Lenstra's wonderlijke kaartspel: Een generalisatie van de Chinese Reststelling voor niet-commutatieve ringen

Dalen, B.E. van

Lenstra's wonderlijke kaartspel

Een generalisatie van de Chinese Reststelling voor niet-commutatieve ringen

Birgit van Dalen
dalen@math.leidenuniv.nl

11 mei 2005

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Lenstra's wonderlijke kaartspel is een wiskundig spel voor twee spelers. De benodigdheden voor dit spel zijn dan ook: papier, een pen en een wiskundig pak kaarten. Dat laatste bestaat uit één joker en verder een onbeperkte hoeveelheid kaarten die aan twee kanten gekleurd zijn. Deze twee kleuren zijn altijd verschillend en komen uit een vooraf vastgelegde eindige verzameling kleuren.

Als er bijvoorbeeld met de kleuren rood, blauw en groen gespeeld wordt, zijn er kaarten die rood-blauw gekleurd zijn, kaarten die blauw-groen gekleurd zijn en kaarten die rood-groen gekleurd zijn. Van al deze kaarten zijn er willekeurig veel en daarnaast is er nog een joker.

Als voorbereiding op het spel moeten er rijtjes van deze kleuren worden opgeschreven. In elk rijtje komt elke kleur precies één keer voor, maar de volgorde van de kleuren verschilt. De spelers mogen zelf beslissen hoeveel rijtjes er meespelen en welke dat zijn.

Bijvoorbeeld kunnen bij een spel met drie kleuren de rijtjes rood-blauw-groen, groen-rood-blauw en groen-blauw-rood worden opgeschreven.

Vervolgens begint het spel. Beide spelers zijn één keer aan de beurt. De eerste speler kiest een aantal kaarten uit en legt deze op een rij. Daarna kiest de tweede speler voor iedere kaart welke kant (en dus welke kleur) boven ligt. Als dat gebeurd is, kan de winnaar worden aangewezen.

De eerste speler wint als hij een aantal kaarten kan aanwijzen die samen een van de vooraf opgeschreven rijtjes vormen. De rij

rood groen groen blauw rood blauw rood groen rood

bevat bijvoorbeeld het rijtje rood-blauw-groen: de eerste, vierde en achtste kaart. Eventueel mag een van deze kleuren niet door een gewone kleurenkaart maar door de joker worden weergegeven. De joker kan namelijk iedere gewenste kleur aannemen.

Als echter de rij kaarten geen enkele van de vooraf opgeschreven rijtjes bevat, wat voor kleur de joker ook zou aannemen, dan wint de tweede speler.

Het is direct duidelijk dat de vooraf opgeschreven rijtjes van grote invloed zijn op de winkansen: hoe meer rijtjes, hoe makkelijker het voor de eerste speler lijkt om te winnen, terwijl het hebben van weinig rijtjes juist in het voordeel van de tweede speler is. Maar het is ook belangrijk hoe de rijtjes er uit zien. In feite kunnen we precies bepalen wanneer welke speler kan winnen, ervan uitgegaan dat beide spelers slim genoeg spelen.

De eerste speler kan Lenstra's wonderlijke kaartspel winnen precies dan als in de rijtjes kleuren elk paar kleuren in beide mogelijke volgordes voorkomt.

Bij een spel met drie kleuren zijn bijvoorbeeld de rijtjes rood-blauw-groen en groen-blauw-rood winnend voor de eerste speler, terwijl met de rijtjes rood-blauw-groen, rood-groen-blauw en blauw-rood-groen de tweede speler juist kan winnen, omdat groen nooit links van rood staat.

Verderop in deze scriptie wordt ook aangegeven hoe beide spelers precies moeten spelen om hun voordeel ook daadwerkelijk uit te buiten en, in het geval van de eerste speler, hoeveel kaarten daarvoor nodig zijn.

Dit kaartspel is, verrassend genoeg, gerelateerd aan een wiskundig probleem uit de algebra, namelijk de vraag hoe de doorsnede van een stel paarsgewijs onderling ondeelbare idealen geschreven kan worden als de som van een aantal producten van deze idealen. In een speciaal geval, namelijk als de ring waarin deze idealen zitten, commutatief is, is deze doorsnede gelijk aan het product van alle idealen. In het algemeen is er echter een som van meerdere producten nodig.

Als we drie idealen hebben, genaamd I_{rood}, I_{groen} en I_{blauw}, geldt bijvoorbeeld

$$I_{rood} \cap I_{blauw} \cap I_{groen} = I_{rood} I_{blauw} I_{groen} + I_{groen} I_{blauw} I_{rood}.$$

In het algemeen is het echter niet waar dat

$$I_{rood} \cap I_{blauw} \cap I_{groen} = I_{rood} I_{blauw} I_{groen} + I_{rood} I_{groen} I_{blauw} + I_{blauw} I_{rood} I_{groen}.$$

Wat dit voorbeeld al doet vermoeden, is inderdaad waar: de rijtjes kleuren die nodig zijn om de eerste speler te laten winnen, zijn precies de rijtjes producten van idealen die samen de doorsnede van de idealen vormen. Zo verkrijgen we het volgende resultaat:

De doorsnede van een stel paarsgewijs onderling ondeelbare idealen is gelijk aan de som van een aantal producten van de idealen voor alle ringen en alle mogelijke keuzes van de idealen precies dan als in de producten elk paar idealen in beide mogelijke volgordes voorkomt.

2 De Chinese Reststelling

Een bekende en veelgebruikte stelling voor commutatieve ringen is de Chinese Reststelling.

Stelling 2.1 (De Chinese Reststelling). *Laat R een commutatieve ring zijn en I, J onderling ondeelbare idealen van R. Dan geldt*

$$R/\left(I \cap J\right) \cong (R/I) \times (R/J)$$

en $I \cap J = IJ$.

Bewijs. Er is een natuurlijke afbeelding

$$f : R \longrightarrow (R/I) \times (R/J).$$

Dit is een ringhomomorfisme.

De idealen I en J zijn onderling ondeelbaar, dus er zijn $x \in I$ en $y \in J$ te vinden zodat $x + y = 1$. Nu geldt $f(x) = f(1 - y) = (0, 1)$ en $f(y) = f(1 - x) = (1, 0)$. Dus voor $r_1, r_2 \in R$ geldt $f(r_2x + r_1y) = (r_1, r_2)$. We zien dus dat f surjectief is. Het is ook duidelijk dat de kern van f gelijk is aan $I \cap J$ dus

$$R/(I \cap J) \xrightarrow{\sim} (R/I) \times (R/J)$$

is een isomorfisme.

Voor $a \in I$ en $b \in J$ geldt $ab \in I$ en $ab \in J$, dus ook $ab \in I \cap J$; hieruit volgt $IJ \subset I \cap J$. Neem nu $c \in I \cap J$, dan geldt met x en y als boven $a = a(y + x) = ay + ax = ay + xa \in IJ$. Dus ook $I \cap J \subset IJ$. Dus $IJ = I \cap J$. □

We kunnen dit generaliseren naar meer idealen. Het bewijs volgt onmiddellijk met inductie.

