Representatietheorie van Compacte Liegroepen

Benthem, B.

Representatietheorie van Compacte Liegroepen

Bruin Benthem

December 5, 2006

1 Variëteiten

1.1 Inleiding

Een differentieerbare variëteit is kort gezegd een generalisatie van Euclidische ruimte waarop men analyse kan doen. Om later Liegroepen te definiëren moeten we weten wat een differentieerbare variëteit is, kennis over groepen en topologie wordt bekend verondersteld. We zullen meteen enkele belangrijke voorbeelden van variëteiten geven zoals $GL_n(\mathbb{C})$, $SO(n)$ en $SU(n)$ die we later in deze scriptie veelvuldig zullen tegenkomen. Verder kijken we naar raakruimten en de differentiaal om later ook over Lie algebra's te kunnen spreken.

1.2 Differentieerbare variëteiten

Een differentieerbare variëteit (vanaf nu: variëteit) is te zien als een generalisatie van Euclidische ruimte waarop men analyse kan doen. Een atlas is kort gezegd een verzameling homeomorfismen die de variëteit lokaal identificeren met een Euclidische ruimte.

Definitie 1.1. *Een n-*dimensionale differentieerbare atlas $\mathcal{A}$ *op een topologische ruimte X is een verzameling* kaarten (U_i, ϕ_i), *$i \in I$, waarbij $U_i \subset X$ open en $\phi_i : U_i \to U_i{}'$ met $U_i{}' \in \mathbb{R}^n$ open een homeomorfisme is zodanig dat aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:*

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$
2. *Voor alle $i, j \in I$ is de bijectie $\phi_j \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j) : p \mapsto \phi_j(\phi_i^{-1}(p))$ in C^∞. De twee kaarten heten* differentieerbaar gerelateerd

Met behulp van het begrip atlas kunnen we definiëren wat een variëteit is.

Definitie 1.2. *Een n-*dimensionale variëteit *is een paar $(X, \mathcal{A})$ (vaak alleen genoteerd met "X") met X een topologische ruimte die hausdorff is en een aftelbare basis voor de topologie heeft en $\mathcal{A}$ een n-dimensionale differentieerbare atlas op X*

De definitie van een n-dimensionale variëteit is niet eenduidig: twee verschillende atlassen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ kunnen dezelfde variëteit beschrijven. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn dan *equivalent* hetgeen neerkomt op het feit dat $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ook een n-dimensionale differentieerbare atlas is. Om de definitie van variëteit eenduidig te maken kan men een (unieke) maximale atlas $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ die $\mathcal{A}$ bevat definieren als zijnde de atlas die alle kaarten bevat die differentieerbaar gerelateerd zijn aan alle kaarten in $\mathcal{A}$. Het is niet moeilijk te laten zien dat $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ inderdaad een atlas is en dat

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

Verder kan men ook spreken van deelvariëteiten:

Definitie 1.3. *Neem $(X, \mathcal{A})$ een n-dimensionale variëteit. Een deelruimte $X' \subset X$ heet een k-*dimensionale deelvariëteit *van X als er voor elk punt $x \in X'$ een kaart $(U_x, \phi_x) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ bestaat zodanig dat $x \in U_x$ en $\phi_x(U_x \cap X') = \mathbb{R}^k \cap \phi(U_x)$*

X' heet niet voor niets een deelvariëteit: de verzameling kaarten $(U_x \cap X', \phi_x|_{U_x \cap X'})$ vormt een k-dimensionale atlas voor X'.

Uiteraard kan men ook het product van twee variëteiten $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ bekijken. Het is makkelijk in te zien dat wanneer men voor de topologische ruimte $X \times Y$ met de producttopologie (nog steeds hausdorff en "second countable") de verzameling

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(U \times V, \phi \times \psi) : (U, \phi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}$$

neemt dit een $n + m$-dimensionale differentieerbare atlas is omdat de kaarten $\phi \times \psi : U \times V \to U' \times V' \subset_{open} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ aan de voorwaarden voldoen.

Ook bepaalde quotienten van variëteiten kan men zien als een variëteiten, hier ligt het echter veel subtieler dan bij producten, zie ook §1.6 van [1]. In het hoofdstuk over Liegroepen zullen we hier kort op terugkomen.

Nu we het begrip variëteit hebben geintroduceerd kunnen we afbeeldingen tussen variëteiten beschouwen, de zogeheten *differentieerbare* afbeeldingen.

Definitie 1.4. *Neem* $(X, \{(U_i, \phi_i) : i \in I\})$ *en* $(Y, \{(V_j, \psi_j) : j \in J\})$ *respectievelijk* n*- en* m*-dimensionale variëteiten en* $x \in X$*. Een continue afbeelding* $f : X \to Y$ *heet* differentieerbaar in x *als voor alle* (i, j) *zodanig dat* $x \in U_i$ *en* $f(x) \in V_j$ *de afbeelding* $\psi_j f \phi_i^{-1}$ *van* $\phi_i((f^{-1}V_j) \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$ *naar* $\mathbb{R}^m$ *differentieerbaar is in* $\phi_i(x)$*.* f *heet* differentieerbaar *of een* morfisme van variëteiten *als* f *differentieerbaar is in alle* $x \in X$*. Als* f *bijectief is en zowel* f *als* f^{-1} *zijn differentieerbaar dan heet* f *een* diffeomorfisme

Als $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ differentieerbaar zijn dan is $g \circ f : X \to Z$ ook differentieerbaar en deze compositie is associatief. Ook is de identiteitsafbeelding differentieerbaar, dus kunnen we spreken over de categorie van variëteiten.

Voorbeelden

1. Een makkelijk voorbeeld van een variëteit is $\mathbb{R}^n$. Dit is een n-dimensionale variëteit met atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$.

2. Een ander makkelijk voorbeeld is $GL(V)$, de groep van inverteerbare lineaire transformaties van een vectorruimte V, ook wel aangeduid als $\mathrm{Aut}(V)$. In deze scriptie zal V altijd een reële of complexe vectorruimte van (eindige) dimensie n zijn en voor een bepaalde keuze van de basis van V is $GL(V)$ dan isomorf met $GL_n(K)$, de *general linear group* ofwel de groep van inverteerbare $n \times n$-matrices met coëfficiënten in $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. $GL_n(\mathbb{R})$ is een variëteit omdat het op een natuurlijke manier te beschouwen is als deelverzameling van de $\mathbb{R}^{n^2}$ door de matrixcoëfficiënten als coördinaten te nemen. De eis dat de determinanten van de matrices ongelijk 0 moet zijn betekent dat de $GL_n(\mathbb{R})$ te zien is als open deelverzameling van $\mathbb{R}^{n^2}$. Deze inbedding vormt dan de enige kaart in de atlas en maakt $GL_n(\mathbb{R})$ tot een n^2-dimensionale variëteit. Deze inbedding werkt ook voor $GL_n(\mathbb{C})$, de groep van inverteerbare $n \times n$-matrices met complexe coëfficiënten maar omdat $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ is dit een $2n^2$-dimensionale variëteit.

   Voor veel interessante verzamelingen is het niet zo makkelijk om met behulp van de definitie na te gaan dat het om een variëteit gaat, makkelijker is het om gebruik te maken van de reguliere waarde stelling zoals in §1.4 van [1] beschreven en die ik hier niet zal bespreken. Met behulp van deze stelling kan men laten zien dat de volgende voorbeelden deelvariëteiten van $GL_n(\mathbb{R})$ of $GL_n(\mathbb{C})$ zijn:

3. $SL_n(\mathbb{C})$, de *special linear group* ofwel de groep van complexe $n \times n$-matrices met determinant $+1$ vormt een $2n^2 - 2$-dimensionale deelvariëteit van $GL_n(\mathbb{C})$.

4. $O(n)$, de *orthogonal group* ofwel de verzameling reële orthogonale $n \times n$-matrices (hier laten we het lichaam waarin de matrixcoëfficiënten genomen worden weg omdat het woord "orthogonaal" impliceert dat het om reële matrices gaat). $O(n)$ is een $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale deelvariëteit van $GL_n(\mathbb{R})$.

5. $SO(n)$, de *special orthogonal group*, ofwel de verzameling reële orthogonale $n \times n$-matrices met determinant $+1$. Dit is een $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale deelvariëteit van $GL_n(\mathbb{R})$. In de natuurkunde en in het vervolg van deze scriptie speelt $SO(3)$ een hele belangrijke rol omdat het op te vatten is als de groep rotaties van de Euclidische ruimte.

6. $SU(n)$, de *special unitary group* ofwel de verzameling unitaire $n \times n$-matrices met determinant $+1$. Er geldt dus $SU(n) := \{x \in M_n(\mathbb{C}) : \overline{x}^t x = 1, \quad \det(x) = 1\}$. Dit is een $n^2 - 1$-dimensionale deelvariëteit van $GL_n(\mathbb{C})$.

1.3 Raakruimten

Voor definiëren van Lie algebra's is het belangrijk dat we definiëren wat een raakruimte is. Voor X een n-dimensionale variëteit en $p \in X$ willen we dat de raakruimte in p, $T_X(p)$ de lineaire benadering van X is in p. Er zijn verschillende manieren om dit precies te formuleren, die allemaal equivalent zijn, zie ook hoofdstuk 2 van [1]. Eén daarvan zullen wij gebruiken.

Definitie 1.5. *Neem $(X, \mathcal{A})$ een n-dimensionale variëteit en $p \in X$ een punt. Laat*

$$\mathcal{K}_X(p) := \{\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to X \mid \epsilon > 0, \quad \alpha(0) = p\}$$

de verzameling morfismen van variëteiten van $(-\epsilon, \epsilon)$ naar X zijn. $\mathcal{K}_X(p)$ heet de verzameling differentieerbare curves *op X die door p gaan zijn.*

De raakruimte $T_X(p)$ is dan gedefinieerd als $T_X(p) = \mathcal{K}_X(p)/\sim$ voor de equivalentierelatie $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow (\phi \circ \alpha)\dot{}(0) = (\phi \circ \beta)\dot{}(0) \in \mathbb{R}^n$ voor een (en daarom elke willekeurige) kaart $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ met $p \in U$. De equivalentieklasse van α geven we aan met $[\alpha]$

Dit is een vrij intuitieve definitie waarbij we raakvectoren in een punt zien als afgeleiden van krommen door dat punt. De verzameling $T_X(p)$ is een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte wat blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 1.6. *Voor $(X, \mathcal{A})$ een n-dimensionale variëteit geldt dat $T_X(p)$ een n-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte is met*

$$[\alpha] + [\beta] = [\gamma] \Leftrightarrow (\phi \circ \alpha)\dot{}(0) + (\phi \circ \beta)\dot{}(0) = (\phi \circ \gamma)\dot{}(0)$$

voor alle kaarten $(U, \phi) \in \mathcal{A}$

Een bewijs hiervoor wordt gegeven in [1] § 2.3 en in [2] § 1.8.2.

Voorbeelden

1. $GL_n(\mathbb{R})$ is open in $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Dit geeft aan dat raakvectoren van $GL_n(\mathbb{R})$ op zijn te vatten als elementen van $M_n(\mathbb{R})$, dus $T_{GL_n(\mathbb{R})}(1) = M_n(\mathbb{R})$.

   Men kan dit ook intuitief inzien door te kijken naar curves

   $$K_A : (-\epsilon, \epsilon) \to M_n(\mathbb{R}) : t \mapsto 1 + tA$$

   waarbij $A \in M_n(\mathbb{R})$ en $\epsilon > 0$ zeer klein is. Omdat ϵ heel klein is geldt dat $[K_A]$ inverteerbaar is met inverse $[K_{-A}]$ omdat

   $$(1 + tA)(1 - tA) = 1^2 - (tA)^2 = 1 \qquad \mod t^2$$

   en dus dat $K_A \in \mathcal{K}_{GL_n(\mathbb{R})}(1)$. Verder geldt dat $K_A(t)\dot{}(0) = A$ dus $K_A \sim K_B \Leftrightarrow A = B$. Daarom kunnen we $\mathcal{K}_{GL_n(\mathbb{R})}(1)/\sim$ gelijk stellen met $M_n(\mathbb{R})$.

