



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## **Portfolio optimalisatie: Hoe in theorie geld te verdienen**

Walenkamp, M.A.C.

### **Citation**

Walenkamp, M. A. C. (2005). *Portfolio optimalisatie: Hoe in theorie geld te verdienen*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596906>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Portfolio Optimalisatie:  
hoe in theorie geld te verdienen

Marieke Walenkamp

16 juni 2005



# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b> .....	5
<b>Gebruikte Symbolen</b> .....	7
<b>1: Standaarddeviatie als risico</b> .....	9
1.1 Efficient frontier.....	9
1.2 Voorbeelden van optimale portfolio's.....	12
1.3 Toepassing van de theorie.....	20
<b>2: Het Telsermodel en een generalisatie</b> .....	25
2.1 Het Telsermodel.....	25
2.2 Een generalisatie van het Telsermodel.....	27
2.3 Voorbeeld.....	28
<b>3: Elliptische verdelingen en het Telsermodel</b> ....	31
3.1 De elliptische verdeling.....	31
3.2 Voorbeelden van elliptische verdelingen.....	32
3.3 Het Telsermodel.....	34
3.4 Voorbeeld.....	37
<b>Conclusie</b> .....	39
<b>Referenties</b> .....	41



# Inleiding

In 1952 schreef de econoom Harry Markowitz een artikel dat het begin zou betekenen van de Moderne Portfolio Theorie (MPT). In de MPT gaat het om het bepalen van de optimale portfolio. We gaan ervan uit dat elke investeerder een zo hoog mogelijke opbrengst nastreeft, maar onder een begrensde, voor hem aanvaardbaar risico. De optimale portfolio voor een investeerder wordt dus bepaald door zijn persoonlijke afweging tussen risico en (verwachte) opbrengst. De vraag is hoe risico te definiëren. Een mogelijke definitie is: Hoe groter de afwijking in de opbrengst van de investering, hoe risicovoller deze investering is. Deze afwijking kan gemeten worden door de standaarddeviatie. Dus wanneer een investeerder deze definitie volgt, zal hij bij de keuze uit meerdere investeringen, kiezen voor de investering waarvan de opbrengst de kleinste standaarddeviatie heeft. In hoofdstuk 1 bepalen we een aantal optimale portfolio's, uitgaande van deze definitie van risico. Er zijn ook andere definities mogelijk. Een andere definitie betekent andere optimale portfolio's, zoals we in hoofdstuk 2 en 3 zullen zien. In hoofdstuk 2 wordt het zogenaamde Telsermodel geïntroduceerd, dat alleen afwijking naar beneden als risico beschouwt. In tegenstelling tot de analyse in hoofdstuk 1 is bij de berekeningen in dit model de kansverdeling van de aandeel-opbrengsten wel van belang. In hoofdstuk 2 gaan we ervan uit dat deze verdeling de normale verdeling is. In hoofdstuk 3 beperken we ons niet langer tot één verdeling, maar beschouwen we een klasse van verdelingen, de zogenaamde elliptische verdelingen. Per hoofdstuk probeer ik de besproken theorie nog duidelijker te maken door deze toe te passen op een voorbeeld.



# Gebruikte symbolen

Hieronder staat een lijst van symbolen die in mijn scriptie zonder toelichting geïntroduceerd worden. De overige gebruikte symbolen worden wel in de tekst toegelicht en heb ik daarom hier niet opgenomen.

- $n$  = aantal aandelen
- $C_0$  = beginkapitaal in euro's
- $C_{end}$  = eindkapitaal in euro's
- $R_p$  = totale portfolio-opbrengst in euro's
- $\mu_p = E(R_p)$  = verwachte portfolio-opbrengst in euro's
- $\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p)$  = variantie van de portfolio-opbrengst
- $r_i$  = opbrengst van aandeel  $i$  per geïnvesteerde euro
- $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$
- $\mu_i = E(r_i)$  = verwachte opbrengst van aandeel  $i$  per geïnvesteerde euro
- $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$
- $\sigma_{ij}$  = covariantie van de opbrengsten van aandeel  $i$  en aandeel  $j$
- $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \cdots & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} = \text{covariantiematrix}$
- $\theta_i$  = bedrag in euro's geïnvesteerd in aandeel  $i$



$$\bullet \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$$

$$\bullet \bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $R_f$  = totale opbrengst van het risico-vrije aandeel
- $\mu_f$  = opbrengst van het risico-vrije aandeel per geïnvesteerde euro
- $\theta_f$  = bedrag in euro's geïnvesteerd in het risico-vrije aandeel

### Vergelijkingen

Voor bovenstaande symbolen gelden bovendien de onderstaande 5 vergelijkingen

- $C_{end} = C_0 + R_p$
- $R_p = \sum_{i=0}^n r_i \theta_i = r^T \theta$
- $\mu_p = \sum_{i=0}^n \mu_i \theta_i = \mu^T \theta$
- $\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \theta_i \theta_j \sigma_{ij} = \theta^T \Sigma \theta$
- $R_f = \mu_f C_0$

# Hoofdstuk 1

## Standaarddeviatie als risico

In dit hoofdstuk wordt eerst de efficient frontier geïntroduceerd en vervolgens wordt een aantal optimale portfolio's berekend. Aan het eind van het hoofdstuk wordt de theorie met een voorbeeld in praktijk gebracht. We gaan het hele hoofdstuk uit van de eerder genoemde meting van risico door middel van standaarddeviatie.

### 1.1 Efficient frontier

Een efficiënte portfolio is gedefinieerd als de portfolio die, gegeven een bepaald risico (dus standaarddeviatie  $\sigma_p$ ) de verwachte opbrengst  $\mu_p$  maximaliseert, of gegeven een verwachte opbrengst het risico minimaliseert. Het is duidelijk dat een investeerder altijd in een efficiënte portfolio zal investeren. De efficient frontier is de curve in de  $(\sigma_p, \mu_p)$ -ruimte die precies alle efficiënte portfolio's aangeeft. We zullen de vergelijking van de efficient frontier bepalen. Het blijkt het handigst om hiertoe de verwachte portfolio-opbrengst te fixeren en het risico vervolgens te minimaliseren. De vergelijking van de efficient frontier is dus de oplossing van een minimaliseringsprobleem waarvan de doelfunctie de standaarddeviatie is, maar aangezien deze altijd positief is, kunnen we ook het kwadraat nemen als doelfunctie, dus de variantie  $\sigma_p^2$ . De te minimaliseren functie wordt dus  $\sigma_p^2$  oftewel  $\theta^T \Sigma \theta$ . Een covariantiematrix is altijd semi-positief definit. Een aanname die we hier maken is dat de covariantiematrix  $\Sigma$  ook positief definit is, zodat  $\Sigma$  dus inverteerbaar is.

Er zijn 2 voorwaarden waaronder de minimalisatie plaatsvindt:

- zoals gezegd wordt de verwachte portfolio-opbrengst  $\mu_p$  gefixeerd. Omdat de portfolio-opbrengst gelijk is aan  $\mu^T \theta$ , moet de gelijkheid  $\mu^T \theta = \mu_p$  als voorwaarde opgenomen worden.
- We kunnen alleen het kapitaal dat we bezitten investeren. Dit kapitaal is  $C_0$ , dus er moet gelden  $\bar{1}^T \theta = C_0$

Voor de duidelijkheid: de componenten van  $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}$  kunnen zowel positieve

als negatieve waarden aannemen. Als  $\theta_i > 0$  betekent dit dat de investeerder een bedrag van  $\theta_i$  investeert in aandeel  $i$  en als  $\theta_i < 0$  wordt er van hem geleend van aandeel  $i$  en ontvangt hij dus een bedrag van  $\theta_i$  voor dit aandeel.

Om de vergelijking van de efficient frontier te bepalen moeten we dus het volgende minimaliseringsprobleem oplossen:

$$\min \left\{ \theta^T \Sigma \theta \mid \begin{array}{l} \mu^T \theta = \mu_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right\}$$

Om dit probleem op te lossen bepalen we de Karush-Kuhn-Tucker-voorwaarden (KKT-voorwaarden). Dit geeft (inclusief de toelaatbaarheid) het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2\Sigma\theta - \lambda_1 \bar{1} - \lambda_2 \mu = 0 \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu^T \theta = \mu_p \end{cases} \quad (1.1)$$

De oplossing van dit stelsel voor  $\theta^T \Sigma \theta$  is de oplossing van het minimaliseringsprobleem.

We definiëren  $\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} \mu & \bar{1} \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$ , zodat het stelsel (1.1) te schrijven is als

$$\begin{cases} \Sigma\theta = A\lambda \\ A^T \theta = B \end{cases} \quad (1.2)$$

Uit de eerste vergelijking van (1.2) volgt nu  $\theta = \Sigma^{-1} A \lambda$ . Deze uitdrukking invullen in de tweede vergelijking van (1.2) geeft

$$A^T \theta = A^T \Sigma^{-1} A \lambda = B \Rightarrow \lambda = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} B$$

Omdat we aangenomen hebben dat  $\Sigma$  en dus ook  $\Sigma^{-1}$  positief definitief is, volgt dat  $A^T \Sigma^{-1} A \neq 0$  en dus ook  $\lambda \neq 0$ .

We definiëren  $H = A^T \Sigma A$ , zodat  $\lambda = H^{-1} B$  en

$$\theta^T \Sigma \theta = \theta^T \Sigma \Sigma^{-1} A \lambda = \theta^T A \lambda = (A^T \theta)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B$$

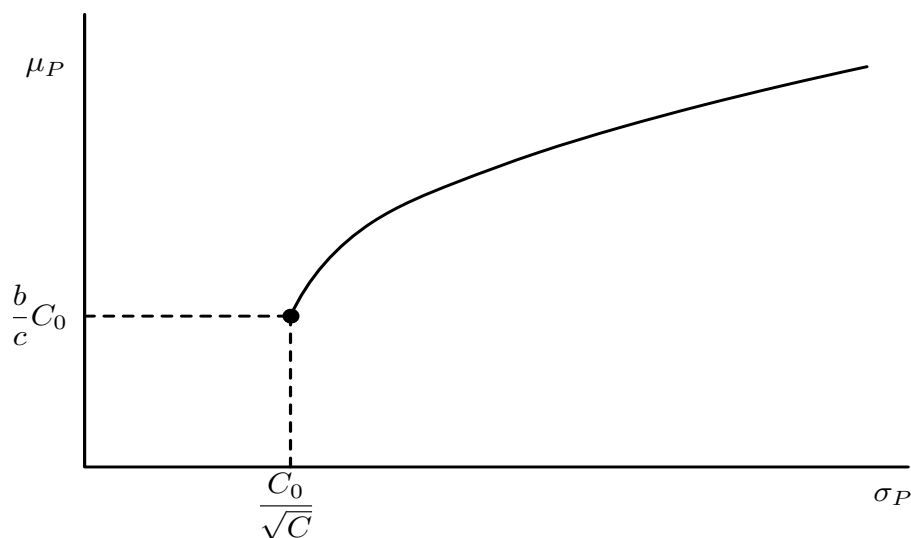
Aangezien  $H^T = H$ , is  $H$  symmetrisch.  $H$  is dus van de vorm

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Omdat  $H = A^T \Sigma A$  en  $A = \begin{pmatrix} \mu & \bar{1} \end{pmatrix}$ , volgt dat de volgende gelijkheden gelden:

$$\begin{cases} a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ b = \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \\ c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} \end{cases} \quad (1.3)$$

We definiëren  $d = ac - b^2$ , zodat  $H^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$



Figuur 1.1: Efficient frontier

We tonen aan dat de waarden  $a$ ,  $c$  en  $d$  altijd positief zijn. Voor het vervolg van de oplossing is dit namelijk een belangrijk gegeven:

$\Sigma$  is positief definitief, dus  $\Sigma^{-1}$  ook. Dus geldt  $x^T \Sigma^{-1} x > 0$  voor alle  $(N \times 1)$ -vectoren  $x$ , met  $x \neq 0$ . Uit (1.3) volgt nu direct  $a > 0$ ,  $c > 0$ . Maar  $(b\mu - a\bar{1})^T \Sigma^{-1} (b\mu - a\bar{1}) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0$ . Hieruit volgt dat  $d > 0$ .