Stelling 2.2. *Laat R een commutatieve ring zijn en $I_1, \ldots, I_n$ paarsgewijs onderling ondeelbare idealen van R. Dan geldt*

$$R/\left(I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n\right) \cong \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

en $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = I_1 I_2 \cdots I_n$.

Het bewijs van de Chinese Reststelling gebruikt de commutativiteit van R alleen voor de tweede bewering. De eerste bewering is dus ook voor niet-commutatieve ringen met tweezijdige idealen waar. Voor de tweede bewering kunnen we gemakkelijk een niet-commutatieve variant verzinnen en bewijzen.

Stelling 2.3 (Bourbaki [2]). *Laat R een (niet noodzakelijk commutatieve) ring zijn en $I_1, \ldots, I_n$ paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen van R. Dan geldt*

$$R/(I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n) \cong \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

en

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

Hier is S_n de permutatiegroep van graad n.

Bewijs. Het bewijs van de eerste bewering is hetzelfde als in het commutatieve geval. De tweede bewering bewijzen we met inductie naar n. Bekijk eerst het geval $n = 2$. Er geldt $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$ en $I_2 I_1 \subset I_1 \cap I_2$ dus $I_1 I_2 + I_2 I_1 \subset I_1 \cap I_2$. Laat nu $x \in I_1$ en $y \in I_2$ zijn zodat $x + y = 1$. Neem $c \in I_1 \cap I_2$ willekeurig. Dan is $cx \in I_2 I_1$ en $cy \in I_1 I_2$ dus $c = c(x + y) = cx + cy \in I_2 I_1 + I_1 I_2$. Dus $I_1 \cap I_2 \subset I_1 I_2 + I_2 I_1$.

Stel nu dat

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}$$

voor zekere n. Dan geldt voor $n + 1$

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n+1} &= (I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n) \cap I_{n+1} \\ &= \left(\sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} \right) \cap I_{n+1}. \end{aligned}$$

In het algemeen geldt voor idealen J_1, J_2, J_3 dat als J_1 onderling ondeelbaar is met J_2 en J_3, dan J_1 ook onderling ondeelbaar is met $J_2 J_3$. We kunnen namelijk $x_1, y_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$ en $y_3 \in J_3$ vinden zodat $x_1 + x_2 = 1$ en $y_1 + y_3 = 1$, dus ook

$$1 = y_1 + (x_1 + x_2) y_3 = y_1 + x_1 y_3 + x_2 y_3 \in J_1 + J_2 J_3.$$

Met inductie zien we direct dat als J_{n+1} onderling ondeelbaar is met $J_1, J_2, \ldots, J_n$, dan J_{n+1} ook onderling ondeelbaar is met $J_1 J_2 \cdots J_n$. In het bijzonder geldt in ons geval dat I_{n+1} onderling ondeelbaar is met $\sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}$, dus we kunnen het geval $n = 2$ hier toepassen, waaruit volgt

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n+1} &= \left(\sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} \right) \cap I_{n+1} \\ &= I_{n+1} \cdot \left(\sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} \right) + \left(\sum_{\tau \in S_n} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} \right) \cdot I_{n+1} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \left(I_{n+1} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} + I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)} I_{n+1} \right) \\ &\subset \sum_{\tau \in S_{n+1}} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n+1)}. \end{aligned}$$

Samen met $\sum_{\tau \in S_{n+1}} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n+1)} \subset I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n+1}$ volgt nu

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n+1} = \sum_{\tau \in S_{n+1}} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n+1)}.$$

Hiermee is de inductie voltooid. $\square$

Uit het bovenstaande bewijs blijkt direct dat de gevonden uitdrukking voor de doorsnede van de idealen in termen van hun producten over het algemeen veel meer termen bevat dan noodzakelijk is. Slechts een deelverzameling van S_n wordt daadwerkelijk gebruikt. In de inductiestap wordt het aantal producten in de uitdrukking met een factor 2 vergroot en voor $n = 2$ hebben we 2 producten nodig, dus we zien dat er een deelverzameling van S_n van orde 2^{n-1} is die in de uitdrukking gebruikt kan worden in plaats van S_n zelf, die van orde $n!$ is.

We zien ook dat deze deelverzameling niet uniek is. We kunnen kiezen in welke volgorde we de idealen toevoegen en het is duidelijk dat het als laatste toevoegen van I_n (waardoor I_n in elk van de producten danwel helemaal vooraan danwel helemaal achteraan staat) over het algemeen een andere verzameling oplevert dan het als laatste toevoegen van I_1.

Ook is het zo dat niet alle deelverzamelingen $T \subset S_n$ voldoen aan $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}$. Voor $n = 2$ is het zelfs zo dat alleen de hele verzameling S_2 bruikbaar is. Het is duidelijk dat $T = \emptyset$ niet werkt; dat de deelverzamelingen met één element ook niet voldoen, volgt uit het volgende tegenvoorbeeld.

Lemma 2.4. *Er bestaat een ring R en onderling ondeelbare tweezijdige idealen I en J van R zodat $I \cap J \neq IJ$.*

Bewijs. Zij

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dit is een deelverzameling van de verzameling van 2×2-matrices met elementen uit $\mathbb{Z}$ en deze laatste is een ring onder optelling en matrixvermenigvuldiging. Het nulelement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en het eenheidselement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zijn allebei elementen van R. Verder is R gesloten onder optelling, aftrekking en vermenigvuldiging. We zien dat R een deelring van de ring van 2×2-matrices met elementen uit $\mathbb{Z}$ is.

Noem nu

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

en

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De verzamelingen I en J zijn tweezijdige idealen van R, want beide zijn de kern van een ringhomomorfisme van R naar $\mathbb{Z}$:

$$I = \ker \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longmapsto a \right\}$$

en

$$J = \ker \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \longmapsto c \right\}.$$

Er geldt $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$ en daarom ook $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I + J$, waaruit we concluderen dat $I + J = R$. De idealen zijn dus onderling ondeelbaar.

Voor $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$ en $\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$ geldt

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dus $IJ = \{0\}$. Maar

$$I \cap J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\} \neq \{0\}$$

dus $I \cap J \neq IJ$. □

Dit motiveert ons om eens nader te gaan kijken naar de deelverzamelingen van S_n die wel voldoen. Eén element is blijkbaar niet altijd genoeg en 2^{n-1} elementen soms wel. Wellicht kunnen we een minimum vinden voor het aantal elementen in T of is er een andere gemeenschappelijke structuur die alle verzamelingen T die voldoen, hebben. De centrale vraag van deze scriptie is dan ook:

Welke deelverzamelingen $T \subset S_n$ voldoen voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R aan

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}?$$

3 Lenstra's wonderlijke kaartspel

We introduceren een nieuw probleem, dat equivalent zal blijken te zijn met het in het vorige hoofdstuk geformuleerde probleem. Dit nieuwe probleem draait om een kaartspel uitgevonden door H.W. Lenstra.