   In het algemeen vormt $\mathrm{End}(V)$ de raakruimte in 1 van $\mathrm{Aut}(V) = GL(V)$ voor een reële of complexe vectorruimte V.

   Voor de raakruimtes van de volgende deelvariëteiten van $GL_n(K)$ verwijs ik naar §1.2 van [3]:

2. De raakruimte $T_{SL_n(\mathbb{C})}(1)$ is de deelruimte van $M_n(\mathbb{C})$ bestaande uit matrices met spoor 0, dus de som van hun diagonale elementen is 0.

3. De raakruimte $T_{SO(n)}(1)$ is $M_n(\mathbb{R})^-$ bestaande uit de antisymmetrische matrices, dat wil zeggen de matrices A zodanig dat $A^t = -A$.

4. De raakruimte $T_{SU(2)}(1)$ is de deelruimte van $M_2(\mathbb{C})$ bestaande uit matrices A met spoor 0 en $A^* = -A$, waarbij A^* gedefinieerd is als $A^* := \overline{A}^t$. Deze raakruimte zullen we later nog veelvuldig terugzien. Het is een 3-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte opgespannen door

   $$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Differentiaal

Nu we het begrip raakruimte hebben geintroduceerd kunnen we op een natuurlijke manier definiëren wat de afgeleide van een functie is. Voor een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kennen we zo'n manier: We nemen als afgeleide $D(f)$, de jacobi matrix met als i, j'e element $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Dit principe generaliseren we met het begrip *differentiaal*

Definitie 1.7. *Neem $f : X \to Y$ een morfisme van variëteiten X en Y en $x \in X$ een punt. De* differentiaal *van f in x is gedefiniëerd als $D(f)_x : T_X(x) \to T_Y(f(x)) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.*

2 Liegroepen en Lie algebra's

2.1 Inleiding

Geïntroduceerd door de wiskundige Sophus Lie in 1870 om symmetrieën van differentiaal vergelijkingen te bestuderen hebben Liegroepen veel toepassingen gevonden in de hedendaagse natuurkunde.

Met behulp van het vorige hoofdstuk hebben we nu alle kennis om Liegroepen te definieren en enkele belangrijke voorbeelden te geven. Verder zullen we ook Lie algebra's definiëren omdat die nauw verwant zijn met Liegroepen en het afleiden van de representaties van $SU(2)$ in het volgende hoofdstuk makkelijker maken.

2.2 Liegroepen

Nu we hebben bekeken wat een variëteit is kunnen we overgaan tot het precies definiëren van een Liegroep.

Definitie 2.1. *Een* Liegroep G *is een topologische ruimte met een n-dimensionale differentieerbare atlas en een groepsstructuur zodanig dat de afbeeldingen $G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ en $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ differentieerbare afbeeldingen zijn.*

Als G compact is als topologische ruimte dan heet G een compacte *Liegroep.*

Een morfisme van Liegroepen G naar G' *is een homomorfisme $G \to G'$ en tevens een morfisme van variëteiten.*

Men kan laten zien dat de voorbeelden uit het vorige hoofdstuk niet alleen variëteiten zijn maar ook Liegroepen door te laten zien dat bovengenoemde afbeeldingen differentieerbaar zijn.

In het bewijs van stelling 3.9 zullen we het volgende lemma nodig hebben:

Lemma 2.2. *Neem een Liegroep G en $g \in G$. Er geldt $l_g : x \mapsto gx$ en $r_g : x \mapsto xg$ zijn continu en differentieerbaar*

Bewijs. Ik bewijs het lemma voor l_g, het bewijs voor r_g is identiek. Neem G een Liegroep. Er geldt dat de afbeelding

$$l : G \to G \times G \ : \ x \mapsto (g, x)$$

continu en differentieerbaar is. Op de eerste coordinaat is deze afbeelding de constante afbeelding $x \mapsto g$ en op de tweede coordinaat de identiteit $x \mapsto x$. Deze zijn allebei continu en differentieerbaar, dus l is dat ook. Omdat de groepsoperatie $* : G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy$ per definitie continu en differentieerbaar is, is de samenstelling

$$l_g := * \circ l : G \to G : x \mapsto gx$$

ook continu en differentieerbaar. □

Voorbeelden

1. $GL_n(\mathbb{R})$ is een Liegroep met als groepsoperatie de matrixvermenigvuldiging "$\cdot$". In dit geval is het vrij eenvoudig in te zien dat de beide genoemde afbeeldingen differentiëerbaar zijn omdat het vermenigvuldigen van twee matrices en het nemen van de inverse coördinaatsgewijs het nemen van producten en sommen betekent en dit zijn differentieërbare operaties. Alleen bij het nemen van de inverse deelt men door de determinant van de matrix, echter voor matrices in $GL_n(\mathbb{R})$ is deze determinant juist ongelijk 0 dus is de operatie differentieerbaar. Ook $GL_n(\mathbb{C})$ is een Liegroep.

2. Alle deelvariëteiten van $GL_n(\mathbb{R})$ en $GL_n(\mathbb{C})$ zoals $SL_n(\mathbb{C})$ en $SU(n)$ die we in het vorige hoofdstuk als voorbeelden hebben gegeven zijn Liegroepen omdat ze zowel ondergroepen als deelvariëteiten van $GL_n(\mathbb{R})$ of $GL_n(\mathbb{C})$ zijn. Hierdoor zijn de afbeeldingen $(x, y) \mapsto xy$ en $x \mapsto x^{-1}$ automatisch differentieërbaar.

3. $O(n)$, $SO(n)$ en $SU(n)$ zijn voorbeelden van compacte Liegroepen omdat de vergelijkingen waaraan de matrixcoëfficiënten moeten voldoen gegeven door $xx^t = x^tx = 1$ respectievelijk $x\overline{x}^t = \overline{x}^tx = 1$ een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^{n^2}$ definiëren en volgens de stelling van Heine Borel is deze compact.

4. Quotienten van Liegroepen met een ondergroep zijn Liegroepen als de ondergroep normaal en gesloten is. Dit is zeker niet triviaal, omdat het a priori niet eens duidelijk is of het quotient wel een varieteit is, zie ook het hoofdstuk hiervoor. In het bijzonder is $SU(2)/\{1,-1\}$ een Liegroep. Deze zullen we straks nog tegenkomen! Zie voor stellingen over quotienten van Liegroepen ook [3], §1.11.

2.3 Lie algebra's

Een Lie algebra is een vectorruimte met daarop een operatie, het Lie haakje, dat aan drie eisen voldoet.

Definitie 2.3. *Een* Lie algebra *is een paar* $(L, [,])$ *(vaak alleen genoteerd met "L") met* L *een* $\mathbb{R}$*-vectorruimte en een afbeelding* $[,] : L \times L \to L : (x, y) \mapsto [x, y]$*, het* Lie haakje*, dat aan de volgende eisen voldoet:*

1. $[,]$ *is* $\mathbb{R}$*-bilineair*

2. $[,]$ *is alternerend, d.w.z.* $[x, y] = -[y, x]$

3. *Voor alle* $x, y, z \in L$ *geldt* $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$*, (de* Jacobi identiteit*)*

Een Liegroep G geeft op een natuurlijke manier aanleiding tot een Lie algebra door te kijken naar de raakruimte $\mathfrak{g} = T_G(1)$. We weten al dat $\mathfrak{g}$ een vectorruimte is, nu moeten we alleen een voor de hand liggend keuze voor het Lie haakje maken. Daarvoor zullen we gebruik maken van de zogeheten geadjungeerde representatie, een specifiek voorbeeld van een *representatie*, een begrip dat we pas in het volgende hoofdstuk aan bod zullen zien komen.

Definitie 2.4. *Neem* G *een Liegroep. De afbeelding* $\psi_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ *is dan een automorfisme van de Liegroep* G*. Er geldt*

$$D(\psi_g)_1 : T_G(1) = \mathfrak{g} \to T_G(\psi_g(1)) = T_G(1) = \mathfrak{g} : [\alpha] \mapsto [\psi_g \circ \alpha]$$

en er valt te controleren dat deze afbeelding $\mathbb{R}$*-lineair is met inverse* $D(\psi_{g^{-1}})_1$*, dus* $D(\psi_g)_1 \in Aut(\mathfrak{g})$*. Dan heet de afbeelding* $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g}) : g \mapsto D(\psi_g)_1$ *de* geadjungeerde representatie van de Liegroep G

We weten dat $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = GL(\mathfrak{g})$ en uit voorbeeld 1 van sectie 1.3 volgt dat $T_{GL(\mathfrak{g})}(1) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ dus de geadjungeerde representatie van de Liegroep G geeft aanleiding tot de volgende afbeelding:

$$\mathrm{ad} := D(\mathrm{Ad})_1 : T_G(1) = \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

Deze afbeelding gebruiken we nu om het Lie haakje op $\mathfrak{g}$ en dus de geïnduceerde Lie algebra $\mathrm{Lie}(G)$ te definiëren:

Definitie 2.5. *Neem* G *een Liegroep. De geïnduceerde Lie algebra van* G *is de vectorruimte* $\mathfrak{g}$ *met daarop de afbeelding* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} : (g, h) \mapsto [g, h] = ad(g)(h)$

Deze definitie is niet compleet zonder dat we bewijzen dat de gekozen afbeelding $[,]$ inderdaad voldoet aan de eisen van een Lie haakje en het is ook mogelijk om dit te doen (zie [3] stelling 1.1.4), maar wij zullen meteen kijken naar het specifieke geval van $G = GL_n(K)$ met $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ omdat het in dat geval wat minder abstract en wat relevanter voor deze scriptie is.

Stelling 2.6. *De geïnduceerde Lie algebra van $GL_n(K)$ met $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ is $M_n(K)$ met daarop de afbeelding $[,] : (X, Y) \mapsto XY - YX$, de commutator van X en Y, en dit is een Lie haakje.*

Bewijs. Uit voorbeeld 1 van sectie 1.3 en uit de definitie van differentiaal volgt dat

$$D(\psi_g)_1 : T_{GL_n(K)}(1) \to T_{GL_n(K)}(1) : [1+tA] \mapsto [\psi_g \circ (1+tA)] = [g\cdot(1+tA)\cdot g^{-1}] = [1+t(g\cdot A\cdot g^{-1})]$$

waarbij het de producten "$\cdot$" de matrixvermenigvuldiging zijn. Als men $[1 + tA]$ identificeert met A dan krijgt men de afbeelding

$$D(\psi_g)_1 : M_n(K) \to M_n(K) : A \mapsto g \cdot A \cdot g^{-1}$$

Dan geldt $\mathrm{Ad} : g \mapsto (A \mapsto gAg^{-1})$, dus $\mathrm{ad} : T_{GL_n(K)}(1) \to \mathrm{End}(M_n(K))$ en

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(X)(Y) &= D(\mathrm{Ad})_1([1 + tX])(Y) \\
&= [\mathrm{Ad} \circ (1 + tX)](Y) \\
&= [(1 + tX)Y(1 + tX)^{-1}] \\
&= [(1 + tX)Y(1 - tX)] \\
&= [Y + tXY - tYX + O(t^2)] \\
&= XY - YX
\end{aligned}$$

Deze afbeelding is K-bilineair, alternerend en voldoet aan de Jacobi identiteit, zo ziet men na enig nadenken. □

Met behulp van de geinduceerde Lie algebra's kan men vaak stellingen bewijzen over Liegroepen. In het volgende hoofdstuk zullen we daar een voorbeeld van zien in verband met representaties. Een wat simpeler voorbeeld van hoe Lie algebra's en Liegroepen zich tot elkaar relateren is het feit dat een samenhangende Liegroep commutatief is dan en slechts dan als het Lie haakje op de geïnduceerde Lie algebra altijd 0 is. Dit komt door het feit dat ψ_g de identiteit is d.e.s.d.a. g met alle h in de Liegroep commuteert.

