



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Een minimalistisch model voor interacties tussen prooidieren

Ercan, M.

Citation

Ercan, M. (2019). *Een minimalistisch model voor interacties tussen prooidieren*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3596925>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Een Minimalistisch Model voor Interacties tussen Prooidieren

MSc-Scriptie van M. Ercan

Begeleid door prof. dr. A. Doelman

Presentatie en Verdediging op 28 augustus 2019



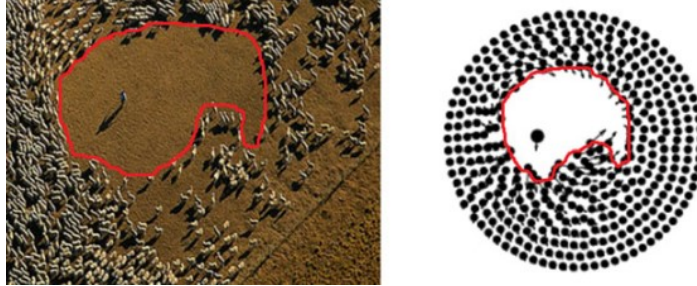
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	2 Objecten in $\mathbb{R}$	5
2.1	Aantrekking $A(p)$ en Afstoting $R(p)$	7
2.2	Evenwichtspunten en Bifurcaties	8
2.3	Stabiliteitsanalyse	12
2.3.1	Evenwichtsvoorwaarden en -paden	12
2.3.2	Fase-Lijnen	14
3	n Objecten in $\mathbb{R}$	16
3.1	$n = 3$	18
3.2	De Evenwichtsverhouding $1 : 2 : 1$	18
3.3	De Initiële Elementaire Afstand	20
3.4	Evenwicht voor 3 Objecten in $\mathbb{R}$	20
3.5	Stabiliteitsanalyse	23
3.5.1	Evenwichtsvoorwaarden en -paden	23
4	2 objecten in $\mathbb{R}^2$	26
5	3 objecten in $\mathbb{R}^2$	31
5.1	Collineariteit in $\mathbb{R}^2$	34
5.2	Gelijkzijdigheid in $\mathbb{R}^2$	36
6	n objecten in $\mathbb{R}^2$	40
6.1	$n = 4$	40
6.2	$n = 5$	40
6.3	$n = 6$	40
6.4	$n = 12$	41
6.5	Prooi-roofdier-model	43
7	Discussie	45
8	Appendix	46
8.1	Prooi-Prooidier-model in $\mathbb{R}$	46
8.2	Prooi-Prooidier-model in $\mathbb{R}^2$	50
8.3	Prooi-Roofdier-model in $\mathbb{R}^2$ (Herhaling)	55
9	Bibliografie	60
9.1	Literatuurlijst	60
9.2	Figuren	60

1 Inleiding

Individen van veel diersoorten voegen zich samen om tijdelijke of blijvende groepen te vormen. De redenen hiervoor zijn over het algemeen redelijk begrijpelijk. Maar waarom kuddes bepaalde vormen aannemen, een kenmerkende dynamica vertonen en hoe de samenhang binnen de groep wordt behouden, is minder duidelijk. Zo zien we in figuur 1 de invloed die een herder heeft op de ordening van een kudde (Chen Y. & Kolokolnikov T. 2014).

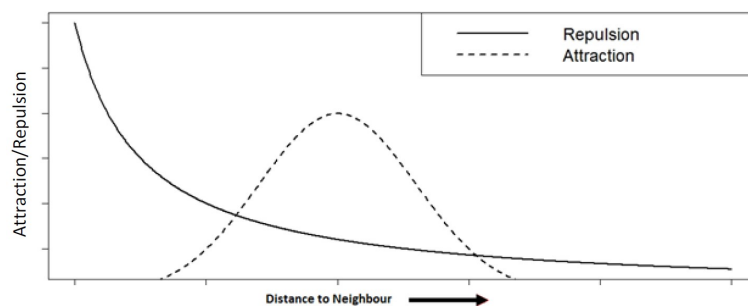


Figuur 1: Rechts zien we een simulatie van de situatie bij links.

Voor ons is het belangrijk om zowel de mechanismen te onderzoeken die kuddegedrag controleren als de omstandigheden te bepalen waaronder groeperen tot stand komt en stabiel is. We nemen aan dat groeperen zelfgeorganiseerd is. Met andere woorden, de integriteit van de kudde wordt volledig onderhouden door individuele bewegingen, die op hen beurt alleen worden beïnvloed door de posities van burenen binnen een beperkt bereik.

Zo bepalen de burenen van een individu onder andere de mate van onderlinge aantrekking en afstoting. De modellen die we zullen opstellen, analyseren en simuleren berusten op deze twee centrale concepten.

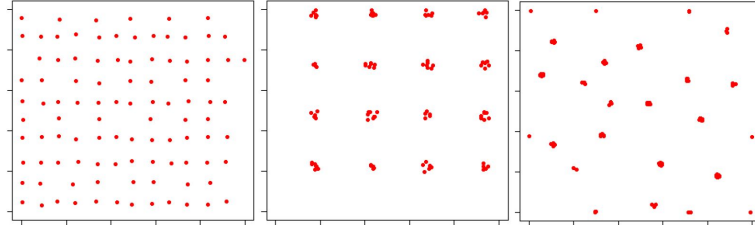
In figuur 2 (T. Nijman, 2017) zien we een voorbeeldweergave van de concepten aantrekking (gestippeld) en afstoting (doorgetrokken). Hieruit valt op te maken dat de aantrekking voor relatief kleine en grote onderlinge afstanden laag is. Dit valt te verklaren door op te merken dat elk individu een persoonlijke ruimte heeft waarin het de aanwezigheid van andere individuen niet tolereert. Anderzijds zal de individu zich niet of nauwelijks aangetrokken voelen tot individuen die zich verweg bevinden.



Figuur 2: Voorbeelden van aantrekking (gestippeld) en afstoting (doorgetrokken).

De afstoting binnen de eigen ruimte van individuen is, zoals eerder verwezen, hoog. Daarentegen zal ook de afstoting op relatief grote afstanden laag zijn doordat objecten te ver van elkaar staan om te handelen vanuit concurrentie.

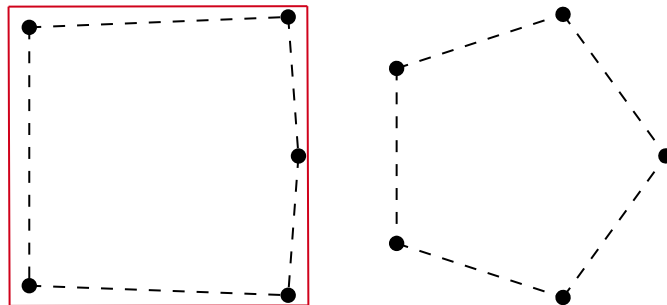
Duidelijk is dat we een wiskundig minimaal model zullen opstellen. Dit model zal niet altijd te verantwoorden zijn vanuit ecologisch perspectief. Zo laten we verschillen tussen individuen en het concept van draagkracht, zoals in ecosystemen, buiten beschouwing. Wél bestuderen we de wiskundige aspecten van een ecologisch relevant minimaal model. Verder stellen we geen grenzen aan de ruimten waarin individuen, ook wel objecten, zich bevinden. De voornaamste reden hiertoe is dat ingeval we randen toevoegen aan de modellen, er ten alle tijde sprake is van evenwicht. Hieronder verstaan we formaties als in figuur 3 (T. Nijman, 2017).



Figuur 3: Voorbeelden van objecten (rode stippen) die een onderling evenwicht bereiken.

In ons geval is het juist interessant om een omgeving te creëren waarbinnen objecten de vrijheid wordt gegeven om al dan niet een evenwicht te vormen. Zo is gebleken dat er verscheidene manieren bestaan waarop een evenwicht tot stand komt, de zogenaamde evenwichtspaden, maar ook waarop deze uit de weg wordt gegaan.

Individueen vertonen ‘afwijkende’ gedragingen als ze worden begrensd. In figuur 4 zien we hier een voorbeeld van met een vierkante afbakening in het rood. De onstane opstelling valt buiten de verzameling van de zogeheten evenwichtsformaties die horen bij het geval van vijf objecten in dimensie twee. Eén van de configuraties, die wordt aangenomen ingeval individuen (zwarte stippen) niet begrensd worden, is de regelmatige vijfhoek, zie het rechter figuur.



Figuur 4: (Links) ‘bij benadering’ een vierkant & (rechts) een regelmatige vijfhoek.

Samenvattend beginnen we door simpelweg een model op te stellen in dimensie één dat bestaat uit twee objecten. Vervolgens analyseren we deze op wiskundige wijze waarna we er een simulatie van maken. Hierna breiden we het model uit door eerst het aantal objecten te vermeerderen en daarna de dimensie te verhogen naar twee. Hier komt bij dat we de hoogte van (het zwaartepunt van) individuen niet meenemen in onze berekeningen en dus niet zullen werken in $\mathbb{R}^3$.

