Oneven perfekte getallen

Roelands, M.

Oneven perfecte getallen

Mark Roelands

Bachelorscriptie Wiskunde

onder begeleiding van Prof. H. W. Lenstra

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Deze scriptie is geschreven naar aanleiding van een bachelor-onderzoek. Het onderwerp betreft een vermoeden uit de getaltheorie dat zegt dat er geen *oneven* perfecte getallen bestaan. Ter introductie zal eerst gedefinieerd worden wat een perfect getal is en daarna een specifiekere karakterisering van de *even* perfecte getallen gegeven worden.

De bedoeling is het genoemde vermoeden van een enigszins redelijke onderbouwing te voorzien. Deze onderbouwing bestaat uit het gebruik van kansfuncties die aan een oneven geheel getal $n \in \Gamma \subseteq \{x \in \mathbb{Z}_{>0} : x \equiv 1(\text{mod } 2)\}$ een bepaalde kans p_n toekennen om perfect te zijn:

$$P(n = \begin{array}{c} \text{is perfect} \\ \text{is niet perfect} \end{array}) = \begin{cases} p_n \\ 1 - p_n \end{cases}.$$

Op deze manier kan er gekeken worden naar de som van de verwachtingswaarden van deze kansfuncties om een perceptie te krijgen van de hoeveelheid *oneven* perfecte getallen in Γ die we volgens dit speculatieve model verwachten. Deze som is gelijk aan

$$\sum_{n\in\Gamma}(1 \times P(n \text{ is perfect}) + 0 \times P(n \text{ is niet perfect})) = \sum_{n\in\Gamma} p_n.$$

De uitspraak die een onderbouwing voor het vermoeden dat er geen *oneven* perfecte getallen bestaan geeft, heeft te maken met waarden die $\sum_{n\in\Gamma} p_n$ aanneemt. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van een lemma van Émile Borel en Francisco Paolo Cantelli [5, sec. 16, §3].

Lemma (Borel-Cantelli): *Laat $G_1, G_2, \ldots$ een serie gebeurtenissen zijn in een kansruimte. Als geldt dat de som van de kansen op die gebeurtenissen $\sum_{n=1}^{\infty} P(G_n)$ convergeert, dan is de kans deze gebeurtenissen oneindig vaak plaatsvinden, gelijk aan 0.*

De uitspraken die over het verwachte aantal *oneven* perfecte getallen worden gedaan heten ook wel *heuristische argumenten*. Er zal een hoofdstuk besteed worden aan de betekenis van een dergelijk argument, waarom deze gebruikt worden en in hoeverre uitgegaan kan worden van een betrouwbaar resultaat.

Er worden in totaal drie verschillende kansfuncties bekeken; elk van deze is opgebouwd door eigenschappen die een eventueel *oneven* perfect getal zou moeten bezitten, te gebruiken. Het laatste speculatieve model zal aanleiding geven om te verwachten dat er maar eindig veel *oneven* perfecte getallen bestaan.

De wonderlijke schoonheid van de structuren die de gehele getallen bezitten laten mij telkens weer verbaasd zijn en ik hoop derhalve dat het lezen van deze scriptie net zoveel plezier zal geven als ik heb ervaren tijdens het schrijven.

> *"There is no permanent place in this world for ugly mathematics."*
>
> *G.H. Hardy*

2 Perfecte getallen

Definitie: *Een getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ heet perfect als n gelijk is aan de som van zijn positieve delers die kleiner zijn dan n.*

Voorbeelden van perfecte getallen zijn 6 en 28, immers geldt dat 1+2+3 gelijk is aan 6 en 1+2+4+7+14 gelijk is aan 28. De functie die als uitkomst de som van de positieve delers van een getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ inclusief n zelf heeft, geeft men aan met σ. Er geldt dus dat een getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ perfect is dan en slechts dan als $\sigma(n) = 2n$.

Zoals bekend, is elk getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ te schrijven als eindig produkt van machten van zijn priemdelers: $n = \prod_{p \text{ priem}} p^{a_p}$, met alle $a_p \in \mathbb{Z}_{>0}$ en p lopende over alle priemdelers van n. Hiermee kunnen we een uitdrukking vinden voor de som van de delers van een geheel getal n.

Stelling: *Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan is $\sigma(n)$, met p lopende over de priemdelers van n, te schrijven als*

$$\sigma(n) = \sigma(\prod_{p \text{ priem}} p^{a_p}) = \prod_{p \text{ priem}} \sum_{j=0}^{a_p} p^j = \prod_{p \text{ priem}} \frac{p^{a_p+1} - 1}{p - 1}.$$

De uitdrukkingen $\prod_{p \text{ priem}} \sum_{j=0}^{a_p} p^j$ en $\prod_{p \text{ priem}} \frac{p^{a_p+1}-1}{p-1}$ zijn handig bij het bewijzen van sommige stellingen die gebruik maken van de σ-functie en zullen daarom later nog een aantal keer gebruikt worden.

Perfecte getallen zijn onder te verdelen in twee categorieën, namelijk de *even* en de *oneven* perfecte getallen. Dit is een zinvolle onderverdeling, omdat in het geval van de *even* perfecte getallen de mogelijkheid bestaat deze te identificeren met specifieke getallen; namelijk de *Euclidische* getallen. Voor wat betreft de *oneven* perfecte getallen is het zo dat men nog in het duister tast aangaande een dergelijke identificatie. De volgende stelling [4, ch. 16, §8, thm. 277], afkomstig van Euclides en Euler, zegt welke karakteriserende eigenschappen dit zijn:

Stelling: *Een even getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ is perfect dan en slechts dan als geldt dat n een Euclidisch getal is, oftewel, n is van de vorm $2^{k-1}(2^k - 1)$ met $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $2^k - 1$ een priemgetal.*

Bewijs: Enerzijds geldt dat als n van de vorm $2^{k-1}(2^k - 1)$ is met $2^k - 1$ priem, dan volgt dat

$$\sigma(n) = \sigma(2^{k-1}(2^k - 1)) = 2^k \sigma(2^{k-1}) = 2^k \sum_{j=0}^{k-1} 2^i = 2^k(2^k - 1) = 2n.$$

