldt ten opzichte van een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ dat $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx^i$ met θ_i differentieerbaar. Hieruit volgt dat $m_g^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \theta_i \partial_i$ differentieerbaar is. □

2.4.1 Tijd-oriëntatie

Definitie 2.19. *Een raakvector v aan een semi-Riemannse varieteit heet*

ruimte-achtig	*als* $\langle v, v\rangle > 0$	*of* $v = 0$.
nul	*als* $\langle v, v\rangle = 0$	*en* $v \neq 0$.
tijd-achtig	*als* $\langle v, v\rangle < 0$.	

Zij M een Lorentz variëteit en $p \in M$. Zij $\mathcal{T}$ de verzameling van alle tijdachtige raakvectoren in $T_p(M)$ en zij $u \in \mathcal{T}$ een tijdachtige raakvector. De verzameling $\mathcal{T}$ is de vereniging van precies twee tijdkegels. De tijdkegel die de vector u bevat is

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle < 0\}.$$

De tegenoverliggende tijdkegel is

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v\rangle > 0\}.$$

De keuze van u is volstrekt willekeurig. Twee vectoren in dezelfde tijdkegel definiëren namelijk dezelfde tijdkegel. Met andere woorden, voor twee tijdachtige vectoren u en v geldt

$$v \in C(u) \Leftrightarrow u \in C(v) \Leftrightarrow C(u) = C(v).$$

De twee tijdkegels zijn vanuit $T_p(M)$ gezien, niet te onderscheiden. Door een keuze te maken voor één van de twee kegels geeft men $T_p(M)$ een *tijd-oriëntatie*. De gekozen kegel heet de *toekomst*, tijdachtige vectoren in de gekozen kegel noemt men *toekomstwijzend.*

Definitie 2.20. *Zij τ een afbeelding op M die aan ieder punt $p \in M$ een tijdkegel τ_p in $T_p(M)$ toekent. De afbeelding τ is een* tijd-oriëntatie *op M als voor iedere $p \in M$ er een open omgeving $\mathcal{U}$ van p is en een differentieerbaar vectorveld V op $\mathcal{U}$ zodanig dat $V_q \in \tau_q$ voor alle $q \in \mathcal{U}$.*

Is het mogelijk een tijd-oriëntatie te geven op M, dan heet M *tijd-oriënteerbaar.* Door vervolgens daadwerkelijk een tijd-oriëntatie te kiezen maakt men M *tijd-georiënteerd.* Vectoren in de gekozen oriëntatie heten *toekomstwijzend.* Er is geen verband tussen oriënteerbaarheid en tijd-oriënteerbaarheid.

2.5 Framevelden

Zij (M, g) een Semi-Riemannse variëteit. Voor elk punt $p \in M$ is er een orthonormale basis van T_pM.

Definitie 2.21. *Een orthonormale basis van T_pM wordt een* frame *genoemd. Laat $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ vectorvelden zijn. Als voor alle $p \in M$ de verzameling $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ een frame is, noemen we $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een* frameveld *van M.*

In het algemeen bestaat er niet altijd een frameveld van M. We zullen namelijk laten zien dat er op een variëteit die niet oriënteerbaar is geen frameveld kan bestaan. Daarentegen is het altijd wel mogelijk om rond elk punt van M een lokaal frameveld te vinden. Dat wil zeggen voor elk punt van M bestaat er een open omgeving $\mathcal{U}$ om dit punt en een set vectorvelden $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ waarvoor $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ een frame is voor alle $p \in \mathcal{U}$.

Lemma 2.22. *Als er een frameveld van M bestaat, dan is M oriënteerbaar.*

Bewijs Zij $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een frameveld van M. We laten zien dat er een differentieerbare n-vorm $\omega \in \Omega(M)$ is waarvoor $\omega(p) \neq 0$ voor alle $p \in M$, dit betekent dat M oriënteerbaar is. Neem ω gegeven door $\omega(p) = \omega_p$ waarbij ω_p de afbeelding van $T_pM^n \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} m_g(E_1(p))(v_1) & \ldots & m_g(E_1(p))(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_g(E_n(p))(v_1) & \ldots & m_g(E_n(p))(v_n) \end{pmatrix}.$$

De determinant is een multilineaire afbeelding en $m_g(E_i(p))$ is een lineaire afbeelding, dus ω_p is multilineair. Uit het feit dat de determinant alterenerend is in zijn argumenten, volgt dat ω_p alterenerend is. Hieruit volgt dat ω een n-vorm is. Omdat $m_g(E_i)$ differentieerbaar is, is ω dat ook. Aangezien $\{m_g(E_1(p)), \ldots, m_g(E_n(p))\}$ een basis is van T_pM^* is $\omega_p \neq 0$. De conclusie is dat M oriënteerbaar is. □

Nu kunnen we eenvoudig een voorbeeld geven van een variëteit waarin geen globaal frameveld bestaat. We weten namelijk dat er niet oriënteerbare variëteiten zijn, zoals de Möbius band.

Stelling 2.23. *Voor alle $p \in M$ bestaat er een lokaal frameveld op een open omgeving $\mathcal{U}$ van p.*

Bewijs: Merk op dat uit de definitie volgt dat als $\{E_1, \ldots, E_n\}$ een frameveld van M is, dan is de dimensie van M gelijk aan n. Zij $p \in M$. Er is een orthonormale basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ van T_pM. Neem $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ met $X_i(p) = e_i$ voor $i = 1, \ldots, n$. Dit kan volgens lemma 3.5. $\langle X_1, X_1 \rangle \in \mathfrak{F}(M)$, dus er is een open omgeving $\mathcal{U}_1$ om p met $|\langle X_1(p), X_1(p) \rangle| > 0$ en differentieerbaar. Hieruit volgt dat E_1 gedefinieerd door

$$E_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_1)$$

met $\|X_1\| = \sqrt{|\langle X_1, X_1\rangle|}$ differentieerbaar is. De definitie van E_1 geeft dat $E_1(p) = e_1$ en $\langle E_1, E_1\rangle(q) = \pm 1$ voor alle $q \in \mathcal{U}_1$. Aangezien $\langle E_1, E_1\rangle(p) = \varepsilon_1$ en $\langle E_1, E_1\rangle$ differentieerbaar is en dus ook continu is, geldt dat $\langle E_1, E_1\rangle(q) = \varepsilon_1$ voor alle $q \in \mathcal{U}_1$.

Stel nu dat $E_1, \ldots, E_{k-1}$ orthonormale vectorvelden zijn op $\mathcal{U}_{k-1}$ met $\mathcal{U}_{k-1}$ een open omgeving om p zodanig dat $E_i(p) = e_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Definieer

$$Y(q) = X_k(q) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle E_i(q), X_k(q)\rangle E_i(q) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_{k-1}).$$

Er geldt $Y(q) \neq 0$ voor alle q in een open omgeving $\mathcal{V}$ om p, want $Y(p) = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, e_k\rangle e_i \neq 0$ en Y is differentieerbaar. Neem nu $\mathcal{U}_k = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}_{k-1}$. Definieer

$$E_k = \frac{Y}{\|Y\|} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_k).$$

$E_k(p) = e_k$, $\langle E_k, E_k\rangle = \varepsilon_k$ volgens het eerder genoemde argument en $\langle E_i, E_k\rangle = 0$ voor $i = 1, \ldots, k-1$ dus $E_1, \ldots, E_k$ zijn orthonormaal.

Op deze wijze construeren we de set $\{E_1, \ldots, E_n\}$. We concluderen dat er voor alle $p \in M$ een open omgeving $\mathcal{U} = \mathcal{U}_n$ van p bestaat en een frameveld $\{E_1, \ldots, E_n\}$ van $\mathcal{U}$. $\square$

Gevolg 2.24. *Zij M een samenhangende differentieerbare variëteit en zij g een symmetrisch niet-ontaard (0,2) tensorveld. Dan is g een metrische tensor.*

Bewijs: We hoeven slechts te laten zien dat de index van g constant is. Voor iedere $p \in M$ is er een lokaal frameveld $\{E_1, \ldots, E_n\}$ op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. Definieer $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle \in \{-1, 1\}$. De index van g is het aantal het aantal waarden gelijk aan -1 in de verzameling $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Deze index is dus constant in een open omgeving van een punt in M. De index van g kan maximaal $n+1$ verschillendende waarden aannemen. De verzameling punten voor zo'n waarde is de vereniging van open omgevingen dus open. De verzameling punten voor de andere waarden is dus ook open. We concluderen dat wanneer de index van g verschillende waarden aan kan nemen M niet samenhangend is. $\square$

3 De Levi-Civita connectie

3.1 Connecties

Definitie 3.1. *Een connectie D op een variëteit M is een afbeelding $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, die aan de volgende drie eigenschappen voldoet:*

D1) $D_V W = D(V, W)$ is $\mathfrak{F}(M)$-lineair in V,

D2) $D_V W$ is $\mathbb{R}$ - lineair in W,

D3) $D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$ voor $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Hierbij kan opgemerkt worden dat D2) uit D3) volgt, doordat $(Vf)W$ wegvalt voor een constante functie $f \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.2. *Zij $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ een connectie, $p \in M$ en $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ met $X_1(p) = X_2(p)$, dan geldt $D_{X_1}Y(p) = D_{X_2}Y(p)$.*

Bewijs: $DY : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $X \mapsto D_X Y$ is $\mathfrak{F}(M)$-lineair, dus een tensorveld. Het resultaat volgt nu onmiddelijk uit [N] hoofdstuk 2 propositie 2. □

Lemma 3.3. *Zij $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ een connectie, $\mathcal{U}$ een open omgeving in M en $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ met $Y_1|_{\mathcal{U}} = Y_2|_{\mathcal{U}}$, dan geldt $D_X Y_1|_{\mathcal{U}} = D_X Y_2|_{\mathcal{U}}$.*

Bewijs: Neem f de bultfunctie met $f = 1$ in een open omgeving om een punt $p \in \mathcal{U}$ met $\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{U}$. Er geldt dan $fY_1 = fY_2$, want $f = 0$ buiten $\mathcal{U}$ en in $\mathcal{U}$ zijn Y_1 en Y_2 gelijk: $D_X fY_1 = D_X fY_2$. Volgens eigenschap D3) wordt nu aan de volgende vergelijking voldaan: $(Xf)Y_1 + fD_X Y_1 = (Xf)Y_2 + fD_X Y_2$. $f = 0$ op een open omgeving rond ieder punt buiten $\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{U}$. Volgens [N] hoofdstuk 1 lemma 11 valt $X_q(f)$ daarom weg voor ieder punt $q \in M \setminus \mathcal{U}$. Hieruit volgt dat $(Xf)Y_1 = (Xf)Y_2$, dus $fD_X Y_1 = fD_X Y_2$ en omdat $f = 1$ rond p is $D_X Y_1(p) = D_X Y_2(p)$. Aangezien hetzelfde argument geldt voor iedere $p \in \mathcal{U}$ concluderen we dat $D_X Y_1|_{\mathcal{U}} = D_X Y_2|_{\mathcal{U}}$. □

Lemma 3.4. *Voor iedere open omgeving $\mathcal{U} \subset M$, $p \in \mathcal{U}$ en ieder lokaal differentieerbaar vectorveld $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ bestaat er een open omgeving $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ met $p \in \mathcal{V}$ en een globaal vectorveld $Y \in \mathfrak{X}(M)$, zodanig dat $Y|_{\mathcal{V}} = X|_{\mathcal{V}}$.*

Bewijs: Zij f de bultfunctie met $\mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ een open omgeving met $p \in \mathcal{V}$ en $\mathcal{V} \subset \mathrm{supp}(f) \subset \mathcal{U}$ waarvoor $f|_{\mathcal{V}} = 1$. Definieer $Y \in \mathfrak{X}(M)$ door $Y_q = f(q)X_q$ voor $q \in \mathcal{U}$ en 0 elders. Y is differentieerbaar, want zowel f als X zijn differentieerbaar op $\mathcal{U}$ en Y gaat op een differentieerbare wijze naar 0. Omdat $f|_{\mathcal{V}} = 1$ is $Y|_{\mathcal{V}} = fX|_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}} X|_{\mathcal{V}} = X|_{\mathcal{V}}$. □

Lemma 3.5. *Voor iedere $p \in M$ en $v \in T_p M$ is er een vectorveld $V \in \mathfrak{X}(M)$ met $V(p) = v$.*

Bewijs: Zij $(x^1, \ldots, x^n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$ om p. De vector v is lokaal van de vorm $v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i(p)$. Voor het vectorveld $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, gedefinieerd door $W = \sum_{i=1}^n v(x^i)\partial_i$, geldt $W(p) = v$. Dit vectorveld is differentieerbaar, want $v(x^i) \in \mathbb{R}$ is differentieerbaar. Nu is er volgens lemma 3.4 een vectorveld $V \in \mathfrak{X}(M)$ met $V(p) = v$. □

3.2 De Levi-Civita connectie

Zij (M, g) een Semi-Riemannse variëteit.