Uit onze simulaties is gebleken dat er een zekere hiërarchie/opbouw bestaat tussen/-van de zogeheten evenwichtsconfiguraties. Denk hierbij aan denkbeeldige regelmatige ruimtelijke figuren zoals in figuur 3. Maar ook een vierkant waarbij het vijfde object zich in het middelpunt ervan bevindt blijkt zo’n configuratie te zijn. Hieruit valt echter niet direct een regelmaat af te lezen in de zin dat we niet zeker weten welke formaties aangenomen kunnen worden bij een evenwicht.

Deze scriptie is hiermee een eerste stap richting het modelleren van de kenmerkende dynamica van kuddedieren waarbij gebruikgemaakt wordt van de essentiële factoren die een beschrijving geven van de groepssamenhang.

2 2 Objecten in $\mathbb{R}$

We beginnen met het bestuderen van een systeem van twee objecten in een eendimensionale ruimte, namelijk $\mathbb{R}$. Hiermee creëren we een basis waarmee we grip krijgen op het probleem en waar we later, bij het bestuderen van een equivalent systeem in $\mathbb{R}^2$, gebruik van zullen maken.

Laten $P_1 = P_1(t)$ en $P_2 = P_2(t)$ de posities van twee afzonderlijke objecten in $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren

$$p = p(t) := |P_2 - P_1|$$

als de afstand ertussen. De functies $A(p) = (A(p))(t)$, $R(p) = (R(p))(t) \in C^1$, die we in deel 2.1 zullen definiëren, staan voor resp. de onderlinge aantrekking en afstoting.

De klasse C^1 bestaat uit functies waarvan de afgeleide continu is. Zulke functies zijn continu differentieerbaar en geven dus informatie over de beweging van objecten in verloop van tijd.

Voor de eenvoud stellen we, zonder verlies van algemeenheid, dat $P_1 < P_2$ zodat

$$\begin{aligned} p &= |P_2 - P_1| \\ &= P_2 - P_1 > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieruit volgen

$$\begin{aligned} A(p) \cdot \frac{P_2 - P_1}{p} &\stackrel{(1)}{=} A(p) \cdot 1 \\ &= A(p) \quad \text{en} \\ R(p) \cdot \frac{P_1 - P_2}{p} &\stackrel{(1)}{=} R(p) \cdot -1 \\ &= -R(p) \end{aligned} \tag{2}$$

als resp. de aantrekking van P_1 in de richting van P_2 en de afstoting van P_2 in de richting van P_1 . Van de vectoren

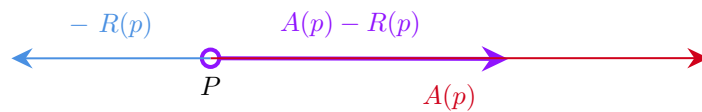
$$\frac{P_2 - P_1}{p} \quad \text{en} \quad \frac{P_1 - P_2}{p}$$

is de norm gelijk aan 1. Eenheidsvectoren worden vooral gebruikt om richtingen aan te geven. Een vector met willekeurige norm ongelijk aan nul kan worden gedeeld door zijn norm om zo een eenheidsvector te creëren. Dit proces staat bekend als het normaliseren van een vector.

Nu we een basis hebben gevormd voor het opstellen van een systeem, kunnen we het stelsel dat de veranderingen van P_1 en P_2 in verloop van tijd beschrijft, definiëren als

$$\dot{P} = F(P_1, P_2) := \begin{cases} \dot{P}_1 = F_1(P_1, P_2) \stackrel{(2)}{=} A(p) - R(p) \\ \dot{P}_2 = F_2(P_1, P_2) \stackrel{(2)}{=} R(p) - A(p). \end{cases} \tag{3}$$

Uit (3) volgt dat het verschil tussen $A(p)$ en $R(p)$ bepaalt of objecten naar elkaar toe bewegen of juist van elkaar af. Hiermee zijn de F_i ook wel te zien als de resulterende krachten op objecten, zie figuur 5.



Figuur 5: Het verschil $A(p) - R(p)$ als de resulterende kracht op een object genaamd P .

Voor $\dot{\mathbf{P}} = (\dot{P}_1, \dot{P}_2) = (0, 0) = \mathbf{0}$ komen objecten tot stilstand hetgeen wordt aangeduid als een evenwicht of ruststand, immers de resulterende kracht op elk object is gelijk aan nul. Deze treedt op in een zeker ‘punt’

$$\mathbf{P}_* := (P_{1*}, P_{2*})$$

waarbij we de onderlinge afstand, ook wel het verschil tussen de coördinaten ervan, noteren als

$$p_* := P_{2*} - P_{1*}.$$

Omdat we een systeem opstellen voor het kleinste aantal objecten, namelijk twee, waar-tussen een wisselwerking kan plaatsvinden, is het onnodig om een subscript als bij $\dot{\mathbf{P}}_2$ en $\mathbf{P}_{2*}$ te gebruiken. Hier zullen we alleen gebruik van maken bij het uitbreiden van het model met objecten, zoals in deel 3.

Om de opgestelde modellen eenvoudiger te analyseren en te programmeren korten we vergelijkingen als bij (3) af. Zo definiëren we deze als

$$B = B(p) := A(p) - R(p) \quad \text{en} \quad b_* = b(p_*) := B'(p_*) \quad (4)$$

en merken we op dat de kritieke punten van (3) gegeven worden door de oplossingen van de vergelijking $B(p_*) = 0$. Hierbij hoeven we geen onderscheid te maken tussen de vergelijkingen voor $\dot{P}_1$ en $\dot{P}_2$, immers het verschil zit hem in het teken van $B(p_*)$. Voor het bepalen van de stabiliteit van de evenwichtspunten berekenen we eerst de partiële afgeleiden van F_1 en F_2 , namelijk

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial P_1} &\stackrel{(3)}{=} \frac{\partial B(p)}{\partial P_1} & \text{en} & \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = \frac{\partial F_1}{\partial P_2} \\ &= B'(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial P_1} & & = -\frac{\partial F_1}{\partial P_1} = -\frac{\partial F_2}{\partial P_2}. \\ &= B'(p) \cdot -1 \\ &= -(B'(p)) \cdot 1 \\ &= -(B'(p)) \cdot \frac{\partial p}{\partial P_2} \\ &= -\frac{\partial B(p)}{\partial P_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial P_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Doordat we te maken hebben met de eerste-orde partiële afgeleiden van $F(P_1, P_2)$ is het nodig om de Jacobi-matrix te gebruiken. In dit geval zorgen twee objecten ervoor dat deze bestaat uit twee rijen en kolommen. Er zijn namelijk twee partiële afgeleiden per F_i en de dimensie is één. De Jacobi-matrix van (3), geëvalueerd in $\mathbf{P}_*$, ziet er dan uit als

$$\begin{aligned} J(F(\mathbf{P}_*)) &= \left. \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(P_1, P_2)} \right|_{\mathbf{P}_*} \\ &= \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_1} & \frac{\partial F_1}{\partial P_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_1} & \frac{\partial F_2}{\partial P_2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{P}_*} \\ &\stackrel{(5)}{=} \left. \begin{bmatrix} R'(p) - A'(p) & A'(p) - R'(p) \\ A'(p) - R'(p) & R'(p) - A'(p) \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{P}_*} \\ &\stackrel{(4)}{=} \left. \begin{bmatrix} -B'(p) & B'(p) \\ B'(p) & -B'(p) \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{P}_*} \\ &= \begin{bmatrix} -B'(p_*) & B'(p_*) \\ B'(p_*) & -B'(p_*) \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{=} \begin{bmatrix} -b_* & b_* \\ b_* & -b_* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Voor de systemen die we opstellen geldt dan ook dat de Jacobi-matrix een dimensie heeft van $(n \cdot d) \times (n \cdot d)$ waarbij n voor het aantal objecten staat en d de dimensie weergeeft. Zo heeft de Jacobi-matrix bij (6) inderdaad een dimensie van $(2 \cdot 1) \times (2 \cdot 1)$.

De Jacobiaan, ofwel de determinant van een matrix als bij (6), is belangrijk voor functies F die differentieerbaar zijn in punten als $\mathbf{P}_*$. Hiermee is het namelijk mogelijk om uitspraken te doen over de stabiliteit van een dergelijke ruststand. De hierbij verkregen afbeelding definieert de differentiaal van F in $\mathbf{P}_*$. Zo wordt het karakteristieke polynoom van (6) gegeven door

$$\begin{aligned} \det(J(F(\mathbf{P}_*)) - \lambda I_2) &\stackrel{(6)}{=} \left| \begin{bmatrix} -b_* & b_* \\ b_* & -b_* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} -b_* - \lambda & b_* \\ b_* & -b_* - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-b_* - \lambda)(-b_* - \lambda) - b_* \cdot b_* \\ &= b_*^2 + 2b_*\lambda + \lambda^2 - b_*^2 = \lambda(\lambda + 2b_*) \end{aligned} \tag{7}$$

met als nulpunten $\lambda = 0$ en $\lambda = -2b_*$. De stabiliteitsanalyse hiervan volgt in paragraaf 2.3.1. Voor nu definiëren we de, in $\mathbf{P}_*$ geëvalueerde, afgeleiden van $A(p)$ en $R(p)$ als resp.

$$a_* = a(p_*) := A'(p_*) \quad \text{en} \quad r_* = r(p_*) := R'(p_*). \tag{8}$$

Hiermee hebben we een systeem van twee objecten in $\mathbb{R}$ op impliciete wijze opgesteld. In de komende sectie zullen we delen hiervan expliciteren zodat we deze in latere stadia kunnen simuleren.