Anderzijds geldt dat elk even getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ te schrijven is als $2^{k-1}b$ met b een oneven getal en $k > 1$. Er geldt dat

$$2^k b = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^{k-1}b) = (2^k - 1)\sigma(b),$$

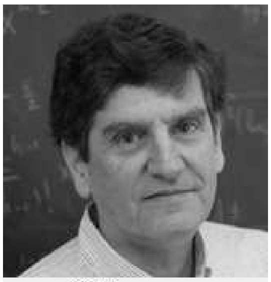
waaruit volgt dat $b = (2^k - 1)(\sigma(b) - b)$. Omdat $2^k - 1 > 1$ volgt dat $\sigma(b) - b$ een deler is van b die kleiner is dan b. Stel dat $\sigma(b) - b > 1$, dan geldt dat $\sigma(b) \geq b + (\sigma(b) - b) + 1 = \sigma(b) + 1$, hetgeen een tegenspraak oplevert; dus $\sigma(b) = b + 1$ waaruit volgt dat b priem is en $b = 2^k - 1$. ∎

Priemgetallen van de vorm $2^k - 1$ heten ook wel *Mersenne-priemgetallen*. Hier moet k ook een priemgetal zijn. Elk van deze *Mersenne-priemgetallen* geeft dus aanleiding tot een *even* perfect getal. Als we k gelijk aan 2 nemen krijgen we het perfecte getal 6 en als we k gelijk aan 3 nemen dan krijgen we het perfecte getal 28; de bovengenoemde voorbeelden.

Tot op de dag van vandaag is er geen *oneven* perfect getal bekend en men vermoedt dat *oneven* perfecte getallen simpelweg niet bestaan! Dat dit nog een vermoeden is volgt uit het feit dat men nog niet in staat is hier een bewijs voor te geven.

Volgens een stelling van Dickson [3], is voor elk positief geheel getal k het aantal *oneven* perfecte getallen met precies k verschillende priemfactoren *eindig*. Gerelateerd hieraan is er door meerdere wiskundigen onderzoek gedaan naar het minimale aantal verschillende priemdelers dat een oneven getal moet hebben, wil deze überhaupt een kandidaat worden om perfect te zijn. Het meest recente resultaat, gevonden door Pace Nielsen [6], is dat dit er minimaal negen moeten zijn. Praktisch gezien is dit een interessant resultaat, omdat het voor wat betreft numeriek werk erg efficiënt is. Theoretisch gezien zegt dit niet al te veel over het eventuele bestaan van *oneven* perfecte getallen; er blijven immers nog oneindig veel oneven getallen met minimaal negen verschillende priemfactoren over, die mogelijkerwijs deze eigenschap kunnen bezitten!

Het is echter wel mogelijk om met behulp van analyse omtrent het gedrag van de σ-functie bij oneven n een enigszins geloofwaardige onderbouwing van bovengenoemd vermoeden te krijgen. Degene die een dergelijke onderbouwing heeft gegeven, welke tot op de dag van vandaag ongepubliceerd blijft, is Professor Emeritus Carl Pomerance, een gerespecteerd getaltheoreticus werkzaam aan de universiteit te Dartmouth.



Carl Pomerance

De methodiek van zijn onderbouwing heeft te maken met een speculatief model waarmee beargumenteerd wordt dat het aannemelijk is om eindig veel *oneven* perfecte getallen te verwachten. Het gebruik van dit soort argumentatie behoort tot de *heuristische wiskunde* en luistert naar de naam *heuristisch argument*. Om van de betekenis alsmede het filosofische nut hiervan een indruk te krijgen, zal er in het volgende hoofdstuk aandacht aan geschonken worden.

3 Heuristiek

Heuristiek betekent letterlijk *de leer van het methodisch vinden*. Wiskunde is het verlangen om de aanwezigheid van bepaalde structuren en patronen, vaak afkomstig van vermoedens, te willen bewijzen. Met behulp van de beschikbare bewijsmethoden kan het gewenste resultaat in veel gevallen verkregen worden en zal een dergelijk vermoeden een *stelling* produceren.

Helaas is het zo dat, door een gebrek aan te gebruiken stellingen of beschikbare technieken, veel vermoedens *nog* onbewijsbaar zijn en wellicht altijd onbewijsbaar blijven. Het is vaak wel mogelijk om, uitgaande van bijvoorbeeld de beschikbare numerieke gegevens of een geschikt gedachtenexperiment, uitspraken te doen over de aanwezigheid van deze structuren en patronen; dit soort uitspraken worden *heuristische argumenten* genoemd. Deze argumenten zijn alleen niet *exact* en kunnen daarom de mogelijkheid niet uitsluiten om sceptisch over de geloofwaardigheid ervan te blijven. Daartegenover staat dat de methode om *heuristische argumenten* te gebruiken kan leiden tot een beter inzicht in de *waarheid* van het vermoeden, hetgeen betekent dat de methode niet evident fout hoeft te zijn.

Naast het feit dat *heuristiek* in de getaltheorie zich voornamelijk bezighoudt met de *waarheid* van beweringen, is het ook mogelijk om met behulp van een *heuristisch argument* een bepaalde mate van overtuiging te geven aan een te gebruiken tactiek betreffende een bewijsmethode; oftewel, is het aannemelijker om te zoeken naar een tegenvoorbeeld? Of zal het aannemelijker zijn om een rechtstreeks bewijs te creëren? Het kunnen beantwoorden van dit soort vragen is tevens van groot belang. Duidelijk is dat de kwaliteit van deze argumentatie grotendeels afhankelijk is van de vakkundigheid van de desbetreffende onderzoeker; het is immers zo dat iemand met meer vakkennis in staat zou moeten zijn om een scherpere argumentatie te geven, en zich dus hiermee geloofwaardiger weet te maken.

Om een voorbeeld te geven van een *heuristisch argument* bekijken we de verzameling van positieve geheeltallige oplossingen van de Diophantische vergelijking:

$$x^p + y^q = z^r, \text{ voor vaste } p, q, r \in \mathbb{Z}_{>1} \text{ met ggd}(x,y,z)=1.$$

We nemen hier de ggd(x,y,z) gelijk aan 1, omdat het anders mogelijk is om oplossingen te maken als we dit niet eisen.