Het verband tussen Liegroepen is zodanig dat men een functor tussen de categoriën van Liegroepen en die van Lie algebra's kan definiëren die in zekere zin een equivalentie is. Men neemt daartoe de functor *Lie* die een Liegroep op zijn geinduceerde Lie algebra afbeeldt. Men krijgt dan een equivalentie tussen de categorie van *samenhangende en enkelvoudig samenhangende* Liegroepen en de categorie van de Lie algebra's. Meer informatie hierover is te vinden in [2].

3 Representaties

3.1 Inleiding

Representatietheorie is een belangrijk onderdeel van de wiskunde omdat het wiskundigen in staat stelt groepen-theoretische vraagstukken om te zetten in vraagstukken in de lineaire algebra, een tak van de wiskunde die bijzonder goed is beschreven. In de representatietheorie beschouwt men de groep als een stel transformaties van een mathematisch object (preciezer: als een homomorfisme naar de automorfismegroep van het object), in ons geval is dit een vectorruimte. In dit hoofdstuk definiëren we onder andere representaties, wat het betekent als een representatie irreducibel is en kijken we naar de representaties van $SU(2)$ en $SO(3)$.

3.2 Representaties

Een representatie van een groep over een lichaam $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ is een K-vectorruimte met daarop een werking van de groep.

Definitie 3.1. *Neem G een groep en $K = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Een* representatie van G over K *is een paar (V, ϕ) (vaak alleen genoteerd met "ϕ" of "V") met V een K-vectorruimte en $\phi : G \to Aut(V) = GL(V)$ een groepshomomorfisme.*

Voor G een Liegroep heet de representatie ϕ een representatie van de Liegroep G *als ϕ een morfisme van Liegroepen is.*

Een afbeelding $f : V \to V'$ met V, V' representaties van G over K heet een morfisme van representaties als f K-lineair is en als geldt $f(gv) = gf(v)$ voor alle $g \in G$ en $v \in V$. Als f een isomorfisme is heten V en V' isomorf *als representaties.*

Een voorbeeld van een representatie is de geadjungeerde representatie van een Liegroep G.

Een representatie is dus eigenlijk een afbeelding van de groep G naar de verzameling lineaire transformaties van een vectorruimte V, d.w.z. voor een keuze van een basis voor V is $\phi(G)$ een groep van matrices. Dit heeft als voordeel dat men eigenschappen van Liegroepen kan bestuderen met behulp van lineaire algebra, een goed uitgediepte en krachtige tak van de wiskunde. Dit geeft ook inzicht in wat het betekent dat een representatie irreducibel is.

Definitie 3.2. *Neem (V, ϕ) een representatie van G over K. (V, ϕ) heet* irreducibel *als V precies twee deelruimten heeft die invariant zijn onder de werking van G: $\{0\}$ en V. Dit wil zeggen als voor alle $g \in G$ geldt $\phi(g)(V') \subset V'$ dan geldt $V' = \{0\}$ of V, en $V \neq \{0\}$.*

3.3 Representaties van $SU(2)$

Representaties van $SU(2)$ spelen een belangrijke rol in deze scriptie omdat ze relatief simpel te construeren zijn en omdat ze veel in de natuurkunde worden gebruikt. Neem $\mathbb{C}[x, y]_d$ de vectorruimte van homogene polynomen in twee variabelen over $\mathbb{C}$ van graad d. Een element van $\mathbb{C}[x, y]_d$ heeft de vorm

$$f(\mathbf{z}) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} y + \quad ... \quad + a_0 y^d$$

met $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Stelling 3.3. *$(\mathbb{C}[x, y]_d, \phi)$ is een representatie van $SU(2)$ over $\mathbb{C}$ als men neemt voor $U \in SU(2)$ en $f(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[x, y]_d$*

$$\phi(U)(f)(\mathbf{z}) = f(U^{-1} \cdot \mathbf{z})$$

Bewijs. ϕ is een groepshomomorfisme omdat $(\phi(U_1 \cdot U_2)(f)(\mathbf{z}) = f(U_2^{-1} \cdot U_1^{-1} \cdot \mathbf{z}) = \phi(U_2)(f)(U_1^{-1} \cdot \mathbf{z}) = \phi(U_1)(\phi(U_2)(f))(\mathbf{z}) = (\phi(U_1) \circ \phi(U_2))(f)(\mathbf{z})$ □

Stelling 3.4. *De representatie* $(\mathbb{C}[x,y]_d, \phi)$ *is irreducibel.*

Bewijs. We gaan gebruik maken van de Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ van $SU(2)$, zoals in voorbeeld 4 van sectie 1.3 gedefinieerd. Neem een $V \subset \mathbb{C}[x,y]_d$ ongelijk nul die invariant is onder de werking van $SU(2)$. Nu geldt dat als V invariant is onder de werking van $SU(2)$ hij dat ook is onder de werking van $\mathfrak{su}(2)$.

Allereerst stellen we vast dat $\mathfrak{su}(2)$ wordt opgespannen door 3 basisvectoren:

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

en geldt $[I,J] = 2K,\ [J,K] = 2I,\ [K,I] = 2J$. Nu definieert de werking $\phi : SU(2) \to GL(\mathbb{C}[x,y]_d)$ een werking $D(\phi)_1 := \phi' : \mathfrak{su}(2) \to End(\mathbb{C}[x,y]_d)$ van $\mathfrak{su}(2)$ op $\mathbb{C}[x,y]_d$ door

$$\phi'(A) = [\phi(1+tA)]$$

met andere woorden

$$\phi(1+tA)(f(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) + t\phi'(A)(f(\mathbf{z})) + O(t^2)$$

Voor I, J en K geldt

$$\begin{aligned} \phi(1+tI)(x^a y^b) &= ((1-ti)x)^a((1+ti)y)^b = (x^a - atix^a)(y^b + btiy^b) \\ &= x^a y^b + ti(b-a)x^a y^b \\ \phi(1+tJ)(x^a y^b) &= (x-ty)^a(tx+y)^b = (x^a - atx^{a-1}y)(y^b + btxy^{b-1}) \\ &= x^a y^b - atx^{a-1}yb + 1 + btx^{a+1}y^{b-1} \\ \phi(1+tK)(x^a y^b) &= (x-tiy)^a(-tix+y)^b = (x^a - atix^{a-1}y)(y^b - btixy^{b-1}) \\ &= x^a y^b - atix^{a-1}y^{b+1} - btix^{a+1}y^{b-1} \end{aligned}$$

modulo t^2. Met andere woorden:

$$\begin{aligned} \phi'(I)(x^a y^b) &= i(b-a)x^a y^b \\ \phi'(J)(x^a y^b) &= bx^{a+1}y^{b-1} - ax^{a-1}y^{b+1} \\ \phi'(K)(x^a y^b) &= -bix^{a+1}y^{b-1} - aix^{a-1}y^{b+1} \end{aligned}$$

Nu geldt dat $V \neq \{0\}$ dus er is een zekere $v \neq 0$ in V. Er geldt dus $v = v_d x^d + v_{d-1}x^{d-1}y + \ldots + v_0 y^d$ met niet alle $v_i = 0$. Omdat elke term $\neq 0$ van v na toepassing van $\phi'(I)$ een andere coefficient heeft gekregen kan men door herhaaldelijk $\phi'(I)$ toe te passen en geschikte lineaire combinaties te nemen een monoom overhouden waarvan men door vermenigvuldiging van een scalair de coefficient gelijk kan nemen aan 1. Zonder verlies van algemeenheid is dus ook $x^a y^b \in V$. Uit het feit dat V invariant is onder $\mathfrak{su}(2)$ volgt dan dat $\phi'(J)(x^a y^b)$, $\phi'(K)(x^a y^b)$ en ook

$$\frac{1}{2b}(\phi'(J)(x^a y^b) + i\phi'(K)(x^a y^b)) = x^{a+1}y^{b-1}$$

en

$$\frac{1}{2a}(i\phi'(K)(x^a y^b) - \phi'(J)(x^a y^b)) = x^{a-1}y^{b+1}$$

elementen van V zijn. Door dit herhaald toe te passen krijgt men dat elke willekeurige $x^i y^{d-i} \in V$, dus dat $V = \mathbb{C}[x,y]_d$, een tegenspraak. Dus V is irreducibel. $\square$

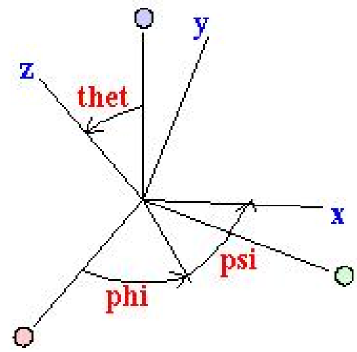

Figure 1: Eulerhoeken ϕ, θ, ψ.

3.4 $SO(3)$

Voordat we kijken naar de relatie tussen $SU(2)$ en $SO(3)$ en de representaties van $SO(3)$ kijken we eerst iets beter naar de Liegroep $SO(3)$, die zo'n belangrijke rol speelt in de natuurkunde.

$SO(3)$ is de verzameling orthogonale 3×3-matrices met determinant $+1$. Omdat de kolommen van een element A uit $SO(3)$ orthogonaal zijn is het beeld van de standaardbasis-vectoren (e_1, e_2, e_3) onder A ook een orthogonale basis. Bovendien, omdat $\det A = 1$, is het er ook nog een met dezelfde orientatie en men kan A dus zien als een rotatie van de $\mathbb{R}^3$. We weten dat een rotatie van de $\mathbb{R}^3$ gekarakteriseerd wordt door 3 *Euler hoeken* ϕ, θ en ψ, zie ook sectie 9.6 van [4]. Voor een willekeurige rotatie met de parameters ϕ, θ en ψ, $(0 \leq \phi < 2\pi)$, $(0 \leq \theta < \pi)$, $(0 \leq \psi < 2\pi)$ roteert men eerst de $\mathbb{R}^3$ over een hoek ϕ om de z-as, vervolgens over een hoek θ om de y-as en tot slot over een hoek ψ om de z-as. Er bestaat dus de volgende afbeelding:

$$(\phi, \theta, \psi) \mapsto \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die gaat van $\mathbb{R}^3$ naar $SO(3)$ en is surjectief. De afbeelding is echter bepaald niet injectief, niet alleen omdat men de argumenten modulo 2π kan kiezen maar ook omdat voor $\theta = 0$ "ϕ" en "ψ" op hetzelfde neerkomen. Omdat alle matrix elementen continue functies zijn is deze afbeelding wel continu. Dit geeft het volgende lemma waarvan het bewijs met behulp van deze afbeelding niet meer moeilijk is:

Lemma 3.5. *$SO(3)$ is samenhangend.*

Bewijs. Samenhang wordt gerespecteerd door continue afbeeldingen. $\mathbb{R}^3$ is samenhangend dus ook $SO(3)$. □

3.5 Representaties van $SO(3)$

Er bestaat een isomorfisme van Liegroepen $SU(2)/\{1, -1\} \cong SO(3)$, dus $SU(2)$ is een dubbele overdekking van $SO(3)$. Om dit in te zien is het handig te werken met quaternionen, een $\mathbb{R}$-algebra voor het eerst door Hamilton toegepast op mechanische problemen in de $\mathbb{R}^3$.