2.1 Aantrekking $A(p)$ en Afstoting $R(p)$

Voor het opstellen van een expliciet deterministisch model dienen de aantrekking en afstoting exact gedefinieerd te worden. Hiermee wordt elk object traceerbaar en wordt niets overgelaten aan het toeval.

Vanuit ecologisch perspectief is het natuurlijk om aan te nemen dat objecten voor kleine waarden van p elkaar afstoten. De redenen hiervoor zijn onder meer het voor komen van botsingen (Couzin et al., 2002), het handelen vanuit concurrentie (Darlington, 1972) of een combinatie van beide waarbij ten alle tijde een minimale afstand wordt behouden (Krause & Ruxton, 2002). De afstoting neemt dus toe voor kleinere waarden van p .

Daarentegen zal de aantrekking tussen objecten voor grotere waarden van p , zoals bij veel kleine diersoorten, de dominante factor zijn (Hopcraft, Olf & Sinclair, 2010). Zolang er geen sprake is van ontwijking voor soortgenoten of voor een roofdier zullen individuen van veel diersoorten zich aangetrokken voelen tot soortgenoten. Bovendien zorgt dit ervoor dat ze niet geïsoleerd worden (Partridge & Pitcher, 1980; Partridge, 1982). De aantrekking zal afnemen naarmate de onderlinge afstand tussen objecten toeneemt zoals bij de meeste grote diersoorten het geval is. Dus zullen objecten zich voor relatief grotere waarden van p niet meer aangetrokken voelen tot elkaar (Hopcraft et al., 2010).

Om deze redenen gaan we, bij het construeren van een functie $A(p)$ (Engels: attraction) voor de aantrekking, uit van een exponentiële functie die voor zowel $p \ll 1$ als $1 \ll p$ bij benadering gelijk is aan nul. Dus is

$$A(p) := \frac{\alpha p}{e^{\beta p}}, \tag{9}$$

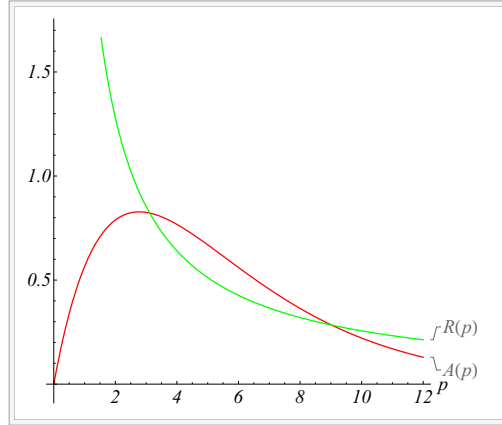
voor zekere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, een bruikbare keuze (Y. Chen & T. Kolokolnikov, 2014).

De constanten α en β regelen zowel de mate van aantrekking als het gebied waarbinnen dit plaatsvindt.

Net zo is een natuurlijke optie voor een functie voor de afstoting (Engels: repulsion), voor zekere $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, te definiëren als

$$R(p) := \frac{\gamma}{p} \quad \text{waarbij} \quad p \neq 0. \quad (10)$$

Dit houdt in dat de afstoting inderdaad toeneemt voor kleinere waarden van p en vice versa. In figuur 6 zien we een voorbeeldweergave van de aantrekking en afstoting die we al in de inleiding tegenkwamen.

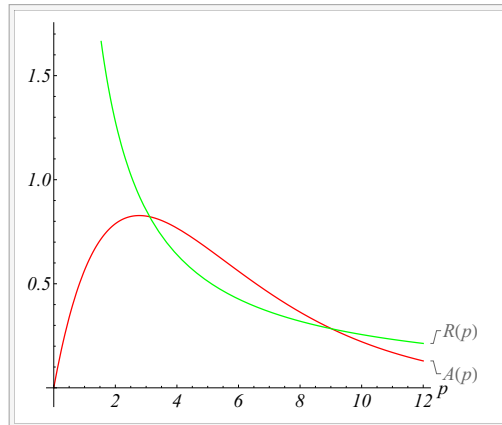


Figuur 6: Voorbeeldgrafieken van $A(p)$ en $R(p)$.

Onze focus zal in het vervolg liggen op de snijpunten van deze grafieken. De snijpunten wijzen namelijk op het bestaan van evenwichten, dus kunnen we door de parameters handig te kiezen er altijd voor zorgen dat we een voor ons interessante geval bestuderen.

2.2 Evenwichtspunten en Bifurcaties

We beginnen door figuur 7 uit de vorige paragraaf verder te bestuderen. Hierin zien we dat voor een bepaalde selectie van de parameters α, β en γ de grafieken $A(p)$ en $R(p)$ elkaar in twee punten snijden.



Figuur 7: De grafieken $A(p)$ en $R(p)$ voor $\alpha = 0.81$, $\beta = 0.36$ en $\gamma = 2.56$.

Uit figuur 7 lezen we af dat de aantrekking daadwerkelijk domineert voor bepaalde p . Buiten dit gebied is de afstoting juist sterker waardoor objecten elkaar eerder afstoten dan aantrekken.

Het triviale evenwichtspunt, namelijk

$$\mathbf{P}_* = (0, 0),$$

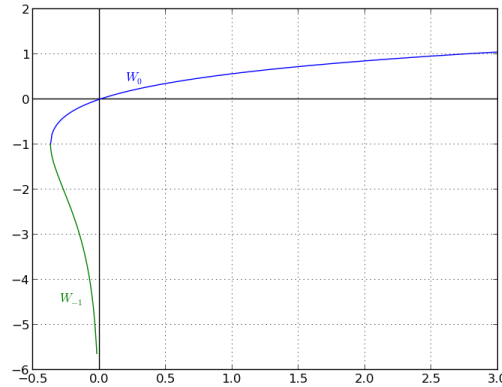
valt buiten beschouwing omdat we P_1 en P_2 afzonderlijk gekozen hebben. Doordat in de snijpunten geldt $p_* \neq 0$ en $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ zijn dit tevens de punten waarbij er evenwicht optreedt. Evenwichtspunten worden, zoals eerder genoemd, bepaald door de oplossingen van de vergelijking

$$B(p_*) = A(p_*) - R(p_*) = \frac{\alpha p_*}{e^{\beta p_*}} - \frac{\gamma}{p_*} = 0. \quad (11)$$

We kiezen ervoor om deze vergelijking numeriek op te lossen doordat er geen algebraïsche oplossingen bestaan. Zo laten we het computerprogramma Mathematica, voor bepaalde parameterwaarden, de oplossingen exact benaderen. De verkregen oplossingen worden beschreven in termen van de Lambert- W functie. De Lambert- W functie $W(z)$ is een verzameling van functies die de takken vormen van de inversen van de functie $f(z) = ze^z$, dus $f^{-1} = W$. Hierin is $z = x + iy$ een complex getal en e^z is de complexe exponentiële functie. Voor ieder complex getal z_0 geldt daarbij

$$z_0 = W(z_0)e^{W(z_0)}.$$

Omdat wij te maken hebben met reële afstanden beschouwen we alleen het reële deel x van z . Dit leidt tot de enkelwaardige functies $W_0(z)$ op $(-1/e, \infty)$ met $W_0(0) = 0$ en $W_{-1}(z)$ op $(-1/e, 0)$ met $W_{-1}(z) \leq -1$, zie figuur 8.



Figuur 8: De grafieken W_{-1} (groen) en W_0 (blauw).

Kort gezegd is W_{-1} de tak die waarden kleiner dan of gelijk aan -1 aanneemt en W_0 de tak die door de oorsprong gaat. Voor nu laten we het verband van deze functie met de vergelijking bij (11) zien. Daaruit volgt namelijk dat

$$\begin{aligned} \frac{\alpha p}{e^{\beta p}} &= \frac{\gamma}{p} \\ p^2 e^{-\beta p} &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ p e^{-\frac{1}{2}\beta p} &= \pm \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \left(\text{waarbij } \sqrt{p^2} = |p| = p \right) \\ -\frac{1}{2}\beta p e^{-\frac{1}{2}\beta p} &= \mp \frac{1}{2}\beta \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \end{aligned} \quad (12)$$

zodat voor het reële deel $z = -\beta p/2$ geldt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\beta p &= z \\
&= f^{-1}(f(z)) \\
&= f^{-1}(ze^z) \\
&= W(ze^z) \\
&= W\left(-\frac{1}{2}\beta p e^{-\frac{1}{2}\beta p}\right) \stackrel{(12)}{=} W\left(\mp \frac{1}{2}\beta \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right),
\end{aligned}$$

met andere woorden

$$p = -\frac{2}{\beta} \cdot z = -\frac{2}{\beta} W\left(\mp \frac{1}{2}\beta \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right).$$

We zullen hier bij de analyse van het model in de komende paragrafen en delen gebruik van maken. Hierbij krijgen we voor een bepaalde keuze van parameters telkens te maken met twee oplossingen uit het interval $(-1/e, 0)$.