Definitie 3.6. *De Levi-Civita connectie is een connectie D op een Semi-Riemannse variëteit, die voldoet aan:*

D4) $[V,W] = D_V W - D_W V$ *voor alle* $V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

D5) $X\langle V,W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$ *voor alle* $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Stelling 3.7. *Er is een unieke connectie, die voor alle* $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ *voldoet aan de Koszul formule:*

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle = \quad & V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle \\ & -\langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle \end{aligned}$$

en dat is de Levi-Civita connectie.

Bewijs): Definieer $F(X,V,W)$ als de rechterkant van de Koszul formule. Uit het uitschrijven van de eerste drie termen van $F(X,V,W)$ met behulp van eigenschap D5) en de laatste drie termen van $F(X,V,W)$ met eigenschap D4) volgt dat de Levi-Civita connectie aan de Koszul formule voldoet.

De termen $X\langle V,W\rangle$ en $\langle X,[V,W]\rangle$ zijn $\mathfrak{F}(M)$-lineair in X. Voor de eerste twee termen geldt met behulp van de productregel:

$$\begin{aligned} V\langle W, fX\rangle = fV\langle W,X\rangle + V(f)\langle W,X\rangle, \\ W\langle fX, V\rangle = fW\langle X,V\rangle + W(f)\langle X,V\rangle. \end{aligned}$$

Uitwerken van het Lie-haakje geeft voor de overgebleven termen dat:

$$-\langle V,[W,fX]\rangle = -f\langle V,[W,X]\rangle - W(f)\langle V,X\rangle,\ \langle W,[fX,V]\rangle = f\langle W,[X,V]\rangle - V(f)\langle W,X\rangle.$$

De niet-lineaire termen vallen precies tegen elkaar weg, waaruit volgt dat de afbeelding $X \mapsto F(X,V,W)$ $\mathfrak{F}(M)$-lineair is.

Volgens lemma 2.18 is er een uniek vectorveld $D_V W$, die voldoet aan $\langle D_V W, X\rangle = F(X,V,W)$ voor alle $X \in \mathfrak{X}(M)$. Hieruit volgt dat de connectie, die aan de Koszul formule voldoet uniek is. Waarmee bewezen is dat de Levi-Civita connectie uniek is.

Stel nu dat D voldoet aan de Koszul formule. De claim is dat D dan een connectie is en aan de eisen van de Levi-Civita connectie voldoet. Hiervoor zullen de eigenschappen D1) tot en met D5) één voor één bewezen worden.

D1) Wanneer we $F(X,fV,W)$ op dezelfde manier uitwerken als $F(fX,V,W)$, dan volgt hieruit voor $f \in \mathfrak{F}(M)$ dat $F(X,fV,W) = fF(X,V,W)$. We kunnen concluderen dat $2\langle D_{fV}W, X\rangle = F(fX,fV,W) = 2\langle fD_V W, X\rangle$. Uit lemma 2.18 volgt nu dat $D_{fV}W = fD_V W$.

D3) In dit geval kijken we naar $F(X,V,fW)$. De termen $W\langle X,V\rangle$ en $\langle W,[X,V]\rangle$ kunnen we buiten beschouwing laten, want deze zijn $\mathfrak{F}(M)$-lineair in W. We zien met behulp van de productregel en door uitwerken van de Lie-haakjes dat $-X\langle V,W\rangle - \langle V,[fW,X]\rangle$ samen ook lineair in W zijn. De niet-lineaire termen vallen wederom tegen elkaar weg. Voor de twee overgebleven termen geldt dat

$$\begin{aligned} V\langle fW, X\rangle + \langle X,[V,fW]\rangle = \quad & fV\langle W,X\rangle + f\langle X,[V,W]\rangle \\ & +2\langle (Vf)W, X\rangle. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} 2\langle D_V fW, X\rangle & = F(V,fW,X) = fF(V,W,X) + 2\langle (Vf)W, X\rangle \\ & = 2\langle fD_V W + (Vf)W, X\rangle. \end{aligned}$$

Uit lemma 2.18 volgt nu D3).

D4) Aan de hand van de Koszul formule kan berekend worden, wat $D_V W - D_W V$ is door $F(V,W,X) - F(W,V,X)$ uit te rekenen. Wanneer we dit uitschrijven zullen de eerste drie termen van $F(V,W,X)$ tegen de eerste drie van $F(W,V,X)$ wegvallen, gebruik makend van het feit dat de metrische tensor g symmetrisch is. Van de laatste drie termen zal $2\langle [V,W], X\rangle$ overblijven bij het uitschrijven. Hierbij is dan nog extra gebruik gemaakt van het feit dat voor twee vectorvelden $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ geldt dat $[V,W] = -[W,V]$. We krijgen dus de volgende vergelijking

$$2\langle D_V W - D_W V, X\rangle = F(V,W,X) - F(W,V,X) = 2\langle [V,W], X\rangle,$$

waaruit volgt dat een connectie, die aan de Koszul formule voldoet ook aan eigenschap D4) voldoet.

D5) Voor D5) schrijven we uit wat $\langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$ is. Dit komt neer op het bereken van $\frac{1}{2}F(X,V,W) + \frac{1}{2}F(X,W,V)$. De laatste drie termen van $F(X,V,W)$ vallen tegen de laatste drie van $F(X,W,V)$ weg. De eerste drie termen van $F(X,V,W)$ en $F(X,W,V)$ leveren samen $2X\langle V,W\rangle$ op. Dit geeft de vergelijking $X\langle V,W\rangle = \frac{1}{2}F(X,V,W) + \frac{1}{2}F(X,W,V)$, waaruit D5) direct volgt.

D2) volgt uit D3), zoals al eerder opgemerkt. Hiermee is bewezen dat D gedefinieerd aan de hand van de Koszul formule voldoet aan de vijf eigenschappen van de Levi-Civita connectie. We concluderen dat de Levi-Civita connectie bestaat en uniek is. □

Definitie 3.8. *Zij $(x_1, \ldots, x_n)$ een kaart op een open omgeving $\mathcal{U}$ in een semi-Riemannse varieteit M. Zij D de Levi-Civita connectie. De* Christoffel symbolen *voor deze kaart zijn de functies Γ^k_{ij} op $\mathcal{U}$ zodanig dat*

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k \qquad (1 \leq i,j \leq n). \tag{4}$$

Omdat $[\partial_i, \partial_j] = 0$, volgt uit (D4) dat $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ en dus $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Merk op dat ∂_i alleen lokaal gedefinieerd is op $\mathcal{U}$. Een connectie D is echter alleen gedefinieerd voor twee globale vector velden en heeft als waarde ook een globaal vector veld. Uitdrukking (4) behoeft dus enige toelichting. We evalueren $D_{\partial_i}(\partial_j)$ op een punt $p \in \mathcal{U}$ door middel van twee globale vectorvelden X en Y die op een open omgeving $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ van p gelijk zijn aan ∂_i en ∂_j. Zulke vectorvelden bestaan altijd volgens lemma 3.4. We interpreteren $D_{\partial_i}(\partial_j)$ dus als $D_X(Y)|_{\mathcal{V}}$. Volgens lemma's 3.2 en 3.3 hangt de waarde van $D_X Y$ in een punt $p \in \mathcal{U}$ alleen af van X in het punt p en van Y op een open omgeving van p. Dus $D_{\partial_i}(\partial_j)$ is onafhankelijk van de keuze van de globale vectorvelden X en Y. De Christoffel symbolen zijn op deze manier dus alleen lokaal gedefinieerd voor elk punt in een kaart $\mathcal{U}$ en zijn afhankelijk van de keuze van deze kaart. Buiten $\mathcal{U}$ heeft (4) geen betekenis.

Stelling 3.9. *Voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ zijn de Christoffel symbolen van de vorm:*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k} g^{km}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$$

Voor een bewijs zie [N] hoofdstuk 3 propositie 13.

Gevolg 3.10. *Voor een g-orthogonale kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ zijn de Christoffel symbolen van de vorm:*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Bewijs: Als $(x^1, \ldots, x^n)$ g-orthogonaal is, dan geldt $g^{km} = 0$ wanneer $k \neq m$. Wanneer we nu de vergelijking van stelling 3.9 invullen volgt het resultaat direct. □

3.3 De Covariante Afgeleide

Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit met Levi-Civita connectie D. Zij $V, X \in \mathfrak{X}(M)$. We kunnen $D_V X$ interpreteren als de afgeleide van X in de richting V. Houden we X vast dan krijgen we de afbeelding $DX : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ gegeven door $V \mapsto D_V X$. Volgens eigenschap D1) is de afbeelding $\mathfrak{F}(M)$-lineair. Dit betekent dat we DX kunnen interpreteren als een (1,1) tensorveld $DX : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$. Want de afbeelding $(\theta, V) \mapsto DX(\theta, V) = \theta(D_V X)$ is ook $\mathfrak{F}(M)$-lineair in θ en dus $\mathfrak{F}(M)$-bilineair. Het tensorveld DX noemen we de covariante afgeleide van het tensorveld X.

We zullen nu voor een willekeurige tensorveld A de covariante afgeleide DA definiëren. We doen dit op de volgende manier. We nemen een vectorveld V en definiëren eerst voor iedere tensor A een tensor $D_V A$ van het zelfde type. De covariante afgeleide van $A \in \mathfrak{T}^r_s$ word de tensor $DA \in \mathfrak{T}^r_{s+1}$ die we evalueren door het laatste argument de rol van V te geven en vervolgens $D_V A$ te evalueren in de overige $r + s$ argumenten.

We beginnen met een (0,0) tensorveld $f \in \mathfrak{F}(M)$. We definiëren de reële functie $D_V f = df(V)$. De covariante afgeleide van f is nu dus de 1-vorm Df gegeven door $Df(V) = D_V f = df(V)$ voor alle $V \in \mathfrak{X}(M)$. De covariante afgeleide van een functie is dus gelijk aan de raakafbeelding. Aangezien de raakafbeelding gegeven wordt door $df(V) = Vf$, krijgt eigenschap D3) nu de vorm van een productregel voor differentieren

$$D_V(fW) = (D_V f)W + f D_V W.$$

Vervolgens laten we voor een 1-vorm $\theta \in \mathfrak{T}^0_1$ de 1-vorm $D_V\theta$ gegeven zijn door

$$D_V\theta(X) = D_V(\theta(X)) - \theta(D_V X).$$

Merk op dat $\theta(X)$ een differentieerbare functie is en dat $D_V(\theta(X))$ betekenis heeft gekregen in de voorgaande definitie. Ook nu geeft deze definitie een productregel $D_V(\theta(X)) = (D_V\theta)(X) + \theta(D_V X)$. De covariante afgeleide $D\theta$ van θ is dus gegeven door $D\theta(X, V) = D_V\theta(X)$.

Nu we een covariante afgeleide hebben voor vectorvelden, functies en 1-vormen kunnen we hiermee de covariante afgeleide definiëren voor een willekeurig tensorveld van type (r, s).

Definitie 3.11. *Voor $A \in \mathfrak{T}^r_s$ definiëren we het tensorveld $D_V A \in \mathfrak{T}^r_s$ door*

$$(D_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) = D_V(A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s))$$
$$-\sum_{i=1}^{r} A(\theta_1, \ldots, D_V\theta_i, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) - \sum_{i=1}^{s} A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots D_V X_i, \ldots, X_s).$$

De covariante afgeleide van een tensor $A \in \mathfrak{T}^r_s$ is het tensorveld $DA \in \mathfrak{T}^r_{s+1}$ gegeven door

$$(DA)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s).$$

Deze definitie geeft analoog aan het voorgaande aanleiding tot een algemene productregel voor de covariante afgeleide van een reële functie die het beeld is van een tensorveld.