Lenstra's wonderlijke kaartspel. Laat V een eindige verzameling kleuren zijn, met $\#V = n \geq 2$. Door de kleuren te nummeren, kunnen we V identificeren met de verzameling $\{1, 2, \ldots, n\}$. Laat T een verzameling bijecties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ naar V zijn. We kunnen de elementen van T ook opvatten als permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$, waarmee T een deelverzameling van S_n wordt. Het beeld van zo'n permutatie $\tau \in T$ is een rijtje kleuren $\tau(1)\ \tau(2)\ \ldots\ \tau(n)$, waarin iedere kleur van V precies één keer voorkomt.

De kaarten in het spel hebben twee kanten, een voor- en een achterkant. Beide kanten zijn gekleurd met een kleur uit V, maar niet beide met dezelfde kleur. Voor elk tweetal verschillende kleuren zijn er willekeurig veel kaarten met dit tweetal kleuren beschikbaar. Daarnaast is er nog een joker, waar precies één exemplaar van is. De joker kan iedere kleur aannemen.

Het spel wordt gespeeld door twee spelers. Speler A heeft als doel een van de rijtjes kleuren uit T te vormen en mag daartoe een rij kaarten naar keuze neerleggen. De andere speler, B, mag echter uiteindelijk voor elke kaart bepalen welke kant boven komt te liggen. Hij heeft als doel om rijtjes kleuren uit T te voorkomen.

Nadat speler A een rij kaarten heeft neergelegd en speler B van elke kaart de draaiing heeft bepaald, wordt er een winnaar aangewezen. Speler A wint het spel als er in de rij n kaarten kunnen worden aangewezen die samen een rijtje kleuren uit T vormen. De kleuren moeten in de goede volgorde voorkomen, maar het rijtje hoeft niet aaneengesloten te zijn. Als nergens in de rij kaarten een dergelijk rijtje uit T te vinden is, wint speler B.

Voorbeeld. $n = 4$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $T = \{1234, 4231, 1342\}$. Speler A legt de volgende rij kaarten neer. De bovenste regel geeft de kleur aan de voorkant van de kaarten aan en de onderste regel de kleur aan de achterkant van de kaarten. De J staat voor de joker.

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & & 3 & 1 \\ & & & & & J & & \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & & 2 & 2 \end{matrix}.$$

Speler B kiest nu voor elke kaart welke kant er boven komt te liggen. Hij kiest

$$1\ 3\ 2\ 4\ 1\ J\ 3\ 1.$$

Hier kunnen we nu het rijtje 4231 in vinden:

$$1\ 3\ 2\ \mathbf{4}\ 1\ \boldsymbol{J}\ \mathbf{3}\ \mathbf{1}.$$

De joker neemt in dit geval kleur 2 aan. Speler A wint dus.

Speler B had een betere keuze kunnen maken. Als hij het volgende rijtje had gekozen, had hij gewonnen:

$$2\ 3\ 2\ 3\ 2\ J\ 3\ 2.$$

Dit rijtje bevat namelijk helemaal geen 4 of 1. De joker kan hooguit één kleur vervangen, dus het is onmogelijk om hier een rijtje uit T in te vinden.

Lemma 3.1. *Als A geen joker neerlegt, kan B het spel winnen.*

Bewijs. Speler B kan alle kaarten zo draaien dat een bepaalde kleur altijd naar onderen ligt. Omdat iedere kleur in elk rijtje van T voorkomt, kan nu onmogelijk een rijtje uit T bereikt worden. □

Het is duidelijk dat speler B altijd wint als $T = \emptyset$. In het andere extreme geval kan speler A altijd winnen:

Stelling 3.2. *Zij $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $T = S_n$. Dan kan speler A het kaartspel behorende bij V en T altijd winnen.*

Bewijs. Stel dat speler A van elke soort kaart er precies één neerlegt, in willekeurige volgorde. Wat speler B nu ook doet, er is hoogstens één kleur die vervolgens niet in de rij voorkomt. Voor elk tweetal kleuren ligt er namelijk een kaart met beide kleuren erop, dus zeker één van die kleuren komt in de rij voor. Er kunnen dus geen twee kleuren zijn die geen van beide voorkomen.

We kunnen nu dus minstens $n - 1$ verschillende kleuren in de rij vinden. Samen met de joker, die de n^e kleur kan aannemen, geeft dat een rijtje van n kleuren. Dit is een rijtje uit T, want elk rijtje van n kleuren is een element van T. Dus speler A wint. □

Er zijn nog meer deelverzamelingen $T \subset S_n$ waarvoor speler A het spel kan winnen. In het bijzonder geldt dit voor de T die we in het vorige hoofdstuk zijn tegengekomen in het bewijs van stelling 2.3.

Stelling 3.3. *Laat $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ een verzameling van n kleuren zijn. Definieer verzamelingen T_k van rijtjes kleuren als volgt. Zij $T_1 = 1$ en $T_i = \{i\tau : \tau \in T_{i-1}\} \cup \{\tau i : \tau \in T_{i-1}\}$ voor $i = 2, 3, \ldots, n$. Neem nu $T = T_n$, dan kan speler A het kaartspel behorende bij V en T winnen.*

Bewijs. We bewijzen met inductie naar k dat speler A een rij kaarten met alleen de kleuren $1, 2, \ldots, k$ kan neerleggen zodat deze rij onafhankelijk van de draaiing van de kaarten een rijtje uit T_k bevat. Voor $k = n$ volgt dan het gevraagde.

Voor $k = 1$ is het voldoende voor speler A om de joker neer te leggen. Stel nu dat Z_k een rij kaarten met alleen de kleuren $1, 2, \ldots, k$ is die onafhankelijk van de draaiing van de kaarten altijd een rijtje uit T_k bevat. De joker is bevat in Z_k volgens lemma 3.1. Zij $\tau \in T_k$ en beschouw nu de volgende configuratie van kaarten. De bovenste regel geeft de kleur aan de voorkant van de kaarten aan en de onderste regel de kleur aan de achterkant.

$$\begin{matrix} k+1 & k+1 & \cdots & k+1 \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(k) \end{matrix} \quad Z_k$$

Als bij de eerste k kaarten hiervan de kleur $k + 1$ altijd naar beneden gedraaid wordt, vormen $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(k)$ samen met de joker, die dan de kleur $k + 1$ aanneemt, het rijtje $\tau(1)\ \tau(2)\ \ldots\ \tau(k)\ (k + 1) \in T_{k+1}$. Zo niet, dan komt ergens de kleur $k + 1$ boven te liggen. We weten dat er een $\sigma \in T_k$ is die ergens in Z_k bevat is, dus dan wordt het rijtje $(k+1)\ \sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(k) \in T_{k+1}$ gevormd. $\square$

We kunnen ook verzamelingen T vinden waarvoor speler A nooit kan winnen als B slim genoeg speelt. We hebben al gezien dat speler B een bepaalde kleur overal naar beneden kan draaien, maar hij kan ook de rij kaarten in stukken verdelen en in ieder stuk een andere kleur laten verdwijnen.