We weten nu:  $Var(R_p) = B^T H^{-1} B = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \mu_p & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$   
 $= \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)$ , oftewel de efficient frontier wordt gegeven door:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \quad (1.4)$$

We herschrijven formule (1.4):

$$d = ac - b^2 \Rightarrow a = \frac{d}{c} + \frac{b^2}{c} \Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + \frac{d}{c}C_0^2 + \frac{b^2}{c}C_0^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_p^2}{1/c} = \frac{\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p/c + dC_0^2/c^2 + b^2C_0^2/c^2}{d/c^2} = \frac{(\mu_p - bC_0/c)^2}{d/C_0^2} + C_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_p^2}{C_0^2/c} - \frac{(\mu_p - bC_0/c)^2}{dC_0^2/c^2} = 1$$

Aangezien  $a$ ,  $c$  en  $d$  positief zijn, is dit in de  $(\sigma_p, \mu_p)$ -ruimte de vergelijking van een hyperbool. Omdat  $\sigma_p \geq 0$ , beschouwen we alleen de rechterhelft van deze hyperbool. Het middelpunt van deze rechterhelft is  $(\frac{C_0}{\sqrt{c}}, \frac{b}{c}C_0)$ . Ook beschouwen we alleen de bovenste helft, aangezien de portfolio's gelegen op de onderste helft van de hyperbool niet efficiënt zijn: met hetzelfde risico kan (op de bovenste helft) een portfolio met grotere opbrengst gevonden worden. De efficient frontier is dus van bovenstaande vorm.

Een investeerder kan dus, gegeven een  $\mu_p$ , het minimale risico berekenen, door de waarde  $\mu_p$  in te vullen in formule (1.4). De bij dit punt behorende  $\theta$  geven we aan met  $\theta_{EF}$ . Er geldt

$$\begin{aligned}\theta_{EF} &= \Sigma^{-1}A\lambda = \Sigma^{-1}AH^{-1}B = \frac{c\mu_p - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\mu_p}{d}\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_p)\end{aligned}\quad (1.5)$$

$\theta_{EF}$  geeft dus voor iedere  $\mu_p$  aan hoeveel in elk van de  $n$  aandelen geïnvesteerd moet worden om op de efficient frontier uit te komen.

## 1.2 Voorbeelden van optimale portfolio's

We weten nu hoe alle efficiënte portfolio's eruit zien, dat wil zeggen alle portfolio's waarin een investeerder mogelijk zal investeren. Welke van deze efficiënte portfolio's de optimale portfolio is, dwz de portfolio waarin daadwerkelijk geïnvesteerd zal worden, hangt af van de doelstellingen van de investeerder. Verschillende doelstellingen betekenen verschillende optimale portfolio's. We zullen een aantal voorbeelden van optimale portfolio's bekijken.

### Minimale Variantie Portfolio

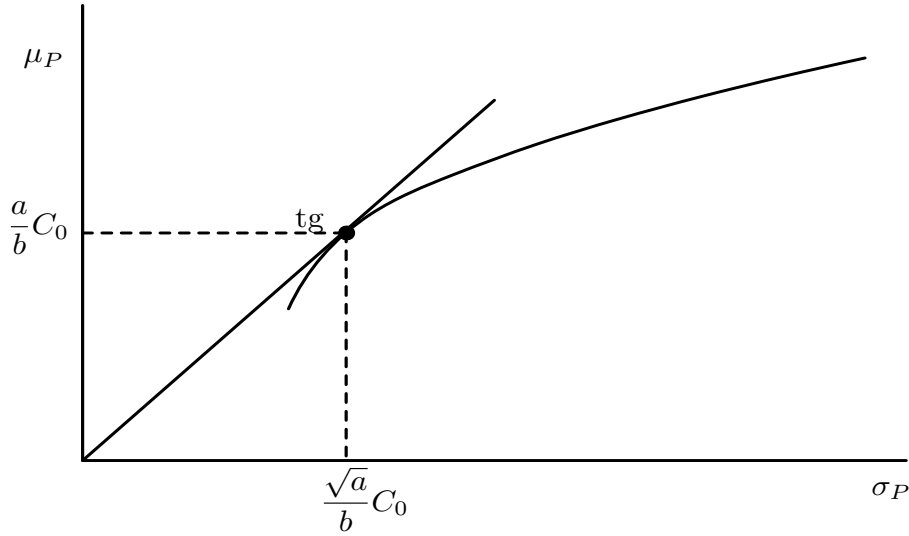
Het is mogelijk dat een investeerder in de portfolio met minimaal risico wil investeren, onafhankelijk van de verwachte opbrengst van deze investering. Omdat hij altijd in een efficiënte portfolio zal investeren, zal hij de portfolio op de efficient frontier kiezen met minimale standaarddeviatie. Aangezien de efficient frontier altijd de bovenste helft is van de rechterhelft van een hyperbool met centrum  $(\frac{C_0}{\sqrt{c}}, \frac{b}{c}C_0)$ , volgt direct dat  $\sigma_{mv} = \frac{C_0}{\sqrt{c}}$  en  $\mu_{mv} = \frac{b}{c}C_0$ , waarbij  $\sigma_{mv}$  en  $\mu_{mv}$  het risico, respectievelijk de verwachte opbrengst van de minimale variantie portfolio is. De investering  $\theta_{mv}$  die hierbij hoort, vinden we door de gevonden  $\mu_{mv}$  in te vullen voor  $\mu_p$  in vergelijking (1.5). Dit geeft

$$\begin{aligned}\theta_{mv} &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\frac{b}{c}C_0) = \\ &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}(a\bar{1} - b\mu + b\mu - \frac{b^2}{c}\bar{1})C_0 = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}(a - \frac{b^2}{c})\bar{1}C_0 = \\ &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}(\frac{ca - b^2}{c})\bar{1}C_0 = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}\frac{d}{c}\bar{1}C_0 = \Sigma^{-1}\bar{1}\frac{C_0}{c}.\end{aligned}$$

$$\text{Dus } \theta_{mv} = \Sigma^{-1}\bar{1}\frac{C_0}{c}.$$

### Tangency Portfolio

Het kan ook zijn dat een investeerder wil investeren in de portfolio met de hoogste verwachte opbrengst per eenheid risico. Dan zal hij dus investeren in de portfolio waarvoor de ratio  $\frac{\text{opbrengst}}{\text{standaarddeviatie}}$  maximaal is. Deze ratio heet de Sharpe ratio. Grafisch gezien zoeken we het punt op de efficient frontier waar



Figuur 1.2: Tangency Portfolio

een lijn door de oorsprong de efficient frontier raakt, zoals te zien in bovenstaand figuur (1.2).

Stel dat dit punt coördinaten  $(\sigma_{tg}, \mu_{tg})$  heeft. Dit punt ligt op de efficient frontier, dus kunnen we  $\sigma_{tg}^2$  in  $\mu_{tg}$  uitdrukken, door  $\mu_{tg}$  in formule (1.4) in te vullen. De inverse richtingscoëfficiënt van de raaklijn wordt dan

$$\frac{\sigma_{tg} - 0}{\mu_{tg} - 0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}}{\mu_{tg}} \quad (1.6)$$

Deze inverse richtingscoëfficiënt is uiteraard ook gelijk aan

$$\frac{\partial \sigma_{tg}}{\partial \mu_{tg}} = \frac{c\mu_{tg} - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}} \quad (1.7)$$

De uitdrukking in (1.7) is gelijk aan  $\frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}(c\mu_{tg} - bC_0)}{d(\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2))}$ .

Hieruit volgt dat gelijkheid van de uitdrukkingen (1.6) en (1.7) geldt wanneer

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{tg}} &= \frac{c\mu_{tg} - bC_0}{c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2} \\ \Rightarrow \mu_{tg}(c\mu_{tg} - bC_0) &= c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2 \\ \Rightarrow c\mu_{tg}^2 - bC_0\mu_{tg} &= c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2 \\ \Rightarrow bC_0\mu_{tg} &= aC_0^2 \Rightarrow \mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0 \end{aligned}$$

Gelijkheid van de uitdrukkingen (1.6) en (1.7) geldt dus precies wanneer  $\mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0$ .  $\sigma_{tg}$  vinden we nu door de gevonden  $\mu_{tg}$  in de vergelijking van de

efficient frontier, vergelijking (1.4), in te vullen. Dit geeft

$$\sigma_{tg}^2 = \frac{1}{d} \left( \frac{ca^2}{b^2} C_0^2 - \frac{2ab}{b} C_0^2 + aC_0^2 \right) = \frac{a}{d} C_0^2 \left( \frac{ca}{b^2} - 1 \right) = \frac{a}{d} C_0^2 \left( \frac{ac-b^2}{b^2} \right) = \frac{a}{b^2} C_0^2$$

en dus geldt  $\sigma_{tg} = \frac{\sqrt{a}}{b} C_0$ .  $(\frac{\sqrt{a}}{b} C_0, \frac{a}{b} C_0)$  is dus het optimale punt voor de investeerder. De bijbehorende investering  $\theta_{tg}$  krijgen we door  $\mu_{tg}$  in vergelijking (1.5) in te vullen:

$$\begin{aligned} \theta_{tg} &= \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\frac{a}{b}C_0) = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} (a\bar{1} - b\mu + \frac{ac}{b}\mu - a\bar{1})C_0 \\ &= \frac{1}{d} \Sigma^{-1} \mu \left( \frac{ac}{b} - b \right) C_0 = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} \mu \left( \frac{ac-b^2}{b} \right) C_0 = \Sigma^{-1} \mu \frac{C_0}{b}. \end{aligned}$$

Dit betekent dus dat een investeerder die wil investeren in de portfolio met de grootste Sharpe ratio, investering  $\theta_{tg} = \Sigma^{-1} \mu \frac{C_0}{b}$  zal maken.

## Optimal Portfolio

Bij deze derde mogelijke portfolio gaan we ervan uit dat het doel van een investeerder het maximaliseren van zijn utility function is. Deze wordt gegeven door  $u = E(C_{end}) - \frac{1}{2}\gamma Var(C_{end})$ . De nieuwe parameter  $\gamma$  is een maat voor hoe afkerig van risico een investeerder is. Hoe groter  $\gamma$ , hoe minder risico de investeerder bereid is te nemen.  $\gamma$  kan dus per investeerder verschillen, maar is in ieder geval positief: een negatieve  $\gamma$  zou betekenen dat de investeerder het risico opzoekt.

De Optimal Portfolio is de portfolio met maximale utility function. Er geldt:

$$\begin{aligned} u &= E(C_{end}) - \frac{1}{2}\gamma Var(C_{end}) = E(C_0 + R_p) - \frac{1}{2}\gamma Var(C_0 + R_p) \\ &= C_0 + \mu_p - \frac{1}{2}\gamma Var(R_p) = C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2}\gamma \sigma_p^2 = C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2}\gamma \theta^T \Sigma \theta \end{aligned}$$

De maximalisatie van bovenstaande uitdrukking gebeurt weer onder de voorwaarde dat de investering gelijk is aan het beginkapitaal  $C_0$ . Het optimaliseringsprobleem wordt dus:

$$\max \left\{ C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2}\gamma \theta^T \Sigma \theta \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Om dit probleem op te lossen bepalen we de KKT-voorwaarden. Dit geeft (inclusief de toelaatbaarheid) het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} \mu - \gamma \Sigma \theta - \lambda \bar{1} = 0 \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

waarbij  $\lambda$  een constante is. Uit de eerste vergelijking van (1.8) volgt:

$$\theta = \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\lambda \Sigma^{-1} \bar{1}}{\gamma} \quad (1.9)$$

Wanneer we deze uitdrukking voor  $\theta$  in de tweede vergelijking van (1.8) invullen, krijgen we:

$$\frac{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} \lambda}{\gamma} = C_0 \Rightarrow \frac{b}{\gamma} + \frac{c\lambda}{\gamma} = C_0 \Rightarrow \lambda = \frac{\gamma C_0 - b}{c}$$

met  $b$  en  $c$  zoals eerder in dit hoofdstuk gedefinieerd. De voor deze portfolio optimale investering,  $\theta_{opt}$ , kunnen we nu berekenen door de gevonden uitdrukking voor  $\lambda$  in te vullen in vergelijking (1.9). Dit geeft

$$\theta_{opt} = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\Sigma^{-1}\bar{1}}{\gamma}(\frac{\gamma C_0 - b}{c}) = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \Sigma^{-1}\bar{1}(\frac{C_0 - b/\gamma}{c})$$

We hebben gezien dat voor de Minimum Variance Portfolio en de Tangency Portfolio de optimale investeringen gegeven waren door  $\theta_{mv} = \Sigma^{-1}\bar{1}\frac{C_0}{c}$ , respectievelijk  $\theta_{tg} = \Sigma^{-1}\mu\frac{C_0}{b}$ , oftewel  $\Sigma^{-1} = \frac{c}{C_0}\theta_{mv}$  en  $\Sigma^{-1}\mu = \frac{b}{C_0}\theta_{tg}$ .