De evenwichtsstaten en -paden veranderen wanneer de parameters gewijzigd worden. Bij relatief kleine veranderingen verschuiven slechts de posities van de evenwichtspunten.

Het is ook mogelijk dat de grafieken $A(p)$ en $R(p)$ slechts één punt delen met elkaar. In dat punt zijn zowel de functiewaarden als de afgeleiden aan elkaar gelijk, oftewel,

$$\begin{aligned}
A(p) - R(p) &= \frac{\alpha p}{e^{\beta p}} - \frac{\gamma}{p} \\
&= 0 \\
&= \frac{\alpha(1 - \beta p)}{e^{\beta p}} + \frac{\gamma}{p^2} = A'(p) - R'(p).
\end{aligned}$$

Substitutie van γ/p in B' geeft

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(1 - \beta p)}{e^{\beta p}} + \frac{\gamma}{p^2} &= \frac{\alpha(1 - \beta p)}{e^{\beta p}} + \frac{\gamma}{p} \cdot \frac{1}{p} \\
&= \frac{\alpha(1 - \beta p)}{e^{\beta p}} + \frac{\alpha p}{e^{\beta p}} \cdot \frac{1}{p} \\
&= \frac{\alpha(2 - \beta p)}{e^{\beta p}} = 0.
\end{aligned}$$

Anders gezegd, $\beta p = 2$, zodat invullen hiervan in B de volgende kwadratische vergelijking voor β oplevert

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha p}{e^{\beta p}} - \frac{\gamma}{p} &= \frac{\alpha \cdot \frac{2}{\beta}}{e^{\beta \cdot \frac{2}{\beta}}} - \frac{\gamma}{\frac{2}{\beta}} \\
&= \frac{\frac{2\alpha}{\beta}}{e^2} - \frac{\beta\gamma}{2} \\
&= \frac{2\alpha}{e^2\beta} - \frac{\beta\gamma}{2} \\
&= \frac{4\alpha - e^2\beta^2\gamma}{2e^2\beta} = 0.
\end{aligned}$$

Hieruit concluderen we dat $A(p)$ en $R(p)$ elkaar raken als

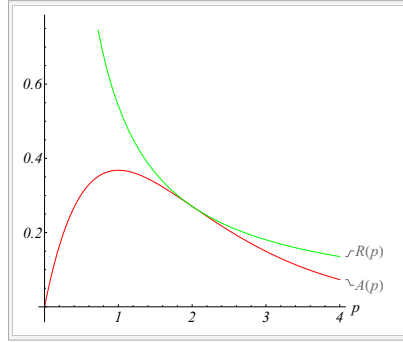
$$\beta = \frac{2}{e} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

In het vervolg gaan we te werk door telkens twee van de drie parameters vast te kiezen. Dit leidt ertoe dat naast de derde parameter ook p vastgesteld wordt.

In figuur 9 is gekozen voor $\alpha = \beta = 1$ waardoor $\gamma = 4/e^2$. Hierdoor snijden $A(p)$ en $R(p)$ elkaar in $p = 2$. Uit de overige oplossing $\beta = -1$ volgt dat

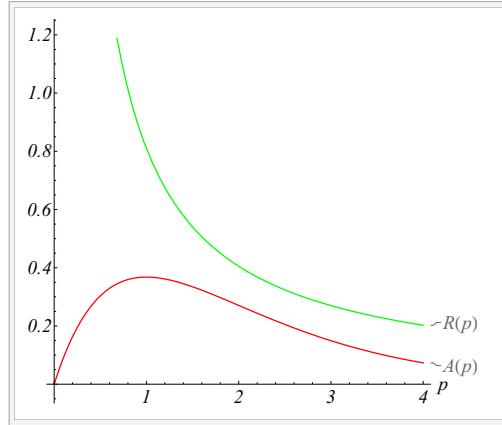
$$p = \frac{2}{\beta} = \frac{2}{-1} < 0,$$

oftewel een tegenspraak met de aanname $p > 0$. Merk op dat deze ook al niet voldoet aan de eis dat $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$.



Figuur 9: De grafieken $A(p)$ en $R(p)$ voor $\alpha = \beta = 1$ en $\gamma = 4/e^2$.

Het kan ook zijn dat de twee grafieken elkaar noch snijden noch raken. In dat geval is het bereiken van een evenwicht, uitgaande van een willekeurige beginsituatie, niet mogelijk. In figuur 10 geven we hier een voorbeeld van.



Figuur 10: De grafieken $A(p)$ en $R(p)$ voor $\alpha = \beta = 1$ en $\gamma = 0.81$.

Uit figuur 10 volgt dat $A(p)$ en $R(p)$ elkaar niet snijden als

$$\beta > \frac{2}{e} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

In dit geval is de afstoting namelijk op het hele domein sterker dan de aantrekking hetgeen ervoor zorgt dat objecten niet tot een evenwicht komen. Hierdoor vormen zich ook geen kuddes waardoor onze interesses meer liggen bij gevallen waarbij

$$\beta \leq \frac{2}{e} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

We hebben gezien dat relatief grote wijzingen in de parameters van het systeem resulteren in veranderingen in het aantal evenwichten. Dit noemt men een bifurcatie.

2.3 Stabiliteitsanalyse

2.3.1 Evenwichtsvoorwaarden en -paden

In dit deel bespreken we de voorwaarden voor het tot stand komen van een evenwicht en de paden die de oplossingen daarbij volgen.

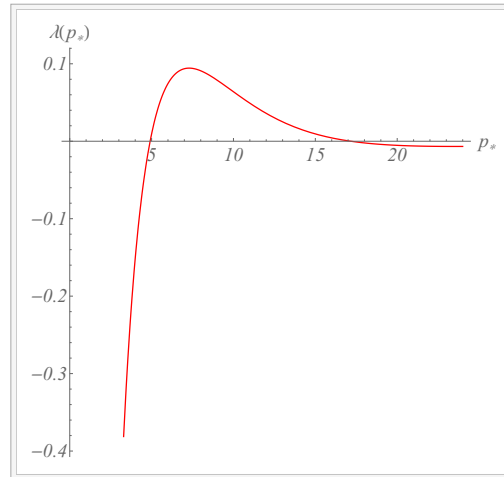
De p -as in de figuren 7, 9 en 10 is typerend voor de initiële afstand $p(0)$ tussen de oplossingen P_1 en P_2 . Dus hangt het bereiken van een evenwicht mede af van de beginwaarden $P_1(0)$ en $P_2(0)$. Dit betekent dat op bepaalde domeinen wel en op andere domeinen geen evenwicht wordt bereikt.

We constateren dat λ , na een keuze van parameters, een functie is van p_* . De nulpunten van het karakteristieke polynoom bij (7) worden ook wel de eigenwaarden van het systeem bij (6) genoemd. Evenwicht wordt ontweken als minstens een eigenwaarde van (6) positief is of als beide eigenwaarden niet reëel zijn, maar wel een positief reëel deel hebben.

$\lambda = 0$ ($1\times$) geeft aan dat het evenwichtspunt (P_{1*}, P_{2*}) behouden blijft bij translatie over $\mathbb{R}$. Bovendien wijst deze eigenwaarde op het bestaan van een niet-triviaal evenwicht.

Uit $\lambda = -2b_* = -2(a_* - r_*)$ volgt dat een evenwicht gevormd wordt voor p_* waarvoor geldt $r_* < a_*$ (namelijk $\lambda(p_*) < 0$) en vice versa voor $a_* < r_*$ (immers $0 < \lambda(p_*)$).

In figuur 11 zien we dat $\lambda(p_*)$ op twee domeinen negatief is. De p -coördinaat van het linker snijpunt in figuur 7 geeft $\lambda(p_*) < 0$. Voor het rechter snijpunt krijgen we juist $\lambda(p_*) > 0$. We hebben dus te maken met een stabiele (linker) en een instabiele (rechter) evenwichtspunt. Hierdoor zullen objecten, waartussen de afstand binnen het deelgebied tot aan het rechter evenwichtspunt valt, de neiging hebben om te streven naar een onderlinge afstand die aangegeven wordt door het linker kritieke punt.



Figuur 11: De grafiek $\lambda(p_*) = -2b_*$ voor $\alpha = 0.81$, $\beta = 0.36$ en $\gamma = 2.56$.