Stelling 3.4. *Laat $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ een verzameling kleuren zijn en $T \subset S_n$ een verzameling rijtjes van deze kleuren met de eigenschap dat er $v, w \in V$ zijn zodat $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$ voor alle $\tau \in T$. Dat wil zeggen, kleur v staat links van kleur w in alle rijtjes van T. Nu kan speler B het kaartspel behorende bij V en T altijd winnen.*

Bewijs. Speler B kan in de rij kaarten die speler A heeft neergelegd, de kleur v overal links van de joker naar beneden draaien. Rechts van de joker kan hij w overal naar beneden draaien. Als de rij kleuren nu een rijtje uit T bevat, dan ligt kleur v in dit rijtje niet links van de joker. De kleur w moet daar nog rechts van liggen, dus w ligt rechts van de joker. Maar alle kaarten met kleur w rechts van de joker hebben w aan de onderkant. Zo'n rijtje van T bestaat dus niet. $\square$

In het bijzonder geldt dat voor $n = 2$ en $T = \{12\}$ speler B het kaartspel kan winnen. Dit is precies een n en T waarvoor we in het vorige hoofdstuk gevonden hebben dat ze niet voldeden aan $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}$ voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R.

4 Equivalentie van de twee problemen

Het is duidelijk uit het vorige hoofdstuk dat het oorspronkelijke probleem over idealen, geformuleerd in hoofdstuk 2, veel gemeen heeft met de vraag wanneer speler A Lenstra's wonderlijke kaartspel kan winnen. In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat beide problemen equivalent zijn.

Daarnaast hebben we met stelling 3.4 een idee gekregen van de verzamelingen $T \subset S_n$ die mogelijk voldoen. Het zal blijken dat de in die stelling genoemde verzamelingen T ook precies de verzamelingen zijn waarvoor speler B het spel kan winnen.

Stelling 4.1. *Zij $n \geq 2$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ en laat T een deelverzameling van S_n zijn. Dan zijn equivalent:*

(i) Voor alle (niet noodzakelijk commutatieve) ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, \ldots, I_n$ van R geldt: $\bigcap_{i=1}^n I_i = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$;

(ii) A kan het kaartspel behorende bij V en T winnen;

(iii) voor alle $v, w \in V$ met $v \neq w$ is er een $\tau \in T$ zodat $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$.

Uit deze stelling volgt dat je in het bijzonder een verzameling T van slechts twee elementen kunt kiezen, namelijk $T = \{12 \ldots n, n \ldots 21\}$. Voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, \ldots, I_n$ van R geldt dus

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = I_1 I_2 \cdots I_n + I_n \cdots I_2 I_1.$$

We zullen stelling 4.1 bewijzen door achtereenvolgens $(ii) \Rightarrow (i)$, $(i) \Rightarrow (iii)$ en $(iii) \Rightarrow (ii)$ te bewijzen.

4.1 Van spel naar idealen

We zetten nu de eerste stap voor het bewijzen van de equivalentie van het idealenprobleem en het winnen van Lenstra's wonderlijke kaartspel. We zullen laten zien dat als speler A het kaartspel kan winnen, de bijbehorende verzameling T ook voldoet aan

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}$$

voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R.

Stelling 4.2. *Zij $n \geq 2$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ en laat T een deelverzameling van S_n zijn. Stel dat speler A het kaartspel behorende bij V en T kan winnen. Dan geldt voor alle (niet noodzakelijk commutatieve) ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, \ldots, I_n$ van R:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

Bewijs. Stel dat we een configuratie hebben waarmee A altijd het spel wint voor de gekozen V en T. Uit lemma 3.1 volgt dat deze configuratie de joker bevat. Stel dat naast de joker nog m kaarten gebruikt zijn, waarbij de i^e kaart kleur a_i op de voorkant en b_i op de achterkant heeft en de joker tussen kaart k en kaart $k+1$ ligt:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \multirow{2}{*}{J} & a_{k+1} & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & & b_{k+1} & \cdots & b_m \end{matrix} .$$

Neem nu een willekeurige ring R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, \ldots, I_n$ van R. Voor ieder paar idealen I_i en I_j kunnen we elementen $x_{ij} \in I_i$ en $y_{ij} \in I_j$ vinden zodat $x_{ij} + y_{ij} = 1$, want de idealen zijn onderling ondeelbaar. We vervangen nu in bovenstaande rij kaarten elke kaart (a_i, b_i) door $(x_{a_i,b_i} + y_{a_i,b_i})$ en de joker door een willekeurig element $r \in \bigcap_{i=1}^n I_i$. Omdat $x_{a_i,b_i} + y_{a_i,b_i} = 1$ voor alle i, geldt

$$r = (x_{a_1,b_1}+y_{a_1,b_1})(x_{a_2,b_2}+y_{a_2,b_2}) \cdots (x_{a_k,b_k}+y_{a_k,b_k}) r (x_{a_{k+1},b_{k+1}}+y_{a_{k+1},b_{k+1}}) \cdots (x_{a_m,b_m}+y_{a_m,b_m}).$$

We weten dat als we in de rij kaarten voor elke kaart de voor- of de achterkant kiezen, er altijd een rijtje kleuren uit T in voorkomt. Dus als we in de vergelijking van iedere som tussen haakjes een van de twee elementen kiezen en al deze elementen met elkaar vermenigvuldigen, dan bevinden zich in dat product elementen uit $I_{\tau(1)}, I_{\tau(2)}, \ldots, I_{\tau(n)}$ voor een of andere $\tau \in T$ in die volgorde. Omdat voor een ideaal I en een element $x \in I$ geldt $tx \in I$ en $xt \in I$ voor alle $t \in R$, kunnen we overbodige elementen hieruit wegvermenigvuldigen tegen hun buren, waarmee we zien dat dit product een element is van $I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$ voor een of andere $\tau \in T$. Als we aan de rechterkant van bovenstaande vergelijking alle haakjes uitwerken, kiezen we steeds uit iedere som tussen haakjes een element, dus krijgen we allemaal van dit soort termen. De rechterkant van de vergelijking is dus een element van $\sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$. De linkerkant is dat daarom ook: $r \in \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$. Dit geldt voor iedere $r \in \bigcap_{i=1}^n I_i$, waaruit volgt dat

$$\bigcap_{i=1}^n I_i \subset \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

Verder geldt voor elk tweetal tweezijdige idealen I en J van R en elementen $x \in I$, $y \in J$ dat $xy \in I$ en $xy \in J$, dus $xy \in I \cap J$, dus $IJ \subset I \cap J$. Met inductie volgt onmiddellijk

$$\bigcap_{i=1}^n I_i \supset \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

Hiermee is het gevraagde bewezen. □

Het is een stuk ingewikkelder om te laten zien dat als T voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R voldoet aan

$$\bigcap_{i=1}^n I_i = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)},$$

speler A dan het kaartspel behorende bij V en T kan winnen. In plaats van direct $(i) \Rightarrow (ii)$ in stelling 4.1 bewijzen we dan ook $(i) \Rightarrow (iii)$ en $(iii) \Rightarrow (ii)$.