We zien dat geldt

$$\theta_{opt} = \frac{b}{C_0\gamma}\theta_{tg} + \frac{c}{C_0}(\frac{C_0 - b/\gamma}{c})\theta_{mv} = \frac{b}{C_0\gamma}\theta_{tg} + (1 - \frac{b}{C_0\gamma})\theta_{mv}$$

Ook uit de bijbehorende waarden van  $\mu_{opt}$  en  $\sigma_{opt}^2$  blijkt het verband met de Minimum Variance en Tangency Portfolio:

$$\mu_{opt} = \mu^T\theta_{opt} = \frac{\mu^T\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \mu^T\Sigma^{-1}\bar{1}(\frac{C_0 - b/\gamma}{c}) = \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{c}(C_0 - \frac{b}{\gamma})$$

$$= \frac{ac - b^2}{c\gamma} + \frac{b}{c}C_0 = \frac{d}{c\gamma} + \mu_{mv}$$

$$\sigma_{opt}^2 = \theta_{opt}^T\Sigma\theta_{opt} = \frac{ac - b^2 + \gamma^2 C_0^2}{c\gamma^2} = \frac{d}{c\gamma^2} + \sigma_{mv}^2$$

Wanneer een investeerder minimaal risico wil nemen, zal  $\gamma$  naar oneindig gaan. In dat geval geldt  $\theta_{opt} \rightarrow \theta_{mv}$ ,  $\mu_{opt} \rightarrow \mu_{mv}$  en  $\sigma_{opt}^2 \rightarrow \sigma_{mv}^2$ , oftewel de Optimal Portfolio zal bij benadering gelijk zijn aan de Minimum Variance Portfolio.

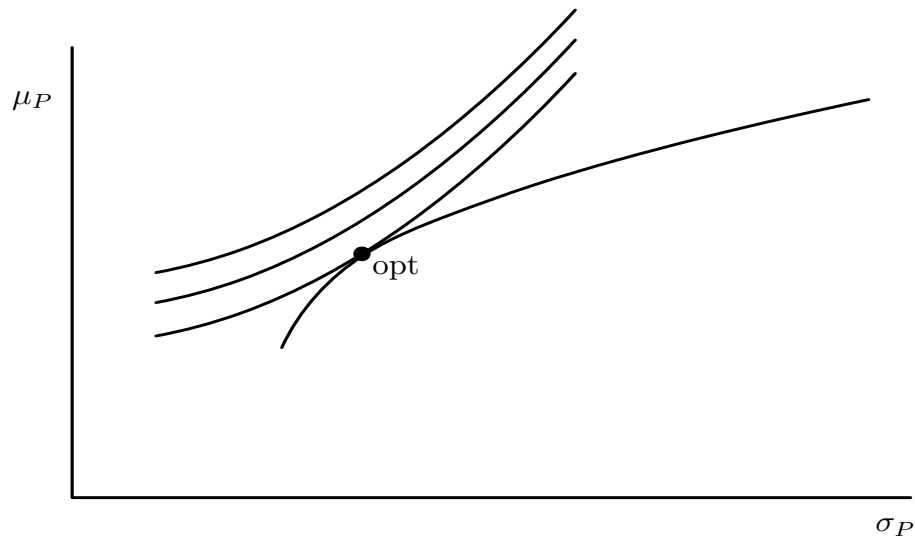
Wanneer  $\gamma = \frac{b}{C_0}$ , zien we dat  $\theta_{opt} \rightarrow \theta_{tg}$ ,  $\mu_{opt} \rightarrow \frac{ac - b^2}{c(b/C_0)} + \frac{b}{c}C_0 = \frac{a}{b}C_0 = \mu_{tg}$  en  $\sigma_{opt}^2 \rightarrow \frac{ac - b^2 + (b^2/C_0^2)C_0^2}{c(b^2/C_0^2)} = \frac{aC_0^2}{b^2} = \sigma_{tg}^2$ , oftewel de Optimal Portfolio zal bij benadering gelijk zijn aan de Tangency Portfolio. We concluderen dat zowel de Minimum Variance als de Tangency Portfolio slechts speciale gevallen van de Optimal Portfolio zijn.

Grafisch gezien is de Optimal Portfolio het raakpunt van de efficient frontier met de utility curve. De utility curve is de curve die alle mogelijke combinaties van  $\mu_p$  en  $\sigma_p$  geeft die in dezelfde utility  $u$  resulteren. Deze utility curve is gegeven door  $\mu_p = u - C_0 + \frac{1}{2}\gamma\sigma_p^2$ , zoals simpel volgt uit herschrijven van de utility function. Hoe groter  $u$ , hoe hoger de curve komt te liggen. De hoogst mogelijke curve, dwz de curve met maximale utility, raakt de efficient frontier precies in de Optimal Portfolio, zoals we zien in figuur (1.3)

## Toevoeging van een risico-vrij aandeel

We bekijken nu de situatie waarin een investeerder ook in een risico-vrij aandeel kan investeren. Voor dit risico-vrije aandeel  $x_f$  geldt  $\sigma_f = 0$ , dat wil zeggen dat de verwachte opbrengst ook de gerealiseerde opbrengst zal zijn. Verder is  $x_f$  ongecorrelleerd met de overige, niet-risico-vrije aandelen  $x_i$ . Een investeerder kan, net als bij de gewone aandelen, zowel investeren in, als lenen van een risico-vrij aandeel. Lenen betekent dat  $\theta_f < 0$  en investeren dat  $\theta_f > 0$ .





Figuur 1.3: Optimal Portfolio

### Capital Market Line en Market Portfolio

De efficient frontier verandert wanneer een risico-vrij aandeel toegevoegd wordt. We zullen deze nieuwe efficient frontier, Capital Market Line (CML) geheten, berekenen. Wanneer we het vanaf nu over de efficient frontier hebben bedoelen we de oude efficient frontier. We zullen zien dat de CML een rechte lijn is, die de efficient frontier op precies één punt raakt. Er is een simpele intuïtieve verklaring voor het feit dat er precies één raakpunt is. Aangezien de mogelijkheid bestaat geheel niet te investeren in het risico-vrije aandeel en deze mogelijke portfolio zowel op de efficient frontier als de CML legt, hebben ze tenminste één gemeenschappelijk punt. Wanneer dit er twee zouden zijn, zou dit, vanwege de vorm van de efficient frontier betekenen dat de CML deels onder de efficient frontier zou uitkomen. Aangezien de CML alle efficiente portfolio's aangeeft is dit uiteraard niet mogelijk. We concluderen dat er precies één raakpunt is. Dit punt noemen we de Market Portfolio en is dus de unieke portfolio op de CML waarbij niets in het risico-vrije aandeel geïnvesteerd of geleend wordt, oftewel waarbij  $\theta_f = 0$ .

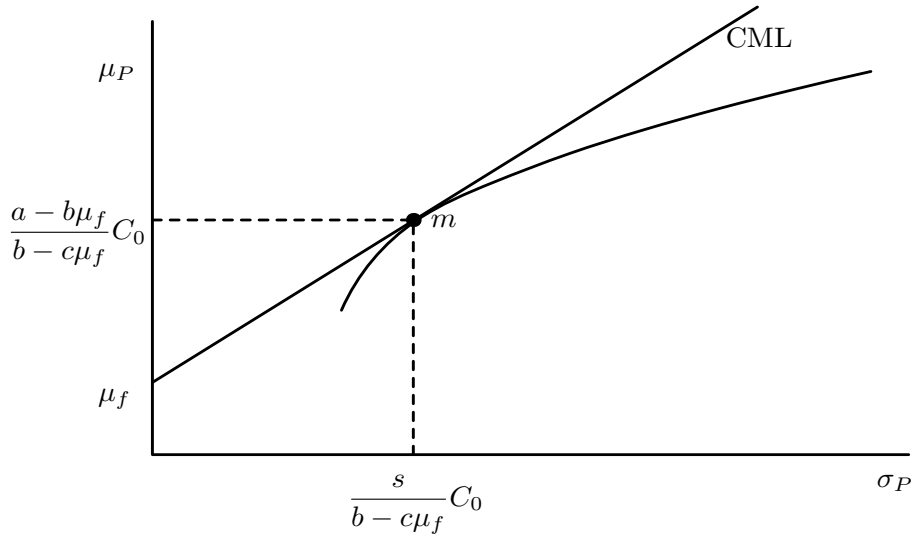
We zullen nu de CML berekenen.

In het nieuwe model gelden de volgende gelijkheden:

$$\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta, \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \text{ en } \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0.$$

De CML geeft net als de efficient frontier precies de portfolio's aan met maximale opbrengst, gegeven een bepaalde variantie. Om de CML te bepalen, moeten we dus het volgende optimaliseringsprobleem oplossen:

$$\max \left\{ \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right\}$$



Figuur 1.4: Market Portfolio

De KKT-voorwaarden voor dit probleem worden (inclusief de toelaatbaarheid) gegeven door het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \mu - \lambda_1 \bar{1} - 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0 \\ \mu_f - \lambda_1 = 0 \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{cases} \quad (1.10)$$

Uit de tweede vergelijking van dit stelsel volgt  $\lambda_1 = \mu_f$ . Dit invullen in de eerste vergelijking geeft  $\mu - \mu_f \bar{1} - 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0$ . Hieruit volgt

$$\theta = \frac{1}{2\lambda_2} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \quad (1.11)$$

Deze  $\theta$  invullen in de derde en vierde vergelijking van stelsel (1.10) geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \theta_f &= C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} \bar{1}^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \\ &= C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (\bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \mu_f \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1}) = C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f) \end{aligned}$$

en

$$\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta = \frac{1}{4\lambda_2^2} (\mu - \mu_f \bar{1})^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) = \frac{1}{4\lambda_2^2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)$$

dus

$$\lambda_2^2 - \frac{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}{4\sigma_p^2} \text{ oftewel } \lambda_2 = \frac{1}{2\sigma_p} \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$$

We definiëren  $s := \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$ , zodat dus  $\lambda_2 = \frac{s}{2\sigma_p}$ . Nu geldt:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \mu^T \theta + \mu_f \theta_f = \frac{1}{2\lambda_2} \mu^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) + \mu_f (C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f)) = \\
&\frac{1}{2\lambda_2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f C_0 = \frac{\sigma_p}{s} s^2 + \mu_f C_0 \\
&= s\sigma_p + \mu_f C_0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

De CML wordt dus gegeven door  $\mu_p = s\sigma_p + \mu_f C_0$  en is dus inderdaad een rechte lijn. De lijn snijdt de  $\mu$ -as in het punt  $\mu_f C_0$  en dat is dus de opbrengst wanneer alleen in het risico-vrije aandeel besteed wordt. In dat geval geldt namelijk  $\theta = 0$ , dus  $\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta = 0$  en dus ook  $\sigma_p = 0$  en uit vergelijking (1.12) volgt dan  $\mu_p = \mu_f C_0$ .