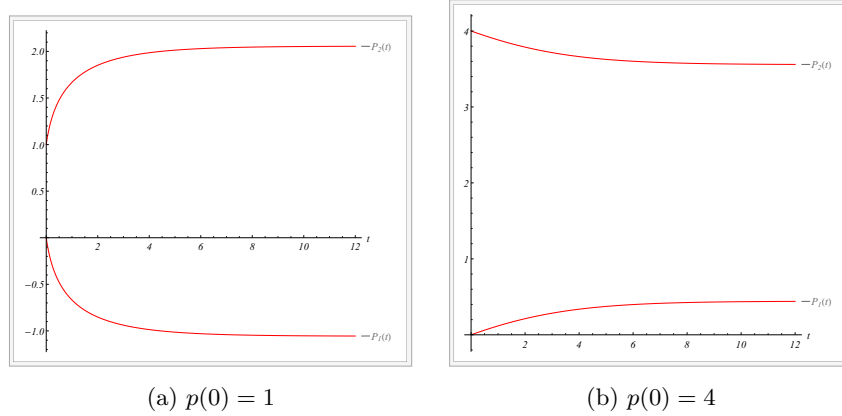
Om het niet telkens over een linker en een rechter evenwichtspunt te hebben, onderscheiden we de domeinen in figuur 7 en gaan we te werk met de definities

$$\underline{p} := \min \{p : B(p) = 0\} \quad \text{en} \quad \bar{p} := \max \{p : B(p) = 0\}.$$

In feite zijn deze definities bedoeld om de linker en rechter evenwichtspunten p_* uit elkaar te houden. Door gebruik te maken van numerieke simulaties onderscheiden we de volgende gevallen voor α, β en γ als in figuur 7 en $p(0) \in (0, \infty)$:

1. $p(0) \in (0, \underline{p})$ of $p(0) \in (\underline{p}, \bar{p})$: We krijgen in beide gevallen een evenwicht waarbij de evenwichtspaden elkaars tegengestelden zijn. Dus bereiken de individuen een evenwicht door ofwel uit elkaar te gaan ofwel door naar elkaar toe te trekken. De eerste wordt veroorzaakt door de onderlinge afstoting. Deze is namelijk voor kleine $p(0)$, in eerste instantie, groter dan de onderlinge aantrekking.

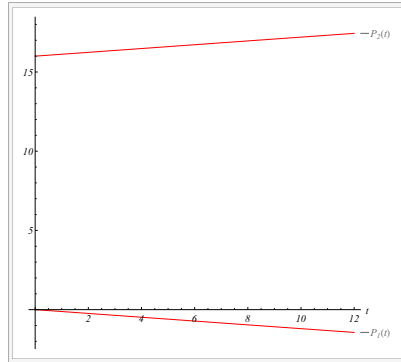
In figuur 12(b) zien we dat de objecten ook voor $p(0) = 4$ onder invloed zijn van de aantrekkingskracht van het evenwichtspunt $\underline{p}$.



Figuur 12

Merk verder op dat we hier te maken hebben met een situatie als in figuur 7.

2. $p(0) \in (\bar{p}, \infty)$: Er treedt geen evenwicht op doordat de onderlinge aantrekking onvoldoende is. Doordat $p(0) > \bar{p}$ worden de objecten ‘afgestoten’ door het rechter evenwichtspunt en divergeren ze. We bevinden ons dus in het subdomein, rechts van $\bar{p}$, waar de afstoting permanent domineert over de aantrekking.

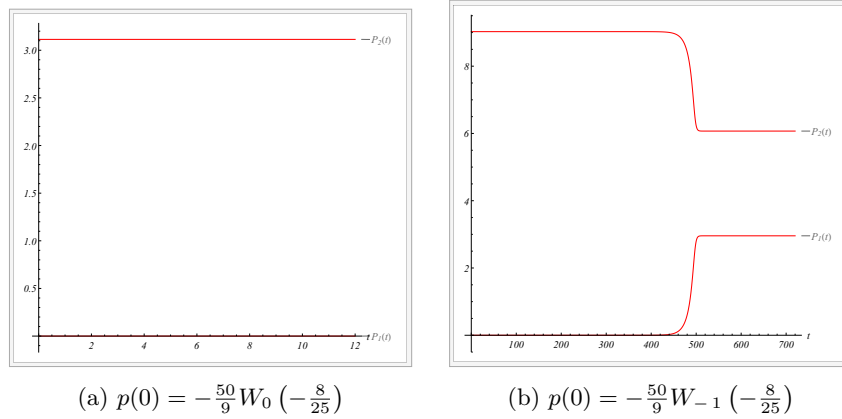


Figuur 13: $p(0) = 16$.

3. $p(0) = \underline{p}$ of $p(0) = \bar{p}$: Beide gevallen resulteren in een evenwicht waarbij de evenwichtspaden gegeven worden door resp.

$$\begin{aligned}
 (P_1(t), P_2(t)) &= (P_1(0), P_2(0)) \\
 &= (P_1(0), P_1(0) + \underline{p}) \quad \text{en} \\
 (P_1(t), P_2(t)) &= (P_1(0), P_2(0)) \\
 &= (P_1(0), P_1(0) + \bar{p}).
 \end{aligned}$$

We zien dat de oplossingen in figuur 14(a) nagenoeg constant zijn. De reden dat de figuren verschillen van elkaar is dat de numerieke fout in figuur 14(b) groter is dan die in figuur 14(a).



Figuur 14

Uit de figuren 12-14 volgt dat er voor $p(0) \in (0, \bar{p})$ een evenwicht tot stand komt. Dus concluderen we dat $\underline{p}$ een stabiele en $\bar{p}$ een instabiele evenwicht is. We merken op dat er zich ook een evenwicht instelt als de beginafstand tussen de objecten gelijk is aan $\bar{p} = -\frac{50}{9} W_{-1} \left(-\frac{8}{25} \right)$. Dit heeft praktisch gezien geen betekenis omdat dieren van nature positie nemen in stabiele evenwichtsformaties. Zo zullen we dieren in de natuur nooit een rij zien vormen om bij elkaar te staan maar eerder om op pad te gaan, oftewel zolang voor minstens één i geldt dat $\dot{P}_i \neq 0$.

In figuur 9 hadden we $\beta p_* = 2$. Substitutie hiervan in λ geeft

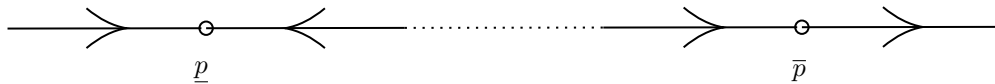
$$\begin{aligned}
 \lambda &= -2b_* \\
 &= -2 \left(\frac{\alpha(1-2)}{e^2} - \frac{\beta^2 \gamma}{4} \right) \\
 &= -2 \left(-\frac{\alpha}{e^2} - \frac{\beta^2 \gamma}{4} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat het raakpunt in $p = 2$ een instabiele evenwichtspunt is. Zo blijken voor α, β en γ als in figuur 9 de evenwichtspaden op de domeinen $(0, 2)$ en in het punt 2 er uit te zien als in resp. de figuren 12(a) en 14(a).

2.3.2 Fase-Lijnen

We gebruiken fase-lijnen om het gedrag van de oplossingen van ons dynamisch systeem te laten zien. In ons geval is dit een horizontale lijnstuk die eventueel door een kritiek(e) punt(en) wordt verdeeld.

Zo wordt het lijnstuk in figuur 15 door de twee evenwichtspunten in figuur 7 verdeeld in drie stukken. De pijlen geven de waarden aan waar de oplossingen, afhankelijk van het domein waarin de beginwaarden zich bevinden, naar convergeren of van divergeren.

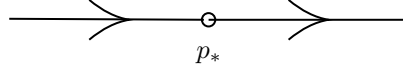


Figuur 15: De fase-lijn voor p waarbij $\alpha = 0.81$, $\beta = 0.36$ en $\gamma = 2.56$.

We zien dat $\underline{p}$ een put (Engels: sink), dus stabiel, en $\bar{p}$ een bron (Engels: source), dus instabiel, is. Dit komt er op neer dat oplossingen in een zekere omgeving van $\underline{p}$ convergeren en stabiel zijn bij kleine perturbaties. Aan de andere kant divergeren ze in een zekere omgeving van $\bar{p}$ en zijn instabiel bij kleine verstoringen.

Merk op dat een deel van het lijnstuk tussen de twee kritieke punten gestippeld is. Dit wijst op het bestaan van een omslagpunt voor de oplossingskrommen.

De fase-lijn in figuur 16 hoort bij figuur 2 en wordt slechts in tweeën verdeeld. We zien dat de pijlen aan de ene kant in de richting van het evenwichtspunt en aan de andere kant in de tegengestelde richting wijzen.



Figuur 16: De fase-lijn voor p waarbij $\alpha = \beta = 1$ en $\gamma = 4/e^2$.

Hiermee is $\underline{p} = 2 = \bar{p}$ een knoop(punt) (Engels: node), dus semi-stabiël. Anders geformuleerd convergeren oplossingen aan de ene kant en divergeren aan de andere kant.

Het geval zonder evenwichtspunten heeft een fase-lijn als in figuur 17.



Figuur 17: De fase-lijn voor p waarbij $\alpha = \beta = 1$ en $\gamma = 0.81$.

Duidelijk is dat oplossingen, net zoals in figuur 10, ten alle tijde divergeren. Hoewel het mogelijk is dat oplossingen een evenwicht bereiken door in eerste instantie uit elkaar te gaan, zie figuur 12(a), merken we op dat er hier geen sprake van zal zijn. Dit komt namelijk door de afwezigheid van een kritiek punt die het divergerende gedrag van de oplossingen, zoals in de figuren 15 en 16, binnen eindige tijd ten einde brengt.

3 n Objecten in $\mathbb{R}$

In dit hoofdstuk breiden we het model uit met een onbepaald aantal van n objecten. Hierbij geven we een generalisatie van de Jacobi-matrix bij (6). In sectie 3.1 zullen we er ter bestudering één geval uitkiezen en deze verder uitwerken.