Definitie 3.6. *De* quaternionenalgebra *is de sub* $\mathbb{R}$*-algebra van* $M_2(\mathbb{C})$ *bestaande uit de matrices* $\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$ *met* $a, b \in \mathbb{C}$*. Men kan* $\mathbb{H}$ *ook beschouwen als de* $\mathbb{R}$*-vectorruimte* $\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K \subset M_2(\mathbb{C})$ *met*

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

en als vermenigvuldiging gewoon de matrixvermenigvuldiging.

Het is niet moeilijk te bewijzen dat $\mathbb{H}$ inderdaad een sub $\mathbb{R}$-algebra is en dat beide definities equivalent zijn. Het centrum $Z(\mathbb{H})$ is gewoon $\mathbb{R}1$: Elk element uit $M_2(\mathbb{C})$ dat met I commuteert is diagonaal en dat het commuteert met J betekent vervolgens dat het een scalair is.

Definitie 3.7. *Er geldt* $x^* := \overline{x}^t$*. Kies*

$$\begin{aligned} N(x) &:= x^*x = xx^* = det(x) \in \mathbb{R}1 \\ tr(x) &:= x + x^* \in \mathbb{R}1 \end{aligned}$$

Men definieert een inproduct op $\mathbb{H}$ *door*

$$\langle x, y\rangle := (x^*y + y^*x)/2 = tr(x^*y)/2$$

De gelijkheden rechts van de ":=" moeten uiteraard wel eventjes gecontroleerd worden maar dit is niet moeilijk. Merk op dat geldt

$$\{x \in \mathbb{H} |\ \mathrm{N}(x) = 1\} = SU(2) \subset \mathbb{H}^*$$

en

$$V := \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K = \mathfrak{su}(2) \subset \mathbb{H}$$

Beschouw nu de afbeeldingen $l_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : y \mapsto xy$ en $r_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : y \mapsto yx$.

Stelling 3.8. l_x *en* r_x *zijn orthogonaal d.e.s.d.a.* $N(x) = 1$ *en* $det(l_x) = det(r_x) = (N(x))^2$*.*

Het bewijs maakt voor het tweede deel gebruik van het karakteristiek polynoom van l_x en r_x, zie §5.10 van [2] en voor de lineaire algebra [6].

Beschouw de functie $c_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : y \mapsto xyx^{-1}$ voor een $x \in \mathbb{H}^*$. Deze functie is inverteerbaar en op $\mathbb{R}1$ de identiteit en geeft dus aanleiding tot een functie $c_x : V \to V$ met $V = \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K \cong \mathbb{R}^3$ door restrictie. De afbeelding $c : x \mapsto c_x$ definieert een homomorfisme van $\mathbb{H}^*$ naar $\mathrm{GL}(V)$. Voor een $x \in SU(2)$ is $c(x)$ wegens $c_x = r_{x^{-1}} \circ l_x$ en stelling 3.8 een orthogonale lineaire transformatie met determinant 1. Dus door restrictie tot $SU(2)$ krijgt men de afbeelding

$$c : SU(2) \to SO(V)\ (\cong SO(3)) : x \mapsto c_x = (y \mapsto xyx^{-1})$$

De kern van deze afbeelding is de doorsnede $SU(2) \cap Z(\mathbb{H}) = \{1, -1\}$.

Stelling 3.9. $im(c) = SO(V)$

Bewijs. Allereerst merken we op dat c continu en differentieerbaar (en dus een morfisme van Liegroepen) is omdat voor elke keuze (v_1, v_2, v_3) als basis van V de matrixelementen van

$$c(x) := \begin{bmatrix} \langle xv_1x^{-1}, v_1\rangle & \langle xv_2x^{-1}, v_1\rangle & \langle xv_3x^{-1}, v_1\rangle \\ \langle xv_1x^{-1}, v_2\rangle & \langle xv_2x^{-1}, v_2\rangle & \langle xv_3x^{-1}, v_2\rangle \\ \langle xv_1x^{-1}, v_3\rangle & \langle xv_2x^{-1}, v_3\rangle & \langle xv_3x^{-1}, v_3\rangle \end{bmatrix}$$

polynomen in $\mathbb{C}[x_{(1,1)}, ..., x_{(2,2)}, \overline{x_{(1,1)}}, ..., \overline{x_{(2,2)}}]$ zijn. Omdat $x_{(1,1)} = \overline{x_{(2,2)}}$ en $x_{(1,2)} = -\overline{x_{(2,1)}}$ zijn deze dus ook polynomen in $\mathbb{C}[x_{(1,1)}, ..., x_{(2,2)}]$ en daarom continu en differentieerbaar.

Als we kunnen laten zien dat $\mathrm{im}(c)$ $(\neq \{0\})$ open en gesloten is geldt wegens lemma 3.5 dat $\mathrm{im}(c) = SO(V)$.

Stel dat er geldt dat de differentiaal $D(c)_1 : T_{SU(2)}(1) = \mathfrak{su}(2) \to T_{SO(V)}(1)$, een morfisme van Lie algebra's, surjectief is, dan geldt wegens de Impliciete Functie Stelling op pagina 6 van [1] dat c rond 1 de kanonieke projectie is, dus in het bijzonder

$$\exists U \subset SU(2) \text{ open},\ 1 \in U : c(U) \text{ is open.}$$

c is een homomorfisme dus $c(gU) = c(g)c(U) \subset \mathrm{im}(c)$. Wegens lemma 2.2 is $l_{c(g)^{-1}}$ continu, dus is $c(g)c(U)$ open. Omdat $c(g) \in c(g)c(U)$ is

$$\mathrm{im}(c) = \bigcup_{g \in SU(2)} c(g)c(U)$$

en dus open.

Nu geldt dat $\dim(\mathfrak{su}(2)) = \dim(T_{SO(V)}(1)) = 3$ dus $D(c)_1$ is surjectief d.e.s.d.a. $D(c)_1$ injectief is.

Neem $A \in \mathfrak{su}(2)$ en $v \in V$. Er geldt

$$v \mapsto c(1 + tA)(v) = (1 + tA)v(1 - tA) = v + t(Av - vA) \pmod{t^2}$$

en hieruit volgt $D(c)_1(A) = v \mapsto Av - vA$. Voor $A \in \ker(D(c)_1)$ betekent dit, zoals we al gezien hebben bij de quaternionen, dat $A \in \mathbb{R}1 \cap \mathfrak{su}(2)$. Dan geldt $A = A^* = -A$ ofwel $A = 0$, dus $D(c)_1$ is injectief, surjectief en $\mathrm{im}(c)$ is open.

Nu geldt dat $\mathrm{im}(c)$ een ondergroep van $SO(V)$ is, dus $SO(V)$ is de disjuncte vereniging van $g' \cdot \mathrm{im}(c)$ voor $g' \in SO(V)$, die wegens lemma 2.2 open zijn. In het bijzonder is het complement van $\mathrm{im}(c)$ open en dus is $\mathrm{im}(c)$ gesloten.

We hebben gezien dat $\mathrm{im}(c)$ zowel open als gesloten is en daarmee is de stelling bewezen. □

Er is dus een morfisme van Liegroepen $c : SU(2) \to SO(V)$ zodanig dat $SU(2)/\{1, -1\} \cong SO(V)$ als Liegroepen. Een keuze van een orthonormale basis van V, bijvoorbeeld $(v_1 = I, v_2 = J, v_3 = K)$ geeft dan een isomorfisme van Liegroepen $SO(V) \to SO(3)$. Dit isomorfisme is niet uniek: een andere keuze (bijvoorbeeld $(v_1 = K, v_2 = I, v_3 = J)$) geeft een ander isomorfisme. Dit isomorfisme geeft aanleiding tot een isomorfisme van Lie algebra's $\mathfrak{so}(V) \to \mathfrak{so}(3)$ en omdat we al zagen dat $D(c)_1$ een bijectief morfisme van Lie algebra's (dus een isomorfisme) is geldt $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$. Ook dit isomorfisme wordt dus bepaald door de keuze van de basis voor V.

De irreducibele representaties van $SO(3)$ zijn dus de irreducibele representaties van $SU(2)$ waarop de ondergroep $\{1, -1\}$ triviaal werkt. Dit zijn precies de $V_i := \mathbb{C}[x, y]_{2i},\ (i \geq 0)$ met

$$\rho_i : SO(3) \to GL(V_i) : SO(3) \to SU(2)/\{1, -1\} \to GL(V_i)$$

maar deze afbeelding is niet uniek: hij hangt af van de keuze van basis voor V. Wel zijn de verschillende representaties die ontstaan door de basiskeuze isomorf als representatie, dus de keuze maakt in zekere zin niet uit. De vrijheid om een basis voor $SO(V)$ te kiezen is een belangrijk feit wat we in de volgende sectie zullen gebruiken.

4 De Peter-Weyl stelling

4.1 Inleiding

Nu komen we aan bij het centrale wiskundige resultaat van deze scriptie: De stelling van Peter-Weyl. Voor het eerst bewezen door Hermann Weyl voor compacte Liegroepen is deze stelling algemener van toepassing op compacte topologische groepen, i.e. groepen waarop een compacte topologie gedefinieerd is.

Men kan het zien als een soort Fourier theorie voor Liegroepen: Net zoals Fourier theorie een basis voor $L^2(\mathbb{R})$ geeft (elke functie in $L^2(\mathbb{R})$ is te schrijven als een Fourierreeks), geeft de Peter-Weyl stelling een basis voor $L^2(G)$. Hierbij is G in ons geval een compacte Liegroep $\subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ en de complexe Hilbertruimte $L^2(G)$ een verzameling kwadratisch integreerbare functies op G, waarover zometeen meer. Voor $f_1, f_2 \in L^2(G)$ geldt per definitie dat $\int_G f_1 \overline{f_2} \mu$ goed gedefinieerd is. Hierbij is μ een *links invariante volume vorm* of een *Haarmaat*. Meer over volume vormen vind men in [1] hoofdstukken 3 en 5 en in [2] hoofdstuk 11. Omdat ik het slechts zijdelings gebruik zal ik er niet verder over uitwijden. Verder dient G compact te zijn omdat de maat μ dan normalizeerbaar is. Wij nemen hier $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ omdat dit alles is wat we nodig hebben en het bewijs van de stelling makkelijker is. Eerst iets meer over Hilbertruimten.

4.2 Hilbertruimten

Zoals gezegd is $L^2(G)$ een voorbeeld van een *Hilbertruimte*. Aangezien deze gebruikt wordt in de Peter-Weyl stelling zal ik hier een korte definitie geven. Zie voor details [8] hoofdstuk 6.

Definitie 4.1. *Een* inproductruimte *over* $\mathbb{C}$ *is een* $\mathbb{C}$*-vectorruimte* V *met een positieve Hermitse sesquilineaire vorm op* V*, het* inproduct*. Dat wil zeggen dat het inproduct* $\langle , \rangle$ *voldoet aan:*

1. $\forall x \in V :\ \langle x, x \rangle \geq 0$ *(positief)*

2. $\forall x, y \in V :\ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *(Hermites)*

3. $\forall x, y, z \in V\ \forall a \in \mathbb{C} : \begin{array}{l} \langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, ay + z \rangle = \overline{a}\langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \end{array}$ *(sesquilineair)*

Een Hilbertruimte is een speciaal soort inproductruimte.

Definitie 4.2. *Een inproductruimte* V *heet een* Hilbertruimte *als deze compleet is ten opzichte van de norm* $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

$L^2(G)$ is gedefinieerd als de completering van de $\mathbb{C}$-vectorruimte $C(G)$ van kwadratisch integreerbare continue functies $G \to \mathbb{C}$. Daar het inproduct gedefinieerd is als $\langle f, g\rangle = \int_G f\overline{g}\mu$ ziet men snel in dat $C(G)$ een inproductruimte is en $L^2(G)$ een Hilbertruimte.

Het blijkt nuttig om bij Hilbertruimten een andere definitie van een basis te gebruiken dan bij vectorruimten, zie ook [8] §6.2.