3.4 Kromming

In het vervolg van dit hoofdstuk is M een semi-Riemannse variëteit en is D de Levi-Civita connectie.

Definitie 3.12. *De Riemannse krommingstensor $R : \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ is gegeven door*

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z.$$

M heet vlak *als de Riemannse krommingstensor R nul is op heel M.*

Zij $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ een 1-vorm. We hanteren de volgende notatie: $R(\theta, Z, X, Y) = \theta(R_{XY}Z)$ en $R^i_{XY}Z = R(dx^i, Z, X, Y)$. Dit komt er op neer dat $R_{XY}Z = \sum_i R^i_{XY}Z\partial_i$.

Lemma 3.13. *R is een (1,3) tensorveld.*

Bewijs: Het is voldoende te laten zien dat R in alle argumenten $\mathfrak{F}(M)$-lineair is. Lineariteit in θ is triviaal. Voor lineariteit in X gebruiken we $[fX, Y] = f[X, Y] - Yf \cdot X$ en $D_Y f = Yf$.

$$\begin{aligned}
R_{fX,Y}Z &= D_{[fX,Y]}Z - [D_{fX}, D_Y]Z \\
&= D_{f[X,Y]-Yf\cdot X}Z - D_{fX}D_YZ + D_YD_{fX}Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z - (Yf)D_XZ - fD_XD_YZ + D_Y(fD_XZ) \\
&= fD_{[X,Y]}Z - (Yf)D_XZ - fD_XD_YZ + (Yf)D_XZ + fD_YD_XZ = fR_{X,Y}Z.
\end{aligned}$$

Voor de lineariteit in Y merken we op dat uit de definitie direct volgt dat $R_{XY}Z = -R_{YX}Z$. Tot slot volgt lineariteit in Z uit herhaaldelijk toepassen van (D3).

$$\begin{aligned}
R_{XY}fZ &= D_{[X,Y]}fZ - [D_X, D_Y]fZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - D_XD_YfZ + D_YD_XfZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - D_XfD_YZ - D_X(Yf)Z + D_YfD_XZ + D_Y(Xf)Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - (Xf)D_YZ - fD_XD_YZ - X(Yf)Z - (Yf)D_XZ \\
&\quad +(Yf)D_XZ + fD_YD_XZ + Y(Xf)Z + (Xf)D_YZ \\
&= fD_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z - fD_XD_YZ - X(Yf)Z + fD_YD_XZ + Y(Xf)Z \\
&= fD_{[X,Y]}Z + fD_YD_XZ - fD_XD_YZ + ([X,Y]f)Z + Y(Xf)Z - X(Yf)Z \\
&= fR_{XY}Z + ([X,Y]f)Z + ([Y,X]f)Z = fR_{XY}Z.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.14. *$R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^n R^i_{jkl}\partial_i$, waarbij de componenten R^i_{jkl} van de Riemansse krommingstensor R voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ gegeven worden door:*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_{m=1}^n \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_{m=1}^n \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Zie voor een bewijs [N] hoofdstuk 3 lemma 38.

Voor $x = X_p,\ y = Y_p,\ z = Z_p$ in $T_p(M)$ definiëren we R_{xy} als het endomorfisme van $T_p(M)$ gegeven door $z \mapsto R_{xy}z := R_{XY}Z|_p$.

Lemma 3.15. *Zij $x, y, z, v, w \in T_p(M)$ dan*

(1) $R_{xy} = -R_{yx}$

(2) $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$

(3) $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$

(4) $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$

We definiëren $R_{ijkl} =\downarrow_1^1 R^i_{jkl} = \langle R_{\partial_k\partial_l}(\partial_j), \partial_i\rangle$. Er geldt volgens het bovenstaande lemma dat $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$.

Lemma 3.16 (tweede Bianchi identiteit)**.** *Zij $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, dan*

$$(D_X R)_{YZ} + (D_Y R)_{ZX} + (D_Z R)_{XY} = 0.$$

Voor de bewijzen van bovenstaande twee lemma's verwijzen we naar [N] 3.36 en 3.37.

Lemma 3.17. *Zij $(x_1, \ldots, x_n)$ een kaart op een open omgeving in M en zij R de Riemannse krommingstensor, dan is*

$$R(\sum_s g_{ms}dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R(\sum_s g_{ls}dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = R(\sum_s g_{ks}dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j).$$

Bewijs: Voor de eerste gelijkheid gebruiken we de $\mathfrak{F}(M)$-lineariteit van R in g en in de tweede regel lemma 3.15(4).

$R(\sum_s g_{ms}dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_s g_{ms}dx^s(R_{\partial_k\partial_l}\partial_j) = \sum_s \langle \partial_m, \partial_s\rangle R^s_{\partial_k\partial_l}\partial_j = \sum_s \langle \partial_m, (R^s_{\partial_k\partial_l}\partial_j)\partial_s\rangle =$
$\langle R_{\partial_k\partial_l}\partial_j, \partial_m\rangle = \langle R_{\partial_j\partial_m}\partial_k, \partial_l\rangle = \langle \sum_s (R^s_{\partial_j\partial_m}\partial_k)\partial_s, \partial_l\rangle = \sum_s \langle \partial_l, \partial_s\rangle R^s_{\partial_j\partial_m}\partial_k =$
$\sum_s g_{ls}dx^s(R_{\partial_j\partial_m}\partial_k) = \sum_s g_{ls}R(dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = R(\sum_s g_{ls}dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m)$.

De tweede gelijkheid volgt geheel analoog aan bovenstaande, alleen van lemma 3.15 gebruiken we in plaats van (4), nu (1) en (2).

$$R(\sum_s g_{ls}dx^s, \partial_k, \partial_j, \partial_m) = \langle R_{\partial_j\partial_m}\partial_k, \partial_l\rangle = \langle R_{\partial_m\partial_j}\partial_l, \partial_k\rangle = R(\sum_s g_{ks}dx^s, \partial_l.\partial_m, \partial_j). \qquad \square$$

Definitie 3.18. *Zij R de Riemannse krommingstensor van een varieteit M. De* Ricci-krommingstensor *van M is de contractie $C^1_3(R) \in \mathfrak{T}^0_2$ en is gegeven door*

$$\mathrm{Ric}(X, Y)(p) = \mathrm{Tr}(z \mapsto R_{X(p)z}Y(p))$$

Vanwege lemma 3.15(4) is Ric symmetrisch. De componenten R_{ij} van de Ricci krommingstensor Ric worden voor een kaart $(x^1, \ldots, x^n)$ gegeven door:

$$R_{ij} = \sum_{m=1}^n R^m_{ijm}.$$

Dit volgt direct uit stelling 1.12.*ii*).

Definitie 3.19. *De* scalaire kromming *$S \in \mathfrak{F}(M)$ van een varieteit M is de metrische contractie $C_{12}(\mathrm{Ric}) \in \mathfrak{F}(M)$ van de Ricci tensor.*

Opmerking: $S = \mathrm{Tr}_g(\mathrm{Ric})$.

Definitie 3.20. *De divergentie van een symmetrische (0,2) tensor A wordt gegeven door* $\mathrm{div}(A) = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Opmerking: $\mathrm{div}(A)(X) = \mathrm{Tr}_g(DA_X)$. Hierbij is DA_X de (0,2) tensor gegeven door $DA_X(Y, Z) = (D_Y A)(Z, X)$.

Lemma 3.21. *Zij (M, g) een semi-Riemannse variëteit en $f \in \mathfrak{F}(M)$, dan is* $\mathrm{div}(fg) = df$.

Bewijs: Zij $\{E_i\}$ een frameveld en $V = \sum_i \varepsilon_i g(E_i, V)E_i \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\operatorname{div}(fg)(V) := C_{23}(Dfg)(V) = \sum_i \varepsilon_i (D_{E_i} fg)(V, E_i) =$$

$$\sum_i \varepsilon_i D_{E_i}(fg(V, E_i)) - \varepsilon_i fg(D_{E_i}V, E_i) - \varepsilon_i fg(V, D_{E_i}E_i) =$$

$$\sum_i \varepsilon_i g(V, E_i) D_{E_i} f + \varepsilon_i f D_{E_i} g(V, E_i) - \varepsilon_i fg(D_{E_i}V, E_i) - \varepsilon_i fg(V, D_{E_i}E_i) =$$

$$\sum_i \varepsilon_i g(V, E_i) df(E_i) = df(\sum_i \varepsilon_i g(E_i, V)E_i) = df(V).$$

$\square$

Lemma 3.22. $dS = 2 \operatorname{div} \operatorname{Ric}$.

Bewijs: We berekenen $dS(\partial_l)$.

$$dS(\partial_l) = D_{\partial_l} S = D_{\partial_l} C_{12}(\mathrm{Ric}) = D_{\partial_l} C_1^1 \uparrow_2^1 (\mathrm{Ric}) = D_{\partial_l} \sum_k \uparrow_2^1 (\mathrm{Ric})(dx^k, \partial_k) =$$

$$\sum_k D_{\partial_l}(\mathrm{Ric})(\sum_j g^{jk}\partial_j, \partial_k) = \sum_{j,k} g^{jk} D_{\partial_l}(\mathrm{Ric})(\partial_j, \partial_k) = \sum_{j,k} g^{jk} D_{\partial_l} C_3^1 R(\partial_j, \partial_k) =$$

$$\sum_{j,k,r} g^{jk} (D_{\partial_l} R)(dx^r, \partial_j, \partial_k, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk} (D_{\partial_l} R)^r_{\partial_k \partial_r} \partial_j.$$

Ook berekenen we $\operatorname{div} \operatorname{Ric}(\partial_l)$.

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric}(\partial_l) = C_{13}(D\mathrm{Ric})(\partial_l) = C_1^1 \uparrow_3^1 (D\mathrm{Ric})(\partial_l) = \sum_k \uparrow_3^1 (D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(dx^k, \partial_l) =$$

$$\sum_k (D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(\sum_j g^{jk}\partial_j, \partial_l) = \sum_{j,k} g^{jk}(D_{\partial_k}\mathrm{Ric})(\partial_j, \partial_l) = \sum_{j,k} g^{jk}(D_{\partial_k} C_3^1 R)(\partial_j, \partial_l) =$$

$$\sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_k} R)(dx^r, \partial_j, \partial_l, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j.$$

Vervolgens herschrijven we $\sum_{r,j,k} g^{jk}(D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j$ om aan te tonen dat dit een tweede uitdrukking voor $\operatorname{div} \operatorname{Ric}(\partial_l)$ is.

$$\sum_{r,j,k} g^{jk}(D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \sum_{r,j,k,s} g^{jk} \delta_{rs} (D_{\partial_r} R)^s_{\partial_k \partial_l} \partial_j =$$

$$\sum_{r,j,k,s,m} g^{jk} g^{rm} g_{ms} (D_{\partial_r} R)(dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} (D_{\partial_r} R)(\sum_s g_{ms} dx^s, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$

uit lemma 3.17 volgt dat dit gelijk is aan

$$\sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} (D_{\partial_r} R)(\sum_s g_{ks} dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j) = \sum_{r,j,k,m,s} g^{rm} g^{jk} g_{ks} (D_{\partial_r} R)(dx^s, \partial_l, \partial_m, \partial_j) =$$

$$\sum_{j,r,m} g^{rm} (D_{\partial_r} R)(dx^j, \partial_l, \partial_m, \partial_j).$$

We hernoemen de indices als volgt $r \to k,\ j \to r,\ m \to j$ en vinden op deze manier dat dit gelijk is aan

$$\sum_{r,k,j} g^{kj}(D_{\partial_k} R)(dx^r, \partial_l, \partial_j, \partial_r).$$

Nogmaals 3.17 gebruiken geeft

$$\sum_{r,k,j} g^{jk}(D_{\partial_k} R)(dx^r, \partial_j, \partial_l, \partial_r) = \sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j = \text{div Ric}(\partial_l).$$

Voor de coordinaat vectorvelden neemt de tweede Bianchi identiteit de volgende vorm

$$(D_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l} \partial_j + (D_{\partial_k} R)_{\partial_l \partial_r} \partial_j + (D_{\partial_l} R)_{\partial_r \partial_k} \partial_j = 0.$$