Laten $P_i = P_i(t)$ voor $i = 1, \dots, n$ de posities van n afzonderlijke objecten in $\mathbb{R}$ zijn. We definiëren $p_{ij} = p_{ij}(t) := |P_j - P_i|$ als de afstanden ertussen. Uit de index ij volgt dat we vanuit object i naar object j bewegen. Dit is van belang bij het bepalen van de richting waar een object door aangetrokken of juist door afgestoten wordt.

De functies $A(p_{ij}), R(p_{ij}) \in C^1$ staan voor resp. de aantrekking van P_i in de richting van P_j en de afstoting van P_j in de richting van P_i . Voor de eenvoud stellen we, zonder verlies van algemeenheid, $P_i < P_j$ voor $i < j$ zodat

$$\begin{aligned} p_{ij} &= |P_j - P_i| \\ &= P_j - P_i > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Dit houdt in dat links van het i -de object ($j < i$) de aantrekking tot het j -de object wordt gegeven door $-A(p_{ji})$ en de afstoting door $+R(p_{ji})$. Rechts ervan ($i < j$) krijgen we juist te maken met $+A(p_{ij})$ en $-R(p_{ij})$. Sommeren hiervan over alle j leidt tot het stelsel $\dot{P}_n = F(P_1, \dots, P_n)$ dat voor $i = 1, \dots, n$ de veranderingen van P_i in de tijd beschrijft, oftewel

$$\begin{aligned} \dot{P}_n &= F(P_1, \dots, P_n) \\ &:= \begin{cases} \dot{P}_i &= F_i(P_1, \dots, P_n) \\ &= \sum_{1 \leq j < i} R(p_{ji}) - A(p_{ji}) + \sum_{i < j \leq n} A(p_{ij}) - R(p_{ij}). \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

Voor $\dot{P}_n = (\dot{P}_1, \dots, \dot{P}_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ treedt er, net als in het geval van twee objecten in $\mathbb{R}$, evenwicht op in een zeker punt

$$P_{n*} := (P_{1*}, \dots, P_{n*})$$

waarbij we de paarsgewijze afstanden tussen P_i en P_j in het evenwichtspunt definiëren als

$$p_{ij*} \stackrel{(13)}{:=} P_{j*} - P_{i*}.$$

Vervolgens definiëren we

$$B_{ij} = B(p_{ij}) := A(p_{ij}) - R(p_{ij}) \quad \text{en} \quad b_{ij*} := B'_{ij*} = B'(p_{ij*}) \tag{15}$$

en berekenen, voor $k = 1, \dots, n$, de partiële afgeleiden van F_i , met andere woorden

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_k} = \begin{cases} b_{ij} & \text{voor } i < k, \\ - \sum_{1 \leq j < i} b_{ji} - \sum_{i < j \leq n} b_{ij} & \text{voor } k = i \quad \text{en} \\ b_{ji} & \text{voor } k < i. \end{cases} \tag{16}$$

Als voorbeeld stellen we $n = 3$ en gaan we (16) na door deze toe te passen op het geval $i = 2$. Voor $i = 2 < 3 = k$ hebben we

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial P_3} &\stackrel{(14)}{=} \frac{\partial}{\partial P_3} \left(\sum_{1 \leq j < 2} R(p_{j2}) - A(p_{j2}) + \sum_{2 < j \leq 3} A(p_{2j}) - R(p_{2j}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial P_3} (0 + A(p_{23}) - R(p_{23})) \\
&\stackrel{(15)}{=} \frac{\partial}{\partial P_3} B(p_{23}) \\
&= \frac{\partial B(p_{23})}{\partial P_3} \\
&= B'(p_{23}) \cdot \frac{\partial p_{23}}{\partial P_3} \\
&\stackrel{(15)}{=} b_{23} \cdot \frac{\partial (P_3 - P_2)}{\partial P_3} \\
&= b_{23} \cdot -1 = -b_{23}.
\end{aligned}$$

en op soortgelijke wijze hebben we $\partial F_2 / \partial P_1 = -b_{12}$. In principe is $\partial F_2 / \partial P_2$, waarbij $k = 2 = i$, de combinatie van de voorgaande twee, oftewel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial P_2} &\stackrel{(14)}{=} \frac{\partial}{\partial P_2} \left(\sum_{1 \leq j < 2} R(p_{j2}) - A(p_{j2}) + \sum_{2 < j \leq 3} A(p_{2j}) - R(p_{2j}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial P_2} (R(p_{12}) - A(p_{12}) + A(p_{23}) - R(p_{23})) \\
&\stackrel{(15)}{=} \frac{\partial}{\partial P_2} (B(p_{23}) - B(p_{12})) \\
&= \frac{\partial B(p_{23})}{\partial P_2} - \frac{\partial B(p_{12})}{\partial P_2} \\
&= B'(p_{23}) \cdot \frac{\partial p_{23}}{\partial P_2} - B'(p_{12}) \cdot \frac{\partial p_{12}}{\partial P_2} \\
&\stackrel{(15)}{=} b_{23} \cdot \frac{\partial (P_3 - P_2)}{\partial P_2} - b_{12} \cdot \frac{\partial (P_2 - P_1)}{\partial P_2} \\
&= b_{23} \cdot -1 - b_{12} \cdot 1 = -b_{12} - b_{13}.
\end{aligned}$$

Hiermee is (16) een geschikte weergave van de Jacobi-matrixelementen van (14). Dan komt deze in het punt $\mathbf{P}_{n*}$ er uit te zien als

$$\begin{aligned}
J(F(\mathbf{P}_{n*})) &= \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \Big|_{\mathbf{P}_{n*}} \\
&\stackrel{(15) \text{ en } (16)}{=} \begin{bmatrix} - \sum_{1 < j \leq n} b_{1j*} & b_{12*} & & & \\ b_{12*} & - \sum_{1 \leq j < 2} b_{j2*} - \sum_{2 < j \leq n} b_{2j*} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ b_{1n*} & b_{2n*} & & & \\ \dots & b_{1n*} & & & \\ \dots & b_{2n*} & & & \\ \ddots & \vdots & & & \\ \dots & - \sum_{1 \leq j < n} b_{jn*} & & & \end{bmatrix}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Dit is een reële symmetrische matrix van n bij n en heeft dus n reële eigenwaarden die informatie geven over de stabiliteit van de evenwichtspunten $\mathbf{P}_{n*}$.

3.1 $n = 3$

We analyseren het geval $n = 3$ door gebruik te maken van de generalisatie bij (17). Hier hadden we al een begin aan gemaakt enkele elementen van de Jacobi-matrix uit te rekenen.

In deze paragraaf beschouwen we eerst drie objecten op een rechte. Hiervan worden de kritieke punten gegeven door de oplossingen van $\dot{\mathbf{P}}_n = \mathbf{0}$ uit de vorige paragraaf.

Voor $n = 3$ ziet de Jacobi-matrix van (14) in het punt $\mathbf{P}_{n*}$ er uit als

$$J(F(\mathbf{P}_{3*})) = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(P_1, P_2, P_3)} \Big|_{\mathbf{P}_{3*}} \stackrel{(17)}{=} \begin{bmatrix} -b_{12*} - b_{13*} & b_{12*} & b_{13*} \\ b_{12*} & -b_{12*} - b_{23*} & b_{23*} \\ b_{13*} & b_{23*} & -b_{13*} - b_{23*} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \det(J(F(\mathbf{P}_{3*})) - \lambda I_3) &\stackrel{(18)}{=} \begin{vmatrix} -b_{12*} - b_{13*} - \lambda & b_{12*} \\ b_{12*} & -b_{12*} - b_{23*} - \lambda \\ b_{13*} & b_{23*} \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(19)}{=} \begin{vmatrix} b_{13*} \\ b_{23*} \\ -b_{13*} - b_{23*} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda(b_{12*} + b_{13*} + b_{23*})) \\ &\quad - 3(b_{13*}b_{23*} + b_{12*}(b_{13*} + b_{23*})) \end{aligned}$$

als het karakteristieke polynoom, ook wel de Jacobiaan, van (18) met als nulpunten

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \quad \text{of} \\ \lambda &= -b_{12*} - b_{13*} - b_{23*} \\ &\quad \pm \sqrt{-b_{12*}b_{13*} - b_{12*}b_{23*} - b_{13*}b_{23*} + b_{12*}^2 + b_{13*}^2 + b_{23*}^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

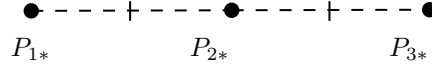
$\lambda = 0$ ($1\times$) geeft aan dat het systeem invariant blijft bij translatie over $\mathbb{R}$. De informatie die de twee andere eigenwaarden geven, wordt pas later helder als we deze omschrijven tot een betrekkelijk eenvoudigere vorm.

Voordat we overgaan op de voorwaarden voor de vorming van een evenwicht, op basis van de overige twee eigenwaarden, behandelen we de zogenaamde evenwichtsverhouding.

3.2 De Evenwichtsverhouding 1 : 2 : 1

Tot zover hebben we het gehad over evenwichtssituaties die we niet expliciet hebben gedefinieerd. Hierdoor missen we de relaties tussen p_{ij*} en b_{ij*} .

Drie punten zijn collineair als ze op een rechte/lijnstuk liggen. Dit is tevens de enige symmetrische configuratie waarbij een evenwicht optreedt in het geval van drie objecten in $\mathbb{R}$, zie figuur 18.