Neem bijvoorbeeld $p = 3$, $q = 4$ en $r = 5$. Dan kunnen we beginnen met $(1 + 1) = 2$ en op zoek gaan naar een getal $\eta \in \mathbb{Z}_{>0}$ met $\eta \equiv 0(\text{mod } 3)$, $\eta \equiv 0(\text{mod } 4)$ en $\eta \equiv 4(\text{mod } 5)$ zodat $2^\eta(1 + 1) = 2^\eta 2$ een oplossing geeft. $\eta = 24$ voldoet; immers geldt dat $(2^8)^3 + (2^6)^4 = (2^5)^5$.

De bedoeling is dat er met behulp van een geschikte speculatie gekeken wordt naar het verwachte aantal oplossingen van bovengenoemde vergelijking.

Laten we beginnen met aan elke $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ een *heuristische* 'kans' p_n toe te kennen die een perceptie geeft van het al dan niet zijn van een r-de macht. Voor elke $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat er een $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bestaat zodat $n \in [m^r, (m+1)^r]$. De lengte van het interval $[m^r, (m+1)^r]$ is gelijk aan $(m+1)^r - m^r$ en deze is bij benadering gelijk aan de afgeleide $rm^{r-1} \approx rn^{1-\frac{1}{r}}$. Dus de *heuristische* 'kans' dat een positief geheel getal n een r-de macht is wordt volgens deze perceptie nu $(rn^{1-\frac{1}{r}})^{-1}$. Er volgt dat de kans dat $x^p + y^q$ met ggd(x,y)=1 een r-de macht is in dit speculatieve model de toekenning $(r(x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}})^{-1}$ krijgt. Nu zijn we geïnteresseerd in het verwachte aantal geheeltallige oplossingen van de bovengenoemde Diophantische vergelijking.

Definieer de verzameling Ω als volgt:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2_{>0} : \text{ggd}(x, y) = 1\}.$$

Nu geldt dat het verwachte aantal geheeltallige oplossingen van de bovengenoemde vergelijking gelijk is aan de som $\frac{1}{r}\sum_{(x,y)\in\Omega}((x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}})^{-1}$. Als we kunnen vinden voor welke waarden p, q en r deze som convergeert kunnen we het lemma van Borel en Cantelli aanroepen. Het volgende tweetal lemmata en stellingen wordt gebruikt om het gedrag van deze som beter te begrijpen. Voor een bewijs van de tweede stelling wordt verwezen naar [4, ch. 18, §4, thm. 328].

Lemma: *Zij $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. De som $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ convergeert dan en slechts dan als de som $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(x)}$ convergeert.*

Bewijs: Enerzijds geldt dat $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ convergeert dan en slechts dan als $\alpha > 1$ en voor alle $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat $\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} > \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(x)}$, dus $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(x)}$ convergeert ook. Anderzijds geldt dat $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ divergeert dan en slechts dan als $\alpha \leq 1$ en voor alle $\alpha \in (0, 1]$ geldt dat $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x \log(x)} \leq \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(x)}$, dus het is voldoende om aan te tonen dat $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x \log(x)}$ divergeert. En dat deze som divergeert volgt uit: $\infty = \int_2^\infty \frac{dx}{x \log(x)} \leq \sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x \log(x)}$. ∎

Lemma: *Zij $\alpha, n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan geldt dat* ggd($\alpha$,$n$)=1 *dan en slechts dan als* ggd($\alpha + n$,n)=1.

Bewijs: Enerzijds bestaan er $x, y \in \mathbb{Z}$ zodanig dat we de gelijkheid $x\alpha + yn = 1$ hebben, waaruit volgt dat $x(\alpha + n) + (y - x)n = 1$ en anderzijds bestaan er $x, y \in \mathbb{Z}$ zodanig dat we de gelijkheid $x(\alpha + n) + yn = 1$ hebben, waaruit volgt dat $x\alpha + (x + y)n = 1$. ∎

Definitie: *De afbeelding $\varphi : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ gedefinieerd door $n \longmapsto \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, die het aantal positieve gehele getallen $m \leq n$ met* ggd$(m, n) = 1$ *als beeld heeft, wordt de φ-functie van Euler genoemd.*

Stelling: *Definieer de afbeelding* $\tilde{\varphi}_\alpha : \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ *die een positief geheel getal* n *stuurt naar* $\#\{k \in \mathbb{Z}_{>0} : k < n^\alpha : \mathrm{ggd}(k,n) = 1\}$. *Voor alle* $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ *bestaat er een* $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ *zodanig dat voor alle* $n \geq N$ *geldt dat* $\tilde{\varphi}_\alpha(n) \geq \frac{1}{2}n^{\alpha-1}\varphi(n)$.

Bewijs: Voor $\alpha = 1$ is de mededeling triviaal. Zij $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$. Met behulp van het tweede lemma kunnen we voor $\tilde{\varphi}_\alpha(n)$ de volgende ondergrens afschatten: $\tilde{\varphi}_\alpha(n) \geq \lfloor \frac{n^\alpha}{n} \rfloor \varphi(n) \geq (n^{\alpha-1} - 1)\varphi(n)$. Voor alle $n^{\alpha-1} \geq 2$ krijgen we het gewenste resultaat $(n^{\alpha-1} - 1)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^{\alpha-1}\varphi(n)$. ∎

Stelling: *Voor de* φ*-functie van Euler geldt dat er een getal* $A \in \mathbb{R}_{>0}$ *bestaat zodanig we de afschatting* $\varphi(n) > \frac{An}{\log\log(n)}$ *hebben voor alle positieve gehele getallen* $n > 1$.

Stelling: *De som* $\sum_{(x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p+y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ *convergeert dan en slechts dan als* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Bewijs: We kunnen opmerken dat als voor elke $x^p \leq y^q$ er $2y^q$ en voor elke $x^p > y^q$ er $2x^p$ geteld wordt, de volgende begrenzingen afgeleid kunnen worden:

$$(1) \quad \sum_{x^p > y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(2x^p)^{1-\frac{1}{r}}} + \sum_{x^p \leq y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(2y^q)^{1-\frac{1}{r}}} \leq \sum_{(x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}}} \ ;$$

$$(2) \quad \sum_{x^p > y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} + \sum_{x^p \leq y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(y^q)^{1-\frac{1}{r}}} \geq \sum_{(x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}}} \ .$$

Hieruit volgt dat de som $\displaystyle\sum_{x^p > y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} + \sum_{x^p \leq y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ convergeert dan en slechts dan als de som $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ convergeert.