In de laatste term verwisselen we ∂_k en ∂_r ten koste van een minteken en stoppen het resultaat in de 1-vorm dx^r

$$(D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j + (D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j - (D_{\partial_l} R)^r_{\partial_k \partial_r} \partial_j = 0.$$

Vervolgens vermenigvuldigen we met g^{jk} en sommeren over j, k en r

$$\sum_{j,k,r} g^{jk}(D_{\partial_r} R)^r_{\partial_k \partial_l} \partial_j + g^{jk}(D_{\partial_k} R)^r_{\partial_l \partial_r} \partial_j - g^{jk}(D_{\partial_l} R)^r_{\partial_k \partial_r} \partial_j = 0.$$

De laatste term is gelijk aan $dS(\partial_l)$ en de eerste twee zijn elk gelijk aan div Ric(∂_l), dit geeft

$$2 \text{ div Ric} - dS = 0.$$

$\square$

3.5 Snijkromming

Definitie 3.23. *Zij $v, w \in T_p(M)$. We definiëren*

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

Lemma 3.24. *Zij $v, w, x, y \in T_p(M)$ en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, zodanig dat $v = ax+by$ en $w = cx+dy$, dan*

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y).$$

Bewijs: $Q(v, w) = \langle ax + by, ax + by\rangle\langle cx + dy, cx + dy\rangle - \langle ax + by, cx + dy\rangle^2 = a^2c^2\langle x, x\rangle^2 + 2a^2cd\langle x, x\rangle\langle x, y\rangle + a^2d^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle + b^2c^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle + 2b^2cd\langle x, y\rangle\langle y, y\rangle + b^2d^2\langle y, y\rangle^2 - \{a^2c^2\langle x, x\rangle^2 + 2ac(ad + bc)\langle x, x\rangle\langle x, y\rangle + 2abcd\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle + (ad + bc)^2\langle x, y\rangle^2 + 2bd(ad + bc)\langle y, y\rangle\langle x, y\rangle + b^2d^2\langle y, y\rangle^2\} = a^2d^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle + 4abcd\langle x, y\rangle^2 + b^2c^2\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - 2abcd\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)\langle x, y\rangle^2 = (ad - bc)^2(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2) = (ad - bc)^2 Q(x, y)$. $\square$

Definitie 3.25. *Een twee dimensionale deelruimte $P \subset T_p(M)$ heet een* raakvlak *aan M. We noemen P* niet-ontaard *als $Q(v, w) \neq 0$ voor een basis $\{v, w\}$ van P.*

Is $\{x, y\}$ een basis van P, dan vormen $v = ax + by$ en $w = cx + dy$ een basis van P dan en slechts dan als $ad - bc \neq 0$. Uit bovenstaand lemma volgt dus dat deze definitie niet van de keuze van een basis afhangt.

Lemma 3.26. *Zij $v, w, x, y \in T_p(M)$ en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, zodanig dat $v = ax+by$ en $w = cx+dy$, dan*

$$\langle R_{vw} v, w\rangle = (ad - bc)^2 \langle R_{xy} x, y\rangle.$$

Bewijs: We berekenen $\langle R_{vw}v, w\rangle$ en gebruiken daarbij direct dat $R_{xx} = \langle R_{vw}x, x\rangle = 0$. $\langle R_{vw}v, w\rangle = a^2\langle dR_{xy}x, dy\rangle + ab\langle cR_{yx}x, dy\rangle + ba\langle dR_{xy}y, cx\rangle + b^2\langle cR_{yx}y, cx\rangle = a^2d^2\langle R_{xy}x, y\rangle + abcd\langle R_{yx}x, y\rangle + abcd\langle R_{xy}y, x\rangle + b^2c^2\langle R_{yx}y, x\rangle = (ad-bc)^2\langle R_{xy}x, y\rangle$ □

Definitie 3.27. *Zij P een niet-ontaard raakvlak aan M en zij $\{v, w\}$ een basis van P. Het getal*

$$K(P) = K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v, w)}$$

heet de snijkromming *van P.*

Volgens de bovenstaande lemma's hangt $K(v, w)$ niet af van de gekozen basis $\{v, w\}$, dus is $K(P)$ goed gedefinieerd. We zeggen dat M *constante kromming k* heeft als $K(P) = k$ voor ieder niet-ontaard raakvlak P aan M.

Schaling van de metrische tensor

Zij $g \in \mathfrak{T}_2^0$ een metrische tensor en zij $k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$. Dan is $\tilde{g} := kg$ ook een metrische tensor, want $\tilde{g}$ is bilineair, symmetrisch en omdat $kg(v, w) = 0 \Leftrightarrow g(v, w) = 0$ is $\tilde{g}$ niet-ontaard. De nieuwe bijbehorende kwadratische vorm $\tilde{Q}$ is gegeven door $\tilde{Q} = k^2Q$. We vinden zo dat de nieuwe snijkromming $\tilde{K}$ gegeven wordt door

$$\tilde{K}(v, w) = \frac{\tilde{g}(R_{vw}v, w)}{\tilde{Q}(v, w)} = \frac{kg(R_{vw}v, w)}{k^2Q(v, w)} = \frac{1}{k}K(v, w).$$

Lemma 3.28. *Als M constante kromming k heeft, dan is*

$$R_{xy}z = k\left(\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x\right).$$

Bewijs: Als $k = 0$ dan is volgens de aanname $\langle R_{xy}x, y\rangle = 0$ voor ieder tweetal vectoren x, y dat een niet-ontaard raakvlak opspant. Elk paar vectoren is een limiet van twee van zulke vectoren, zie [N]. Omdat $\langle R_{xy}x, y\rangle$ continu is, volgt dat $\langle R_{xy}x, y\rangle = 0$ voor alle x en y. Volgens lineariteit van R is

$$0 = \langle R_{x,y+z}x, y+z,\rangle = \langle R_{xy}x, y\rangle + \langle R_{xz}x, y\rangle + \langle R_{xy}x, z\rangle + \langle R_{xz}x, z\rangle = \langle R_{xz}x, y\rangle + \langle R_{xy}x, z\rangle.$$

Met behulp van de symmetrie $\langle R_{xz}x, y\rangle = \langle R_{xy}x, z\rangle$ vinden we dat $2\langle R_{xy}x, z\rangle = 0$ voor alle $z \in T_p(M)$. Dus $R_{xy}x = 0$. Nu volgt uit lineariteit van R dat

$$0 = R_{x+z,y}(x+z) = R_{xy}x + R_{zy}x + R_{xy}z + R_{zy}z = R_{zy}x + R_{xy}z.$$

Met behulp van de symmetrie $R_{zy}x = -R_{yz}x$ vinden we dat

$$R_{xy}z = R_{yz}x$$

Cyclisch permuteren van x, y, z geeft $R_{yz}x = R_{zx}y$. Dus $R_{xy}z = R_{yz}x = R_{zx}y$. Volgens de Bianchi identiteit 3.15 (3) is $3R_{xy}z = 0$. We concluderen dat $R_{xy}z = 0$ voor alle $x, y, z \in T_p(M)$, dus het lemma is waar voor $k = 0$.

Als $k \neq 0$ mogen we door de metrische tensor te schalen met de factor k aannemen dat $k = 1$. Volgens de aanname geldt nu dat

$$\langle R_{xy}x, y\rangle = Q(x, y) = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2 \tag{5}$$

voor ieder tweetal vectoren x, y dat een niet-ontaard raakvlak opspant. Elk paar vectoren is een limiet van twee van zulke vectoren, zie [N]. Omdat $\langle R_{xy}x, y\rangle$ continu is, volgt dat $\langle R_{xy}x, y\rangle = Q(x, y)$ voor alle x en y.

We definiëren $a(x,y,z) = \langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x$ voor alle $x,y,z \in T_p(M)$ en we willen laten zien dat $R_{xy}z = a(x,y,z)$. Volgens lineariteit van R is

$$\langle R_{x,y+z}x, y+z, \rangle = \langle R_{xy}x, y\rangle + \langle R_{xz}x, y\rangle + \langle R_{xy}x, z\rangle + \langle R_{xz}x, z\rangle.$$

Met behulp van de symmetrie $\langle R_{xz}x, y\rangle = \langle R_{xy}x, z\rangle$ en (5) vinden we dat

$$\begin{aligned} 2\langle R_{xy}x, z\rangle &= \langle R_{x,y+z}x, y+z, \rangle - \langle R_{xy}x, y\rangle - \langle R_{xz}x, z\rangle \\ &= \langle x,x\rangle\langle y+z, y+z\rangle - \langle x, y+z\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2 - \langle x,x\rangle\langle z,z\rangle - \langle x,z\rangle^2 \\ &= 2\langle x,x\rangle\langle y,z\rangle - 2\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle. \end{aligned}$$

Dus $\langle R_{xy}x, z\rangle = \langle\langle x,x\rangle y - \langle x,y\rangle x, z\rangle$ voor alle $z \ \in T_p(M)$. Dus

$$R_{xy}x = \langle x,x\rangle y - \langle x,y\rangle x = a(x,y,x). \tag{6}$$

Volgens lineariteit van R is

$$R_{x+z,y}(x+z) = R_{xy}x + R_{zy}x + R_{xy}z + R_{zy}z.$$

Met behulp van de symmetrie $R_{zy}x = -R_{yz}x$ en (6) vinden we dat

$$\begin{aligned} & R_{xy}z - R_{yz}x = R_{zy}x + R_{xy}z = R_{x+z,y}(x+z) - R_{xy}x - R_{zy}z \\ = \ & \langle x+z, x+z\rangle y - \langle x+z, y\rangle(x+z) - \langle x,x\rangle y - \langle x,y\rangle x - \langle z,z\rangle y - \langle z,y\rangle z \\ = \ & \langle x,z\rangle y - \langle z,y\rangle x - \langle x,y\rangle z + \langle x,z\rangle y = a(x,y,z) - a(y,z,x) \end{aligned} \tag{7}$$

Cyclisch permuteren van x, y, z geeft

$$R_{zx}y - R_{xy}z = a(z,x,y) - a(x,y,z). \tag{8}$$

Berekenen we (7) - (8) dan vinden we met behulp van de symmetrie $-R_{yz}x - R_{zx}y = R_{xy}z$ dat

$$\begin{aligned} & 3R_{xy}z = 2R_{xy}z - R_{yz}x - R_{zx}y = R_{xy}z - R_{yz}x - (R_{zx}y - R_{xy}z) = \\ & a(x,y,z) - a(y,z,x) - a(z,x,y) + a(x,y,z) = \\ & 2(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x) - \langle x,y\rangle z + \langle x,z\rangle y - \langle y,z\rangle x + \langle y,x\rangle z = \\ & 3(\langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x) = 3a(x,y,z). \end{aligned}$$

We concluderen dat $R_{xy}z = a(x,y,z) = \langle z,x\rangle y - \langle z,y\rangle x$ □

3.5.1 Semi-Riemannse variëteiten met constante kromming

Een samenhangende semi-Riemannse variëteit met constante kromming noemen we een *ruimte vorm.* Het hebben van constante kromming is een zware eis. Er is namelijk voor iedere dimensie, index en kromming maar één enkelvoudig samenhangende ruimte vorm. Dat wil zeggen een enkelvoudig samenhangende ruimte vorm is op isometrie na, uniek bepaald door zijn dimensie, index en kromming. Voor een bewijs hiervan verwijzen we naar [N]. In het geval dat de index gelijk is aan nul hebben we het volgende resultaat.

Stelling 3.29. *Een enkelvoudig samenhangende n-dimensionale Riemannse variëteit met constante kromming k is isometrisch met*

de bol $S^n(r)$	*als*	$k = 1/r^2$.
de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$	*als*	$k = 0$.
een samenhangs component van de hyperbolische ruimte $H^n(r)$	*als*	$k = -1/r^2$.

De Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ is wel bekend. De bol $S^n(r)$ met straal $r > 0$ is de deelvariëteit van $\mathbb{R}^{n+1}$ gegeven door $S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| = r\}$. We kunnen de bol ook beschrijven als een hypervlak in de $\mathbb{R}^{n+1}$. Geven we de standaard coördinaten van $\mathbb{R}^{n+1}$ aan met x_i en is $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{n+1})$ gegeven door $f = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$, dan is $S^n(r) = f^{-1}(r^2)$.