Definitie 4.3. *Een orthonormale deelverzameling S van een Hilbertruimte V heet* compleet *wanneer $\{x\}\perp S \Rightarrow x = 0$. Een complete orthonomale verzameling van een Hilbertruimte heet een* Hilbertbasis*.*

Losjes gezegd betekent dit dat voor element van een Hilbertbasis oneindig veel termen $\neq 0$ mogen zijn. In het vervolg zullen we waar het nodig is met basis een Hilbertbasis bedoelen.

Het feit dat $C(G)$ dicht ligt in $L^2(G)$ betekent dat elke $f \in L^2(G)$ de limiet is van een reeks $(f_i)_{i\geq 0}$ met $f_i \in C(G)$. Dit is equivalent met het feit dat f te schrijven is als een som van elementen in $C(G)$, neem namelijk de som

$$f = \sum_{i=0}^{\infty}(f_{i+1} - f_i) + f_0$$

Een Hilbertbasis voor $L^2(G)$ is een orthonormale basis voor de vectorruimte $C(G)$, een feit dat we in sectie 5 zullen gebruiken.

$C(G)$ vormt een representatie van de Liegroep G door rechtstranslaties $gf(x) := f(xg)$ voor $f \in C(G)$. Omdat men bij de Hilbertruimte $L^2(G)$ functies niet kan evalueren in een punt kan men niet zomaar zeggen dat $gf(x) := f(xg)$ voor $f \in L^2(G)$ maar door de werking van G op $C(G)$ en het feit dat $C(G)$ dicht ligt in $L^2(G)$ is duidelijk wat we hier mee bedoelen en zeggen we dat $L^2(G)$ een representatie is van G door rechtstranslaties.

4.3 De Peter-Weyl stelling

Stelling 4.4. *Neem $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ voor een zekere n een compacte Liegroep, met Haarmaat μ en $\{(V_i, \rho_i)|i \in I\}$ een verzameling representanten van de isomorfieklassen van irreducibele eindigdimensionale representaties van G. Neem $\langle\cdot,\cdot\rangle$ een G-invariant inproduct op V_i en $v_i := (v_{i,1}, ..., v_{i,dim(V_i)})$ een orthonormale basis van V_i t.o.v. het inproduct.*

Er geldt dat de afbeelding $End_{\mathbb{C}}(V_i) \to L^2(G) : m \mapsto m(g) = tr(\rho_i(g) \cdot m)$ met $\rho_i(g)$ en m matrices t.o.v. de basis v_i aanleiding geeft tot een isomorfisme van G-representaties

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus}_{i\in I} End_{\mathbb{C}}(V_i)$$

Hierbij is $\widehat{\oplus}$ een Hilbert directe som*, een som waarvan een element oneindig veel termen $\neq 0$ mag hebben.*

Voorts, als $f_{i,j,k} := E_{k,j}(g)$ met $E_{k,j}$ de matrix met een 1 op plek (k, j) en voor de rest nullen, vormen de $\sqrt{dim(V_i)}f_{i,j,k}$ een orthonormale basis van $L^2(G)$.

Bewijs. Allereerst merken we op dat $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ een representatie is door linkstranslaties: $gm = \rho_i(g) \cdot m$ en $L^2(G)$ door rechtstranslaties: $gf(x) = f(xg)$. De genoemde afbeelding is $\mathbb{C}$-lineair en er geldt

$$(gm)(x) = \mathrm{tr}(\rho_i(x) \cdot (\rho_i(g) \cdot m)) = \mathrm{tr}(\rho_i(xg) \cdot m) = m(xg) = g(m(x))$$

dus $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \to L^2(G)$ en $\widehat{\bigoplus}_{i\in I}\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \to L^2(G)$ zijn morfismen van representaties.

We kunnen laten zien dat laatstgenoemde afbeelding een isomorfisme is door te bewijzen dat deze injectief en surjectief is. Injectieviteit volgt automatisch uit het feit dat $\sqrt{\dim(V_i)}f_{i,j,k}$ orthonormaal zijn wat volgt uit de zogeheten *relaties van Schur*. Neem V en V' twee irreducibele representaties van G en $u, v \in V$ en $u', v' \in V'$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\int_{g\in G} \langle gu, v\rangle\overline{\langle gu', v'\rangle}\mu &= 0 \text{ (als } V \text{ niet isomorf is met } V')\\ &= \frac{\langle u, u'\rangle\overline{\langle v, v'\rangle}}{\dim(V)} \text{ als } V = V'\end{aligned}$$

Bewijs: Neem $f : V \to V'$ een willekeurige lineaire afbeelding. Dan geldt dat als

$$F(x) := \int_{g\in G} g(f(g^{-1}x))\mu$$

dan is F een morfisme van representaties. Er geldt immers $F(hx) = \int_{g\in G} g(f(g^{-1}hx))\mu$ en omdat voor alle functies Q geldt $\int_{g\in G} Q(g)\mu = \int_{g\in G} Q(hg)\mu$ voor $h \in G$ geldt

$$F(hx) = \int_{g\in G}(hg)(f((hg)^{-1}hx))\mu = \int_{g\in G} h(g(f(g^{-1}x)))\mu = hF(x)$$

Stel nu dat V niet isomorf is met V', dan is $F = 0$ omdat V' irreducibel is en neem $f : x \mapsto \langle x, u\rangle u'$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}0 &= \langle v', F(v)\rangle = \langle v', \int_{g\in G} g(f(g^{-1}v))\mu\rangle\\ &= \int_{g\in G}\langle v', g(f(g^{-1}v))\rangle\mu = \int_{g\in G}\langle g^{-1}v', f(g^{-1}v)\rangle\mu\\ &= \int_{g\in G}\langle g^{-1}v', \langle g^{-1}v, u\rangle u'\rangle\mu = \int_{g\in G}\overline{\langle g^{-1}v, u\rangle}\langle g^{-1}v', u'\rangle\mu\\ &= \int_{g\in G}\langle gu, v\rangle\overline{\langle gu', v'\rangle}\mu\end{aligned}$$

Stel nu dat $V = V'$, dan is $F = \lambda 1$ voor een $\lambda \in \mathbb{C}$, neem f zoals hierboven. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot \dim(V) &= \mathrm{tr}(F) = \sum_{i=1}^{\dim(V)}\langle F(v_i), v_i\rangle\\ &= \int_{g\in G}\sum_{i=1}^{\dim(V)}\langle g(f(g^{-1}v_i), v_i\rangle\mu = \int_{g\in G}\mathrm{tr}(g\circ f\circ g^{-1})\mu\\ &= \int_{g\in G}\mathrm{tr}(f)\mu = \mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{\dim(V)}\langle f(v_i), v_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{\dim(V)}\langle\langle v_i, u\rangle u', v_i\rangle = \sum_{i=1}^{\dim(V)}\langle u', v_i\rangle\langle v_i, u\rangle = \langle u', u\rangle\end{aligned}$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle u, u'\rangle\overline{\langle v, v'\rangle}}{\dim(V)} &= \overline{\frac{\langle u', u\rangle}{\dim(V)}}\langle v, v'\rangle = \overline{\lambda\langle v, v'\rangle} = \langle v', F(v)\rangle \\
&= \ldots = \int_{g\in G} \langle gu, v\rangle\overline{\langle gu', v'\rangle}\mu
\end{aligned}$$

Hieruit volgen de relaties van Schur en het feit dat de $\sqrt{\dim(V_i)} f_{i,j,k}$ orthonormaal zijn.

Het bewijs van de surjectiviteit is lastiger en zal ik niet in zijn geheel geven. Een belangrijke stap is het aantonen dat de vectorruimte $E \subset L^2(G)$ opgespannen door de $f_{i,j,k}$ gesloten is onder vermenigvuldiging en complexe conjugatie, iets waarvoor men eigenschappen van duale vectorruimtes en tensorproducten voor gebruikt. Zie voor het bewijs [2] sectie 12.4 en propositie 12.5 en voor duale vectorruimtes en tensorproducten [6] hoofdstuk 2 en appendix 4.

E is dus een sub $\mathbb{C}$-algebra gesloten onder complexe conjugatie. $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dus de elementen van G zijn te zien als matrices. Beschouw nu de functies $x_{p,q} \in L^2(G)$ met $1 \leq p, q \leq n$ zodanig dat $x_{p,q} : G \to \mathbb{C} : g \mapsto (g)_{p,q}$, ofwel $x_{p,q}$ is de (p, q)-coördinaten functie. Als we kunnen bewijzen dat $x_{p,q} \in E$ voor alle (p, q) dan volgt uit de *Stone Weierstrass stelling* dat $\overline{E} = L^2(G)$, met $\overline{E}$ de afsluiting van E. De Stone Weierstrass stelling zegt namelijk dat een continue complexe functie f op een compacte deelverzameling $C \subset \mathbb{C}^{n^2}$ de limiet is, voor de sup norm, van een reeks polynomen, zie ook [8] §1.6. Hieruit volgt dat E dicht ligt in $L^2(G)$ omdat de deelruimte van continue functies in $L^2(G)$ dicht ligt in $L^2(G)$.

Men kan laten zien dat $x_{p,q} \in L^2(G)$ door op te merken dat $\mathbb{C}^n$ gecombineerd met de inbedding $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ een representatie van G is en dus de directe som van irreducibele representaties: $\mathbb{C}^n \cong \bigoplus_{i'\in I'\subset I} V_{i'}$, dus ook

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i'\in I'} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{i'})$$

Nu geeft het element $E_{p,q} \in M_n(\mathbb{C})$ aanleiding tot een element $(F_{i'_1}, \ldots) \in \bigoplus_{i'\in I'} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{i'})$. Het element $E_{p,q} \in M_n(\mathbb{C})$ geeft aanleiding tot de functie $x_{p,q}$ doordat

$$\mathrm{tr}(\rho(g) \cdot E_{p,q}) = x_{p,q}(g)$$

dus hetzelfde geldt voor het element $(F_{i'_1}, \ldots) \in \widehat{\bigoplus}_{i'\in I'} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{i'})$. Dus $x_{p,q}$ is te schrijven als

$$x_{p,q} = \sum_{i'\in I'} \sum_{j,k=1}^{\dim(V_{i'})} (F_{i'})_{k,j} f_{i',j,k}$$

Dus $x_{p,q}$ is een lineaire combinatie van de $f_{i,j,k}$ en is dus een element van E. □

4.4 Inproduct op $\mathbb{C}[x, y]_d$

In het volgende onderdeel zullen we gebruik maken van de Peter-Weyl stelling en deze toepassen op de irreducibele representaties van $G = SU(2)$, de $V_d = \mathbb{C}[x, y]_d$. De Peter-Weyl stelling eist dat we een G-invariant inproduct kiezen op V_d. We merken op dat $SU(2)$ het gewone inproduct op $\mathbb{C}^2$ invariant laat. Als we nu de elementen uit V_d beschouwen als functies $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ en als inproduct kiezen:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\substack{v\in\mathbb{C}^2\\ \|v\|=1}} f\overline{g}\mu'$$

met μ' een $SU(2)$-invariante maat op $S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ en $f, g \in V_i$.

Dit inproduct is nu automatisch G-invariant.