De sommen $\displaystyle\sum_{x^p > y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}}$ en $\displaystyle\sum_{x^p \leq y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ kunnen naar boven afgeschat worden met $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}}$ respectievelijk $\displaystyle\sum_{y=1}^{\infty} \frac{y^{\frac{q}{p}}}{(y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ en deze sommen convergeren dan en slechts dan als $\displaystyle\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Stel nu dat $\displaystyle\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ en dat $p \geq q$.

Dan volgt uit deze aanname dat $\displaystyle\sum_{x^p > y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} \geq \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{\frac{p}{q}}(x)}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}}$ en uit de eerste stelling dat $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_{\frac{p}{q}}(x)}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} \geq \frac{1}{2}\sum_{x=N}^{\infty} \frac{x^{\frac{p}{q}-1}\varphi(x)}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}}$. Uit de tweede stelling volgt dat we deze som kunnen afschatten met $\displaystyle\sum_{x=N}^{\infty} \frac{x^{\frac{p}{q}-1}\varphi(x)}{(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} \geq \sum_{x=N}^{\infty} \frac{Ax^{\frac{p}{q}}}{\log\log(x)(x^p)^{1-\frac{1}{r}}} \geq \sum_{x=N}^{\infty} \frac{Ax^{\frac{p}{q}}}{\log(x)(x^p)^{1-\frac{1}{r}}}$, en uit het eerste lemma volgt nu dat $\displaystyle\sum_{(x,y)\in\Omega} \frac{1}{(x^p + y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$ divergeert.

Het aantonen van de divergentie van de som $\displaystyle\sum_{x^p \leq y^q; (x,y)\in\Omega} \frac{1}{(y^q)^{1-\frac{1}{r}}}$, als geldt dat $\displaystyle\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ en $p < q$, gaat geheel analoog aan het bovengenoemde. ∎

Het bijbehorende *heuristische argument*, dat we met behulp van het lemma van Borel en Cantelli onderbouwen, is dat we eindig veel oplossingen verwachten als $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$.

Het lemma doet echter geen uitspraak over de situatie als $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq 1$. Het lijkt aannemelijk om toch in dit geval te verwachten dat er oneindig veel oplossingen zullen zijn. Het eerdere *heuristische* resultaat correspondeert, ondanks het gebrek aan exactheid van een *heuristisch argument*, met een stelling van Darmon en Granville. Deze wordt bewezen in [9].

Stelling: *Laat $p,q,r\in\mathbb{Z}_{>0}$ waarvoor geldt dat $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. Dan heeft de vergelijking $x^p+y^q=z^r$ eindig veel geheeltallige oplossingen met* ggd(x,y,z)=1.

Een opmerkelijk aspect is dat als we in de vergelijking $p=q=r=3$ nemen, het *heuristische argument* aanleiding geeft om oneindig veel oplossingen te verwachten (de waarden $p,q,r=2,4,4$, in willekeurige volgorde, geven hetzelfde resultaat). Deze verwachting is echter in tegenspraak met de door Andrew Wiles bewezen laatste stelling van Fermat [8].

Stelling: *Zij $\kappa\in\mathbb{Z}_{>2}$. De vergelijking $x^\kappa+y^\kappa=z^\kappa$ heeft geen positieve geheeltallige oplossingen.*

Het gebruikte *heuristische argument* biedt, aangaande dit voorbeeld, duidelijk geen uitkomst bij het geven van een verhelderend beeld. Een voor de hand liggende observatie is dus dat het in dit argument slechts om een speculatie gaat die berust op onvoldoende rigoureuze aannames; dit voor wat betreft het ambivalente karakter van de geloofwaardigheid die deze argumentatie geeft.

Fermat had in zijn geschriften geponeerd zijn laatste stelling bewezen te hebben voor $\kappa=3$ en $\kappa=4$. Vervolgens maakte hij aannemelijk dat voor de resterende waarden van κ eenzelfde resultaat verkregen kon worden, uitgaande van zijn overtuiging dat hij de twee *moeilijkste* gevallen al was afgegaan. Het bovengenoemde opmerkelijke aspect is a posteriori min of meer in overeenstemming te brengen met het resultaat van dit *heuristische argument*, omdat er alleen voor $\kappa=3$ oneindig veel oplossingen verwacht worden. Hieruit blijkt dat er niet alleen voldoende vakkennis nodig is om een krachtig *heuristisch argument* te geven, maar ook om het verkregen resultaat goed te kunnen interpreteren. Moge degene die het scherpst argumenteert en interpreteert van allen, prevaleren!

4 Heuristiek bij *oneven* perfecte getallen

Laten we voordat er een geschikt *heuristisch argument* opgebouwd wordt, zoals eerder genoemd, eens kijken naar het gedrag van de σ-functie.

Definitie: *Laat f en g twee, op hetzelfde domein gedefinieerde, reëelwaardige functies zijn. Dan betekent de uitdrukking $f=O(g)$ dat er een getal $K\in\mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodat $|f(x)|\leq K|g(x)|$ voor alle x in het domein van f en g.*

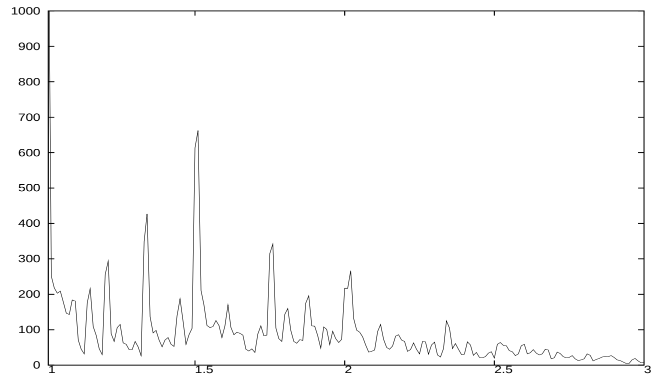
Stelling: *Zij $n\in\mathbb{Z}_{>1}$. Dan geldt voor de σ-functie dat $\sigma(n)=O(n\log\log(n))$.*

Deze stelling wordt bewezen in [4, ch. 18, §3, thm. 323].