De hyperbolische ruimte $H^n(r)$ met straal $r > 0$ is de deelvariëteit van $\mathbb{R}_1^{n+1}$ gegeven door $H^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \ -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = -r^2\}$. Identificeren we $\mathbb{R}_1^{n+1}$ met $T_p(\mathbb{R}_1^{n+1})$ dan kunnen we een functie $q \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1^{n+1})$ definiëren door $q(x) = \langle x, x \rangle$. Ten op zichte van de standaard coördinaten x_i wordt q dus gegeven door

$$q = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i x_i^2 = -x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2.$$

Hiermee kunnen we $H^n(r)$ ook beschrijven als een hypervlak.

$$H^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \ \langle x, x \rangle = -r^2\}.$$

$H^n(r)$ is niet samenhangend. We zien dat $H^0(r)$ uit twee punten bestaat:
$H^0(r) = \{x \in \mathbb{R}_1 : -x^2 = -r^2\} = \{\pm r\}$. Is de dimensie $n > 0$, dan volgt uit de definitie dat iedere $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H^n(r)$ voldoet aan $\sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 = x_1^2 - r^2$. De linker zijde is niet negatief. De rechter zijde is dat alleen als $x_1 \geq r$ of $x_1 \leq -r$. Aangezien $r > 0$ liggen er punten van $H^n(r)$ in de halfruimtes $\{x_1 > 0\}$ en $\{x_1 < 0\}$ maar deze punten kunnen nooit met elkaar verbonden zijn, want $H^n(r)$ bevat geen punt met $x_1 = 0$.

$H^1(1)$ is de hyperbool in het xy-vlak gegeven door $y^2 = x^2 - 1$. Door deze kromme te wentelen om de x-as krijgen we $H^2(1)$.

4 De Algemene Relativiteitstheorie

4.1 Algemene Relativiteitstheorie

De relativiteitstheorie modelleert het heelal waarin wij leven als een zogenaamde ruimtetijd. Dat wil zeggen een vier dimensionale samenhangende tijd-georiënteerde Lorentz variëteit. In het speciale geval dat we M gelijk nemen aan de Minkowski ruimte $\mathbb{R}^4_1$ is er geen kromming en hebben we te maken met de speciale relativiteitstheorie. Deze theorie verwaarloosd de zwaartekracht. Voor iedere ruimtetijd is de raakruimte isomorf met $\mathbb{R}^4_1$ en kan dus lokaal benaderd worden door een vlakke ruimte. De speciale relativiteitstheorie is dus een lokale theorie. In het algemeen is een ruimtetijd niet vlak, maar is er kromming. De algemene relativiteitstheorie beschrijft zwaartekracht door middel van kromming. De bron van zwaartekracht ofwel kromming, is niet alleen massa, maar ook energie. Materie dient als drager van massa en energie, ook wel energie-impuls genoemd. Deze energie-impuls beschrijven we met een *stress-energie tensorveld* T op M. Dit is een symmetrische (0,2) tensor. Behoud van energie-impuls kan men beschrijven door div $T = 0$.

4.1.1 De Einstein vergelijking

Wat is nu het verband tussen zwaartekracht en energie-impuls ? Aangezien zwaartekracht wordt beschreven door kromming en energie-impuls door T, zocht Einstein een verband tussen T en de Ricci kromming. Hij bedacht de zogenaamde gravitatie tensor.

Definitie 4.1. *De Einstein gravitatie tensor G van een ruimtetijd M is*

$$G = \mathrm{Ric} - \tfrac{1}{2}Sg.$$

Hierbij is g de metrische tensor van M.

Aangezien $S = C_{12}(\mathrm{Ric})$ is de gravitatie tensor G volledig bepaalt door de Ricci-kromming. Ook omgekeerd kan men uit G de Ricci-kromming berekenen.

Lemma 4.2.

(1) G is een symmetrisch (0,2) tensorveld en div $G = 0$.

(2) $\mathrm{Ric} = G - \frac{1}{2}C_{12}(G)g$.

Bewijs:

(1) Zowel Ric als g zijn symmetrische (0,2) tensoren, dus G ook. Volgens lemma 3.21 is $\mathrm{div}(Sg) = dS$. We weten van lemma 3.22 dat div Ric $= \frac{1}{2}dS$, dus div $G = \mathrm{div}(\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg) = \mathrm{div}\ \mathrm{Ric} - \frac{1}{2}\mathrm{div}\ Sg = \frac{1}{2}dS - \frac{1}{2}dS = 0$.

(2) De contractie van de metrische tensor $C_{12}(g) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i g(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i^2 = 4$ is de dimensie van de ruimtetijd. We berekenen $C_{12}(G) = C_{12}(\mathrm{Ric}) - \frac{1}{2}SC_{12}(g) = S - 2S = -S$. Herschrijven van de definitie van G geeft

$$\mathrm{Ric} = G + (\tfrac{1}{2}S)g = G - \tfrac{1}{2}C_{12}(G)g.$$

□

Met deze gravitatie tensor kon Einstein het verband tussen energie-impuls en kromming, ofwel de zwaartekracht, beschrijven.

Definitie 4.3 (De Einsteinverglijking)**.** *Zij M een ruimtetijd die materie bevat met stress-energie tensor T, dan*

$$G = 8\pi T.$$

Hierbij is G de Einstein gravitatie tensor.

Deze fundamentele vergelijking beschrijft alle bewging van de materie in het heelal. Duidelijk is dat volgens de vergelijking de stress-energie tensor een symmetrische (0,2) tensor moet zijn met div $T = 0$. Dit heeft behoud van energie-impuls tot gevolg. Aan de andere kant bepaalt T via lemma 4.2(2) de Ricci kromming. Vervolgens bepaalt div $T = 0$ hoe de Ricci kromming de materie verplaatst.

Definitie 4.4. *Een perfecte vloeistof op een ruimtetijd M is een tripel $(U, \rho, \mathbf{p})$ waarbij:*

(1) *U is een tijd-achtig toekomstwijzend eenheids vectorveld op M, genaamd het* stroom vectorveld.

(2) *$\rho \in \mathfrak{F}(M)$ is de* energie dichtheids functie *en $\mathbf{p} \in \mathfrak{F}(M)$ is de* druk functie.

(3) *De stress-energie tensor is*

$$T = (\rho + \mathbf{p})U^* \otimes U^* + \mathbf{p}g,$$

waarbij $U^* = m_g(U)$, dat wil zeggen $U^*(V) = \langle U, V\rangle$.

Het is duidelijk uit de formule voor T dat voor vecter velden $X, Y \perp U$:

$$T(U,U) = \rho \qquad T(X,U) = T(U,X) = 0 \qquad T(X,Y) = \mathbf{p}\langle X, Y\rangle.$$

4.2 Gebogen producten

Voordat we de definitie van het gebogen product van twee semi-Riemannse variëteiten geven, herhalen we eerst kort de definitie van een product variëteit en enkele eigenschappen.

Definitie 4.5. *Zij B en F differentieerbare variëteiten. Het product van topologische ruimten $B \times F$ is zelf weer een differentieerbare variëteit, waarbij alle product kaarten een atlas vormen. Deze varieteit heet het* product *van B en F.*

Voor een product varieteit $B \times F$ zijn de natuurlijke projecties

$$\begin{array}{ll} \pi : B \times F \to B & \text{gegeven door } \ (p,q) \mapsto p \\ \sigma : B \times F \to F & \text{gegeven door } \ (p,q) \mapsto q \end{array}$$

differentieerbare afbeeldingen. Voor iedere $(p, q) \in B \times F$ zijn

$$\pi | B \times q : B \times q \to B$$

$$\sigma | p \times F : p \times F \to F$$

diffeomorfismen.

Lemma 4.6. *Zij B en F differentieerbare variëteiten, $p \in B$* en *$q \in F$. Dan is $T_{(p,q)}(B \times F)$ de directe som van zijn lineaire deelruimten $T_{(p,q)}B$ en $T_{(p,q)}F$.*

Bewijs: De afbeelding $\pi|p \times F$ is constant, dus $d\pi_{(p,q)}$ stuurt $T_{(p,q)}F$ naar $0 \in T_p(B)$. Aan de andere kant is $d\pi|T_{(p,q)}B$ een lineair isomorfisme. Dus $T_{(p,q)}B \cap T_{(p,q)}F = 0$. De som van de dimensies van deze twee deelruimten is gelijk aan de dimensie van $T_{(p,q)}(B \times F)$, hieruit volgt het resultaat. $\square$

Een belangrijk concept voor product varieteiten is het *liften* van functies, vectoren en vectorvelden.
Zij $f \in \mathfrak{F}(B)$, de *lift* van f naar $B \times F$ is $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathfrak{F}(B \times F)$.
Zij $x \in T_p(B)$ en $q \in F$, de *lift* $\tilde{x}$ van x naar (p,q) is de unieke vector in $T_{(p,q)}(B \times F)$ zodanig dat $d\pi(\tilde{x}) = x$ en $d\sigma(\tilde{x}) = 0$.
Zij $X \in \mathfrak{X}(B)$, de *lift* van X naar $B \times F$ is het vectorveld $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(B \times F)$ waarvoor de waarde in (p,q) gelijk is aan de lift van X_p naar (p,q). Het liften vanuit F gaat geheel analoog, gebruikmakend van de projectie σ.

Definitie 4.7. *Zij B en F semi-Riemannse varieteiten met metrische tensors g_B en g_F. Zij $f > 0,\ f \in \mathfrak{F}(B)$. Het* gebogen product $M = B \times_f F$ *is de product varieteit $B \times F$ voorzien van de metrische tensor*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

In het geval dat $f = 1$ heet $B \times F$ een semi-Riemannse productvariëteit.

Er moet echter nog bewezen worden dat g inderdaad een metrische tensor is.
Bewijs: Zij $v, w \in T_{(p,q)}(B \times F)$ dan is

$$g(v,w) = g_B(d\pi(v), d\pi(w)) + f^2(p) g_F(d\sigma(v), d\sigma(w)).$$

Hieraan zien we dat g bilineair en symmetrisch is. Ook is g niet ontaard. Stel namelijk dat $g(v,w) = 0$ voor alle $w \in T_{(p,q)}(B \times F)$. Dan weten we in het bijzonder voor alle $w \in T_{(p,q)}B$ dat $d\sigma(w) = 0$ en dus $g_B(d\pi(v), d\pi(w)) = 0$. Iedere vector in $T_p(B)$ is van de vorm $d\pi(w)$, dus volgt uit de niet ontaardheid van g_B dat $d\pi(v) = 0$. Omdat f nooit 0 is volgt op dezefde manier dat $d\sigma(v) = 0$ en dus is $v = 0$.
Omdat $T_{(p,q)}(B \times F) = T_{(p,q)}B \times T_{(p,q)}F$ combineren de orthonormale bases van beide factoren tot een orthormale basis van $T_{(p,q)}(B \times F)$. Hieruit volgt dat g een constante index heeft gelijk aan ind B + ind F. $\square$

We noemen B de *basis* en F de *vezel* van $M = B \times_f F$.

4.3 Robertson-Walker ruimtetijden

De verdeling van materie in de ruimte bepaalt de vorm van de ruimte. Waarnemingen kunnen ons iets zeggen over deze verdeling. Kijken we om ons heen, dan zien we in elke richting sterren, verzameld in sterrenstelsels. Deze sterrenstelsels komen in clusters. Maar het belangrijke is dat we overal ongeveer evenveel van deze clusters zien. Er zijn geen grote leegtes of gebieden met juist enorm veel massa. De materie in het heelal is dus heel gelijkmatig verdeeld. Dit betekent dat de kromming van het heelal ook overal gelijk zal zijn. Met andere worden, deze gelijkmatige verdeling van massa heeft een ruimte met constante kromming tot gevolg. Kijken we op een later tijdstip, dan zien we dat ook dan de massa nog steeds gelijkmatig is verdeeld. Alleen de onderlinge afstanden zijn veranderd. We zien dus een kopie van onze eerdere waarneming, maar dan geschaald met een bepaalde factor. Samenvattend hebben we dus een drie dimensionale ruimte S met constante kromming, die op een tijdstip t geschaald is met een factor $f(t)$. Dit motiveert de volgende definitie.