Wanneer we vergelijking (1.12) herschrijven tot  $\sigma_p = \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s}$ , kunnen we de Market Portfolio bepalen door deze vergelijking van de CML aan de vergelijking van de efficient frontier gelijk te stellen:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s} = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + aC_0^2)} \\
\Rightarrow \frac{1}{s^2} (\mu_p^2 - 2\mu_p C_0 \mu_f + C_0^2 \mu_f^2) &= \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + aC_0^2)
\end{aligned}$$

En wanneer we beide kanten vermenigvuldigen met  $s^2 d$  is deze vergelijking gelijk aan onderstaande vergelijking.

$$(cs^2 - d)\mu_p^2 + (-2bs^2 + 2d\mu_f)C_0\mu_p + (as^2 - d\mu_f^2)C_0^2 = 0$$

We bepalen de oplossing met behulp van de abc-formule. Voor de Discriminant D geldt:

$$\begin{aligned}
D &= (-2bs^2 + 2d\mu_f)^2 C_0^2 - 4(cs^2 - d)(as^2 - d\mu_f^2)C_0^2 \\
&= C_0^2 (4b^2 s^4 - 8bds^2 \mu_f + 4d^2 \mu_f^2 - 4acs^4 + 4ads^2 - 4d^2 \mu_f^2 + 4cds^2 \mu_f^2) \\
&= 4s^2 C_0^2 (-ac - b^2)s^2 - 2bd\mu_f + cd\mu_f^2 + ad) \\
&= 4ds^2 C_0^2 (-s^2 - 2b\mu_f + c\mu_f^2 + a) = 4d^2 s^2 C_0^2 (-s^2 + s^2) = 0
\end{aligned}$$

Omdat  $D=0$  is er precies 1 oplossing, zoals we intuïtief al beredeneerd hadden. De abc-formule geeft nu:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{(2bs^2 + 2d\mu_f)C_0 + \sqrt{D}}{2cs^2 - 2d} = \frac{bs^2 + d\mu_f}{cs^2 - d} C_0 = \frac{b(c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) - (ac - b^2)\mu_f}{c(c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) - (ac - b^2)} C_0 \\
&= \frac{(c\mu_f - b)(b\mu_f - a)}{(c\mu_f - b)^2} C_0 = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0
\end{aligned}$$

We concluderen dat voor de Market Portfolio de verwachte opbrengst gelijk is aan  $\mu_m = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0$ . De bijbehorende  $\sigma_m$  bepalen we door  $\mu_m$  in de CML-vergelijking in te vullen:

$$\sigma_m = \frac{\mu_m - \mu_f C_0}{s} = \frac{(a - b\mu_f) - (b - c\mu_f)\mu_f}{s(b - c\mu_f)} C_0 = \frac{s}{b - c\mu_f} C_0.$$

De Market Portfolio wordt dus gegeven door  $(\sigma_m, \mu_m) = (\frac{s}{b-c\mu_f}C_0, \frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f}C_0)$ . Deze  $\sigma_m$  en  $\mu_m$  invullen in vergelijking (1.5) geeft de bijbehorende  $\theta_m$ :

$$\begin{aligned}\theta_m &= \frac{c\mu_m - bC_0\Sigma^{-1}\mu + aC_0 - b\mu_m}{d}\Sigma^{-1}\bar{1} = \frac{c(\frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f}C_0) - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b(\frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f}C_0)}{d}\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \frac{1}{d}\frac{c(a-b\mu_f) - b(b-c\mu_f)}{b-c\mu_f}C_0\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{d}\frac{a(b-c\mu_f) - b(a-b\mu_f)}{b-c\mu_f}C_0\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{ca - bc\mu_f - b^2 + b\mu_f}{b-c\mu_f}\right)C_0\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{d}\left(\frac{ab - ac\mu_f - ab + b^2\mu_f}{b-c\mu_f}\right)C_0\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \frac{1}{d}\left(\frac{ac - b^2}{b-c\mu_f}\right)C_0\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{d}\left(\frac{ac - b^2}{b-c\mu_f}\right)C_0\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \Sigma^{-1}(\mu - \mu_f\bar{1})\frac{C_0}{b-c\mu_f}\end{aligned}$$

Zie figuur (1.4) voor een grafische representatie

### Optimal Portfolio

In de vorige paragraaf hebben we vergelijking (1.5) gebruikt om  $\theta_m$  te bepalen. Dit kon omdat het punt  $(\theta_m, \mu_m)$  op de efficient frontier lag, omdat gold  $\theta_f = 0$ . Voor een willekeurig punt  $(\sigma_p, \mu_p)$  op de CML wordt de bijbehorende  $\theta$  echter gegeven door vergelijking (1.11). Deze  $\theta$  geven we aan met  $\theta_{CML}$ , zodat geldt:

$$\theta_{CML} = \frac{1}{2\lambda_2}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f\bar{1}) = \sigma_p\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f\bar{1}) = \frac{(\mu_p - \mu_f C_0)}{s}\Sigma^{-1}(\mu - \mu_f\bar{1})$$

Wat direct opvalt, is dat  $\theta_{CML}$  en  $\theta_m$  slechts een van  $\mu_p$  afhankelijke factor schelen. Dit betekent dat elke portfolio op de CML een lineaire combinatie is van de Market Portfolio en het risico-vrije aandeel. Gebruikmakend van dit gegeven bepalen we de Optimal Portfolio wanneer een risico-vrij aandeel toegevoegd wordt.

Stel dat een fractie  $\Theta_f$  van het kapitaal in het risico-vrije aandeel geïnvesteerd wordt en dus een fractie  $\Theta_m = 1 - \Theta_f$  in de Market Portfolio. Dan geldt  $R_p = \Theta_f R_f + \Theta_m R_m$  en  $Var(R_p) = \Theta_f^2 Var(R_f) + \Theta_m^2 Var(R_m) + 2\Theta_f\Theta_m Cov(R_f, R_m) = \Theta_m^2 Var(R_m) = \Theta_m^2 \sigma_m^2$

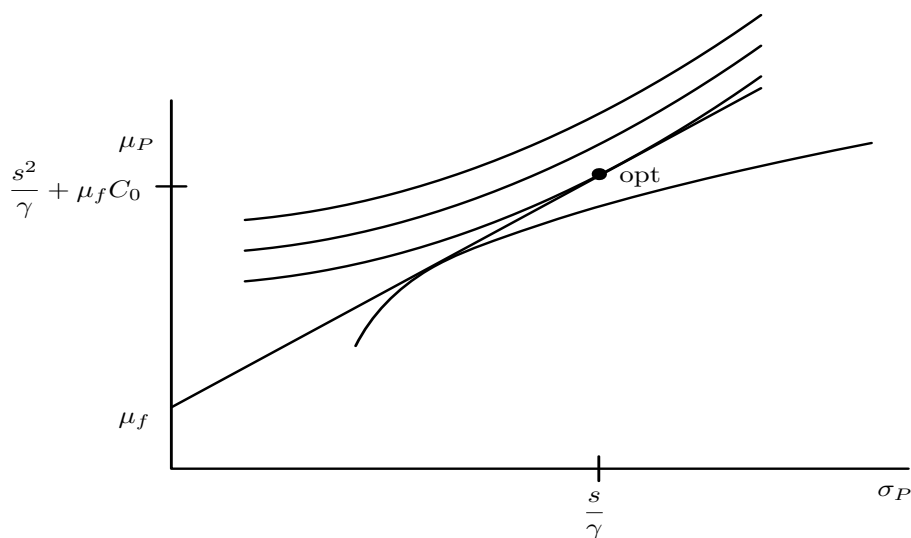
Het optimalisatieprobleem wordt nu:

$$\begin{aligned}max \{ & E(C_0 + R_p) - \frac{1}{2}\gamma Var((C_0 + R_p) \mid \Theta_f + \Theta_m = 1) \\ & = max \{ C_0 + \Theta_f\mu_f + \Theta_m\mu_m - \frac{1}{2}\gamma\Theta_m^2\sigma_m^2 \mid \Theta_f + \Theta_m = 1 \}\end{aligned}$$

De KKT-voorwaarden van dit probleem zijn gegeven door het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} \mu_m - \gamma\Theta_m\sigma_m^2 + \lambda = 0 \\ \mu_f + \lambda = 0 \\ \Theta_f + \Theta_m = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

Dus  $\lambda = -\mu_f$  en dus kunnen we  $\Theta_m$  uit de eerste vergelijking van stelsel (1.13) bepalen:  $\Theta = \frac{\mu_m - \mu_f}{\gamma\sigma_m^2}$ . We hebben eerder gezien dat de Market Portfolio gegeven wordt door  $(\sigma_m, \mu_m) = (\frac{s}{b-c\mu_f}C_0, \frac{a-b\mu_f}{b-c\mu_f}C_0)$ , zodat dus



Figuur 1.5: Optimal Portfolio met risico-vrij aandeel

$$\mu_m - \mu_f = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 - \mu_f = \frac{(a - b\mu_f)C_0 - \mu_f(b - c\mu_f)}{b - c\mu_f}$$

en

$$\gamma\sigma_m^2 = \frac{\gamma s^2 C_0^2}{(b - c\mu_f)^2} = \frac{\gamma C_0^2 (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)}{(b - c\mu_f)^2}$$

$$\text{Dus } \Theta_m = \frac{(b - c\mu_f)^2 C_0 (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)}{(b - c\mu_f) \gamma C_0^2 (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a)} = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}.$$

Hieruit volgt  $\Theta_f = 1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}$ .

Dus een investeerder die zijn utility function wil maximaliseren een bedrag van

$$\theta_{m,opt} = \Theta_m \sigma_m = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0} \frac{C_0}{b - c\mu_f} (\Sigma^{-1} c\mu - \mu_f \bar{1}) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1})$$

in de niet-risico-vrije aandelen zal investeren en een bedrag van

$$\theta_{f,opt} = \Theta_f C_0 = \left(1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}\right) C_0$$

in het risico-vrije aandeel. Voor de bijbehorende  $\mu_{opt}$  geldt:

$$\begin{aligned} \mu_{opt} &= \mu^T \theta_{m,opt} + \mu_f \theta_{f,opt} = \mu^T \frac{1}{\gamma} (\Sigma^{-1} \mu - \mu_f \Sigma^{-1} \bar{1}) + \mu_f \left(C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma}\right) = \\ &= \frac{1}{\gamma} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f C_0 = \frac{1}{\gamma} s^2 + \mu_f C_0 \end{aligned}$$

Aangezien op de CML geldt  $\mu_{opt} = s\sigma_{opt} + \mu_f C_0$ , volgt direct uit bovenstaande vergelijking  $\sigma_{opt} = \frac{s}{\gamma}$ .

Zie figuur (1.5) voor een grafische representatie.

### 1.3 Toepassing van de theorie

We hebben nu een paar mogelijke optimale portfolio's gezien, voorbeelden van portfolio's waarin een investeerder geïnteresseerd zou kunnen zijn. Ik zal nu met een voorbeeld de gevonden resultaten in praktijk toepassen.

Stel dat we een beginkapitaal  $C_0$  hebben dat we geheel willen investeren in

aandelen van de AEX-index. voor het gemak nemen we hier aan dat  $C_0 = 1$ , zodat de resultaten die we zullen krijgen de fracties van een willekeurig kapitaal aangeven die in elk van de aandelen geïnvesteerd moeten worden. Om tot een verstandige investering te komen heb ik de dagopbrengsten van de afgelopen 9 weken (44 beursdagen) van een aantal aandelen bekeken en 3 aandelen uitgekozen waarvan de opbrengsten gedurende die weken een opwaartse lijn vertoonden. Deze aandelen zijn Unilever, P&O Nedlloyd en Heijmans. Dit zijn 3 van de zogenaamde hoofdfondsen van de AEX-index. Voor de duidelijkheid vermeld ik nog dat de gegevens de periode van 21-03-2005 ("dag 1") tot en met 23-05-2005 ("dag 44") betreffen en dat we ervan uitgaan dat we "morgen" (dwz 24-05-2005) ons kapitaal willen investeren. Hoewel 44 dagopbrengsten per aandeel eigenlijk vrij weinig gegevens zijn om een goede analyse te maken, is het genoeg om ter illustratie van de theorie van dit hoofdstuk te dienen.