Omdat 1 en n altijd delers zijn van $n\in\mathbb{Z}_{>1}$, volgt dat $1\leq\frac{\sigma(n)}{n}\leq K|\log\log(n)|$. Om een betere indruk te krijgen van het gedrag van $\frac{\sigma(n)}{n}$ is voor n het interval $9{,}9\times10^5\leq n\leq10^6$ en voor $\frac{\sigma(n)}{n}$ het interval $1\leq\frac{\sigma(n)}{n}\leq3\approx\log\log(10^6)$ gekozen.

Dit interval $[1,3]$ is in Figuur 1, de zogenaamde dichtheidsfunctie van deze gegevens, uitgezet op de x-as. Vervolgens worden voor $n\in[9{,}9\times10^5,10^6]\cap\mathbb{Z}$ de waarden $\frac{\sigma(n)}{n}$ uitgerekend en afgerond op twee decimalen achter de komma. Het aantal $n\in[9{,}9\times10^5,10^6]\cap\mathbb{Z}$ waarvoor geldt dat $\frac{\sigma(n)}{n}=x\in[1,3]$, na het afronden, is uitgezet op de y-as in Figuur 1. Deze waarden zijn dus:

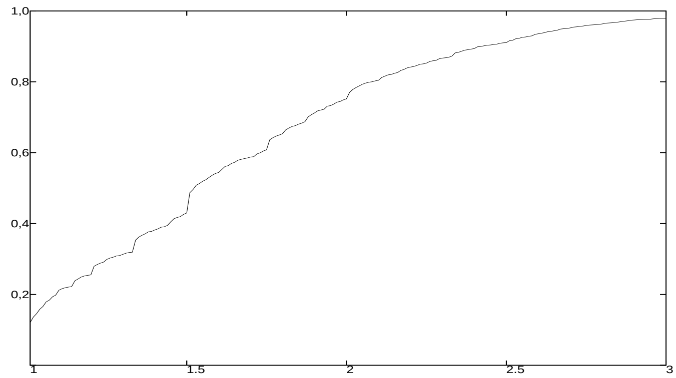
$$y=\#\{n:9{,}9\times10^5\leq n\leq10^6,\ x-\frac{1}{200}\leq\frac{\sigma(n)}{n}\leq x+\frac{1}{200}\}\text{ voor}$$
$$x=a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}\text{ met }a,b,c\in\{0,1,\dots,9\}.$$



Figuur 1: dichtheid van $\frac{\sigma(n)}{n}$ voor $9{,}9 \times 10^5 \leq n \leq 10^6$

We kunnen ook de zogenaamde verdelingsfunctie construeren; hier blijft de x-as op dezelfde manier ingedeeld als bij de dichtheidsfunctie en de waarden op de y-as worden nu:

$$y = \#\{n : 9{,}9 \times 10^5 \leq n \leq 10^6, \frac{\sigma(n)}{n} \leq x\} \times \frac{1}{10001} \text{ met } 1 \leq x \leq 3.$$



Figuur 2: verdeling van $\frac{\sigma(n)}{n}$ voor $9{,}9 \times 10^5 \leq n \leq 10^6$

Als we deze verdelingsfunctie Ψ noemen en kijken naar de kans dat x in de buurt van $\frac{\sigma(n)}{n} = 2$ ligt, dan geldt dat deze kans gelijk is aan $\Psi(2+\varepsilon) - \Psi(2-\varepsilon)$. Het is bekend dat de complete verdelingsfunctie

$$\overline{\Psi}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : \frac{\sigma(n)}{n} \leq x\}}{N}$$

met $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ niet differentieerbaar is in de punten $x = \frac{\sigma(n)}{n}$. Voor een bewijs hiervan kan men [2] raadplegen. Het lijkt er echter wel op dat Ψ links van de waarden $x = \frac{\sigma(n)}{n}$ zich voldoende netjes gedraagt om de volgende *heuristische* aanname te maken: de limiet

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \frac{\overline{\Psi}(2) - \overline{\Psi}(2-\xi)}{\xi}$$

bestaat en is positief, zodat er voor de complete verdelingsfunctie $\overline{\Psi}$ geldt dat de kans dat x in de buurt van 2 ligt afgeschat kan worden met

$$\overline{\Psi}(2) - \overline{\Psi}(2-\varepsilon) \approx \varepsilon \lim_{\xi \downarrow 0} \frac{\overline{\Psi}(2) - \overline{\Psi}(2-\xi)}{\xi} = \varepsilon c$$

voor zekere $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Met behulp van deze aanname kunnen we de *heuristische* 'kans' p_n die aan een getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ toegekend wordt, welke een perceptie geeft van het perfect zijn, uitrekenen. Laat X de gebeurtenis $\sigma(n) = 2n$ en Y de gebeurtenis $2 - \varepsilon \leq \frac{\sigma(n)}{n} \leq 2$ zijn. We zijn dus op zoek naar de kans $P(X)$ en met behulp van wat elementaire kansrekening volgt dat deze kans gelijk is aan $P(Y) \cdot P(X|Y)$, omdat $X \subset Y$. Uit de bovengenoemde aanname volgt nu dat deze afgeschat kan worden met $\varepsilon c \cdot P(X|Y)$. De tweede *heuristische* aanname die we zullen maken is dat de verdeling van de waarden $\sigma(n)$ in het interval $[(2-\varepsilon)n, 2n]$ uniform is, zodat de kans $P(X|Y)$ afgeschat kan worden met

$$\frac{1}{\#[(2-\varepsilon)n, 2n] \cap \mathbb{Z}} \approx \frac{1}{\varepsilon n}.$$

Het resultaat is dat de *heuristische* 'kans' p_n gelijk wordt aan $\frac{\varepsilon c}{\varepsilon n} = \frac{c}{n}$.