Definitie 4.8. *Zij S een samenhangende drie dimensionale Riemannse variëteit met constante kromming $k = -1, 0$ of 1. Zij $f > 0$ een differentieerbare functie op een open interval $I \subset \mathbb{R}^1_1$. Dan heet het gebogen product*

$$M(k,f) = I \times_f S$$

een Robertson-Walker ruimtetijd.

De standaard keuzes voor S zijn de enkelvoudig samenhangende ruimtes $H^3, \mathbb{R}^3$ en S^3 met snijkromming $-1, 0$ en respectievelijk 1. We noemen S de ruimte van $M(k,f)$. Zij t de standaard coördinaat op I. We gebruiken voor de lift van t naar M dezelfde letter en noemen dit de tijd. Het stroomvectorveld $U = \partial_t$ is dat van een perfecte vloeistof, dat wil zeggen het is een tijdachtig toekomstwijzend eenheidsvectorveld. Omdat de stress-energie tensor T van $M(k,f)$ al bepaald is door de Einstein vergelijking kunnen we functies ρ en $\mathbf{p}$ vinden zodat T de gedaante krijgt gegeven in Definitie 4.4. Hiervoor hebben we eerst nog een uitdrukking nodig voor de Ricci- en scalaire kromming op een Robertson-Walker ruimtetijd. Deze is te vinden in [N] en geven we hier zonder bewijs.

Lemma 4.9. *Zij $M = M(k,f)$ een Robertson-Walker ruimtetijd met stroomvectorveld $U = \partial_t$ en zij $U \perp X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

(1) De Ricci kromming van M is gegeven door

$$\mathrm{Ric}(U,U) = -3\frac{f''}{f}, \qquad \mathrm{Ric}(U,X) = 0,$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + 2\frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right)\langle X,Y\rangle.$$

(2) De scalaire kromming van M is

$$S = 6\left(\frac{f'^{\,2}}{f} + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}\right).$$

Nu kunnen we uitdrukkingen vinden voor de druk en de energiedichtheid.

Stelling 4.10. *Als U het stroom vectorveld is van een Robertson-Walker ruimtetijd $M(k,f)$, dan is $(U, \rho, \mathbf{p})$ een perfecte vloeistof, waarbij ρ en $\mathbf{p}$ gegeven zijn door*

$$\frac{8\pi}{3}\rho = \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}, \qquad -8\pi\mathbf{p} = 2\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}.$$

Bewijs: We berekenen ρ en $\mathbf{p}$ met de uitdrukkingen gegeven na definite 4.4. Volgens de Einstein vergelijking is $T = (1/8\pi)[\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg]$. Lemma 4.9 geeft nu

$$T(X,Y) = \frac{1}{8\pi}\{[2(\frac{f'}{f})^2 + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f}]\langle X,Y\rangle - 3[(\frac{f'}{f})^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f}]\langle X,Y\rangle\}.$$

Dit vereenvoudigd tot $\mathbf{p}\langle X,Y\rangle$ voor $\mathbf{p}$ als boven. Als $\rho = T(U,U)$, dan heeft T de gewenste vorm $(\rho + \mathbf{p})U^* \otimes U^* + \mathbf{p}g$. Gebruiken we nu dat $\mathrm{Ric}(U,U) = -3f''/f$ en $-\frac{1}{2}Sg(U,U) = 3\{(f'/f)^2 + k/f^2 + f''/f\}$ en berekenen we $T(U,U)$ met behulp van de Einstein vergelijking, dan vinden we de formule voor ρ. □

We zien in het bijzonder dat ρ en $\mathbf{p}$ alleen functies zijn van t. Beide zijn constant op $S(t)$.

Gevolg 4.11.

$$-4\pi(\rho + 3\mathbf{p}) = 3\frac{f''}{f}$$

Bewijs: Uit stelling 4.10 volgt dat $-8\pi\mathbf{p} = 2f''/f + 8\pi\frac{\rho}{3}$, dus $-8\pi(\mathbf{p} + \frac{\rho}{3}) = 2\frac{f''}{f}$ en dus $-4\pi(\rho + 3\mathbf{p}) = 3\frac{f''}{f}$ □

Gevolg 4.12. *Voor een perfecte vloeistof* $(U, \rho, \mathbf{p})$ *geldt*

$$\rho' = -3(\rho + \mathbf{p})\frac{f'}{f}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\rho' = \frac{3}{8\pi}\frac{d}{dt}[(f'/f)^2 + k/f^2] = \frac{3}{8\pi}(2(f'/f)\frac{ff'' - f'^2}{f^2} - 2f'k/f^3) = \\
-\frac{3}{8\pi}\left(-2f''/f + 2(f'/f)^2 + 2k/f^2\right)(f'/f) = \\
-3\frac{3}{8\pi}\left((f'/f)^2 + k/f^2 - \frac{2}{3}f''/f - \frac{1}{3}(f'/f)^2 - \frac{1}{3}k/f^2\right)(f'/f) = \\
-3\left(\frac{3}{8\pi}[(f'/f)^2 + k/f^2] - \frac{1}{8\pi}[2f''/f + (f'/f)^2 + k/f^2]\right)(f'/f) = -3(\rho + \mathbf{p})f'/f
\end{aligned}$$

□

4.4 Voorbeeld van een Robertson-Walker ruimtetijd

Zij g de metrische tensor van $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$.

Definitie 4.13. *Zij* $n \geq 2$ *en* $0 \leq \nu \leq n$. *De* pseudosfeer *van dimensie* n *en index* ν *en straal* $r > 0$ *is de semi-Riemannse deelvariëteit van* $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ *gegeven door*

$$S^n_\nu(r) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu \ : \ g(p,p) = r^2\}.$$

Voor $\nu = 0$ is dit de gewone n-dimensionale bol. We schrijven hiervoor S^n in plaats van S^n_0. Is de straal niet aangegeven dan nemen we aan dat de straal één is. Dat wil zeggen $S^n_\nu := S^n_\nu(1)$. De metrische tensor van S^n_ν is de beperking van de metrische tensor van $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$. In het algemeen is de beperking van een metrische tensor tot een deelvariëteit altijd symmetrisch en bilineair. Maar als de index niet maximaal of minimaal is, dan is de beperking niet noodzakelijk niet-ontaard en in dat geval is de beperking dus geen metrische tensor. Dit is eenvoudig te zien aan het volgende voorbeeld.

Beschouw $\mathbb{R}^2_1$ met metrische tensor gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De diagonaal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_1 \ : x = y\}$ is een deelvariëteit van $\mathbb{R}^2_1$. De beperking van de metrische tensor tot die deelvariëteit is de nul afbeelding en is dus duidelijk ontaard. De diagonaal is dus geen semi-Riemannse deelvariëteit.

Dit voorbeeld laat zien dat het noodzakelijk is het volgende lemma te bewijzen.

Lemma 4.14. *De beperking van de metrische tensor* g *van* $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ *tot* S^n_ν *is niet ontaard.*

Bewijs: Zij $f : \mathbb{R}^{n+1}_\nu \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = g(x,x) - 1$. Dan is $S^n_\nu = f^{-1}(0)$. Zij $p \in S^n_\nu$. We identificeren $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ met $T_p(\mathbb{R}^{n+1}_\nu)$. De raakruimte $T_p(S^n_\nu)$ is de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ gegeven door

$$T_p(S^n_\nu) = \text{Ker } df_p = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu \ : g(p,x) = 0\}.$$

Er geldt $g(p,p) = 1 \neq 0$ dus $p \notin T_p(S^n_\nu)$. Omdat $T_p(S^n_\nu)$ dimensie n heeft, is $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}p \oplus T_p(S^n_\nu)$. De beperking g' van g is bilineair en symmetrisch, dus er is een basis $b_1, b_2, \ldots, b_n$ van $T_p(S^n_\nu)$ ten opzichte waarvan de matrix G' van g' diagonaal is. Uit $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}p \oplus T_p(S^n_\nu)$

volgt dat $p, b_1, b_2, \ldots, b_n$ een basis is van $\mathbb{R}^{n+1}$. Vanwege het feit dat $g(p, b_i) = 0$ voor alle i, is de matrix G van g ten opzichte van deze basis diagonaal en ziet er als volgt uit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & G' \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

De metrische tensor g is niet ontaard, dus Det $G \neq 0$. Uit de blokvorm van de matrix G volgt dat Det $G = 1 \cdot$ Det G', dus ook g' is niet ontaard. We concluderen dat g' een metrische tensor is en dat S^n_ν inderdaad een semi-Riemannse deelvariëteit is. □

Een voor de hand liggende vraag is of de vierdimensionale Lorentz variëteit S^4_1, ook wel *de Sitter ruimtetijd* genoemd, een goed model zou kunnen zijn voor het heelal. Het blijkt namelijk een voorbeeld te zijn van een Robertson-Walker ruimtetijd .

Stelling 4.15. *Zij t de standaard coördinaat op $\mathbb{R}_1$ en zij $f(t) = \cosh(t) \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_1)$. Dan is het gebogen product $M := \mathbb{R}_1 \times_f S^3$ isometrisch met de pseudosfeer S^4_1.*

Bewijs: We zien beide semi-Riemannse variëteiten zien als deelruimten van $\mathbb{R}^5_1$. We zullen een diffeomorfisme Φ van $\mathbb{R}^5_1$ geven en vervolgens laten zien dat de beperking van Φ tot M een isometrie is met S^4_1. Hiervoor is het nodig dat we eerst een volledige beschrijving van beide semi-Riemannse variëteiten en hun metrische tensoren geven en van de raakruimte aan M.

Beide variëteiten zijn vier dimensionaal. De raakruimten zijn op natuurlijke wijze vier dimensionale lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^5$. Dit betekent dat we elke raakvector met vijf coördinaten kunnen weergeven als een kolomvector in $\mathbb{R}^5$. De raakvectoren van $M \subset \mathbb{R}^5_1$ zijn ook raakvectoren van $\mathbb{R}^5_1$. De metrische tensor g van $\mathbb{R}^5_1$ geven we weer met een symmetrische 5x5 matrix G zodat voor raakvectoren u en v van $\mathbb{R}^5_1$ geldt dat $g(u, v) = u^T G v$.

We gebruiken (t, x_1, x_2, x_3, x_4) voor de standaard coördinaat functies van $\mathbb{R}^5_1$.

$$S^4_1 = \{p \in \mathbb{R}^5 \ : -t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

De bijbehorende metrische tensor duiden we ook aan met de letter g en deze is de beperking van die van $\mathbb{R}^5_1$ tot de raakruimte van S^4_1 Ten opzichte van de standaard basis wordt deze gegeven door de matrix

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit paar vormt de semi-Riemannse variëteit (S^4_1, g).

$$M = \mathbb{R}_1 \times_f S^3 = \{p \in \mathbb{R}^5 \ : t \in \mathbb{R} \text{ en } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Laat π de projectie van M op $\mathbb{R}_1$ en σ de projectie van M op S^3 zijn. Dan is de metrische tensor g_M van M per definitie gelijk aan

$$g_M = \pi^* g_{\mathbb{R}_1} + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_{S^3}.$$

De bijbehorende matrix $G_M(p)$ van $g_M(p)$ in het punt $p = (t, x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$ wordt gegeven door

$$G_M(p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cosh(t)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Vervolgens geven we een basis van de raakruimte $T_p(M)$ aan de semi-Riemannse variëteit (M, g_M). We doen dit voor een punt $p = (t, x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$. Omdat $0 \notin S^3$ mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $x_4 \neq 0$. We berekenen de raakvectoren voor het geval dat $x_4 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$. Als x_4 negatief is, krijgt de laatste coördinaat een tegengesteld teken. We berekenen de eerste raakvector

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}(p) = (\frac{\partial t}{\partial t}, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t}, \frac{\partial \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{\partial t})^T = (1, 0, 0, 0, 0)^T.$$

en voor $1 \leq i \leq 3$ de vector

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (\frac{\partial t}{\partial x_i}, \frac{\partial x_1}{\partial x_i}, \frac{\partial x_2}{\partial x_i}, \frac{\partial x_3}{\partial x_i}, \frac{\partial \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{\partial x_i})^T = (0, \delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, -\frac{x_i}{x_4})^T.$$

Nu kunnen we $T_p(M)$ expliciet beschrijven:

$$\mathbb{R}^5 \supset T_p(M) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{x_1}{x_4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{x_2}{x_4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{x_3}{x_4} \end{pmatrix} \right\}.$$

Na deze voorbereidingen kunnen we een diffeomorfisme Φ van $\mathbb{R}^5_1$ geven. We doen dit in twee stappen. We beginnen met een diffeomorfisme φ en we stellen φ samen met een diffeomorfisme ς. De samenstelling van diffeomorfismen is weer een diffeomorfisme en we zullen ς zo kiezen dat de beperking tot M van de samenstelling $\Phi = \varphi \circ \varsigma$ een isometrie wordt, dat wil zeggen $\Phi^* g = g_M$.