Zoals gezegd weten we voor alledrie de aandelen de opbrengsten van de afgelopen 44 beursdagen. Dit betekent dat we ook per aandeel de verwachte opbrengst kunnen bepalen, want deze is het gemiddelde van de 44 dagopbrengsten. Deze verwachte opbrengsten geven we aan met  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , en  $\mu_3$ , waarbij aandeel 1 staat voor het aandeel Unilever, 2 voor P&O Nedlloyd en 3 voor Heijmans. Dit geeft het volgende resultaat:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.290 \\ 2.614 \\ 6.148 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Het aandeel Heijmans heeft dus gedurende de afgelopen 9 weken gemiddeld het meest opgeleverd.

De covariantie tussen de aandelen kunnen we als volgt berekenen:

Zij  $\mu_{ij}$  de opbrengst van aandeel  $i$  op dag  $j$  (dus  $i=1,2,3$  en  $j=1,2,\dots,44$ ). We bepalen de  $(1 \times 44)$ -vector  $\bar{\mu}_i = (\bar{\mu}_{i1}, \bar{\mu}_{i2}, \dots, \bar{\mu}_{i44})$  voor  $i=1,2,3$ , waarbij  $\bar{\mu}_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i$ , dus in woorden:  $\bar{\mu}_{ij}$  is gelijk aan de opbrengst van aandeel  $i$  op dag  $j$  min de gemiddelde opbrengst van aandeel  $i$ . Voor  $i,k=1,2,3$  is de covariantie tussen aandeel  $i$  en aandeel  $k$ ,  $\sigma_{ik}$ , nu gelijk aan:  $\sigma_{ik} = \frac{1}{44} \langle \bar{\mu}_i, \bar{\mu}_k \rangle$ , waarbij  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  staat voor het nemen van het inproduct. Op deze manier vinden we onderstaande covariantiematrix  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0475 & 0.0273 & 0.0130 \\ 0.0273 & 1.1595 & 0.1318 \\ 0.0130 & 0.1318 & 0.2959 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Uit deze matrix volgt onder andere dat de variantie (en dus het risico) van aandeel 1 erg laag is in vergelijking met de overige 2 aandelen en de variantie van aandeel 2 juist erg hoog.

Nu we  $\mu$  en  $\Sigma$  bepaald hebben, kunnen we de waarden van  $a$ ,  $b$  en  $c$  ook bepalen:

- $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu = 153.0697 \times 10^{-3}$
- $b = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu = 42.5931$
- $c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} = 22.882 \times 10^3$

Nu bepalen we twee van de in dit hoofdstuk besproken portfolio's.

**Minimale Variantie Portfolio**

De verwachte opbrengst van de Minimale Variantie Portfolio is gelijk aan

$$\mu_{mv} = \frac{b}{c}C_0 = \frac{b}{c} \approx 1.8614 \times 10^{-3}$$

De bijbehorende investering is

$$\theta_{mv} = \Sigma^{-1} \bar{1} \frac{C_0}{c} = \begin{pmatrix} 0.8887 \\ 0.0047 \\ 0.1066 \end{pmatrix}$$

We zien dat het grootste deel van het kapitaal in Unilever gestoken wordt, wat te verwachten viel, aangezien de variantie van dit aandeel zoals we gezien hebben erg laag is.

**Tangency Portfolio**

De verwachte opbrengst van de Tangency Portfolio is gelijk aan

$$\mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0 = \frac{a}{b} \approx 3.5938 \times 10^{-3}$$

Hierbij hoort de investering

$$\theta_{tg} = \Sigma^{-1} \mu \frac{C_0}{b} = \begin{pmatrix} 0.5166 \\ 0.0127 \\ 0.4707 \end{pmatrix}$$

Vergelijken we dit resultaat met het resultaat van de Minimale Variantie Portfolio, dan valt op dat nu een veel groter deel van het kapitaal in aandeel 3 gestoken wordt. Ook dit viel te verwachten, aangezien de Tangency Portfolio de verwachte opbrengst per eenheid risico maximaliseert en het feit dat aandeel 3 de hoogste verwachte opbrengst heeft nu dus wel meetelt.

**Vergelijking met de werkelijke opbrengsten**

Wanneer we achteraf de beursgegevens van 24-05-2005 vergelijken met bovenstaande berekeningen, blijkt dat de theorie niet altijd een goede voorspeller van de werkelijkheid is. De werkelijke opbrengsten van 24-05-2005 bleken gelijk te zijn aan:

$$r = \begin{pmatrix} -9.1408 \\ 0.8993 \\ 11.9760 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Als we in de Minimale Variantie Portfolio geïnvesteerd zouden hebben, zouden we een dagopbrengst hebben gehad van  $r^T \theta_{mv} \approx -6.8426 \times 10^{-3}$ . Dan zouden we dus verlies geleden hebben. Dit grote verschil met de verwachte portfolio-opbrengst  $\mu_{mv}$ , is te wijten aan het feit dat het aandeel Unilever op 24-05 het veel slechter gedaan heeft dan te verwachten was naar aanleiding van de opbrengsten van de 9 weken ervoor: in die periode vinden we slechts 3 dagen waarop de opbrengst nog lager was.

Als we in de Tangency Portfolio geïnvesteerd zouden hebben, zouden we een dagopbrengst hebben gehad van  $r^T \theta_{tg} \approx 0.9264 \times 10^{-3}$ . Het verschil tussen

gerealiseerde en verwachte portfolio-opbrengst,  $\mu_{tg}$ , is nu kleiner dan bij de Minimale Variantie Portfolio. Dit komt doordat de opbrengst van het aandeel Heijmans, die op 24-05 een stuk hoger uitgevallen is dan verwacht, het verlies op het aandeel Unilever nu deels compenseert.

Uit dit voorbeeld wordt het duidelijk dat wanneer we zouden kijken naar de opbrengst van onze investering over meerdere dagen, de werkelijke gemiddelde dagopbrengsten waarschijnlijk beter overeen zullen komen met de voorspelde opbrengsten. Dit omdat dan onverwacht slechte dagen, zoals in het voorbeeld voor Unilever, de uitkomsten minder sterk zullen beïnvloeden.





## Hoofdstuk 2

# Het Telsermodel en een generalisatie

We zijn tot dusverre uitgegaan van de meting van risico door standaarddeviatie. Een raar gevolg van deze definitie is dat op deze manier ook de afwijking naar boven van de portfolio-opbrengst als risico en dus als ongewenst verschijnsel geïnterpreteerd wordt. Dit terwijl afwijking naar boven betekent dat de opbrengst hoger uitvalt dan verwacht. Om deze reden hebben verschillende personen modellen ontwikkeld waarin alleen afwijking naar beneden als risico geïnterpreteerd wordt. Eén van deze personen is de econoom Lester G. Telser. Zijn model, dat ik gemakshalve het Telsermodel zal noemen, zullen we in dit hoofdstuk bestuderen. Omdat in dit Telsermodel de portfolio-optimalisatie onder een vrij specifieke voorwaarde plaatsvindt, bekijken we ook een generalisatie van dit model. Tenslotte passen we weer de theorie toe op een voorbeeld.

### 2.1 Het Telsermodel

Telser wil de verwachte waarde van het eindkapitaal van een investeerder,  $C_{end}$ , maximaliseren, onder de voorwaarde dat de kans dat de investeerder al zijn geld verliest, hooguit een bepaalde waarde  $\alpha$  is. Dit is dus de kans dat het eindkapitaal niet positief is. De waarde  $\alpha$  wordt de shortfall probability genoemd en om deze reden noemen we de genoemde voorwaarde de shortfall-voorwaarde. De portfolio die onder deze shortfall-voorwaarde het eindkapitaal maximaliseert is dus voor Telser de optimale portfolio. In formule wordt de voorwaarde  $P(C_{end} \leq 0) \leq \alpha$ . Dit kunnen we herschrijven als  $P(C_0 + R_p \leq 0) \leq \alpha$ , oftewel  $P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$ . De doelfunctie is  $E(C_{end})$ . Ook deze uitdrukking kunnen we herschrijven:  $E(C_{end}) = E(C_0 + R_p) = E(C_0) + E(R_p) = C_0 + \mu_p$ . Aangezien  $C_0$  constant is, komt maximaliseren van  $E(C_{end})$  dus neer op maximaliseren van  $\mu_p$ , dus kunnen we ook  $\mu_p$  als doelfunctie nemen. De maximalisatie gebeurt weer onder de noodzakelijke voorwaarden  $\mu^T \theta = \mu_p$  en  $\bar{1}^T \theta = C_0$ , zodat de Telser-optimale portfolio de oplossing van het volgende optimalisatieprobleem is:

$$\max \left\{ \mu_p \mid \begin{array}{l} P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Om dit probleem op te lossen, moeten we weten wat de kansverdeling van  $R_p$  is. In dit hoofdstuk gaan we ervan uit dat dit de normale verdeling is. Dit is echter een aanname: in het volgende hoofdstuk zullen we ook van andere verdelingen uitgaan.

We gaan er voor nu dus vanuit dat geldt  $P(R_p \leq x) = \Phi(k)$ , waarbij  $k = \frac{x - \mu_p}{\sigma_p}$  en  $\Phi$  de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling is.

We kunnen de voorwaarde  $P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$  dus als volgt herschrijven:

$$\Phi\left(\frac{-C_0 - \mu_p}{\sigma_p}\right) \leq \alpha \Rightarrow \frac{-C_0 - \mu_p}{\sigma_p} \leq k_\alpha \Rightarrow \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p$$

waarbij  $k_\alpha$  het kwantiel van de standaardnormale verdeling is, behorende bij kans  $\alpha$ . De lijn  $-C_0 - k_\alpha \sigma_p$  wordt de shortfall line genoemd.

We kunnen dus de shortfall-voorwaarde vervangen door de voorwaarde  $\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p$ . Maar aangezien de variabele  $\sigma_p$  niet in de voorwaarden van (2.1) gebruikt wordt, is het dan noodzakelijk de extra voorwaarde  $\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta$  toe te voegen. We kunnen het stelsel (2.1) dus herschrijven als:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

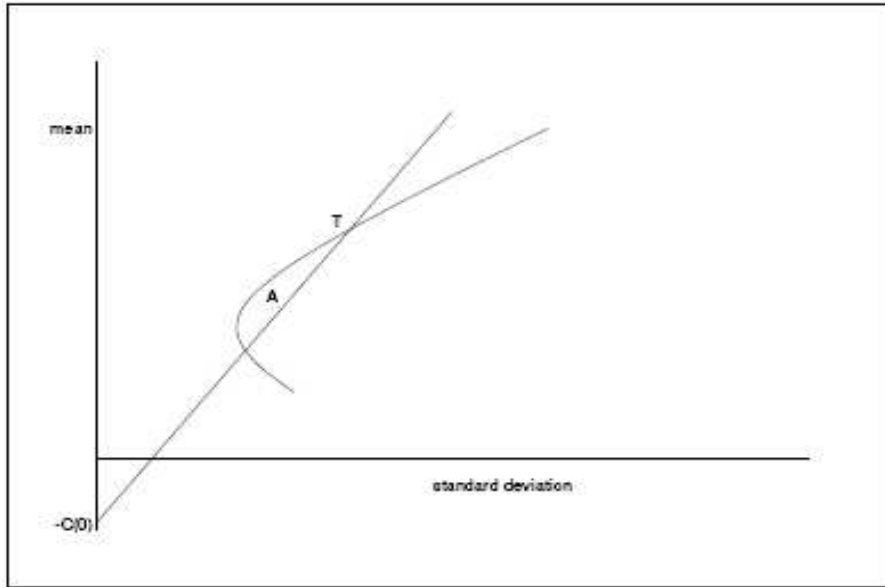
De laatste 3 voorwaarden van dit stelsel zijn we al eerder tegengekomen: bij de afleiding van de efficient frontier, in het vorige hoofdstuk. Het gebied dat deze 3 voorwaarden beschrijven is de binnenkant van de rechterhelft van de hyperbool, waarvan de efficient frontier de bovenste helft vormt. De shortfall-voorwaarde beperkt dit gebied echter tot het deel boven de shortfall line. Het gebied gegeven door alle vier de voorwaarden zien we in afbeelding 2.1 aangegeven met A.