Figuur 18: De evenwichtsformatie van drie objecten op een lijnstuk.

Hierbij ligt één van de objecten, bijvoorbeeld de tweede, in het midden van de overige twee, namelijk de eerste en de derde, zodat $p_{12*} = p_{23*}$. Voor de eenvoud, zoals aangekondigd in sectie 3.1, stellen we dat de punten P_i geen verschil hebben in de y_i -coördinaten, anders gezegd parallel zijn aan de x -as. De verhoudingen tussen de onderlinge afstanden worden dan gegeven door

$$p_{12*} : p_{13*} : p_{23*} = 1 : 2 : 1,$$

oftewel $2p_{12*} = p_{13*} = 2p_{23*}$. Merk hierbij op dat deze verhoudingen, wegens punt-symmetrie in P_{2*} , ook gelden als de oriëntatie van de rechte niet is zoals in figuur 18.

Verdere reductie van het aantal variabelen is niet mogelijk. Er gelden namelijk

$$\begin{aligned} b_{12*} &\stackrel{(13)}{=} a_{12*} - r_{12*} \\ &= \frac{\alpha(1 - \beta p_{12*})}{e^{\beta p_{12*}}} + \frac{\gamma}{p_{12*}^2} \\ &= \frac{\alpha(1 - \beta p_{23*})}{e^{\beta p_{23*}}} + \frac{\gamma}{p_{23*}^2} \\ &= a_{23*} - r_{23*} = b_{23*} \quad \text{en} \\ b_{13*} &\stackrel{(13)}{=} a_{13*} - r_{13*} \\ &= \frac{\alpha(1 - \beta p_{13*})}{e^{\beta p_{13*}}} + \frac{\gamma}{p_{13*}^2} = \frac{\alpha(1 - 2\beta p_{12*})}{e^{2\beta p_{12*}}} + \frac{\gamma}{4p_{12*}^2} \end{aligned}$$

en doordat

$$\begin{aligned} 2b_{12*} &= 2b_{12}(p_{12*}) \\ &\neq b_{13}(p_{13*}) \\ &= b_{13}(2p_{12*}) = b_{13*} \end{aligned}$$

concluderen we dat b_{13*} niet eenvoudig uit te drukken is in b_{12*} . Voor zowel

$$b_{12*} - b_{13*} \geq 0 \quad \text{als} \quad b_{12*} - b_{13*} < 0$$

gaan de niet-triviale eigenwaarden bij (20) over in

$$\begin{aligned} \lambda &= -2b_{12*} - b_{13*} \pm \sqrt{(b_{12*} - b_{13*})^2} \\ &= -2b_{12*} - b_{13*} \pm |b_{12*} - b_{13*}| = -2b_{12*} - b_{13*} \pm (b_{12*} - b_{13*}), \end{aligned} \tag{21}$$

oftewel $\lambda = -b_{12*} - 2b_{13*}$ of $\lambda = -3b_{12*}$. Dit zijn aanzienlijk simpelere uitdrukkingen dan bij (20) waarmee de stabiliteitsanalyse een stuk makkelijker zal verlopen.

3.3 De Initiële Elementaire Afstand

We zagen in het geval van twee objecten dat de initiële waarden van de oplossingen van invloed waren op de domeinen waarin een evenwicht plaatsvondt. Het is dus van belang zicht te krijgen op wat er gebeurt bij een willekeurige keuze ervan.

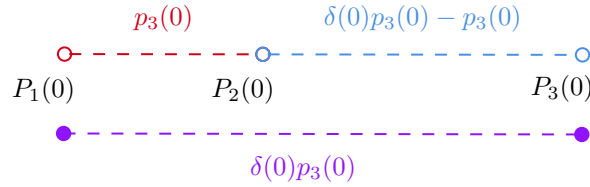
Hiertoe introduceren we voor $t \in [0, \infty)$ een functie $\delta(t) \in [2, \infty)$ en definiëren we

$$\begin{aligned} B_\delta(p_3) &= A_\delta(p_3) - R_\delta(p_3) \\ &:= A(\delta p_3) - R(\delta p_3) = \frac{\alpha \delta p_3}{e^{\beta \delta p_3}} - \frac{\gamma}{\delta p_3} \end{aligned}$$

waarmee de afstanden van de objecten zich initieel verhouden als

$$p_{12}(0) : p_{13}(0) : p_{23}(0) = p_3(0) : \delta(0)p_3(0) : \delta(0)p_3(0) - p_3(0),$$

zie figuur 19 ter illustratie.



Figuur 19: De initiële elementaire afstand $p_3(0)$ waarbij $\delta(0) = 5/2$.

De subscript bij p_3 geeft aan dat we te maken hebben met drie objecten. Dit lieten we in het triviale geval van twee objecten, zoals eerder gezegd, weg. Ingeval $\delta(t) \equiv 2$ zijn de ontstane begin- en eindconfiguraties equivalent aan elkaar en krijgen we te maken met figuur 18. Wegens symmetrie in het punt P_2 geldt namelijk dat

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 &= B(p_{23})(P_3 - P_2) - B(p_{12})(P_2 - P_1) \\ &= B(\delta p_3 - p_3)(\delta p_3 - p_3) - B(p_3)p_3 \\ &= B(2p_3 - p_3)(2p_3 - p_3) - B(p_3)p_3 \\ &= B(p_3)p_3 - B(p_3)p_3 \equiv 0 \end{aligned}$$

Voor $\delta(0) \in (1, 2)$ geldt $p_{23}(0) < p_{12}(0)$ en kunnen we net zo goed stellen dat $p_3(0) = p_{23}(0)$, oftewel het omgekeerde als bij $p_3(0) = p_{12}(0)$ in figuur 19.

We spreken af dat $p_3 = p_3(0) = p_{12}(0)$ de zogenaamde initiële elementaire afstand is die tezamen met $\delta(0) \geq 2$ de overige twee beginafstanden voortbrengt. Hiermee hebben we het aantal variabelen voor de onderlinge afstanden verlaagd naar twee. Dit kunnen we in principe terugbrengen naar één door telkens $\delta(0)$ vast te kiezen om het gebied op te zoeken waarbinnen een evenwicht wordt bereikt, dat wil zeggen de corresponderende maximale waarde van $p_3(0)$ te bepalen bij een gegeven set van parameters.

3.4 Evenwicht voor 3 Objecten in $\mathbb{R}$

Het vastleggen van de aanwezigheid van een evenwicht is mogelijk door te kijken naar de parameters α, β en γ en de beginwaarden $\delta(0)$ en $p_3(0)$. Nemen we aan dat voor $t \rightarrow \infty$ een evenwicht wordt gevormd dan geldt

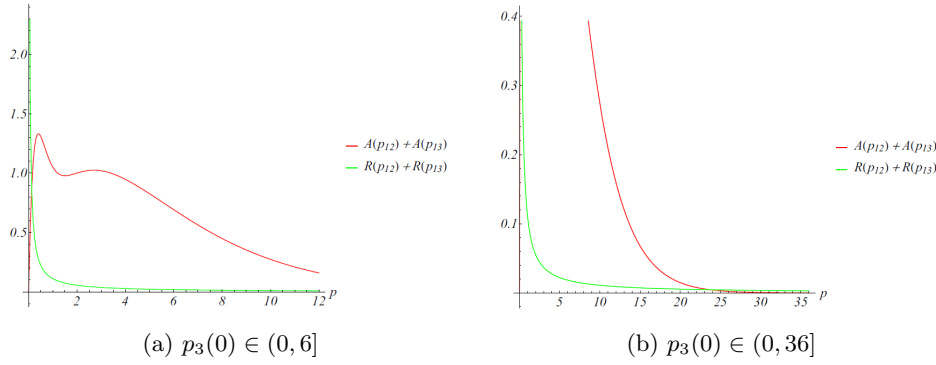
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 2$$

en berekenen we de p_{3*} -coördinaat ervan, die niet hetzelfde is als p_* in het geval van twee objecten maar er wel equivalent aan is, door het volgende stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_1^* &= \lim_{t \rightarrow \infty} B(p_{12}) + B(p_{13}) & \dot{P}_2^* &= \lim_{t \rightarrow \infty} B(p_{23}) - B(p_{12}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} B(p_{12}) + B(\delta(t)p_{12}) & &= \lim_{t \rightarrow \infty} B((\delta(t) - 1)p_{23}) - B(p_{12}^*) \\
&= B(p_{12}^*) + \lim_{t \rightarrow \infty} B(\delta(t)p_{12}) & &= B((2 - 1)p_{23}^*) - B(p_{12}^*) \\
&= B(p_{12}^*) + B(2p_{12}^*) & &= B(p_{23}^*) - B(p_{12}^*) \\
&= B(p_{3}^*) + B(2p_{3}^*) & &= B(p_{12}^*) - B(p_{12}^*) \\
&= \frac{\alpha p_{3}^*}{e^{\beta p_{3}^*}} - \frac{\gamma}{p_{3}^*} + \frac{2\alpha p_{3}^*}{e^{2\beta p_{3}^*}} - \frac{\gamma}{2p_{3}^*} = 0, & &= B(p_{3}^*) - B(p_{3}^*) = 0 \quad \text{en} \\
\dot{P}_{3*} &= -\dot{P}_{1*}.
\end{aligned}$$

Dus is er sprake van een evenwicht als $\dot{P}_1 \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$. Dit wordt duidelijker zodra we voorbeelden bekijken waarbij P_2 zich te midden van de overige twee objecten positioneerd terwijl P_1 en P_3 wegtrekken van elkaar.