4.1 Alle oneven getallen $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zijn een kandidaat

Laten we beginnen met aan te nemen dat elk oneven geheel getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ een kandidaat is om een perfect getal te zijn. Dan kunnen we de functie h_1 definiëren die, op basis van onze verkregen perceptie, de 'kans' weergeeft dat een dergelijk getal n perfect is door:

$$h_1(n) = \begin{cases} \frac{c}{n} & \text{als } n \geq 1 \text{ oneven is} \\ & \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Het aantal *oneven* perfecte getallen dat we op basis van h_1 verwachten wordt de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_1(n) = \sum_{n \geq 1;\ n \text{ oneven}} \frac{c}{n} \geq \lim_{N \to \infty} \frac{c}{2} \log(N) = \infty.$$

Het lemma van Borel en Cantelli impliceert in dit geval geen bevestigende uitspraak over het vermoeden.

Dit resultaat geeft aanleiding om de intuïtie te wekken dat het vermoeden niet klopt of dat het misschien een wat naïeve aanname is dat alle oneven gehele getallen n een kandidaat zijn om perfect te zijn. Deze laatste gedachte wordt aannemelijk gemaakt door het volgende tweetal stellingen, waarvan de eerste een numeriek resultaat is en bewezen wordt in [1].

Stelling: *Er bestaat geen oneven positief geheel getal $n \leq 10^{300}$ dat perfect is.*

Stelling: *Zij $k \in \mathbb{Z}_{>1}$. Dan geldt dat $\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{n \in \mathbb{Z}_{>0}:\ n \leq x,\ k | \sigma(n)\}}{\lfloor x \rfloor} = 1$.*

Bewijs: We zullen aantonen dat voor ieder gekozen getal $k \in \mathbb{Z}_{>1}$ geldt dat de kans

$$\lim_{x \to \infty} P(k \nmid \sigma(n) \text{ met } n \leq x)$$

gelijk is aan 0. Zij derhalve $k \in \mathbb{Z}_{>1}$ en laat p een priemgetal zijn met $p \equiv -1 (\text{mod } k)$ en p een exacte deler van n. Dan volgt hieruit dat n te schrijven is als pm met ggd(p,m)=1 en dus geldt dat $\sigma(n) = \sigma(pm) = \sigma(p)\sigma(m) = (p+1)\sigma(m) \equiv 0 (\text{mod } k)$.

Gegeven dat p een priemgetal is en dat $p \equiv -1 (\text{mod } k)$ kunnen we de kans $P(p : p \parallel n)$ uitrekenen, oftewel dat kans dat p een exacte deler is van n. Deze kans is gelijk aan

$$1 - P(p : p \nparallel n) = 1 - P(p : p \nmid n \vee p^2 \mid n) = 1 - (\frac{p-1}{p} + \frac{1}{p^2}) = \frac{p-1}{p^2}.$$

Laat S een eindige verzameling van dergelijke priemgetallen p zijn, dan is de kans dat geen enkel priemgetal $p \in S$ een exacte deler is van n gelijk aan

$$\prod_{p \in S} (1 - \frac{p-1}{p^2}).$$

Er geldt dus dat

$$\limsup_{x \to \infty} P(k \nmid \sigma(n) \text{ met } n \leq x) \leq \prod_{p \in S} (1 - \frac{p-1}{p^2}).$$

Voor dit produkt geldt dat

$$\prod_{p \in S} (1 - \frac{p-1}{p^2}) = e^{\log(\prod_{p \in S}(1 - \frac{p-1}{p^2}))} = e^{\sum_{p \in S} \log(1 - \frac{p-1}{p^2})} \leq e^{-\sum_{p \in S} \frac{p-1}{p^2}},$$

omdat $\log(x) \leq x - 1$ voor alle $x \in (0, 1)$.

Verder kunnen we afleiden dat $e^{-\sum_{p \in S} \frac{p-1}{p^2}} \leq e^{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{p \in S} \frac{1}{p}}$ en, als gevolg van [7, ch. 6, §4, thm. 2], hebben we de divergente som

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{p \text{ priem}; p \equiv -1 (\text{mod } k); p \leq x} \frac{1}{p} = \infty.$$

Hieruit volgt dat $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\pi^2}{6} - \sum_{p \text{ priem}; p \equiv -1 (\text{mod } k); p \leq x} \frac{1}{p}} = 0$, dus $\limsup\limits_{x \to \infty} P(k \nmid \sigma(n) \text{ met } n \leq x) = 0$ en omdat geldt dat $\liminf\limits_{x \to \infty} P(k \nmid \sigma(n) \text{ met } n \leq x) = 0$, bestaat de te bewijzen limiet

$$\lim_{x \to \infty} P(k \nmid \sigma(n) \text{ met } n \leq x) = 0. \quad \blacksquare$$

Deze laatste stelling vertelt ons dat als $\sigma(n)$ zich bevindt in het interval $(2 - \varepsilon)n \leq \sigma(n) \leq 2n$, dan neigt deze naar de hoog deelbare getallen $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Hieruit kunnen we concluderen dat het zinvol is om te zoeken naar de specifieke samenstelling van een dergelijke $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, wil deze een kandidaat worden om perfect te zijn.

De veronderstelling dat elk positief oneven geheel getal dus zo een kandidaat is, lijkt inderdaad naïef.

4.2 Karakterisering van een oneven getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ als 2 een exacte deler is van $\sigma(n)$

Laten we kijken naar het gedrag van de σ-functie bij oneven n. Dit zodanig dat er meer restricties gegeven kunnen worden aan een oneven getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ om deze een kandidaat te laten worden voor het perfect zijn.

Om te beginnen een tweetal stellingen en een lemma.

Stelling: *Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ met n oneven. Dan geldt dat $\sigma(n)$ oneven is dan en slechts dan als er een $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaat zodat $n = m^2$.*

Bewijs: Er geldt dat $n = \prod_{p \text{ priem}} p^{a_p}$ met elke priemfactor p oneven. Nu volgt uit

$$\sigma(n) = \prod_{p \text{ priem}} \sum_{i=0}^{a_p} p^i \equiv \prod_{p \text{ priem}} (a_p + 1) (\text{mod } 2)$$

dat $\sigma(n)$ oneven is dan en slechts dan als alle a_p even zijn, en alle a_p zijn even dan en slechts dan als n een kwadraat is. ∎

Opmerking: In het bewijs van de volgende stelling zal de afbeelding die kijkt naar de grootste macht van 2 die een gegeven getal deelt, gebruikt worden. Deze afbeelding noteert men als:

$$\begin{aligned} \text{ord}_2 : \mathbb{Z}_{>0} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ n &\longmapsto \max\{k : 2^k | n\} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat 2 een exacte deler is van $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ dan en slechts dan als $\text{ord}_2(n) = 1$. Verder heeft deze afbeelding de eigenschap dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt $\text{ord}_2(n) \geq 0$ en dat voor alle $n, m \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt $\text{ord}_2(nm) = \text{ord}_2(n) + \text{ord}_2(m)$.