4.2 Een noodzakelijke voorwaarde voor T

We zullen laten zien dat (iii) uit stelling 4.1 een noodzakelijke voorwaarde is voor T om voor alle ringen R en paarsgewijs onderling ondeelbare idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R te laten gelden

$$I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} I_{\tau(2)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

In andere woorden, er geldt $(i) \Rightarrow (iii)$.

Stelling 4.3. *Zij $n \geq 2$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ en laat T een deelverzameling van S_n zijn. Stel dat er $v, w \in V$ zijn zodat $\tau^{-1}(v) > \tau^{-1}(w)$ voor alle $\tau \in T$. Dan bestaan er een ring R en paarsgewijs onderling ondeelbare tweezijdige idealen $I_1, I_2, \ldots, I_n$ van R zodat*

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i \neq \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}.$$

Bewijs. De aanname impliceert dat voor idealen I_v en I_w in elk van de termen van $\sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$ het ideaal I_v rechts staat van het ideaal I_w. Kies nu R als in Lemma 2.4 en neem $I_v = J$ en $I_w = I$ als in Lemma 2.4 en $I_i = R$ voor $i \notin \{v, w\}$. Dan geldt

$$\sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)} = \sum_{\tau \in T} I_w I_v = IJ = \{0\}$$

en

$$\bigcap_{i=1}^{n} I_i = I_w \cap I_v = J \cap I \neq \{0\}.$$

Dit is precies wat we wilden bewijzen. $\square$

Om het bewijs van stelling 4.1 af te maken, is het nu voldoende om $(iii) \Rightarrow (ii)$ te bewijzen.

4.3 Het oneindige spel

Om te bewijzen dat Lenstra's wonderlijke kaartspel te winnen is voor speler A als aan voorwaarde (iii) uit stelling 4.1 voldaan is, introduceren we een variant op het spel.

Lenstra's oneindige kaartspel. Dit spel lijkt heel veel op het gewone kaartspel. Er is slechts één verschil: speler A mag de rij kaarten naar beide kanten oneindig lang maken. Er mag nog altijd maar één joker gebruikt worden, maar verder kunnen er aftelbaar oneindig veel kaarten neergelegd worden.

Lemma 4.4. *Speler A kan het oneindige kaartspel altijd winnen als T aan voorwaarde (iii) uit stelling 4.1 voldoet.*

Bewijs. Neem aan dat aan voorwaarde (*iii*) uit stelling 4.1 voldaan is. Er zijn $\binom{n}{2}$ verschillende kaarten, afgezien van de joker. Stel nu dat speler A deze groep kaarten oneindig vaak links en rechts van de joker neerlegt. De volgorde van de kaarten binnen elke groep is niet belangrijk. Vervolgens bepaalt speler B welke kant van de kaarten boven komt te liggen. We onderscheiden nu twee gevallen.

1. Aan minstens één kant van de joker komt elke kleur oneindig vaak voor. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat dit rechts van de joker geldt. Beschouw nu een willekeurige $\tau \in T$. De kleur $\tau(1)$ komt ergens rechts van de joker voor, zeg op plaats N_1. De kleur $\tau(2)$ komt oneindig vaak rechts van de joker voor, dus ook zeker een keer rechts van N_1, zeg op plaats N_2. Zo is er ook een plaats N_3 rechts van N_2 waar kleur $\tau(3)$ voorkomt. Enzovoorts. We kunnen dus het hele rijtje $\tau(1)\ \tau(2)\ \ldots\ \tau(n)$ rechts van de joker vinden. Dus wint speler A.

2. Zowel links als rechts van de joker is er een kleur die slechts eindig vaak voorkomt. Aan beide kanten komen dan alle andere kleuren oneindig vaak voor. Immers, voor elk tweetal kleuren komt de kaart met precies deze twee kleuren oneindig vaak voor, dus er kunnen geen twee kleuren allebei slechts eindig vaak voorkomen. We kunnen nu twee gevallen onderscheiden.

   (a) Links en rechts van de joker komt dezelfde kleur slechts eindig vaak voor. Noem deze kleur a. Neem nu een willekeurig rijtje uit T. Alle kleuren die in dit rijtje links van a staan, kunnen we als boven links van de joker vinden. Alle kleuren rechts van a kunnen we rechts van de joker vinden. Nu kunnen we de joker de kleur a laten aannemen en hebben we dus een rijtje uit T gevonden. Dus wint speler A.

   (b) Links van de joker komt een andere kleur slechts eindig vaak voor dan rechts van de joker. Noem de kleur die links slechts eindig vaak voorkomt a en de kleur die rechts slechts eindig vaak voorkomt b. Omdat T aan voorwaarde (*iii*) uit stelling 4.1 voldoet, is er een $\tau \in T$ met $\tau^{-1}(a) > \tau^{-1}(b)$. We kunnen nu als boven b en alle kleuren links van b in τ links van de joker vinden, want alle kleuren behalve a komen links van de joker oneindig vaak voor. Alle kleuren rechts van b in τ, waar ook a toe behoort, kunnen we rechts van de joker vinden. Dus hebben we een rijtje uit T gevonden en wint speler A.

Speler A wint dus altijd. □

Nu we weten dat speler A het oneindige spel kan winnen als aan voorwaarde (*iii*) uit stelling 4.1 voldaan is, is het voldoende te bewijzen dat als speler A het oneindige spel kan winnen, hij dan ook het eindige spel kan winnen. Dit kunnen we op verschillende manieren bewijzen. Voor het eerste bewijs gebruiken we de stelling van Tychonoff [1], die zegt dat een product van een willekeurige verzameling compacte topologische ruimten compact is met betrekking tot de producttopologie.

Lemma 4.5. *Als speler A het oneindige spel kan winnen, kan hij ook het eindige spel winnen.*

Eerste bewijs. We beschouwen een oneindige rij kaarten waarin onafhankelijk van de draaiing van de kaarten een rijtje uit T gevonden kan worden. We identificeren deze rij met $\mathbb{Z}$: op ieder geheel getal ligt een kaart en de joker ligt op de 0. We zullen bewijzen dat er een $N \in \mathbb{N}$ is zodat de rij kaarten op het interval $[-N, N]$ een rijtje uit T bevat, onafhankelijk van de draaiing van de kaarten. Dat betekent dat speler A met de kaarten op $[-N, N]$ het eindige kaartspel kan winnen.