Stelling 4.5. *Neem een $V_d = \mathbb{C}[x,y]_d$ een representatie van $G = SU(2)$. Dan is de verzameling $\{x^d, x^{d-1}y, ..., y^d\}$ orthogonaal*

Bewijs. Men moet laten zien dat als $x^a y^b$ en $x^{a'}y^{b'}$ in V_d met $a \neq a'$ (en dus automatisch $b \neq b'$), dat dan $\langle x^a y^b, x^{a'}y^{b'}\rangle = 0$. Kies nou de matrix

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$$

Voor $\lambda = e^{it}$ met $t \in \mathbb{R}$ is $\Lambda \in SU(2)$. Er geldt

$$\begin{aligned} \Lambda x^a y^b &= (\lambda x)^a(\lambda^{-1}y)^b = \lambda^{a-b}x^a y^b \\ \Lambda x^{a'} y^{b'} &= (\lambda x)^{a'}(\lambda^{-1}y)^{b'} = \lambda^{a'-b'}x^{a'} y^{b'} \end{aligned}$$

Omdat $a - b \neq a' - b'$ geldt voor voldoende algemene λ dat $\lambda^{a-b} \neq \lambda^{a'-b'}$, dus $x^a y^b$ en $x^{a'}y^{b'}$ zijn eigenfuncties van Λ met verschillende eigenwaarden. Nu geldt

$$\langle x^a y^b, x^{a'}y^{b'}\rangle = \langle \Lambda x^a y^b, \Lambda x^{a'}y^{b'}\rangle = \lambda^{a-b}\lambda^{-1(a'-b')}\langle x^a y^b, x^{a'}y^{b'}\rangle$$

en omdat $\lambda^{a-b}\lambda^{-1(a'-b')} \neq 1$ is $\langle x^a y^b, x^{a'}y^{b'}\rangle = 0$. □

Nu we weten dat de $\{x^d, ..., y^d\}$ orthogonaal zijn ligt het voor de hand om zo te schalen met een factor $\lambda_{d,j}$ dat $\{\lambda_{d,d}x^d, \lambda_{d,d-1}x^{d-1}y, ..., \lambda_{d,0}y^d\}$ orthonormaal zijn. Daarvoor moeten we $\langle x^j y^{d-j}, x^j y^{d-j}\rangle$ expliciet uitrekenen.

Nemen we nu als coördinaten het *Hopf coördinaten* stelsel dan wordt een punt $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ beschreven door

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\xi_1}\sin\eta \\ z_2 &= e^{i\xi_2}\cos\eta \end{aligned}$$

waarbij ξ_1 en ξ_2 tussen 0 en 2π lopen en η tussen 0 en $1/2\pi$. De *volume vorm* is dan

$$dV = \sin\eta\cos\eta d\eta \wedge d\xi_1 \wedge d\xi_2$$

Nu geldt, zo vertelt Maple ons,

$$\begin{aligned}
\langle x^j y^{d-j}, x^j y^{d-j}\rangle &= \int_{\xi_2=0}^{2\pi}\int_{\xi_1=0}^{2\pi}\int_{\eta=0}^{1/2\pi} \sin\eta^{2j+1}\cos\eta^{2(d-j)+1} d\eta d\xi_1 d\xi_2 \\
&= 4\pi^2 \frac{\Gamma(d-j+1)\Gamma(j+1)}{2\Gamma(d+2)} \\
&= 4\pi^2 \frac{1}{2(d+1)} \frac{j!(d-j)!}{d!} \\
&= \frac{2\pi^2}{d+1} \left(\begin{array}{c} d \\ j \end{array}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Als we dus $x^j y^{d-j}$ schalen met een factor

$$\lambda_{d,j} := \frac{1}{\pi}\sqrt{\left(\begin{array}{c} d \\ j \end{array}\right)\frac{d+1}{2}}$$

is $(\lambda_{d,d}x^d, ...\lambda_{d,0}y^d)$ een orthonormale basis voor $\mathbb{C}[x,y]_d$.

5 Sferisch harmonische functies

5.1 Inleiding

In de afgelopen secties hebben we zo compact mogelijk de representatietheorie van compacte Liegroepen behandeld met als hoogtepunt de Peter-Weyl stelling. Daarnaast hebben naar de representaties van $SU(2)$ en vervolgens via de dubbele overdekking van $SO(3)$ door $SU(2)$ naar de representaties van $SO(3)$ gekeken. Al deze theorie zullen we nu toepassen om het doel van deze scriptie te verwezelijken: het afleiden van de sferisch-harmonische functies die een basis vormen voor de Hilbertruimte $L^2(S^2)$, de ruimte van kwadratisch integreerbare functies op de bol S^2.

5.2 Afleiding van de sferisch harmonische functies

Uit sectie 3.4 volgt dat $G = SO(3)$ op een natuurlijke manier op S^2 werkt d.m.v. matrixvermenigvuldiging en dat een element $g \in G$ op te vatten is als een rotatie. Voor een gegeven punt $N \in S^2$ (neem bijvoorbeeld $N = (0,0,1)$) is de stabilisator van N isomorf met $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ welke ik identificeer met een ondergroep S^1 van G door de volgende afbeelding:

$$\phi \mapsto \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Er is dus een surjectieve differentieerbare afbeelding $F : G \to S^2 : g \mapsto g \cdot N$ met $F^{-1}(g \cdot N) = gS^1$. Dit maakt de Hilbertruimte $L^2(S^2)$ isomorf met

$$L^2(G)^{S^1} := \{f \in L^2(G) \mid \forall g \in G\ ,\ \forall \phi \in S^1\ :\ f(g\phi) = f(g)\}$$

via de afbeelding

$$L^2(S^2) \to L^2(G)^{S^1} : f \mapsto f \circ F$$

We moeten wel laten zien dat $L^2(G)^{S^1}$ een Hilbertruimte is, in het bijzonder de completering van $C(G)^{S^1}$. Daartoe neem ik $W := L^2(G)$ en $V := C(G)$. Ik laat zien dat $W^{S^1} = \overline{V^{S^1}}$.

Allereerst is $W^{S^1} \subset \overline{V^{S^1}}$ omdat een willekeurige $f \in W^{S^1} \subset W$ te schrijven is als $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ met $f_i \in V$. Beschouw dan de lineaire projectie $p : V \to V^{S^1} : f' \mapsto pf'$ waarbij pf' gedefinieerd is door

$$pf'(x) := \int_{g \in S^1} f'(xg)\mu_{S^1}$$

Dit is voor de hand liggende manier om een S^1-invariante functie te construeren en het is inderdaad een projectie want $p^2 = p$. Bovendien is deze surjectief want hij is de identiteit op V^{S^1}. p laat zich voorts makkelijk uitbreiden tot een functie $W \to W^{S^1} : f' \mapsto \int_{g \in S^1} gf'\mu_{S^1}$. Nu is $gf = f$ voor $g \in S^1$ dus

$$f = pf = \sum_{i=0}^{\infty} pf_i$$

De pf_i zitten in V^{S^1}, dus $f \in \overline{V^{S^1}}$.

Verder is $W^{S^1} \supset \overline{V^{S^1}}$. Neem namelijk $f \in \overline{V^{S^1}} \subset W$ willekeurig, ofwel $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ met $f_i \in V^{S^1}$. Dan geldt voor alle $g \in S^1$

$$gf = \sum_{i=0}^{\infty} gf_i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i = f$$

dus $f \in W^{S^1}$. Dus $L^2(G)^{S^1}$ is de completering van $C(G)^{S^1}$ en een Hilbertruimte.

De stelling van Peter-Weyl geeft

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_i} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$$

waarbij de V_i representanten zijn van de verzameling isomorfieklassen van irreducibele eindigdimensionale complexe representaties van G. Uit sectie 3.5 blijkt dat $V_i = \mathbb{C}[x, y]_{2i}$, $(i \geq 0)$ en $\dim(V_i) = 2i + 1$, met het homomorfisme $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ $(\subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i))$ dat de representatie definieert. Uit de stelling van Peter-Weyl volgt verder dat als $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{id_i})$ een orthonormale basis voor V_i is de $\sqrt{d_i} f_{i,j,k}$ een orthonormale basis van $L^2(G)$ vormen, waarbij $f_{i,j,k}(g) = \langle \rho_i(g)v_{ij}, v_{ik} \rangle$.

De stelling van Peter-Weyl impliceert dat elke element $m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ aanleiding geeft tot een functie $m(g) \in L^2(G)$ volgens

$$m(g) = \sum_{j,k=1}^{2i} \rho_i(g)_{j,k} m_{k,j} = \mathrm{tr}(\rho_i(g) \cdot m)$$

De elementaire matrix $E_{kj} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ met een 1 op plaats (k, j) en verder nullen correspondeert dan met de functie $f_{i,j,k}(g) \in L^2(G)$. $L^2(G)$ is dan een representatie van G door rechtstranslaties (er geldt $gf(x) = f(xg)$ en $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ is er een door linkstranslaties (er geldt $gm = \rho_i(g) \cdot m$).

Door het isomorfisme $L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus}_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ is de vraag teruggebracht van het vinden van de S^1-invariante functies in $L^2(G)$ tot het vinden van de S^1-invariante elementen van iedere $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$. Een $m \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ is S^1-invariant als geldt $\forall \phi \in S^1 :\ \phi m = \rho_i(\phi) \cdot m = m$. Het probleem wordt eenvoudiger als we gaan werken in de Lie algebra $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ omdat geldt $S^1 = \exp(\mathbb{R}\sigma)$ met

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$$

Omdat verder $1 = \exp(0)$ geldt nu dat m S^1-invariant is d.e.s.d.a. $\rho_i'(\sigma) \cdot m = 0$ met de ook in het bewijs van stelling 3.4 gebruikte geinduceerde werking ρ_i' van $\mathfrak{g}$. Dit geldt weer d.e.s.d.a.

$$\mathrm{im}(m) \subset \ker(\rho_i'(\sigma))$$

.

De dubbele overdekking $c : SU(2) \to SO(V)$ gaf zoals we in sectie 3.5 zagen aanleiding tot het injectieve en surjectieve morfisme van Lie algebra's $D(c)_1 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(V)$ zodanig dat voor een $A \in \mathfrak{su}(2)$ geldt $D(c)_1(A) = v \mapsto Av - vA$. Ik beweer dat $D(c)_1(\frac{1}{2}I) = (xI + yJ + zK) \mapsto (-zJ + yK)$, met $v = xI + yJ + zK$ voor $x, y, z \in \mathbb{R}$. Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} D(c)_1(\frac{1}{2}I)(v) &= \frac{1}{2}I(xI + yJ + zK) - (xI + yJ + zK)\frac{1}{2}I \\ &= \frac{1}{2}(-x + yK - zJ - (-x - yK + zJ)) \\ &= \frac{1}{2}(2yK - 2zJ) \\ &= -zJ + yK \end{aligned}$$

Nu kunnen we de vrijheid benutten die we hebben om de basis van V te kiezen: Als ik de basis $(v_1 = J, v_2 = K, v_3 = I)$ kies, dan komt de afbeelding $xI + yJ + zK \mapsto -zJ + yK$ overeen met de matrix $\sigma \in SO(3)$. Als ik een andere basis had gekozen, zoals de voor de hand liggende keuze $(v_1 = I, v_2 = J, v_3 = K)$ dan was de afbeelding $D(c)_1(\frac{1}{2}K)$ overeen gekomen met σ. De reden dat ik de eerstgenoemde basis kies is dat de kern van $\rho_i'(\frac{1}{2}I)$ gemakkelijk is uit te rekenen.