Duidelijk is dat  $\mu_p$  maximaal is in het snijpunt van de shortfall line met de efficient frontier, in figuur 2.1 aangegeven met T. Dit betekent dat we de oplossing van stelsel (2.2) kunnen bepalen simpelweg door de vergelijking van de efficient frontier gelijk te stellen aan de vergelijking van de shortfall line, wanneer we deze laatste herschrijven als  $\sigma_p^2 = \left(\frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha}\right)^2$ , en deze op te lossen voor  $\mu_p$ . Dit geeft het volgende resultaat:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) = \left(\frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha}\right)^2 \\ &\Rightarrow k_\alpha^2(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \\ &= d(-C_0 - \mu_p)^2 = d(C_0^2 + 2C_0\mu_p + \mu_p^2) \\ &\Rightarrow (ck_\alpha^2 - d)\mu_p^2 - (2d + 2bk_\alpha^2)C_0\mu_p + (ak_\alpha^2 - d)C_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Deze vergelijking lossen we op met de abc-formule. De discriminant D is:

$$\begin{aligned} D &= (2d + 2bk_\alpha^2)^2 C_0^2 - 4(ck_\alpha^2 - d)(ak_\alpha^2 - d)C_0^2 \\ &= 4d^2 C_0^2 + 4b^2 k_\alpha^4 C_0^2 + 8bdk_\alpha^2 C_0^2 - 4ack_\alpha^4 C_0^2 + 4cdk_\alpha^2 C_0^2 + 4adk_\alpha^2 C_0^2 - 4d^2 C_0^2 \\ &= 4k_\alpha^2 C_0^2 (-ac - b^2)k_\alpha^2 + 2bd + cd + ad = 4dk_\alpha^2 C_0^2 (-k_\alpha^2 + 2b + c + a) \end{aligned}$$



Figuur 2.1: Telsers-optimal portfolio

De abc-formule geeft nu de volgende oplossing voor vergelijking (2.3):

$$\mu_p = \frac{2d + 2bk_\alpha^2 \pm \sqrt{D}}{2(ck_\alpha^2 - d)}$$

De  $\mu_p$  die bij het punt T hoort,  $\mu_T$ , is gelijk aan de grootste van deze 2 oplossingen, zoals grafisch duidelijk is. Dit betekent dat

$$\mu_T = \frac{2d + 2bk_\alpha^2 + \sqrt{D}}{2(ck_\alpha^2 - d)} = \frac{d + bk_\alpha^2 + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2 - d} C_0 \quad (2.4)$$

Omdat  $\mu_T$  op de shortfall line ligt, geldt  $\sigma_T = \frac{-C_0 - \mu_T}{k_\alpha}$  en de bij T behorende investering  $\theta_T$  kunnen we, aangezien T op de efficient frontier ligt, bepalen door  $\mu_T$  in te vullen in vergelijking (1.5):

$$\theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T) \quad (2.5)$$

## 2.2 Een generalisatie van het Telsersmodel

Zoals we gezien hebben gebeurt maximalisatie van het eindkapitaal in het Telsersmodel onder de voorwaarde dat de kans dat het eindkapitaal kleiner dan 0 is, hooguit  $\alpha$  is. Voor bijvoorbeeld banken is deze voorwaarde van belang omdat deze  $\alpha$  de kans is dat zij failliet gaan. Voor een particuliere investeerder is het wellicht interessanter de optimale portfolio te bepalen binnen het model waarin

maximalisatie plaatsvindt onder de voorwaarde dat de kans dat hij een bepaald percentage, zeg  $\beta$ , van zijn beginkapitaal verliest, hooguit  $\alpha$  is. In formule wordt deze voorwaarde

$$P(C_{end} \leq C_0 - \beta C_0) \leq \alpha \Rightarrow P(C_0 + R_p \leq (1 - \beta)C_0) \leq \alpha \Rightarrow P(R_p \leq -\beta C_0) \leq \alpha$$

waarbij  $\beta$  en  $\alpha$  per investeerder kunnen verschillen, afhankelijk van zijn doelstellingen. Wil een investeerder bijvoorbeeld slechts 10 procent kans hebben om de helft van zijn beginkapitaal te verliezen, dan wordt de voorwaarde

$$P(R_p \leq -0.5C_0) \leq 0.1$$

Dit model is duidelijk een generalisatie van het Telsermodel, aangezien daarin de shortfall-voorwaarde gelijk is aan bovenstaande voorwaarde met  $\beta = 1$ . De berekening van de optimale portfolio gaat dan ook op dezelfde manier als net:

De voorwaarde  $P(R_p \leq -\beta C_0) \leq \alpha$  herschrijven we als  $\mu_p \geq -\beta C_0 - k_\alpha \sigma_p$ . De optimale portfolio,  $\mu'_T$ , vinden we nu door de volgende vergelijking op te lossen voor  $\mu_p$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) &= \left(\frac{-\beta C_0 - \mu_p}{k_\alpha}\right)^2 \\ \Rightarrow (ck_\alpha^2 - d)\mu_p^2 - (2d\beta + 2bk_\alpha^2)C_0\mu_p + (ak_\alpha^2 - d\beta^2)C_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Wanneer we de berekening van de Telser-optimale portfolio hiernaast leggen, is het niet moeilijk in te zien dat

$$\mu'_T = \frac{d\beta + bk_\alpha^2 + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b\beta + c\beta^2 - k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2 - d} C_0 \quad (2.6)$$

Uiteraard geldt weer  $\sigma'_T = \left(\frac{-C_0 - \mu'_T}{k_\alpha}\right)$  en  $\theta'_T = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu'_T)$

## 2.3 Voorbeeld

Ter illustratie van de theorie uit dit hoofdstuk behandel ik een voorbeeld. We berekenen voor dit voorbeeld de Telser-optimale portfolio.

We zouden verder kunnen gaan met het voorbeeld van hoofdstuk 1, maar zoals we gezien hebben geeft de theorie daarvoor, vanwege het kleine aantal gegevens, geen goede voorspelling van de werkelijke uitkomsten. Om deze reden gebruiken we nu een ander voorbeeld.

Hieronder staan de covariantiematrix  $\Sigma$  en vector  $\mu$  van jaarlijkse verwachte opbrengsten van 7 aandelen van de AEX-index gegeven.

$$\mu = \begin{pmatrix} 66.52 \\ 68.47 \\ 40.40 \\ 129.69 \\ 98.58 \\ 57.69 \\ 69.23 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 86.22 & 37.62 & 45.73 & 21.99 & 46.59 & 22.62 & 23.75 \\ 37.62 & 99.65 & 50.98 & 26.84 & 59.10 & 32.51 & 31.74 \\ 45.73 & 50.98 & 438.40 & 18.77 & 81.14 & 27.53 & 22.63 \\ 21.99 & 26.84 & 18.77 & 60.64 & 23.96 & 15.91 & 21.60 \\ 46.59 & 59.10 & 81.14 & 23.96 & 183.51 & 36.63 & 28.47 \\ 22.62 & 32.51 & 27.53 & 15.91 & 36.63 & 55.22 & 23.35 \\ 23.75 & 31.74 & 22.63 & 21.60 & 28.47 & 23.35 & 54.86 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Het betreft (van boven naar beneden) de aandelen Elsevier, Fortis, Getronics, Heineken, Philips, Royal Dutch en Unilever. Bij het bepalen van deze  $\mu$  en  $\Sigma$  zijn de dagopbrengsten van de 7 aandelen gedurende een periode van 13 jaar (1990 tot 2003) gebruikt. We gaan er nu dus vanuit dat deze opbrengsten een normale verdeling volgen. We kijken naar de jaarlijkse opbrengsten omdat in praktijk (bv door banken) maximalisatie van het eindkapitaal meestal plaatsvindt onder de voorwaarde dat de kans om op jaarbasis failliet te gaan hooguit een bepaalde kans  $\alpha$  is. Dat wil zeggen dat de shortfall-voorwaarde betrekking heeft op een jaar ipv een dag.

We kiezen  $\alpha = 0.0001$ . dit is bijvoorbeeld voor een bank een realistische waarde, aangezien men de kans op faillissement wil minimaliseren en tot nul wil doen naderen. Deze keuze voor  $\alpha$  betekent dat er eens in de 10.000 jaar een faillissement mag plaatsvinden.

Om de Telser-optimale portfolio  $\theta_T$  en de bijbehorende verwachte opbrengst  $\mu_T$  te berekenen, hoeven we nu alleen maar de vergelijkingen (2.4) en (2.5) in te vullen. We bepalen eerst de waarden van de variabelen in deze vergelijkingen:

- $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \approx 0.3033$
- $b = \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} \approx 2.639$
- $c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} \approx 32.176$
- $d = ac - b^2 \approx 2.791$
- $k_\alpha = k_{0.0001}$  kunnen we aflezen in de tabel van de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling. Het blijkt dat  $k_\alpha = -3.719$

Deze waarden invullen geeft:

$$\theta_T \approx \begin{pmatrix} -0.088 \\ -0.150 \\ -0.069 \\ 1.285 \\ 0.219 \\ -0.164 \\ -0.033 \end{pmatrix}$$

en  $\mu_T \approx 0.158$  en  $\sigma_T \approx 0.311$ .

Hier zien we dus een voorbeeld waarin het voordeliger blijkt te zijn om in sommige aandelen "negatief te investeren", dwz van sommige aandelen te lenen. Verder is de kans dat de portfolio-opbrengst niet positief is gelijk aan  $P(R_p \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_T}{\sigma_T}\right) \approx \Phi(-0.5080) = 0.3050$ . De kans dat er winst gemaakt wordt is dus 0.6950.



## Hoofdstuk 3

# Elliptische verdelingen en het Telser model

In hoofdstuk 2 zijn we ervan uit gegaan dat  $R_p$  normaal verdeeld was. Deze aanname maakt de berekeningen makkelijk, maar maakt tegelijkertijd ook het model minder realistisch, aangezien het helemaal niet gezegd is dat de opbrengsten in praktijk ook echt normaal verdeeld zijn. Daarom beperken we ons in dit hoofdstuk niet langer tot één verdeling, maar beschouwen we een klasse van verdelingen, de zogenaamde elliptische verdelingen. In praktijk blijken de opbrengsten van de aandelen vaak één of andere elliptische verdeling te volgen. We kijken hoe de Telser optimale portfolio er uit komt te zien wanneer  $R_p$  elliptisch verdeeld is. We zullen zien dat de normale verdeling slechts een voorbeeld is van een elliptische verdeling en dat dit hoofdstuk een generalisatie is van het vorige hoofdstuk.

### 3.1 De elliptische verdeling

Een  $n$ -dimensionale vector  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  is elliptisch verdeeld als de dichtheidsfunctie van de volgende vorm is:

$$f_X(x) = c_n |\Omega|^{-\frac{1}{2}} g_n \left[ \frac{1}{2} (x - \mu)^T \Omega^{-1} (x - \mu) \right] \quad (3.1)$$

$\mu$  is hierbij een  $n \times 1$ -kolomvector,  $\Omega$  een  $n \times n$ -matrix en  $c_n$  een constante. Er kan worden aangetoond<sup>1</sup> dat

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x) dx \right]^{-1} \quad (3.2)$$

waarbij  $\Gamma$  de gammafunctie is, dwz  $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du \quad \forall x > 0$

De functie  $g_n$  wordt de density generator genoemd. We zien dat de verdeling van  $X$  bepaald wordt door  $\mu$ ,  $\Omega$  en  $g_n$ . Om deze reden schrijven we  $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$ , wanneer  $X$  een  $n$ -dimensionale elliptisch verdeelde vector is.