Laat D de verzameling van draaiingen van de oneindige rij kaarten zijn. Elke kaart heeft twee kanten, dus D is het product van aftelbaar oneindig veel verzamelingen van twee elementen. We leggen nu de discrete topologie op deze verzamelingen van twee elementen, waardoor D de producttopologie krijgt. Een basis voor deze topologie kunnen we verkrijgen door steeds voor een eindig aantal kaarten de draaiing vast te leggen en alle elementen uit D te nemen die hiermee overeenkomen.

Zij $m \in \mathbb{N}$ en laat $O_m \subset D$ de verzameling draaiingen zijn waarvoor het interval $[-m, m]$ een rijtje uit T bevat. Merk op dat $O_k \supset O_m$ als $k \geq m$. Voor alle m is O_m een open verzameling in de topologie van D, want O_m is een vereniging van verzamelingen draaiingen waarbij de draaiing van alle kaarten in $[-m, m]$ vastgelegd is; dus O_m is een (eventueel lege) vereniging van basiselementen.

We weten verder dat ieder element in D een rijtje uit T oplevert. Dit is een eindig rijtje, dus voor iedere $d \in D$ is er een $m \in \mathbb{N}$ zodat het interval $[-m, m]$ met draaiing d een rijtje uit T bevat. Voor deze m geldt dus $d \in O_m$. Dus $\mathcal{O} = \{O_m : m \in \mathbb{N}\}$ is een open overdekking van D.

Een discrete topologische ruimte met twee elementen is compact, dus volgens de stelling van Tychonoff [1] is D compact. Dus $\mathcal{O}$ heeft een eindige deeloverdekking. Omdat $O_k \supset O_m$ als $k \geq m$, is er dus een N zodat $D = O_N$. Voor iedere draaiing in D bevat het interval $[-N, N]$ dus een rijtje uit T. $\square$

De stelling van Tychonoff is lastig te bewijzen. Voor ons probleem is het echter niet noodzakelijk om zulke zware middelen in te zetten. Ook zonder de stelling van Tychonoff is het mogelijk om lemma 4.5 te bewijzen.

Tweede bewijs. We geven dit bewijs uit het ongerijmde. Stel we hebben een oneindige rij kaarten die onafhankelijk van de draaiing van de kaarten altijd een rijtje uit T bevat, terwijl er voor iedere eindige deelverzameling kaarten een draaiing bestaat zodat deze deelverzameling geen rijtje uit T bevat.

We hebben aftelbaar veel kaarten, dus we kunnen de kaarten nummeren met de positieve gehele getallen. De joker geven we geen nummer. Laat nu w_i een draaiing van de kaarten 1 tot en met i zijn zodat deze kaarten geen rijtje uit T vormen. Volgens onze aanname bestaat zo'n w_i voor alle $i \in \mathbb{N}$.

Noem nu $W_1 = \{w_i : i \in \mathbb{N}\}$. Het is duidelijk dat W_1 oneindig veel elementen heeft. In ieder element van W_1 wordt aan kaart nummer 1 een draaiing toegekend en voor deze draaiing zijn slechts twee mogelijkheden: de voorkant van kaart 1 ligt boven of de achterkant ligt boven. Zeker een van deze twee draaiingen komt dus in oneindig veel elementen van W_1 voor. We kiezen nu voor kaart 1 een draaiing die in oneindig veel elementen van W_1 voorkomt en noemen W_2 de deelverzameling van W_1 bestaande uit elementen die aan kaart 1 deze draaiing geven.

We herhalen dit proces nu voor kaart $2, 3, 4, \ldots$. We kiezen steeds voor kaart i een draaiing die in oneindig veel elementen van W_i voorkomt en definiëren W_{i+1} als de deelverzameling van W_i van elementen die aan kaart i deze draaiing geven. Als W_i oneindig veel elementen bevat, kan dit en bevat W_{i+1} ook oneindig veel elementen. Dit proces gaat dus oneindig lang door en zo bepalen we een draaiing voor alle kaarten.

Als we alle kaarten op deze manier draaien, bevat de rij een rijtje uit T volgens aanname, dus er is een N zodat de eerste N kaarten dit rijtje uit T bevatten. Maar de draaiing van deze N kaarten is zo gekozen dat oneindig veel elementen uit W_N voor deze N kaarten dezelfde draaiing hebben. Er is dus zeker een draaiing $w \in W_N$ die de eerste N kaarten dezelfde draaiing geeft. Maar dat betekent dat deze kaarten op deze manier gedraaid geen rijtje uit T bevatten. Tegenspraak. $\square$

Dit is in feite een speciaal geval van het Lemma van König [3], dat op analoge wijze bewezen wordt.

Lemma 4.6 (König). *Een eindig-vertakkende boom (d.w.z. een boom met een wortel waarbij iedere vertakking een eindige vertakking is) die oneindig is, heeft een oneindig pad vanaf de wortel.*

Bewijs. Laat R een oneindige eindig-vertakkende boom zijn. De wortel vertakt in een eindig aantal knopen op hoogte 1. Ten minste één van deze knopen is zelf de wortel van een oneindige deelboom, want als alle deelbomen behorende bij de knopen op hoogte 1 eindig zouden zijn, dan zou R zelf eindig zijn. Loop nu van de wortel naar zo'n knoop op hoogte 1 die de wortel is van een oneindige deelboom. Deze deelboom noemen we R_1. Dit is een eindig-vertakkende boom die oneindig is, dus we kunnen precies hetzelfde weer doen als met R. Dit is een oneindig proces, want na iedere stap hebben we opnieuw een oneindige eindig-vertakkende boom, waarmee we een oneindig pad in R vinden. $\square$

Door dit lemma op de juiste boom toe te passen, krijgen we opnieuw een bewijs voor lemma 4.5, dat in essentie hetzelfde is als het tweede bewijs.

Derde bewijs. Stel we hebben een oneindige rij kaarten die onafhankelijk van de draaiing van de kaarten altijd een rijtje uit T bevat, terwijl er voor iedere eindige deelverzameling kaarten een draaiing bestaat zodat deze deelverzameling geen rijtje uit T bevat. We nummeren de kaarten met de positieve gehele getallen. Construeer nu een boom R als volgt.

Iedere vertakking in de boom op hoogte k van de wortel staat voor een keuze van een draaiing van kaart nummer k. Een tak stopt op hoogte k als allebei de mogelijke draaiingen van kaart k samen met de al gekozen draaiingen van de eerste $k-1$ kaarten een rijtje uit

T vormen. Voor elke draaiing van kaart k waarmee geen rijtje uit T wordt gevormd, gaat een tak verder naar hoogte $k+1$.