Ieder punt p in $\mathbb{R}^5_1$ kunnen we noteren als $p = (t, x)^T \in \mathbb{R}^5$ met $t \in \mathbb{R}_1$ en $x \in \mathbb{R}^4$. We definiëren $\varphi : \mathbb{R}^5_1 \to \mathbb{R}^5_1$ door

$$\varphi((t, x)^T) = (t, \sqrt{t^2 + 1} \cdot x)^T.$$

Het is duidelijk dat φ differentieerbaar is. Houden we t vast, dan is $\varphi(t \times S^3) = t \times S^3(\sqrt{t^2 + 1})$. Intuïtief laat φ de eerste coördinaat onveranderd en blaast de bol met straal 1 op naar een bol met straal $\sqrt{t^2 + 1}$. Nu definiëren we $\psi : \mathbb{R}^5_1 \to \mathbb{R}^5_1$ door

$$\psi((t, x)^T) = (t, \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} x)^T.$$

Het is duidelijk dat ψ differentieerbaar is. Het is eenvoudig na te gaan dat $(\psi \circ \varphi) = \text{id}$ en $(\varphi \circ \psi) = \text{id}$ dus φ en ψ zijn diffeomorfismen.

Zij $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een diffeomorfisme. We nemen aan dat $\varsigma : \mathbb{R}^5_1 \to \mathbb{R}^5_1$ de volgende vorm heeft

$$\varsigma(t, x) = (s(t), x).$$

Het is duidelijk dat ς in dit geval inderdaad een diffeomorfisme van $\mathbb{R}^5_1$ is. De afbeelding $\Phi = \varphi \circ \varsigma$ krijgt hiermee de volgende gedaante

$$\Phi((t, x)^T) = (s(t), \sqrt{s(t)^2 + 1} \cdot x)^T.$$

en inverse

$$\Phi^{-1}((t,x)^T) = (s^{-1}(t), \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot x)^T.$$

Nu moet nog aangetoond worden dat $\Phi(M) \subset S_1^4$ en $\Phi^{-1}(S_1^4) \subset M$.

Zij $(t,x)^T \in M$. Dan is $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = 1$, want $x \in S^3$. Dus

$$g((s(t), \sqrt{s(t)^2+1} \cdot x)^T, (s(t), \sqrt{s(t)^2+1} \cdot x)^T) = -s(t)^2 + (s(t)^2+1)\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = 1.$$

Dus $\Phi((t,x)^T) \in S_1^4$. Zij nu omgekeerd $(t,x)^T \in S_1^4$. Dan is $-t^2 + \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = 1$. Dus $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = 1 + t^2$. Voor $\Phi^{-1}((t,x)^T) = (s^{-1}(t), \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot x)^T$ is $s^{-1}(t) \in \mathbb{R}$ en

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot x, \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot x \right\rangle_{\mathbb{R}^4} = \frac{1}{t^2+1}\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^4} = 1.$$

Dus $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot x \in S^3$ en dus $\Phi^{-1}((t,x)^T) \in M$.

Nu berekenen we de matrix van de pullback Φ^*g. Voor raakvectoren $u, v \in T_p(M)$ is de pullback gedefiniëerd door $\Phi^*g(u,v) = g(d\Phi(u), d\Phi(v))$. Hierin is $d\Phi : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(S_1^4)$ de raakafbeelding van Φ. Deze is lineair en kan dus gerepresenteerd worden door een matrix, namelijk de Jacobi matrix $D\Phi(p) = (\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(p))_{i,j=0}^4$. Hierbij is $x_0 = t$, $\Phi_0(p) = s(t)$ en voor $1 \leq i \leq 4$ is $\Phi_i(p) = \sqrt{s(t)^2+1}x_i$. Het berekenen van alle partiële afgeleiden geeft de Jacobi matrix

$$D\Phi(p) = \begin{pmatrix} s'(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s'(t)\frac{s(t)}{\sqrt{s(t)^2+1}}x_1 & \sqrt{s(t)^2+1} & 0 & 0 & 0 \\ s'(t)\frac{s(t)}{\sqrt{s(t)^2+1}}x_2 & 0 & \sqrt{s(t)^2+1} & 0 & 0 \\ s'(t)\frac{s(t)}{\sqrt{s(t)^2+1}}x_3 & 0 & 0 & \sqrt{s(t)^2+1} & 0 \\ s'(t)\frac{s(t)}{\sqrt{s(t)^2+1}}x_4 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{s(t)^2+1} \end{pmatrix}.$$

Voor raakvectoren $u, v \in T_p(M)$ is $d\Phi_p(v) = D\Phi(p)v$. Dus

$$\Phi^*g(u,v) = g(d\Phi(u), d\Phi(v)) = d\Phi(u)^T \cdot G \cdot d\Phi(v) = u^T D\Phi(p)^T \cdot G \cdot D\Phi(p)v.$$

De matrix van de pullback $(\Phi^*G)(p)$ in het punt p is dus $D\Phi(p)^T \cdot G \cdot D\Phi(p) =$

$$(\Phi^*G)(p) = \begin{pmatrix} -s'(t)^2(1 - \frac{s(t)^2}{s(t)^2+1}) & s(t)x_1 & s(t)x_2 & s(t)x_3 & s(t)x_4 \\ s(t)x_1 & s(t)^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ s(t)x_2 & 0 & s(t)^2+1 & 0 & 0 \\ s(t)x_3 & 0 & 0 & s(t)^2+1 & 0 \\ s(t)x_4 & 0 & 0 & 0 & s(t)^2+1 \end{pmatrix}.$$

Bij de berekening hiervan is $(\Phi^*G)_{00}$ vereenvoudigd met behulp van $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. De matrices $(\Phi^*G)(p)$ en $G_M(p)$ zijn verschillend. Desondanks is het met een geschikte keuze van s mogelijk dat $g_M(u,v)$ en $\Phi^*g(u,v)$ overeenkomen voor alle $u, v \in T_p(M)$.

In het punt $p \in M$ berekenen we voor $1 \leq i, j \leq 4$

$$g_M(\partial_0, \partial_0) = \partial_0^T G_M \partial_0 = -1 \tag{9}$$
$$g_M(\partial_0, \partial_i) = \partial_0^T G_M \partial_i = 0 \tag{10}$$
$$g_M(\partial_i, \partial_j) = \partial_i^T G_M \partial_j = \cosh(t)^2(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_4^2}) \tag{11}$$
$$\Phi^*g(\partial_0, \partial_0) = \partial_0^T \Phi^*G \partial_0 = -s'(t)^2(1 - \frac{s(t)^2}{s(t)^2+1}) \tag{12}$$
$$\Phi^*g(\partial_0, \partial_i) = \partial_0^T \Phi^*G \partial_i = s(t)x_i - \frac{x_i}{x_4}s(t)x_4 = 0 \tag{13}$$
$$\Phi^*g(\partial_i, \partial_j) = \partial_i^T \Phi^*G \partial_j = (s^2(t)+1)(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{x_4^2}) \tag{14}$$

Nu bepalen we $s(t)$ zodat de eerste drie vergelijkingen overeenkomen met de laatste drie. Aan de gelijkheid van (10) en (13) wordt automatisch voldaan. Gelijkstellen van (9) en (12) geeft een differentiaalverglijking voor s die te vereenvoudigen is tot

$$(s')^2 - s^2 = 1.$$

Uit de relaties $\frac{d}{dt}\sinh(t) = \cosh(t)$ en $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ blijkt dat $s(t) = \pm\sinh(t)$ een oplossing is. Daarmee is (11) meteen gelijk aan (14). Bovendien is $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ een diffeomorfisme van $\mathbb{R}$, zoals vereist. Nu is $\Phi|_M : M \to S_1^4$ een diffeomorfisme waarvoor bovendien geldt dat $\Phi^* g = g_M$ voor alle raakvectoren in $T_p(M)$, dus een isometrie. $\square$

Omdat S^3 samenhangend en drie dimensionaal is en constante kromming heeft, kunnen we concluderen dat M een Robertson-Walker ruimtetijd is.

4.5 Kosmologie

Het maken van een model van het heelal is niet eenvoudig. De materie in het heelal bepaalt de stress-energie tensor T. We weten echter niet wat voor een ruimte een goede beschrijving geeft van ons heelal. Nemen we een ruimtetijd M. Dan heeft deze een bepaalde Ricci kromming. De stress-energie tensor wordt door middel van de Einstein vergelijking volledig bepaald door de Ricci kromming. Deze stress-energie tensor moet dus in overeenstemming zijn met de materie in het heelal. Is dit het geval, dan is de ruimtetijd M een goed model voor het heelal.

Het blijkt dat Robertson-Walker ruimtetijden een goede beschrijving geven van het heelal. Hebben we eenmaal een model, dan is het mogelijk om daarmee voorspellingen te doen en enkele eigenschappen van het heelal te bepalen. Daarvoor is het noodzakelijk enige dingen te weten over de functies $\rho, \mathbf{p}$ en f. Deze functies hebben een duidelijke fysische interpretatie en de natuurkunde kan ons hier meer over zeggen.

Edwin Hubble heeft in 1929 gemeten dat het heelal op dit moment aan het expanderen is. Hij ontdekte dat alle sterrenstelsels van ons af bewegen met een snelheid die evenredig is met de afstand. Deze evenredigheidsconstante is de Hubble constante

$$H_0 = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}.$$

Hierin is het tijdstip t_0 het heden. Het feit dat alles van ons af beweegt wil zeggen dat $H_0 > 0$.

De energie dichtheid ρ is altijd positief. Bovendien geldt voor alle bekende vormen van materie dat energiedichtheid het wint van druk, $\rho > |\mathbf{p}|$. Metingen wijzen uit dat op dit moment de druk positief is, maar veel kleiner dan de energiedichtheid, $\rho_0 \gg \mathbf{p}_0 > 0$. In het bijzonder is het fysisch realistisch om aan te nemen dat $\rho + 3\mathbf{p} > 0$. Dit heeft, samen met $H_0 > 0$ een belangrijk gevolg, Een van de meest fundamentele eigenschappen is namelijk dat de wereld niet altijd al heeft bestaan, maar dat er een begintijdstip is.

Stelling 4.16. *Zij $M(k, f) = I \times_f S$. Als $H_0 > 0$ op een tijdstip t_0, en $\rho + 3p > 0$, dan heeft I een beginpunt t_* met $t_0 - H_0^{-1} < t_* < t_0$, en of (1) $f' > 0$ of (2) f heeft een maximum waarde na t_0 en I is een eindig interval (t_*, t^*).*

Bewijs: Volgens gevolg 4.11 volgt uit de aanname $\rho + 3\mathbf{p} > 0$ dat $f'' < 0$. Hiermee kunnen we aantonen dat de grafiek van f altijd onder de raaklijn $F(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ in het punt t_0 ligt. Dat wil zeggen $f(t) < F(t)$ voor alle $t \neq t_0$.
Stel er is een $s \neq t_0$ waarvoor $f(s) = f(t_0) + f'(t_0)(s - t_0)$. Volgens de middelwaarde stelling bestaat er dan een $c \in (t_0, s)$ als $s > t_0$ of een $c \in (s, t_0)$ als $s < t_0$, zodanig dat $f(s) - f(t_0) = f'(c)(s - t_0)$. Dus $f'(c) = f'(t_0)$. Nogmaals de middelwaarde stelling toepassen geeft een $d \in (c, t_0)$ of $d \in (t_0, c)$ zodanig dat $f'(c) - f'(t_0) = (c - t_0)f''(d) = 0$. Dus $f''(d) = 0$, maar $f'' < 0$ dus dit is een tegenspraak. Hieruit volgt dat $f(t) \neq F(t)$ als $t \neq t_0$.