Lemma: *Zij $p > 2$ een priemgetal en $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan geldt dat 2 een exacte deler is van $\sigma(p^k)$ dan en slechts dan als $p \equiv k \equiv 1(\text{mod } 4)$.*

Bewijs: Er geldt dat 2 een exacte deler is van $\sigma(p^k) = \sum_{i=0}^{k} p^i$ dan en slechts dan als

$$\sum_{i=1}^{k} p^i \equiv 1(\text{mod } 4).$$

Deze laatste congruentie geldt dan en slechts dan als $p \equiv k \equiv 1(\text{mod } 4)$. ∎

Stelling: *Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ met n oneven. Dan geldt dat 2 een exacte deler is van $\sigma(n)$ dan en slechts dan als er $p, k, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaan zodanig dat aan de volgende eisen voldaan wordt:*

i) p is priem met $p \equiv 1(\text{mod } 4)$;
ii) $n = p^k b^2$ met ggd(p,b)=1 en $k \equiv 1(\text{mod } 4)$.

Bewijs: Vanwege de additieve eigenschap van ord_2 geldt dat 2 een exacte deler is van

$$\sigma(n) = \prod_{p \text{ priem}} \sum_{i=0}^{a_p} p^i$$

dan en slechts dan als er een unieke priemfactor q van n bestaat zodanig dat $n = q^{a_q}\beta$, met $\text{ord}_2(\beta) = 0$, $\text{ord}_2(\sigma(\beta)) = 0$, ggd($q$,$\beta$)=1 en $\text{ord}_2(\sigma(q^{a_q})) = 1$. Uit bovengenoemd lemma volgt dat dit geldt dan en slechts dan als $q \equiv a_q \equiv 1(\text{mod } 4)$ en uit de eerder genoemde stelling volgt dat $\sigma(\beta)$ oneven is dan en slechts dan als er een $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaat zodat $\beta = b^2$. ∎

Definieer de verzameling Θ als volgt:

$$\begin{aligned} \Theta :=\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : n = p^k b^2 : p, k, b \in \mathbb{Z}_{>0};\ b \text{ oneven, } p \text{ priem met } p \equiv 1(\text{mod } 4), \\ \text{ggd}(b,p)=1 \text{ en } k \equiv 1(\text{mod } 4)\}. \end{aligned}$$

Nu kunnen we de functie h_2 als volgt definiëren:

$$h_2(n) = \begin{cases} \frac{4c}{n} & \text{als } n \in \Theta \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De factor 4 is erbij gekomen omdat we de rest bij deling door 4 van $\sigma(n)$ weten en dus de kardinaliteit van het interval corresponderend met de voorwaardelijke kans $P(X|Y)$ vier keer zo klein maken. Dit geeft dus aanleiding tot een nieuwe *heuristische* 'kans' p_n, zijnde:

$$\varepsilon c \cdot P(X|Y) \approx \frac{\varepsilon c}{\#[(2-\varepsilon)n, 2n] \cap (2+4\mathbb{Z})} = \frac{\varepsilon c}{\#[\frac{(2-\varepsilon)n-2}{4}, \frac{2n-2}{4}] \cap \mathbb{Z}} \approx \frac{\varepsilon 4c}{\varepsilon n} = \frac{4c}{n}.$$

We kunnen de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_2(n) = \sum_{n\in\Theta} \frac{4c}{n} = \sum_{p^k b^2 \in \Theta} \frac{4c}{p^k b^2}$$

naar beneden afschatten met

$$\sum_{p \text{ priem}; p\equiv 1 (\text{mod } 4)} \frac{1}{p} \sum_{b\geq 1;\ b \text{ oneven}} \frac{4c}{b^2}.$$

Om het, op basis van h_2, verwachte aantal *oneven* perfecte getallen uit te kunnen rekenen moet er een stelling gebruikt worden.

Stelling: *Zij $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$ de verzameling priemgetallen. Dan divergeert de som $\sum_{p\in\mathbb{P}: p\equiv 1 (\text{mod } 4)} \frac{1}{p}$.*

Deze stelling is een gevolg van [7, ch. 6, §4, thm. 2].

Uit deze stelling volgt dus dat $\sum_{n=1}^{\infty} h_2(n)$ divergeert. Wederom is het resultaat dat het lemma van Borel en Cantelli in dit geval geen uitspraak doet over de hoeveelheid *oneven* perfecte getallen die verwacht worden.

We kunnen ons afvragen of het nog steeds een wat naïeve aanname is, dat we alleen gebruik maken van de factor 4 bij de kans in het speculatieve model van **4.2**. De tweede stelling uit **4.1** maakt het aannemelijk om te verwachten dat er meer deelbaarheidsrelaties afgeleid moeten kunnen worden voor n. In de volgende poging zal duidelijk worden welke dit zijn. Ook zal er in de volgende poging gekeken worden of het mogelijk is om een geschikte afschatting te maken van b met k, zodat de sommatievariabelen afhankelijk worden van elkaar.