Vanwege de aanname dat voor iedere eindige deelverzameling kaarten een draaiing gevonden kan worden waarbij geen rijtje uit T ontstaat, is er voor iedere k een tak die hoogte k passeert. De boom R is dus een oneindige eindig-vertakkende boom waarop we het Lemma van König kunnen toepassen. Daaruit volgt dat R een oneindig pad heeft; dat wil zeggen dat er is een draaiing van alle kaarten is die geen rijtje uit T bevat. Tegenspraak. $\square$

4.4 Een constructief bewijs

Het in de vorige paragraaf gegeven bewijs voor $(iii) \Rightarrow (ii)$ is voldoende om het bewijs van stelling 4.1 te voltooien, maar het kaartspel is ook interessant op zich. We weten nu precies voor welke T speler A kan winnen, maar we weten nog niet hoe. Ook hebben we nog geen idee van het aantal kaarten dat benodigd is om te winnen. Daarom willen we graag een constructief bewijs voor $(iii) \Rightarrow (ii)$ hebben.

We bekijken eerst enkele speciale gevallen.

Stelling 4.7. *Stel* $T = \{123\dots n, n\dots 321\}$. *Dan kan speler A het spel winnen.*

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar n. Voor $n = 2$ is

$$J\ (1,2)$$

een winnende configuratie. Stel nu dat Z_n een voor speler A winnende configuratie van kaarten is voor $T = \{123\dots n, n\dots 321\}$. We bekijken nu het spel met $n+1$ kleuren en $T = \{123\dots(n+1), (n+1)\dots 321\}$. We construeren de volgende configuratie:

$$\begin{matrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{matrix} \; Z_n \; \begin{matrix} n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{matrix} .$$

De joker is bevat in Z_n volgens lemma 3.1. Bekijk de n meest linkse kaarten. Speler B kan hier de serie $1\ 2\ 3\ \dots\ n$ kiezen of minstens één keer de kleur $n+1$. In het eerste geval is samen met de joker al $123\dots(n+1)$ gevormd en wint speler A. Laten we dus aannemen dat speler B voor de tweede optie kiest. Analoog zien we aan de rechterkant dat A wint met $J\ n\ (n-1)\ \dots\ 3\ 2\ 1$ of B minstens één keer de kleur $n+1$ kiest. Laten we dus aannemen dat het laatste het geval is. We weten dat Z_n het rijtje $123\dots n$ of het rijtje $n\dots 321$ bevat. Tezamen met de $n+1$ links en rechts levert dat dus $123\dots(n+1)$ of $(n+1)\dots 321$. Dus speler A wint. Dus dit is een winnende configuratie voor $n+1$ kleuren. Hiermee is de inductie voltooid. $\square$

Stelling 4.8. *Stel* $T = \{123\dots n,\ 234\dots n1,\ \dots,\ n12\dots(n-1)\}$. *Dan kan speler A het spel winnen.*

Bewijs. Neem $k \in V$ en laat Z_k de volgende configuratie zijn:

$$\begin{array}{cccccccc} k & k & \cdots & k & k & k & \cdots & k \\ k+1 & k+2 & \cdots & n & 1 & 2 & \cdots & k-1 \end{array}.$$

Dan is de configuratie

$$Z_1\ Z_2\ \ldots\ Z_n\ J$$

winnend. Speler B heeft namelijk in elk blok Z_k de keuze om de serie $(k+1)(k+2)\ldots(k-1)$ te kiezen of minstens één keer de kleur k. Omdat het eerste geval samen met de joker direct winst voor A oplevert, nemen we aan dat B in ieder blok Z_k de kleur k minstens één keer kiest. Maar dan hebben we de serie $123\ldots n$, dus wint A ook. □

In beide voorbeelden en ook in stelling 3.3 wordt geïllustreerd hoe speler A speler B kan dwingen om een bepaalde kleur te kiezen, als tenminste deze kleur als eerste of als laatste in een rijtje van T voorkomt. Dit kunnen we nog iets preciezer maken.

Lemma 4.9. *Laat $a \in V$ een kleur zijn waarvoor geldt dat er $\tau, \sigma \in T$ zijn zodat $\tau(1) = a$ en $\sigma(n) = a$. Dan kan speler A ervoor zorgen dat ofwel hij wint ofwel de kleur a op een door hem gewenste plek door speler B gekozen wordt. Dat laatste wil zeggen dat speler A in een bestaande rij kaarten tussen elk tweetal naast elkaar liggende kaarten, kleur a kan laten verschijnen.*

Bewijs. Bekijk de volgende configuraties van kaarten:

$$L = \begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) \end{array},$$

$$R = \begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \tau(n) & \tau(n-1) & \cdots & \tau(2) \end{array}.$$

Stel speler A legt L op een willekeurige plek links van de joker neer. Als speler B niet bij ten minste één van de kaarten van L de kleur a kiest, dan kiest hij achtereenvolgens $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n-1)$ en samen met de joker, die zich rechts hiervan bevindt, wordt dan het rijtje $\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n-1)\ \sigma(n) \in T$ gevormd, dus wint speler A.

Stel nu dat speler A op een willekeurige plek rechts van de joker R neer legt. Analoog zien we dat speler B ofwel bij minstens één van de kaarten van R kleur a kiest ofwel speler A laat winnen met het rijtje τ. □

Dit principe laat zich generaliseren naar willekeurige kleuren, als T tenminste aan voorwaarde (*iii*) uit stelling 4.1 voldoet.

Lemma 4.10. *Laat $a \in V$ een kleur zijn en stel dat T voldoet aan voorwaarde (iii) uit stelling 4.1, dat wil zeggen: voor alle $v, w \in V$ met $v \neq w$ is er een $\tau \in T$ zodat $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$. Dan kan speler A ervoor zorgen dat ofwel hij wint ofwel de kleur a op een door hem gewenste plek door speler B gekozen wordt.*

Bewijs. Neem een willekeurig element $\tau \in T$. Zij $k = \tau^{-1}(a)$. Zij $a_i = \tau(i)$ voor $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Voor iedere i met $k < i \leq n$ geldt $\tau^{-1}(a_i) > \tau^{-1}(a)$, dus is er ook een $\sigma_i \in T$ met $\sigma_i^{-1}(a_i) < \sigma_i^{-1}(a)$. Zij $m_i = \sigma_i^{-1}(a)$. Bekijk nu de volgende blokken kaarten.

$$G = \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} \\ a & a & \ldots & a \end{array},$$

$$H_i = \begin{array}{cccc} \sigma_i(1) & \sigma_i(2) & \ldots & \sigma_i(m_i - 1) \\ a & a & \ldots & a \end{array} \quad \text{voor } k < i \leq n,$$

$$K_i = \begin{array}{cccc} \sigma_i(m_i + 1) & \sigma_i(m_i + 2) & \ldots & \sigma_i(n) \\ a_i & a_i & \ldots & a_i \end{array} \quad \text{voor } k < i \leq n.$$

De kaarten uit G bestaan omdat $a_i \neq a$ voor $i \neq k$ en de kleur a dus niet voorkomt op de bovenste regel. De kaarten uit H_i bestaan omdat $\sigma_i(j) \neq a$ voor $j \neq m_i$ en de kleur a dus niet voorkomt op de bovenste regel. De kaarten uit K_i bestaan omdat $\sigma_i^{-1}(a_i) < \sigma_i^{-1}(a) = m_i$, dus $\sigma_i(j) \neq a_i$ voor $j > m_i$. De kleur a_i komt dus niet voor op de bovenste regel.