$\frac{1}{2}I \in \mathfrak{su}(2)$ werkt op de elementen $x^j y^k$ van V_i als volgt:

$$\begin{aligned} \rho_i(1 + \frac{1}{2}tI)(x^j y^k) &= X^j Y^k \left(\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}ti & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}ti \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= ((1 - \frac{1}{2}ti)x)^j ((1 + \frac{1}{2}ti)y)^k \\ &= (x^j - \frac{1}{2}jtix^j)(y^k + \frac{1}{2}ktiy^k) \\ &= x^j y^k + \frac{1}{2}ti(k - j)x^j y^k \end{aligned}$$

Nu volgt net zoals in het bewijs van stelling 3.4 dat

$$\rho_i'(\frac{1}{2}I)(x^j y^k) = \frac{1}{2}i(k - j)x^j y^k$$

Hieruit volgt

$$\ker(\rho_i'(\sigma)) = \ker(\rho_i'(\frac{1}{2}I)) = \mathbb{C}x^i y^i$$

dus $\mathrm{im}(m) \subset \mathbb{C}x^i y^i$. Als men $(\lambda_{2i,2i}x^{2i}, \lambda_{2i,2i-1}x^{2i-1}y, \ \dots\ , \ \lambda_{2i,0}y^{2i})$ als (orthonormale) basis neemt voor V_i heeft de $(2i+1 \times 2i+1)$-matrix m de vorm

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,2i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

De S^1-invariante elementen van $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ worden opgespannen door $E_{i+1,j}$ voor $j \in \{1, ..., 2i{+}1\}$ en

$$E_{i+1,j}(g) = \mathrm{tr}(\rho_i(g) \cdot E_{i+1,j}) = \langle \rho_i(g)\lambda_{2i,j-1}x^{j-1}y^{2i-j+1}, \lambda_{2i,i}x^i y^i \rangle = f_{i,j,i+1}(g)$$

Een orthonormale basis voor $L^2(S^2)$ is de verzameling $\{\sqrt{d_i} f_{i,j,i+1}\}$

5.3 Voorbeelden

Voor een paar gevallen zullen we deze functies uitrekenen. Dit kunnen we doen door van een punt $(\phi, \theta) \in S^2$ een origineel van de afbeelding $SU(2) \to SO(3) \to S^2$ te nemen. Welke men neemt maakt niet uit omdat de functies $f_{i,j,i+1}$ toch S^1-invariant zijn. Het simpelst is een rotatie van θ om de y-as gevolgd door een rotatie van ϕ om de z-as. Met andere woorden het origineel van $(\phi, \theta) \in S^2$ is:

$$R := \Phi \cdot \Theta := \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \in SO(3)$$

Door de keuze van de basis geeft dit de volgende afbeeldingen in $SO(V)$:

$$\begin{aligned} \Phi : (xI + yJ + zK) &\mapsto xI + y\cos\phi J + y\sin\phi K - z\sin\phi J + z\cos\phi K \\ \Theta : (xI + yJ + zK) &\mapsto x\sin\theta J + x\cos\theta I + y\cos\theta J - y\sin\theta I + zK \end{aligned}$$

en dit kan men herschrijven als

$$\begin{aligned} \Phi : (xI + yJ + zK) &\mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ -e^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & ie^{i\phi} \\ ie^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix} z \\ \Theta : (xI + yJ + zK) &\mapsto \begin{bmatrix} i\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & -i\cos\theta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -i\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & i\sin\theta \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

Voor de beide originelen $\pm\Phi'$ en $\pm\Theta'$ in $SU(2)$ geldt

$$D(c)_1(A) : (xI + yJ + zK) \mapsto xAIA^* + yAJA^* + zAKA^*$$

Voor Φ' vindt men $\Phi' I \Phi'^* = I$ dus Φ' is diagonaal. Gebruik makend van de andere relaties vindt men dan dat

$$\pm\Phi' = \begin{bmatrix} \pm e^{\frac{1}{2}i\phi} & 0 \\ 0 & \pm e^{-\frac{1}{2}i\phi} \end{bmatrix}$$

Op eenzelfde manier vindt men

$$\pm\Theta' = \begin{bmatrix} \pm\cos\frac{1}{2}\theta & \pm i\sin\frac{1}{2}\theta \\ \pm i\sin\frac{1}{2}\theta & \pm\cos\frac{1}{2}\theta \end{bmatrix}$$

Dit geeft

$$\Phi' \cdot \Theta' = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix}$$

met

$$\begin{aligned} a &= \cos(\frac{1}{2}\theta)e^{\frac{1}{2}i\phi} \\ b &= i\sin(\frac{1}{2}\theta)e^{-\frac{1}{2}i\phi} \end{aligned}$$

Nu zijn we in staat om enkele spherisch harmonische functies uit te rekenen. Hierbij gebruik ik de nummering Y_l^m die in de quantummechanica gebruikelijk is, met $l = i$ een maat voor de grootte van het impulsmoment $\overrightarrow{L}$ en $m = j - k$ een maat voor de z-component van $\overrightarrow{L}$.

i=0 Dit is het triviale geval: $V_0 = \mathbb{C}$ en $\rho_i(A) = 1$ Dus

$$Y_0^0 := f_{0,1,1} = 1$$

i=1 V_1 wordt opgespannen door $\{\lambda_{2,2}x^2, \lambda_{2,1}xy, \lambda_{2,0}y^2\} = \{(\sqrt{\frac{3}{2}}/\pi)x^2, (\sqrt{\frac{6}{2}}/\pi)xy, (\sqrt{\frac{3}{2}}/\pi)y^2\}$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^{-1} := f_{1,1,2} &= \langle A\lambda_{2,1}xy, \lambda_{2,2}x^2\rangle = -\sqrt{2}\bar{a}b = -i\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^{0} := f_{1,2,2} &= \langle A\lambda_{2,1}xy, \lambda_{2,1}xy\rangle = (\bar{a}a - b\bar{b}) = \cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^{1} := f_{1,3,2} &= \langle A\lambda_{2,1}xy, \lambda_{2,0}y^2\rangle = -\sqrt{2}a\bar{b} = -i\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{i\phi} \end{aligned}$$

i=2 V_2 wordt opgespannen door $\{\lambda_{4,4}x^4, ..., \lambda_{4,0}y^4\}$. Dit geeft:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^{-2} := f_{2,1,3} &= \langle A\lambda_{4,2}x^2y^2, \lambda_{4,4}x^4\rangle = \sqrt{6}\bar{a}^2b^2 = -\sqrt{\frac{3}{8}}\sin^2\theta e^{-2i\phi} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^{-1} := f_{2,2,3} &= \langle A\lambda_{4,2}x^2y^2, \lambda_{4,3}x^3y\rangle = \sqrt{\frac{6}{4}}(2\bar{a}\bar{b}b^2 - 2ab\bar{a}^2) = -i\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta e^{-i\phi} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^{0} := f_{2,3,3} &= \langle A\lambda_{4,2}x^2y^2, \lambda_{4,2}x^2y^2\rangle = \bar{a}^2a^2 + \bar{b}^2b^2 - 4\bar{a}\bar{b}ba = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \\
\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^{1} := f_{2,4,3} &= \langle A\lambda_{4,2}x^2y^2, \lambda_{4,1}x^1y^3\rangle = \sqrt{\frac{6}{4}}(2\bar{a}\bar{b}a^2 - 2ab\bar{b}^2) = -i\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}Y_2^{2} := f_{2,5,3} &= \langle A\lambda_{4,2}x^2y^2, \lambda_{4,0}y^4\rangle = \sqrt{6}a^2\bar{b}^2 = -\sqrt{\frac{3}{8}}\sin^2\theta e^{2i\phi}
\end{aligned}$$

Alle gevonden functies komen prachtig overeen met de sferisch-harmonische functies zoals die gegeven zijn in [5], tabel 4.3, op een constante factor $\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$ na. Deze factor is het gevolg van de normalizatie. Hier is de maat μ zodanig gedefinieerd dat $\int_G \mu = 1$, in de quantummechanica gebruikt een andere maat zodanig dat de integraal over de bol van de functie 1 gelijk is aan de oppervlakte van de bol, 4π. Dit verschil veroorzaakt de factor. In figuren 2, 3 en 4 worden de sferisch-harmonische functies gevisualiseerd: $\|Y_l^m\|$ is weergegeven als de afstand tot de oorsprong voor $l = 0, 1, 2$.

We merken op dat de gegeven Y_l^m bepaald niet de enige orthonormale basis is van $L^2(S^2)$! A priori zijn er veel meer verschillende keuzes mogelijk. Men ziet dit terug in de keuze die we hadden bij het selecteren van de basis voor V en de orthonormale basis voor $\mathbb{C}[x,y]_d$. Het lijkt dus min of meer toevallig dat de orthonormale basis die we vinden ook de basis is die in de quantummechanica gebruikt wordt! Dat dit niet zo is wordt in het volgende hoofdstuk wat duidelijker gemaakt alsmede het verband tussen de wiskunde die in de voorgaande secties behandeld is en de natuurkunde.

5.4 Quantummechanica en het waterstofatoom

De grondvesten van de quantummechanica zijn gelegd in het begin van de vorige eeuw door vele gerenommeerde wetenschappers zoals Heisenberg, Planck, Schrödinger, Pauli en vele anderen. Daarmee is het een betrekkelijk moderne theorie en ook nu nog is het samen met de relativiteitstheorie een van de meest fundamentele theorieën van de natuurkunde.

De quantummechanica betekende een radicale omwenteling in de natuurkunde: Waar voorheen de toestand van een object beschreven werdt door een punt in een fase-ruimte en observabelen door functies op deze ruimte — denk aan een deeltje met een bepaalde snelheid en positie: de toestand van het deeltje kan dan worden beschreven door de vector $(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^6$, zijn kinetische energie door de functie $(...) \mapsto \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ — wordt in de quantummechanica de toestand van het object beschreven door een *functie* in een complexe Hilbertruimte en een observabele door een zelf-geadjungeerde lineaire *operator* op de deze ruimte. Deze operatoren commuteren i.h.a. niet, dus men kan operatoren zien als elementen van een Lie algebra met een niet-triviale Lie bracket.

Een mooi voorbeeld hiervan zijn de L_x, L_y en L_z operatoren die respectievelijk de x-, y- en z-component van het impulsmoment van een deeltje voorstellen. Deze operatoren worden gegeven

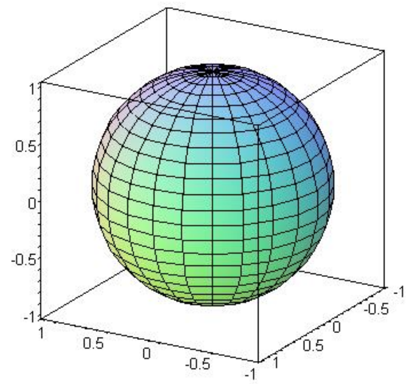

Figure 2: $l = 0$. De functie "$r = 1$"

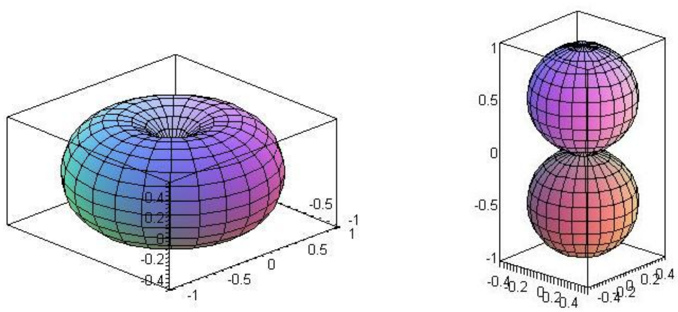

Figure 3: $l = 1$. De functies "$r = \sin\theta$" (links) en "$r = \cos\theta$" (rechts)

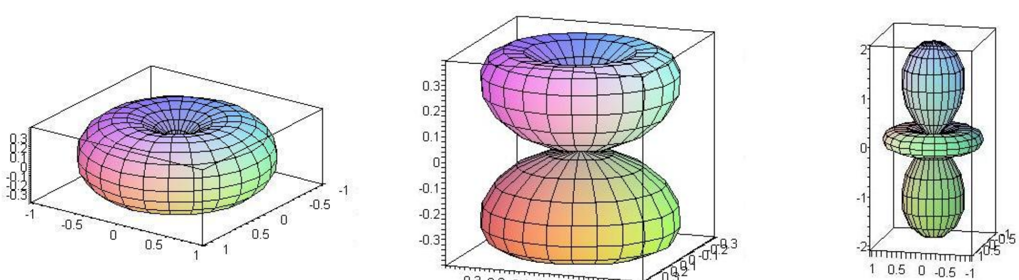

Figure 4: $l = 2$. De functies "$r = (\sin\theta)^2$" (links), "$r = \cos\theta \sin\theta$" (midden) en "$r = 3\cos\theta - 1$" (rechts)

door de vergelijking voor het impulsmoment:

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$$

met $\overrightarrow{r}$ de positieoperator en $\overrightarrow{p}$ de momentoperator gegeven door $\overrightarrow{p} = \frac{\hbar}{i}\overrightarrow{\nabla}$. Als men de eenheden zo kiest dat $\hbar = 1$ dan geldt

$$[L_x, L_y] = iL_z, \quad [L_y, L_z] = iL_x, \quad [L_z, L_x] = iL_y$$

In dit geval zien we na enig nadenken dat als men de volgende identificaties maakt:

$$\begin{aligned} L_x &\mapsto \frac{i}{2}I \\ L_y &\mapsto \frac{i}{2}J \\ L_z &\mapsto \frac{i}{2}K \end{aligned}$$

de reële vectorruimte opgespannen door L_x, L_y, L_z als Lie algebra isomorf is met $\mathfrak{su}(2)$. De werking van de operatoren L_x, L_y en L_z geeft dan een werking van $\mathfrak{su}(2)$ op de Hilbertruimte van toestandsfuncties. Het blijkt, zie [7] hoofdstuk 8 sectie 3, dat deze werking van $\mathfrak{su}(2)$ overeenkomt met de rotaties van de ruimte: Neem een $R \in SO(3)$. Dan werkt R op de toestandsfunctie $\Psi(\overrightarrow{x})$ volgens

$$R\Psi(\overrightarrow{x}) = \Psi(\overrightarrow{x} \cdot R)$$

De geinduceerde werking van de Lie algebra $\mathfrak{so}(3)$ ($\cong \mathfrak{su}(2)$) is dan "dezelfde".

De functie $\Psi(\mathbf{x}, t)$ die de toestand van het object beschrijft wordt bepaald door de *Schrödinger vergelijking*:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$$

Hierbij is $H = \frac{p^2}{2m} + V$ met V de potentiaal. In het geval van het waterstofatoom is het "object" dat we bestuderen het electron dat zich in het electronische potentiaal van het proton bevindt. In dit geval is V niet tijdsafhankelijk en daarom bestaat er een verzameling *stationaire toestanden* Ψ_i, $(i > 0)$ die de Hilbertruimte opspant en waarbij iedere Ψ_i een een tijdsonafhankelijke factor ψ_i heeft die voldoet aan de *tijdsonafhankelijke* Schrödinger vergelijking:

$$H\psi_i = E_i\psi_i$$

waarbij $E_i \in \mathbb{R}$ de energie is. Omdat de potentiaal V alleen afhangt van de straal verwacht men dat de hamiltoniaan invariant is onder rotaties, dus onder de werking van $SO(3)$ zoals hierboven gedefinieerd. Hieruit volgt dat de operatoren L_x, L_y en L_z afzonderlijk commuteren met H en dat ze afzonderlijk een gemeenschappelijke set eigenfuncties hebben, zie [5] of [7]. In de quantummechanica gebruikt men meestal de eigenfuncties van L_z en H. Gebruikt men bolcoördinaten dan hangt een eigenfunctie ψ_i af van (r, θ, ϕ). Voor een vaste $r = r_0$ is $\psi_i(r_0, \theta, \phi) \in L^2(S^2)$ en dus te schrijven als

$$\psi_i(r_0, \theta, \phi) = \sum_j R_j(r_0)Y_j(\theta, \phi)$$

voor een basis $\{Y_j \mid j \in J\}$ van $L^2(S^2)$. Omdat rotaties de straal r invariant laten is $Y_j(\theta, \phi)$ een eigenfunctie van L_z en men kan eisen dat deze genormeerd en onderling orthogonaal zijn. Deze Y_j komen voor in de quantummechanica als de sferische harmonische functies en vormen een orthonormale basis van eigenfuncties van L_z in $L^2(S^2)$.

Uit het bovenstaande zien we hoe belangrijk de theorie van Liegroepen en hun representaties is voor de moderne natuurkunde en in het bijzonder de quantummechanica. Operatoren vormen een Lie algebra en de ruimte van toestandsfuncties met de werking van de operatoren een representatie. De theorie van spin vormt daar een prachtig voorbeeld van. Waar impulsmoment nog een klassiek analogon heeft is de spin een puur mathematische constructie. De Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ werkt op een irreducibele representatie $\mathbb{C}[x,y]_d$ van $SU(2)$. In tegenstelling tot de meer "fysische" groep $SO(3)$ kunnen de representaties nu ook van oneven graad d zijn. Analoog aan de in sectie 5.3 gegeven definitie van l geldt nu $s = \frac{1}{2}d$. Dit verklaart het merkwaardige feit dat de spin ook halftallig kan zijn! Zie ook [5], hoofdstuk 4. Als stationaire toestanden van de spin zoekt men dan een orthonormale basis van eigenvectoren van $\frac{i}{2}K$ voor $\mathbb{C}[x,y]_{2s}$. Neem nu bijvoorbeeld het electron, die heeft $s = \frac{1}{2}$. Dan vormen $\{\frac{x}{\pi}, \frac{y}{\pi}\}$ een orthonormale basis voor $\mathbb{C}[x,y]_1$. Een eigenvector van $\frac{i}{2}K$ is een eigenvector van K, dus we zoeken eigenvectoren van de matrix

$$K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} K(x+y) &= i(x+y) \\ K(x-y) &= -i(x-y) \end{aligned}$$

dus

$$(\frac{\sqrt{2}}{\pi}(x+y), \frac{\sqrt{2}}{\pi}(x-y))$$

vormen een orthonormale basis van eigenvectoren van K. Dit geeft respectievelijke eigenwaarden van $-\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$ voor $\frac{i}{2}K$, wat overeenkomt met de bekende spin up en down toestanden van $\frac{\hbar}{2}$ en $-\frac{\hbar}{2}$ voor $\hbar = 1$.

In de voorgaande hoofdstukken hebben we opgmerkt dat er een aantal vrijheden zijn met betrekking tot het kiezen van bases: we konden de basis voor V vrij kiezen alsmede de orthonormale basis van $\mathbb{C}[x,y]_d$. Daarom was het "toevallig" dat we de juiste orthonormale basis van $L^2(S^2)$ kregen door onze keuzes van bases. Dat dit niet geheel toevallig is kunnen we als volgt zien: de basis die we zoeken moet een basis zijn van eigenfuncties van

$$L_z = xp_y - yp_x = i\hbar y \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar x \frac{\partial}{\partial y}$$

Zoals hierboven al vermeldt komen impulsmoment operatoren overeen met elementen van $\mathfrak{so}(3)$ en wel als volgt: Neem de infinitesimale rotatie om de z-as, $R_z(\epsilon) \in SO(3)$. Deze werkt op een functie

$\psi(x,y,z)$ volgens

$$\begin{aligned} R_z(\epsilon)(\psi(x,y,z)) &= \psi\left((x,y,z)\circ\begin{bmatrix}\cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0\\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &\approx \left((x,y,z)\circ\begin{bmatrix}1 & -\epsilon & 0\\ \epsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\ &= \psi(x+\epsilon y, y-\epsilon x, z)\\ &\approx \psi(x,y,z)+\epsilon\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\\ &= (1+\frac{\epsilon}{i\hbar}L_z)\psi(x,y,z)\end{aligned}$$

Aangezien $R_z(\epsilon)=1+\epsilon\sigma$ met $\sigma=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\in\mathfrak{so}(3)$ is ψ een eigenfunctie van L_z d.e.s.d.a. het een eigenfunctie van $\sigma\in\mathfrak{so}(3)$. In sectie 5.2 hebben we de afbeelding $\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(V)\to\mathfrak{so}(3)$ zodanig gekozen dat σ overeenkwam met de matrix $I\in\mathfrak{su}(2)$ modulo een factor.

Uit dezelfde sectie volgt dat de functies $f_{i,j,k}$ geschreven konden worden als $f_{i,j,k}(g)=\langle\rho_i(g)v_{ij},v_{ik}\rangle$. De werking van $R_z(\epsilon)$ geeft dan

$$R_z(\epsilon)(f_{i,j,k}(g))=f_{i,j,k}(g\cdot R_z(\epsilon))=\langle\rho_i(g)\cdot\rho_i(R_z(\epsilon))v_{ij},v_{ik}\rangle$$

en dit geeft de werking van σ:

$$\sigma(f_{i,j,k}(g))=\langle\rho_i(g)\frac{1}{2}Iv_{ij},vik\rangle$$

Maar omdat we de basis $\{v_{i1},...,v_{id}\}$ van V_i zodanig hadden gekozen dat het eigenvectoren van I waren, zie sectie 4.4, geldt

$$\sigma(f_{i,j,k}(g))=\lambda\langle\rho_i(g)v_{ij},v_{ik}\rangle=\lambda f_{i,j,k}(g)$$

voor een zekere λ. Daarom zijn de functies $f_{i,j,k}(g)$ eigenfuncties van σ en L_z. We hadden natuurlijk ook de afbeelding $\mathfrak{so}(V)\to\mathfrak{so}(3)$ zo kunnen kiezen dat σ overeenkwam met K, of een willekeurig ander element in $\mathfrak{su}(2)$, maar dan hadden we onze orthonormale basis van V_i zo moeten kiezen dat het eigenvectoren waren van dit willekeurige element. De keuzes die ik heb gemaakt in deze scriptie zijn in mijn ogen de keuzes die het rekenwerk het meest eenvoudig maken.

6 Tot slot...

Met het uitrekenen van de sferisch-harmonische functies via de representatietheorie van compacte Liegroepen heb ik het doel van mijn scriptie bereikt. Op weg naar dit doel heb ik in het kort differentieerbare variëteiten, Liegroepen, Lie algebra's en representaties behandeld. Ik ben dieper ingegaan op de irreducibele representaties van $SU(2)$, hun basis, de overdekking $SU(2)\to SO(3)$ en de Peter Weyl stelling. Dit alles stelde mij in staat tot het uitrekenen van de sferisch-harmonische functies die overeen bleken te stemmen met de literatuur, een mooie beloning voor alle theorie. Tot slot heb ik de toepassingen van de theorie in de quantummechanica verkend, met uitleg over hoe de spin zich verhoudt tot de $\mathfrak{su}(2)$ en wat uitleg over de verhouding van de impulsmoment operatoren tot de $\mathfrak{so}(3)$. Bij mijn onderzoek heb ik ruim gebruik gemaakt van de onderstaande bronnen en getracht op belangrijke punten te verwijzen naar de betreffende literatuur. Wat echter niet in de bibliografie naar voren komt is de hulp die ik heb gekregen van mijn drie enthousiaste begeleiders, Theo van den Bogaart, Gerard Nienhuis en Bas Edixhoven. Hartstikke bedankt!

References

[1] Klaus Jänich: *Vector Analysis*, Springer-Verlag New York (2001)

[2] Bas Edixhoven: *Lie groups and Lie algebras*, Université de Rennes (2001),

`http://www.math.leidenuniv.nl/~edix/public_html_rennes/cours/dea0001.pdf`

[3] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk: *Lie Groups*, Springer-Verlag Berlin (2000)

[4] Grant R. Fowles, George L. Cassiday: *Analytical Mechanics*, Thomson Learning, Inc. (6th Edition)

[5] David J. Griffiths: *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Education (2nd Edition)

[6] Peter D. Lax: *Linear Algebra*, John Wiley & Sons (1997)

[7] Albert Messiah: *Quantum Mechanics, Volume II*, North-Holland Publishing Company Amsterdam (1973)

[8] A. Mukherjea, K. Pothoven: *Real and Functional Analysis*, Plenum Press New York (1978)