Om te laten zien dat $f(t) < F(t)$ is het nu voldoende dit te laten zien voor één $t > t_0$ en één $t < t_0$. We beschouwen de Taylor expansie

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^3).$$

We weten dat als $t \to t_0$ dan is $(t-t_0)^2 > |O((t-t_0)^3)|$. Omdat $f''(t_0) < 0$ is $\frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) < 0$. Dus voor t dichtbij t_0 hebben we $f(t) = F(t) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) < F(t)$.

De lijn $F(t) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0)$ heeft nulpunt $t_0 - H_0^{-1}$ en is stijgend, want $H_0 > 0$. We weten dat $f > 0$, dus de grafiek van $f(t)$ is ingesloten in de driehoek gevormd door de t-as en de lijn $F(t)$. We zien dat als t daalt vanaf t_0, f een singulariteit $t_* > t_0 - H_0^{-1}$ moet hebben voordat t het nulpunt van F bereikt.
Omdat $f'' < 0$ is f' injectief en overal dalend. Dus $f' > 0$ of f' heeft precies één nulpunt waarna $f' < 0$. In het laatste geval volgt uit eenzelfde argument dat f nog een singulariteit $t^* > t_0$ heeft en dus is I dan een eindig interval (t_*, t^*). □

We zien dat het heelal pas een eindige tijd heeft bestaan en H_0^{-1} is een bovengrens voor de huidige leeftijd. Bovendien zien we dat het heelal of blijft expanderen of een maximale grote bereikt en na een eindige tijd krimpen een einde heeft.

We bekijken nogmaals ons voorbeeld S_1^4. Dit is een Robertson-Walker ruimtetijd met schalingsfunctie $f = \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, en afgeleide $f' = \sinh(t)$. We merken twee dingen op:
1) f is onbegrensd en 2) f voldoet niet aan $f' > 0$ voor alle t.
De functie $f = \cosh(t)$ voldoet dus niet aan de implicaties van stelling 4.16. Dus voldoet S_1^4 als model voor het heelal niet aan de beginvoorwaarden van deze stelling. We concluderen dat de functies ρ en $\mathbf{p}$, die bepaald worden door f, samen geen realistische beschrijving geven van de stress-energie tensor in het heelal. Intuïtief beschrijft S_1^4 een heelal zonder begin, dat al een oneindig lange tijd aan het krimpen is tot een zeker tijdstip $t = 0$. Daar een minimum grootte bereikt en vervolgens weer expandeert en onbegrensd groot wordt.

Definitie 4.17. *Een begin singulariteit van $M(k, f)$ in t_* heet een* oerknal *als $f \to 0$ en $f' \to \infty$ waneer $t \to t_*$. Een eind singulariteit in t^* heet een* eindkrak *als $f \to 0$ en $f' \to -\infty$ waneer $t \to t^*$.*
We zeggen dat $M(k, f)$ een fysische singulariteit *heeft in t_* (of t^*) als $\rho \to \infty$ waneer $t \to t_*$ (of t^*).*

We zien aan de formule voor ρ in stelling 4.10 direct dat de oerknal en eindkrak fysische singulariteiten zijn. Stelling 4.16 zegt niet dat in het expanderende geval, dit oneindig lang duurt. Wellicht heeft ook in dit geval het heelal een einde. Ook zegt 4.16 niet dat het heelal klein begint, dat wil zeggen $f \to 0$ als $t \to t_*$. Het zal blijken dat dit laatste onder een aantal voorwaarden wel het geval is.

Stelling 4.18. *Veronderstel dat $M(k, f) = I \times_f S$. alleen fysische singulariteiten heeft en dat I maximaal is. Als $H_0 > 0$ voor een t_0, $\rho > 0$ en $-\frac{1}{3} < a \leq \mathbf{p}/\rho \leq A$ voor constanten a, A, dan geldt*

(1) De begin singulariteit is een oerknal

(2) Als $k = 0$ of -1, dan is $I = (t_*, \infty)$ en als $t \to \infty$, dan $f \to \infty$ en $\rho \to 0$.

(3) Als $k = 1$, dan bereikt f een maximum, gevolgd door een eindkrak, dus I is een eindig interval (t_*, t^*).

Bewijs: We hebben $\frac{1}{\rho}(\rho+3\mathbf{p}) = 1+3\frac{\mathbf{p}}{\rho} \geq 1+3a \geq 0$, dus volgens gevolg 4.11 is $f'' < 0$. Nu is aan de voorwaarden van stelling 4.16 voldaan, dus er is een beginsingulariteit t_*, deze is volgens de aanname een fysische singulariteit. Voor (1) moeten we laten zien dat $f \to 0$ en $f' \to \infty$ waneer $t \to t_*$.
We merken op dat $f'' < 0$ en $H_0 > 0$ impliceert $f' > 0$ op het interval (t_*, t_0). Omdat $\mathbf{p} \leq A\rho$ geeft 4.12

$$\rho' = -3(\rho+\mathbf{p})f'/f \geq -C\rho f'/f \quad \text{waarbij} \quad C = 3(A+1) > 2.$$

Vermenigvuldigen met f^C geeft $\rho' f^C \geq -C\rho f' f^{C-1}$ en dus is $(\rho f^C)' = \rho' f^C + C\rho f' f^{C-1} \geq 0$. Dus $\rho f^C \leq \rho(t_0)f(t_0)^C$ voor alle $t \in (t_*, t_0)$. Volgens de aanname dat $M(k,f)$ alleen fysische singulariteiten heeft gaat $\rho \to \infty$ waneer $t \to t_*$. Omdat ρf^C eindig blijft, moet $f \to 0$.
Nemen we $0 < \varepsilon \leq (1+3a)$ dan is $\rho - \varepsilon\rho \geq (1-1-3a)\rho = -3a\rho \geq -3\mathbf{p}$ en dit geeft

$$\rho' \leq -(3\rho - \rho + \varepsilon\rho)f'/f = -(2+\varepsilon)\rho f'/f$$

en analoog aan bovenstaande volgt $(\rho f^{2+\varepsilon})' \leq 0$ voor alle $t \in (t_*, t_0)$.
Dus $\rho f^{2+\varepsilon} \geq B := \rho(t_0)f(t_0)^{2+\varepsilon}$ op dit interval. Dus $\rho f^2 \geq B/f^\varepsilon$. Als $t \to t_*$, dan $f \to 0$ en dus $\rho f^2 \to \infty$. Dus volgens de formule voor ρ in stelling 4.10 hebben we $f'^2 + k \to \infty$ en dus $f' \to \infty$. Dit bewijst (1).

Nu onderscheiden we twee gevallen. Geval i) f heeft een maximum op een t_m.
Daar is $f'(t_m) = 0$, we vinden $0 < \rho(t_m) = 3k/(8\pi f^2(t_m))$, dus $k = 1$. Omdat f een maximim heeft op t_m en $f'' < 0$, is $f'(t) < 0$ voor alle $t > t_m$. Volgens eenzelfde argument als voor t_* is de eindsingulariteit op $t^* > t_m$ een eindkrak. Dit laat zien dat als I geen oneindig interval is, dan is $k \neq 0$ en $k \neq -1$. Dit is equivalent met het begin van bewering (2).

Geval ii) f heeft geen maximum.
Dan is $f' > 0$ op het hele interval I. De ongelijkheden $\rho > 0$ en $\rho + 3\mathbf{p} > 0$ impliceren $\rho + \mathbf{p} > 0$. Lemma 4.12 geeft nu $\rho' < 0$. Ook is $\rho > 0$, dus als t toeneemt, blijft ρ eindig. Dus er zijn geen fysische singulariteiten als t toeneemt. Dus $I = (t_*, \infty)$.

Stel $f \not\to \infty$ als $t \to \infty$. Dat wil zeggen f is begrensd. We laten zien dat dit niet het geval kan zijn. Omdat $f' > 0$ is f injectief. Zeg $f \to b$ als $t \to \infty$. Dan $0 < f \leq b$ en we weten dat $f'' < 0, \;\; f' > 0$, dus moet $f' \to 0$. Anders zou na een eindige tijd $f > b$. Uit de formule voor ρ in stelling 4.10 volgt nu dat $\rho f^2 \to \frac{3}{8\pi}k$, dus $k \neq -1$, dus $k = 0$ of $k = 1$.

Uit het voorgaande zien we $(\rho f^C)' \geq 0$, dus $\rho f^C \not\to 0$. $\rho f^C = \rho f^2 f^{C-2} = \frac{3}{8\pi}(f'^2 + k)f^{C-2}$, dus $\rho f^C \to \frac{3}{8\pi}kb^{C-2} \neq 0$. Dus $k \neq 0$, dus $k = 1$. Hieruit volgt $\rho f^2 \to \delta := \frac{3}{8\pi}$. Omdat als $t \to \infty$ dan $f' \to 0$, gaat ook $f'' \to 0$. Dus $3f''/f \to 0$, maar $\rho + 3\mathbf{p} \geq \varepsilon\rho \geq \varepsilon\delta > 0$. Dit geeft tegenspraak met gevolg 4.11. Dus f is onbegrensd.

Om het bewijs af te maken moeten we nog laten zien dat als f onbegerensd is, dan $k \neq 1$ en $\rho \to 0$.
Stel $f \to \infty$ als $t \to \infty$. We weten $\rho f^{2+\varepsilon} > 0$ en $(\rho f^{2+\varepsilon})' \leq 0$ voor alle t, dus $\rho f^{2+\varepsilon} \to B$ als $t \to \infty$. Dus $\rho f^2 \to B/f^\varepsilon$. Als $t \to \infty$, dan $f \to \infty$ en dus $\rho \to 0$ en $\rho f^2 \to 0$. Dus $f'^2 + k \to 0$, dus $k \neq 1$. Dus $k = 0$ of $k = -1$. □

Onder de voorwaarden van bovenstaande stelling, zien we dat de toekomst van het heelal volledig wordt bepaald door het teken van de snijkromming k. Deze hangt af van de huidige energiedichtheid ρ_0 en de Hubble constante $H_0 = f_0'/f_0$.

Lemma 4.19. *Zij $\rho_c = 3(H_0)^2/8\pi$, deze constante noemen we de kritische energie dichtheid. Als $\rho_0 \leq \rho_c$, dan is $k = 0$ of $k = -1$ en blijft het heelal voor altijd expanderen. Als $\rho_0 > \rho_c$, dan is $k = 1$ en zal het heelal ineenstorten.*

Bewijs: We berekenen $\rho_0 - \rho_c$ met behulp van stelling 4.10.

$$\rho_0 - \rho_c = \frac{3}{8\pi}(f'(t_0)/f(t_0))^2 + \frac{3}{8\pi}k/f(t_0)^2 - \frac{3}{8\pi}(f'(t_0)/f(t_0))^2 = \frac{3}{8\pi}k/f(t_0)^2$$

Hieruit volgt dat als $\rho_0 > \rho_c$, dan moet $k = 1$ zijn en als $\rho_0 < \rho_c$, dan moet $k = -1$ zijn. $\rho_0 = \rho_c$ precies wanneer $k = 0$. $\square$

Op dit moment doen metingen aan de energiedichtheid vermoeden dat deze ongeveer gelijk is aan de kritische energiedichtheid. Het bepalen van ρ_0 is moeilijk. Men vermoed namelijk dat er donkere materie in het heelal bestaat. Het is niet duidelijk hoeveel de bijdrage hiervan aan de energie dichtheid is. Omdat de geschatte waarde van ρ_0 zo dicht bij de kritische waarde ligt, kan geen van twee bovenstaande toekomstscenario's worden uitgesloten. Dus het is tot nog toe niet met zekerheid te zeggen wat de toekomst van het heelal is.

Referenties

[N] O'Neill, B. Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, *Academic Press*, 1983.

[J] Jänich, K. Vector Analysis, *Springer*, 2000.

[C] Carroll, S.M. Spacetime and Geometry, an introduction to general relativity *Pearson Addison Wesley*, 2004.