Bekijk nu de volgende serie kaarten. De J staat voor de joker.

$$G \quad H_{k+1} \quad H_{k+2} \quad \ldots \quad H_n \quad J \quad K_{k+1} \quad K_{k+2} \quad \ldots \quad K_n \ .$$

We beweren dat speler B door deze serie kaarten gedwongen wordt om ergens links van de joker de kleur a te kiezen. Stel namelijk dat speler B niet links van de joker een a kiest. Dan kiest hij in de blokken $G, H_{k+1}, H_{k+2}, \ldots, H_n$ overal de bovenste regel. Nu bekijken we wat hij dan rechts van de joker nog voor mogelijkheden heeft. Voor iedere i geldt dat als hij in blok K_i de hele bovenste regel kiest, speler A dan de joker kan gebruiken als $\sigma_i(m_i) = a$ zodat H_i, de joker en K_i samen het rijtje σ_i vormen. Dan wint speler A. Speler B zal dus wel in elk blok K_i een keer niet de bovenste regel moeten kiezen, dus komen er rechts van de joker in elk geval de kleuren $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$. Nu kan speler A de joker gebruiken als $a = a_k$, zodat G, de joker en de kleuren $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ samen het rijtje $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n = \tau(1)\ \tau(2)\ \ldots\ \tau(n)$ vormen. Dan wint speler A.

Dus speler B kan alleen voorkomen dat speler A wint door ergens aan de linkerkant van de joker de kleur a te kiezen. Speler A kan deze serie kaarten op een door hem gewenste plek invoegen, waardoor de kleur a op een door hem gewenste plek links van de joker gekozen zal worden.

Op analoge wijze kunnen we een serie kaarten construeren waarmee speler A wint of speler B rechts van de joker de kleur a kiest. □

Voorbeeld. Zij $n = 5$ en $T = \{12345, 43512, 15324, 21345\}$. Deze T voldoet aan voorwaarde (iii) uit stelling 4.1. We nemen $a = 3$ en $\tau = 12345$. Rechts van 3 in τ staan 4 en 5 en die kleuren komen links van 3 voor in respectievelijk 43512 en 15324. We kunnen nu speler B dwingen om kleur 3 links van de joker te kiezen met behulp van de volgende serie kaarten:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{array} \; J \; \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{array}.$$

Links van 3 in τ staan 1 en 2 en die komen rechts van 3 voor in 43512. We kunnen nu speler B dwingen om kleur 3 rechts van de joker te kiezen met behulp van de volgende serie kaarten:

$$\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \; J \; \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{array}.$$

Merk op dat we van de twee identieke blokken aan de rechterkant er een mogen weglaten.

Stelling 4.11. *Als T aan voorwaarde (iii) uit stelling 4.1 voldoet, kan speler A winnen.*

Bewijs. Kies een willekeurig element van $\rho \in T$. Volgens lemma 4.10 kan speler A winnen of voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ speler B kleur $\rho(i)$ links van de joker laten kiezen op een door speler A gewenste plek. Speler A kan er dus ook voor zorgen dat hij wint of links van de joker achtereenvolgens de kleuren $\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(n)$ gekozen worden. In dat laatste geval verschijnt dus het rijtje ρ en wint speler A ook. $\square$

Speler A kan, om het aantal kaarten te verminderen, ook een deel van de kleuren rechts van de joker neerleggen en er eentje weglaten, die door de joker ingevuld kan worden.

Voorbeeld. Neem zoals in het vorige voorbeeld $n = 5$ en $T = \{12345, 43512, 15324, 21345\}$. De kleuren 2, 4 en 5 komen alledrie een keer aan het eind van een rijtje voor, waardoor ze met de methode van lemma 4.9 gemakkelijk links van de joker gemaakt kunnen worden. Hetzelfde geldt voor 1, 2 en 4 rechts van de joker. Kleur 3 hebben we in het vorige voorbeeld al geconstrueerd. Het ligt dus voor de hand om het rijtje 43512 te gaan gebruiken. We maken de kleuren 4 en 3 links van de joker en 1 en 2 rechts van de joker. Kleur 5 wordt dan door de joker zelf ingevuld. De volgende serie kaarten is dus winnend voor speler A:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \; J \; \begin{array}{ccccccccccccc} 5 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}.$$

Nu we een constructief bewijs hebben dat speler A het kaartspel kan winnen als T aan zekere voorwaarden voldoet, kunnen we ook iets zeggen over het aantal kaarten dat speler A daarvoor nodig heeft.

Merk op dat H_i en K_i samen altijd uit precies $n-1$ kaarten bestaan. Er zijn precies $n-k$ blokken H_i en K_i. Blok G bestaat uit $k-1$ kaarten. Voor één kleur zijn dus $(n-1)(n-k)+k-1 = n^2-(k+1)n+2k-1$ kaarten nodig naast de joker. In het slechtste geval is $k=2$ (een kleur kan nooit in elk rijtje vooraan staan als T aan voorwaarde (*iii*) voldoet, dus er is een rijtje met $k \geq 2$) en dan zijn er n^2-3n+1 kaarten nodig.

Omdat de joker een willekeurige kleur kan aannemen, is het voldoende om $n-1$ kleuren op bovenstaande wijze te maken. Een bovengrens voor het aantal benodigde kaarten is dus $(n-1)(n^2-3n+1)+1 = n^3-4n^2+4n$. Dit is iets kleiner dan n^3.

In de praktijk zal het aantal benodigde kaarten in het algemeen nog wat kleiner zijn, omdat er veel keuzevrijheid is. Het rijtje ρ kan vrij gekozen worden, evenals de kleur die door de joker ingevuld wordt en de rijtjes τ voor alle andere kleuren.

Een op het eerste gezicht niet erg economische optie is om τ voor alle kleuren hetzelfde te kiezen en ook $\rho = \tau$ te nemen, maar toch levert dit al een aardig resultaat op. De joker kan de plaats innemen van de laatste kleur in τ zodat het aantal benodigde kaarten gelijk wordt aan

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - (k+1)n + 2k - 1) = \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - n + 2,$$

ongeveer de helft van de eerdere bovengrens.

In een concreet geval kunnen nog veel meer kaarten bespaard worden door handige keuzes te maken, zoals in het bovenstaande voorbeeld geïllustreerd is.

5 Bibliografie

Referenties

[1] Kelley, John L., 1955. *General Topology.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. p. 143

[2] Bourbaki, N., 1943. *Elements of Mathematics, Algebra I.* Hermann, Publishers in arts and science, Paris. Herdruk 1974, p. 110. Oorspronkelijke titel: *Éléments de mathématique, Algèbre.*

[3] König, Denis, 1950. *Theorie der endlichen und unendlichen graphen.* Chelsea Publishing Company, New York. p. 81