4.3 De deler $\sigma(p^k)$ van $\sigma(n)$ als n perfect is

Als we aannemen dat we van doen hebben met een perfect getal, dan volgt uit

$$\sigma(p^k b^2) = \sigma(p^k)\sigma(b^2) = 2p^k b^2 \text{ en } \mathrm{ggd}(\sigma(p^k), p) = 1$$

dat $\sigma(p^k)$ een deler moet zijn van $2b^2$. Nu kunnen we afleiden dat $5^k \leq p^k \leq \sigma(p^k) \leq 2b^2$ en dus geldt dat $k \leq \frac{\log(2b^2)}{\log 5}$. Met behulp van deze observaties kunnen we een verzameling Θ' maken:

$$\Theta' := \{(p,k,b) \in \mathbb{Z}^3_{>0} : p \text{ priem}, p^k b^2 = n \in \Theta \text{ met } k \leq \frac{\log(2b^2)}{\log 5} \text{ en } \sigma(p^k)|2b^2\}.$$

De corresponderende functie h_3 kan hierdoor op de volgende manier gedefinieerd worden:

$$h_3(n) = \begin{cases} \frac{2c\sigma(p^k)}{n} & \text{als } n = p^k b^2 \in \Theta \text{ met } (p,k,b) \in \Theta' \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Ook hier geldt weer dat de factor $2\sigma(p^k)$ erbij gekomen is, omdat we de rest bij deling door $2\sigma(p^k)$ van $\sigma(n)$ weten; namelijk $\sigma(p^k)$. De kardinaliteit van het interval dat correspondeert met de voorwaardelijke kans $P(X|Y)$ wordt nu een factor $2\sigma(p^k)$ kleiner, waaruit volgt dat de nieuwe *heuristische* 'kans' p_n derhalve gelijk wordt aan

$$\begin{aligned} \varepsilon c \cdot P(X|Y) &\approx \frac{\varepsilon c}{\#[(2-\varepsilon)n, 2n] \cap (\{m \in \mathbb{Z} : m \equiv \sigma(p^k) (\text{mod } 2\sigma(p^k))\})} \\ &= \frac{\varepsilon c}{\#[\frac{(2-\varepsilon)n-\sigma(p^k)}{2\sigma(p^k)}, \frac{2n-\sigma(p^k)}{2\sigma(p^k)}] \cap \mathbb{Z}} \approx \frac{\varepsilon 2c\sigma(p^k)}{\varepsilon n} = \frac{2c\sigma(p^k)}{n}. \end{aligned}$$

De som $\sum_{n=1}^{\infty} h_3(n)$ is gelijk aan $2c\sum_{(p,k,b)\in\Theta'} \frac{\sigma(p^k)}{p^k b^2}$ en kan geschreven worden als

$$\sum_{b\geq 1;\ b \text{ oneven}} \frac{2c}{b^2} \sum_{1\leq k\leq \frac{\log(2b^2)}{\log 5};\ k\ \equiv 1 (\text{mod } 4)} \sum_{p\in\Theta;\ \sigma(p^k)|2b^2} \frac{\sigma(p^k)}{p^k}.$$

We kunnen de uitdrukking $\frac{\sigma(p^k)}{p^k}$ afschatten met $\frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \sum_{i=0}^{k}(\frac{1}{p})^i \leq 1 + \frac{1}{p-1} \leq \frac{5}{4}$. Om een afschatting te maken van de som $\sum_{p\in\Theta;\ \sigma(p^k)|2b^2} 1$, is het handig om gebruik te maken van een stelling; deze wordt bewezen in [4, ch. 18, §1, thm. 315].

Stelling: *Laat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ de waarde $d(n)$ gelijk zijn aan het aantal delers van n. Dan geldt dat voor alle $\delta > 0$ er een $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ bestaat zodanig dat voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat $d(n) \leq c'n^{\delta}$.*

De som $\sum_{p\in\Theta;\ \sigma(p^k)|2b^2} 1$ is, voor iedere k, kleiner dan of gelijk aan $d(2b^2)$ en uit bovengenoemde stelling volgt dat

$$\sum_{1\leq k\leq \frac{\log(2b^2)}{\log 5};\ k\ \equiv 1 (\text{mod } 4)} \sum_{p\in\Theta;\sigma(p^k)|2b^2} \frac{\sigma(p^k)}{p^k} \leq \sum_{1\leq k\leq \frac{\log(2b^2)}{\log 5};\ k\ \equiv 1 (\text{mod } 4)} \frac{5c'(2b^2)^{\delta}}{4} \leq \frac{5c'(2b^2)^{\delta}\log(2b^2)}{4\log 5}.$$

Nu kunnen we de totale som $2c\sum_{(p,k,b)\in\Theta'} \frac{\sigma(p^k)}{p^k b^2}$ naar boven begrenzen met

$$\sum_{b\geq 1;\ b \text{ oneven}} \frac{5\cdot 2^{\delta}c'c}{2\log 5} \cdot \frac{\log(2b^2)}{b^{2(1-\delta)}}.$$

Er geldt dat de som $\sum_{b\geq 1;\ b \text{ oneven}} \frac{\log(2b^2)}{b^{2(1-\delta)}}$ kleiner dan of gelijk is aan de integraal

$$\int_2^{\infty} \frac{\log(2(b-1)^2)}{(b-1)^{2(1-\delta)}} db + \log 2$$

en als $\delta < \frac{1}{2}$, dan is deze integraal gelijk aan $\frac{\log 2}{(1-2\delta)} + \frac{2}{(1-2\delta)^2}$.

Hieruit volgt dat de som $\sum_{n=1}^{\infty} h_3(n)$ convergeert en uit het lemma van Borel en Cantelli volgt dat het corresponderende *heuristische argument* is dat we, volgens dit speculatieve model, *eindig* veel *oneven* perfecte getallen verwachten.

Hierbij is het doel van deze scriptie bereikt!

Referenties

[1] Brent, R. P.; Cohen, G. L.; te Riele, H. J. J., *Improved Techniques for Lower Bounds for Odd Perfect Numbers*, Math. Comput. 57, 1991, 857-868.

[2] Davenport, H., *Über Numeri Abundantes*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsber. 26/29, 1933, 830-837.

[3] Dickson, L. E., *Finiteness of odd perfect and primitive abundant numbers with* n *distinct prime factors*, Amer. J. Math., 35, 1913, 413-426.

[4] Hardy, G. H.; Wright, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, 2e editie, Clarendon Press, Oxford, 1945.

[5] Loève, M., *Probability Theory I*, 4e editie, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. 45, 1977.

[6] Nielsen, P. P., *Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors*, Preprint, beschikbaar via `http://math.berkeley.edu/~pace/research.html`.

[7] Serre, J.-P., *A Course in Arithmetic*, 1e editie, Springer Graduate Texts in Mathematics, vol. 7, 1973.

[8] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2), 141, 1995, nr. 3, 443-551.

[9] Zuehlke, J.A., *The Darmon-Granville Equation with Algebraic Exponents*, Journal of Number Theory, vol. 96, nr. 2, Academic Press, October 2002, 225-231(7).