---

<sup>1</sup>zie bijvoorbeeld het artikel *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions* uit 2002 van Landsman en Valdez



Voor het vervolg van dit hoofdstuk is het nog van belang op te merken dat de karakteristieke functie  $\phi_X$  van  $X$  van de volgende vorm is:

$$\phi_X(t) = E(e^{it^T x}) = e^{it^T \mu} \psi\left(\frac{1}{2} t^T \Omega t\right) \quad (3.3)$$

voor een zekere functie  $\psi$ . De vector  $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$  noteren we ook wel als  $X \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$ .

We zullen verder van een aantal eigenschappen van de elliptische verdeling gebruik maken. Om te beginnen bestaat het gemiddelde van  $X$  wanneer  $\int_0^\infty g_1(x) dx < \infty$ . In dit geval geldt  $E(X) = \mu$ . Als bovendien  $|\psi'(0)| < \infty$ , bestaat ook de covariantiematrix  $\Sigma$ . Deze is dan gelijk aan  $-\psi'(0)\Omega$ . Een tweede eigenschap is dat als  $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$ , dan geldt voor elke  $(m \times n)$ -matrix  $A$  en  $m \times 1$ -vector  $B$

$$AX + B \sim E_m(A\mu + B, A\Omega A^T, g_m) \quad (3.4)$$

oftewel  $AX + B$  is weer elliptisch verdeeld, met dezelfde density generator als  $X$ . Nemen we voor  $A$  de  $1 \times n$ -vector waarvan het  $k$ -de element gelijk is aan 1 en de overige elementen gelijk aan 0 zijn, dan geldt de gelijkheid  $X_k = AX$ . Nu volgt direct uit (3.4) dat  $X_k \sim E_1(\mu_k, \omega_k^2, g_1)$ , oftewel dat de marginale verdelingen van de componenten van  $X$  elliptische verdelingen zijn met parameters  $\mu_k, \omega_k^2$  en  $g_1$ , waarbij  $\omega_k^2$  het  $k$ -de diagonaalelement van  $\Omega$  is. De marginale verdelingen zijn dus van de vorm

$$f_{X_k}(x) = \frac{c_1}{\omega_k} g_1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_k}{\omega_k} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

### 3.2 Voorbeelden van elliptische verdelingen

Hieronder staan een aantal bekende voorbeelden van elliptische verdelingen met hun density generator of de in de karakteristieke functie voorkomende functie  $\psi$ . Op 3 van deze verdelingen gaan we vervolgens iets dieper in.

Verdeling	$g_n(u)$ of $\psi(u)$
Cauchy	$g_n(u) = (1 + u)^{-(n+1)/2}$
Exponential Power	$g_n(u) = \exp[-r(u)^s], r, s > 0$
LaPlace	$g_n(u) = \exp(-\sqrt{2u})$
Logistisch	$g_n(u) = \frac{\exp(-\sqrt{2u})}{[1 + \exp(-\sqrt{2u})]^2}$
Normaal	$g_n(u) = \psi(u) = \exp(-u)$
Stable Laws	$\psi(u) = \exp[-r(u)^{s/2}], 0 < s \leq 2, r > 0$
Student-t	$g_n(u) = \left(1 + \frac{2u}{\nu}\right)^{-(n+\nu)/2}, \nu > 0$

### Normale verdeling

Stel dat elliptisch verdeeld is met density generator  $g_n(x) = e^{-x}$ .  $g_n$  is dus onafhankelijk van  $n$ . Met vergelijking (4.2) kunnen we nu  $c_n$  berekenen. Dit geeft

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-x} dx \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} [\Gamma(n/2)]^{-1} = (2\pi)^{-n/2}$$

Met vergelijking (3.5) kunnen we nu de marginale dichtheidsfunctie van  $X_k$  berekenen:

$$f_{X_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k}} e^{-\frac{1}{2}((x-\mu_k)/\omega_k)^2}$$

Dit is de normale verdeling. De dichtheidsfunctie van  $X$  vinden we mbv vergelijking (3.1). Dit geeft:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} e^{[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Omega^{-1}(x-\mu)]}$$

Dit is de multivariate normale verdeling. We weten dat voor een normaal verdeelde vector  $X$  geldt  $Cov(X) = \Sigma$ , dus geldt hier  $\Omega = \Sigma$  en dus  $\omega_k = \sigma_k$ . We concluderen dat de normale verdeling slechts een voorbeeld van een elliptische verdeling is.

### Laplace verdeling

Stel dat  $X$  elliptisch verdeeld is met density generator

$$g_n(x) = e^{-\sqrt{2x}}$$

Met vergelijking (3.2) kunnen we weer  $c_n$  berekenen. Voor het gemak gebruiken we hierbij de substitutie  $y = \sqrt{x}$ . Dit geeft:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-\sqrt{2x}} dx \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \int_0^\infty y^{n-2} e^{-y\sqrt{2}} 2y dy \right]^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[ \frac{2\Gamma(n)}{2^{n/2}} \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}} \end{aligned}$$

Met (3.5) berekenen we weer de marginale dichtheidsfunctie van  $X_k$ :

$$f_{X_k}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1)\pi^{1/2}\omega_k} e^{-\sqrt{\frac{(x-\mu_k)}{\omega_k}}} \quad (3.6)$$

Omdat  $\Gamma(1) = \int_0^\infty u^0 e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^\infty = 1$  en verder bekend is dat  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , volgt dat we vergelijking (3.6) als volgt kunnen herschrijven:

$$f_{X_k} = \frac{1}{2\omega_k} e^{(-|x-\mu_k|/\omega_k)}$$

Dit is de Laplace verdeling. De multivariate verdeling vinden we door  $g_n$  en de gevonden  $c_n$  in te vullen in vergelijking (3.1):

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} e^{[-((x-\mu)^T \Omega^{-1}(x-\mu))^{1/2}]}$$

Aan te tonen is dat  $\Omega = \frac{1}{2}\Sigma$  en dus  $\omega_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_k$ .

### Student-t verdeling

Een derde voorbeeld van een elliptische verdeling is de student-t verdeling. Wanneer  $X$  namelijk elliptisch verdeeld is met de volgende density generator:

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{2x}{\nu}\right)^{(-n+\nu)/2}$$

blijkt de marginale dichtheidsfunctie van  $X_k$  gelijk aan:

$$f_{X_k}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu\omega_k}} \left[1 + \frac{(x-\mu_k)^2}{\omega_k^2\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

Voor  $\omega_k = 1$  en  $\mu_k = 0$  is dit precies de student-t verdeling met  $\nu$  vrijheidsgraden. Aan te tonen is dat  $\Omega = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$  en dus dat  $\omega_k = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}}\sigma_k$ .

### 3.3 Het Telser model

In hoofdstuk 2 hebben we de Telser optimale portfolio berekend, waarbij we ervan uitgingen dat de opbrengsten van de aandelen normaal verdeeld waren. We zullen nu aantonen dat, wanneer we uitgaan van een elliptische verdeling van de aandeel-opbrengsten, de Telser-analyse dezelfde resultaten geeft.

In hoofdstuk 2 hebben we gezien dat bij een normaal verdeelde  $R_p$  de short-fall voorwaarde te herschrijven is als  $\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha\sigma_p$ , wat de analyse van het Telsermodel veel makkelijker maakt. Dit herschrijven is mogelijk omdat de normale verdeling geheel bepaald wordt door zijn gemiddelde en variantie. Een eerste vraag die we moeten beantwoorden is dus of elke elliptische verdeling geheel bepaald wordt door zijn gemiddelde en variantie. Dit blijkt inderdaad het geval en we zullen dit hieronder aantonen door te bewijzen dat van elke elliptische verdeling de hogere centrale momenten danwel gelijk aan 0 zijn, danwel evenredig aan het eerste moment (gemiddelde) of het tweede centrale moment (variantie). Aangezien de (centrale) momenten van een verdeling de verdeling geheel bepalen, impliceert dit dat een elliptische verdeling door zijn gemiddelde en variantie bepaald wordt.

Stel dat de vector van de opbrengsten van de  $n$  aandelen elliptisch verdeeld is:  $r \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$ . Als een investeerder de investering  $\theta$  maakt, dan is de totale portfolio-opbrengst gelijk aan  $R_p = \theta^T r$ . Uit vergelijking (3.4) volgt dat ook  $R_p$  elliptisch verdeeld is en wel als volgt:  $R_p \sim E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, \psi)$ . Nu is  $\mu_p = \theta^T \mu$  de verwachte portfolio-opbrengst en  $\omega^2 = \theta^T \Omega \theta$  de deviatie van de portfolio.

Het  $k$ -de centrale moment van  $R_p$ ,  $M_k$ , is per definitie

$$M_k = E(R_p - E(R_p))^k = E(R_p - \mu_p)^k = \int (x - \mu_p)^k f_p(x) dx$$

waarbij  $f_p(x)$  de dichtheidsfunctie van  $R_p$  is. ( $f_p(x)$  is dus een elliptische verdeling en kan gevonden worden door in vergelijking (3.5) de juiste parameters in te vullen).

Uit vergelijking (3.3) volgt de karakteristieke functie van  $R_p$ :

$$\phi_p(t) = e^{it\mu_p} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right), \text{ oftewel } \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) = \phi_p(t) e^{-it\mu_p}$$

Aangezien we  $\phi_p(t)$  ook kunnen schrijven als  $\phi_p(t) = Ee^{itR_p}$ , volgt nu:

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) &= Ee^{itR_p} e^{-it\mu_p} = Ee^{it(R_p - \mu_p)} = \int e^{it(x - \mu_p)} f_p(x) dx \\ &= \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it(x - \mu_p))^k}{k!} f_p(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int (x - \mu_p)^k f_p(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M_k\end{aligned}$$

Aangezien

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{i^k t^k}{k!} M_k \right) = \begin{cases} 0 & \text{als } k < m \\ i^m M_m & \text{als } k = m \\ \frac{i^k t^{k-m}}{(k-m)!} M_k & \text{als } k > m \end{cases}$$

volgt nu dat

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \right) \Big|_{t=0} = \frac{d^m}{dt^m} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M_k \right) \Big|_{t=0} = i^m M_m$$

oftewel het  $m$ -de centrale moment van  $R_p$  is gelijk aan

$$M_m = i^{-m} \frac{d^m}{dt^m} \left( \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \right) \Big|_{t=0}$$

Met inductie is (gemakkelijk) aan te tonen dat voor een even  $m$  de volgende gelijkheden gelden:

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) = \sum_{l=0}^{m/2} C_{ml} \psi^{m-l}\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \omega^{2(m-l)} t^{m-2l} \\ \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) = \sum_{l=0}^{m/2} C_{m+1,l} \psi^{(m+1-l)}\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \omega^{2(m+1-l)} t^{m+1-2l} \end{cases}$$

waarbij de  $C_{ml}$  constanten zijn.

Uit dit resultaat volgt dat we het  $m$ -de centrale moment als volgt kunnen herschrijven:

-als  $m$  is even:

$$\begin{aligned}M_m &= E(R_p - \mu_p)^m = i^{-m} \frac{d^m}{dt^m} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \Big|_{t=0} = i^{-m} C_m \psi^{m/2}(0) \omega^{2(m/2)} \\ &= C'_m \omega^{2(m/2)}, \text{ wanneer we definiëren } C'_m = i^{-m} C_m \psi^{m/2}(0)\end{aligned}$$

-als  $m$  oneven is:

$$M_m = E(R_p - \mu_p)^m = i^{-m} \frac{d^m}{dt^m} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \Big|_{t=0} = i^{-m} 0 = 0$$

Aan het begin van dit hoofdstuk hebben we gezien dat  $-\psi'(0)\Omega = \Sigma$ .  $\Omega$  is dus evenredig aan  $\Sigma$  en dus ook  $\omega_k^2$  aan  $\sigma_k^2$ . Uit bovenstaande resultaten kunnen we dus concluderen dat de centrale momenten van een willekeurige elliptische verdeling evenredig zijn aan het gemiddelde  $\mu_p$  en de variantie  $\sigma_p^2$ . Zoals gezegd impliceert dit dat elke elliptische verdeling door zijn gemiddelde en variantie bepaald wordt.

Van dit gegeven gebruikmakend berekenen we nu de Telser optimale portfolio's voor elliptische verdelingen. We gaan ervan uit dat geldt  $r \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$ . Dan is dus  $R_p \sim E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, g_1)$ , zoals we eerder al geconcludeerd hadden en met de definities  $\mu_p = \theta^T \mu$  en  $\omega_p^2 = \theta^T \Omega \theta$  krijgen we dus  $R_p \sim E_1(\mu_p, \omega_p^2, g_1)$ . Vanwege vergelijking (3.5) is de dichtheidsfunctie van  $R_p$  van de vorm

$$f_p(x) = \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_p}{\omega_p} \right)^2 \right]$$

met  $c_1$  gedefinieerd als in (3.2).

In het Telsermodel gebeurt, zoals we in hoofdstuk 2 gezien hebben, maximalisatie van de verwachte opbrengst  $\mu_p$  onder de voorwaarde  $P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$ , waarbij  $\alpha$  de shortfall probability is. Aangezien  $R_p$  elliptisch verdeeld is, kunnen we deze voorwaarde herschrijven als:

$$P(R_p \leq -C_0) = \int_{x=-\infty}^{-C_0} \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_p}{\omega_p} \right)^2 \right] dx$$

We maken de substitutie  $z = \frac{x - \mu_p}{\omega_p} \Rightarrow x = z\omega_p + \mu_p \Rightarrow dx = \omega_p dz$ , zodat dus

$$P(R_p \leq -C_0) = \int_{z=-\infty}^{\frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p}} \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right] \omega_p dz = \int_{z=-\infty}^{\frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p}} c_1 g_1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right] dz$$

We definiëren nu  $k_\alpha$  als het kwantiel waarvoor de volgende gelijkheid geldt:

$$\int_{z=-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right] dz = \alpha$$

Wanneer  $g_1(x)$  de normale verdeling is, is bovenstaande definitie goed bekend en ook al gebruikt in hoofdstuk 2.

Er volgt dat we de voorwaarde  $P(R_p \leq -C_0)$  kunnen herschrijven als

$$\frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p} \leq k_\alpha, \text{ oftewel } \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \omega_p.$$

Aangezien we onze berekeningen uitvoeren in de  $(\sigma_p, \mu_p)$ -ruimte, is het handiger om deze voorwaarde uit te drukken in termen van  $\mu_p$  en  $\sigma_p$ . Van alledrie de elliptische verdelingen die in paragraaf 3.2 behandeld zijn hebben we de parameter  $\omega_p$  uitgedrukt in  $\sigma_k$  gegeven. dit betekent dat we in ieder geval voor deze 3 verdelingen bovengenoemde voorwaarde in termen van  $\mu_p$  en  $\sigma_p$  kunnen uitdrukken:

$$\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \omega_p = \begin{cases} -C_0 - k_\alpha \sigma_p & \text{normaal} \\ -C_0 - k_\alpha \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \sigma_p & \text{student-t} \\ -C_0 - \frac{k_\alpha}{\sqrt{2}} \sigma_p & \text{Laplace} \end{cases}$$

Voor het gemak zullen we deze voorwaarde nu schrijven als  $\mu_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p$ , waarbij  $z_\alpha = \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p}$ .

Nu kan het Telser-optimalisatieprobleem dat we eerder in hoofdstuk 2 besproken hebben dus geschreven worden als:

$$\max \left\{ \mu_p \mid \begin{array}{l} \mu_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Dit is precies hetzelfde stelsel als stelsel (2.2), met het kleine, voor de oplossing onbelangrijke verschil dat hier het kwantiel  $z_\alpha$  en in stelsel (2.2)  $k_\alpha$  in de eerste voorwaarde gebruikt wordt. Het stelsel kan dan ook op precies dezelfde manier opgelost worden als stelsel (2.2). We kunnen dus als oplossing voor dit stelsel de oplossing uit hoofdstuk 2 overnemen. Dat wil zeggen dat de optimale portfolio  $\theta_T$  gegeven wordt door:

$$\theta_T = \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T)$$

waarbij

$$\mu_T = \frac{bz_\alpha^2 + d + \sqrt{dz_\alpha^2(a+2b+c-z_\alpha^2)}}{cz_\alpha^2 - d}C_0$$

En ook de resultaten uit paragraaf 2.2 gelden voor elke willekeurige elliptische verdeling.

### 3.4 Voorbeeld

Met een klein voorbeeld wil ik tenslotte een idee geven van de verandering van de Telser-optimale portfolio bij verschillende elliptische verdelingen.

We gaan weer uit van het voorbeeld uit hoofdstuk 2. We nemen weer  $\alpha = 0.0001$ . We hadden gezien dat als  $R_p$  normaal verdeeld is, dat dan geldt  $K_\alpha = -3.719$ . Ook voor de Student-t(9) verdeling (dwz Student-t verdeling met 9 vrijheidsgraden) en de LaPlace verdeling kunnen we  $k_\alpha$  bepalen. Dit zijn twee vrij bekende verdelingen, dus in veel statistiekboeken kunnen we de waarden voor  $k_\alpha$  ook in een tabel vinden. Het blijkt dat  $k_\alpha = -6.010$  voor de Student-t(9) verdeling en  $k_\alpha = -8.517$  voor de LaPlace verdeling. Omdat voor de Student-t(9) verdeling geldt dat  $\omega_p = \sqrt{\frac{9-2}{9}}\sigma_p = \frac{1}{3}\sqrt{7}\sigma_p$ , volgt dat voor deze verdeling  $z_\alpha$  gelijk is aan  $z_\alpha = \frac{k_\alpha\omega_p}{\sigma_p} = -6.010 \times \frac{1}{3}\sqrt{7} \approx -5.300$ . Voor de LaPlace verdeling is  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_p$ , dus  $z_\alpha = \frac{k_\alpha\omega_p}{\sigma_p} = \frac{-8.517}{\sqrt{2}} \approx -6.022$ . De shortfall line bij  $\alpha = 0.0001$  en  $C_0 = 1$  ziet er voor deze 2 verdelingen en de normale verdeling dus als volgt uit:

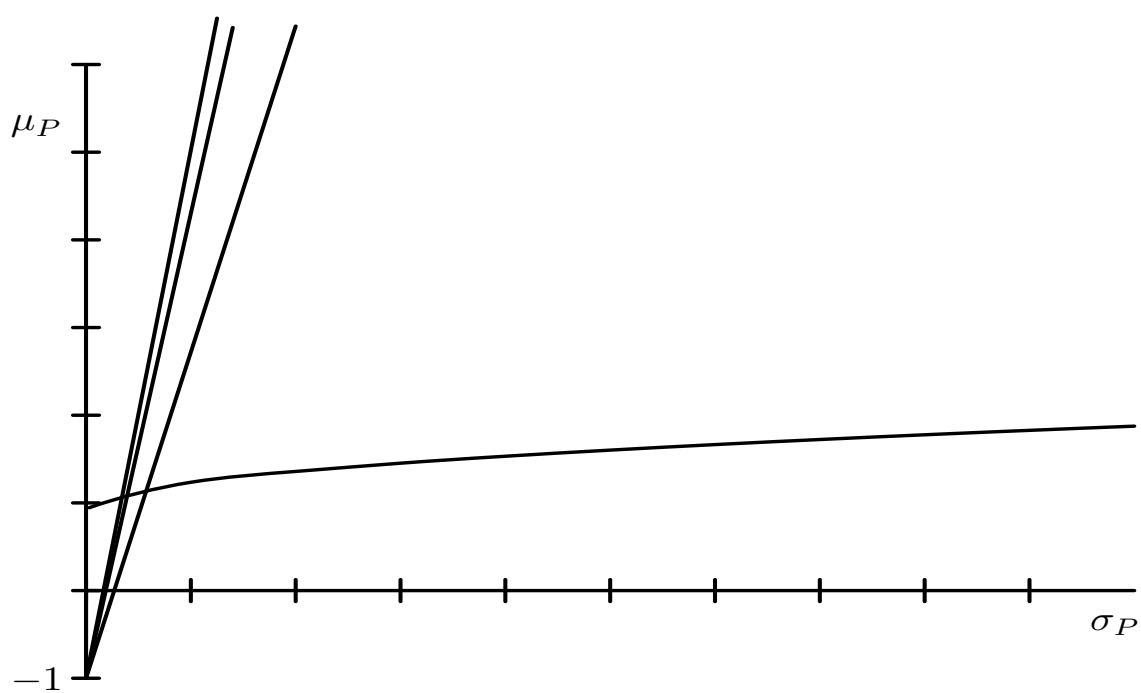
$$\mu_p \geq -C_0 - z_\alpha\sigma_p = \begin{cases} -1 + 3.719\sigma_p & \text{normaal} \\ -1 + 5.300\sigma_p & \text{student-t(9)} \\ -1 + 6.022\sigma_p & \text{Laplace} \end{cases}$$

De efficient frontier bepalen we door de in paragraaf 2.3 gevonden waarden voor a,b,c en d in te vullen in vergelijking (1.4). Dit geeft:

$$\sigma_p^2 = 11.5285\mu_p^2 - 1.8911\mu_p + 0.1087$$

In figuur 3.1 zijn de efficient frontier en de 3 shortfall lines geplot (van links naar rechts: LaPlace, Student-t(9) en Normaal)

Om de precieze portfolio-opbrengst te bepalen hoeven we weer alleen vergelijking 2.4 in te vullen. Dit geeft  $\mu_T \approx 0.116$  voor de Student-t(9) verdeling en  $\mu_T \approx 0.095$  voor de LaPlace verdeling.



Figuur 3.1: Telser-optimale portfolio's voor verschillende verdelingen

# Conclusie

We hebben nu een aantal verschillende modellen geanalyseerd, die allemaal verschillende resultaten opleveren. Geen van deze modellen is in het algemeen beter of slechter, maar de keuzes van een investeerder bepalen wat optimaal voor hem is. We hebben gezien dat om te beginnen de definitie van risico van invloed is op de optimale investering. Maar zelfs als we uitgaan van één definitie leiden verschillende doelstellingen tot verschillende optimale portfolio's, zoals we in hoofdstuk 1 gezien hebben. Tenslotte is de verdeling van de aandeloopbrengsten nog een factor die de resultaten beïnvloed. Toch hebben we in hoofdstuk 3 voor een hele klasse van verdelingen, de elliptische verdelingen, één mooi resultaat gevonden. Dit geeft hoop dat het misschien mogelijk is om ook voor bijvoorbeeld de modellen uit hoofdstuk 1 een algemeen resultaat te vinden, of voor verschillende definities van risico. Het vinden van de optimale oplossing komt in veel gevallen namelijk neer op het oplossen van een optimaliserings- of minimaliseringsprobleem. De voorwaarden in deze problemen lijken vaak erg op elkaar, zoals we zien bij vergelijking van de verschillende stelsels in hoofdstuk 1 en 2. Dus als we net als in hoofdstuk 3 niet de verschillen benadrukken, maar naar de overeenkomsten kijken, is het wellicht mogelijk om voor deze problemen een soort unificerende theorie te vinden. Er is dus nog een hoop interessant onderzoek te doen naar portfolio optimalisatie.





# Referenties

- Blake, David, 1990. *Financial Market Analysis*. McGraw Hill Book Company, Londen
- Elton, Edwin en Gruber, Martin, 1995. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. John Wiley & sons, New York
- Engels, Marnix, 2004. *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz*
- Landsman Z. en Valdez A.E., 2002. *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, Technical Report N 02-04
- Rice, John A., 1995. *Mathematical Statistics and Data Analysis*. Duxbury Press, Belmont (California)
- Behr(aandeelkoersen): <http://www.behr.nl/Beurs/Fondsh>