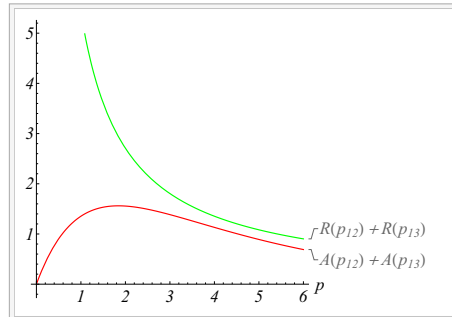
In figuur 20 zien we dat voor $\alpha = 1, \beta = 0.36, \gamma = 0.1$ en $\delta(0) = 9$ de grafieken $A(p_{12}) + A(p_{13})$ en $R(p_{12}) + R(p_{13})$ elkaar in twee punten snijden, oftewel dat $B(p_{12}) + B(p_{13})$ twee nulpunten heeft.



Figuur 20

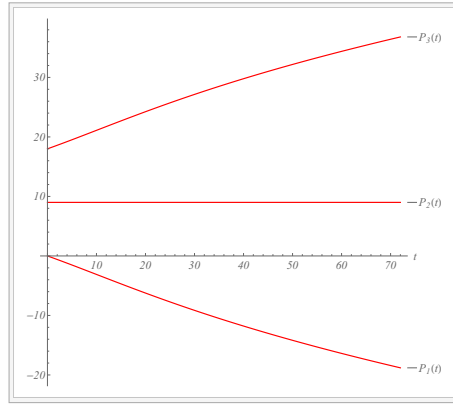
Opmerkelijk is dat figuur 20(a) laat zien dat de afgeleide $A'(p_{12}) + A'(p_{13})$ in meerdere punten gelijk is aan nul, dus meerdere lokale minima en/of maxima heeft. In sectie 3.5 zullen we zien dat dit verschijnsel wordt veroorzaakt door de aantrekkingskracht van het linker evenwichtspunt.

In onderstaande figuur is de verhouding van de beginafstanden wegens $\delta(0) = 2$ gelijk aan de evenwichtsverhouding in paragraaf 3.2, oftewel aan $1 : 2 : 1$. Dit leidt echter niet, zoals blijkt, tot een evenwicht. Dus is dit geval een voorbeeld van figuur 10.



Figuur 21: De grafieken $A(p_{12}) + A(p_{13})$ en $R(p_{12}) + R(p_{13})$ voor $\alpha = 0.81, \beta = 0.36, \gamma = 3.61$ en $\delta(0) = 2$.

Een voorbeeldgrafiek van de oplossingskrommen hiervan zien we in figuur 22



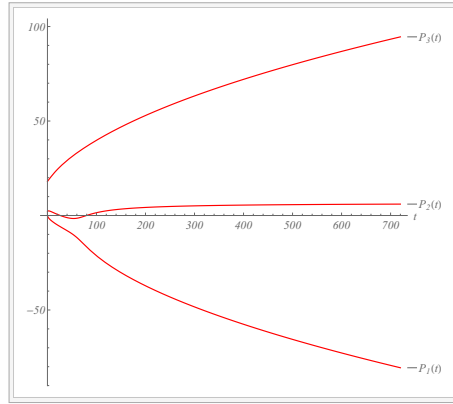
Figuur 22: $\delta(0) = 2$ en $p_3(0) = 9$.

Hieruit concluderen we dat het ontstaan van een evenwicht niet alleen bereikt wordt door objecten in een evenwichtsformatie te plaatsen. De initiële elementaire afstand ligt in dit geval namelijk voorbij het rechter kritieke punt waardoor de opstelling aan het begin er niet meer toe doet.

Door de waarden van $\delta(0)$ en $p_3(0)$ in figuur 22 te verwisselen, krijgen we de grafiek in figuur 23. Hierin zien we juist dat $\dot{P}_2 \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$ én

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 2$$

terwijl er weer geen sprake is van een evenwicht.



Figuur 23: $\delta(0) = 9$ en $p_3(0) = 2$.

We maken hieruit op dat de aanwezigheid van een evenwicht niet naar zekerheid valt te bepalen door alleen $\dot{P}_2$ te bestuderen. Daarentegen geeft $\dot{P}_1$ (én dus ook $\dot{P}_3$) voldoende informatie over het bestaan van equilibria.

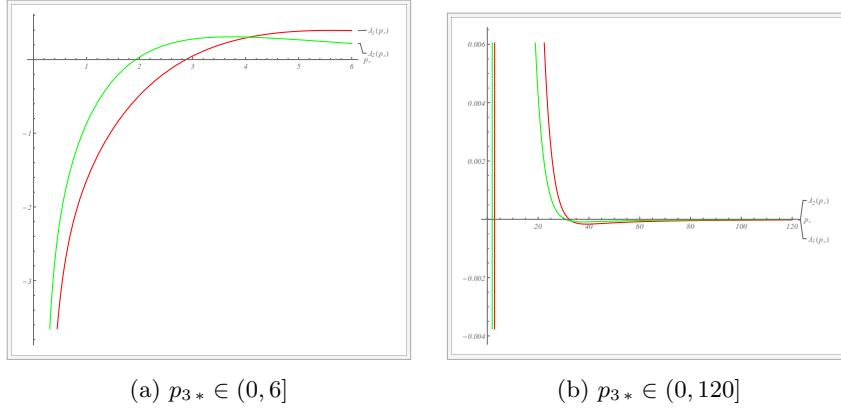
Verder blijkt $\delta(0)$ tezamen met $p_3(0)$ de vorming van groepen binnen een kudde te regelen. Zo vormen individuen die dichter bij elkaar staan eerder een groep met elkaar in plaats van zich te vermengen met de wat verder weg gepositioneerde kuddeleden. In figuur 23 zien we hier een beginsel van waarbij P_2 in eerste instantie opvallend dicht in de buurt van P_3 blijft. Door $\delta(0)$ te verhogen, bij een vaste $p_3(0)$, is het mogelijk dat P_2 en P_3 zich als één individu gedragen. Dit doen ze door bij elkaar in de buurt te blijven. Wel trekken ze als geheel steeds verder weg van P_1 waardoor dat geval niet te classificeren is als een evenwicht, zoals zal blijken in sectie 3.5.1.

3.5 Stabiliteitsanalyse

3.5.1 Evenwichtsvoorwaarden en -paden

Zoals in paragraaf 2.3.1 beginnen we door het karakteristieke polynoom bij (19) te analyseren.

Ook nu geeft $\lambda = 0$ ($1 \times$) aan dat het evenwichtspunt $\mathbf{P}_3^*$ invariant is onder translatie over $\mathbb{R}$. In de figuren 24(a) en (b) zien we de grafieken van de eigenwaarden $\lambda = -3b_{12}^*$ en $\lambda = -b_{12}^* - 2b_{13}^*$.



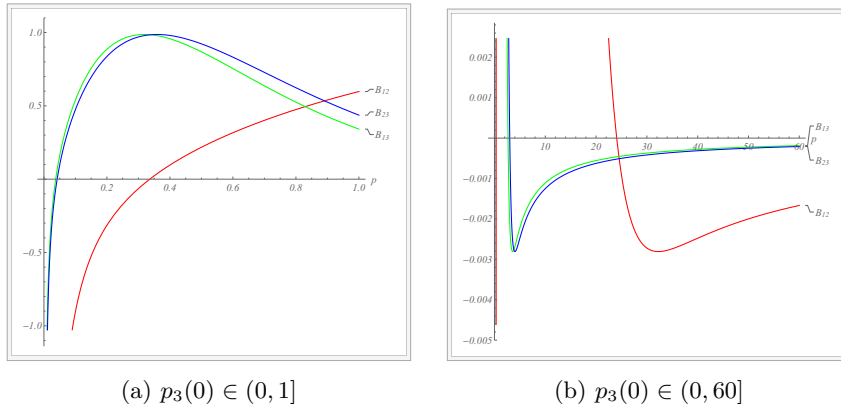
Figuur 24: De grafieken $\lambda(p_3^*) = -3b_{12}^*$ en $\lambda(p_3^*) = -b_{12}^* - 2b_{13}^*$ voor $\alpha = 1, \beta = 0.36$ en $\gamma = 0.1$.

Uit simulaties blijkt dat het linker nulpunt van $\lambda(p_3^*) = -3b_{12}^*$ in de figuren 24(a) en (b) correspondeert met het lokale maximum van $A(p_{12}) + A(p_{13})$ in figuur 20(a). Deze is dus tevens het nulpunt $\hat{p}_3$ van de vergelijking

$$\frac{\partial(A(p_3) + A_\delta(p_3))}{\partial p_3} = -\frac{\alpha(e^{\beta\delta p_3}(\beta p_3 - 1) + \delta e^{\beta p_3}(\beta\delta p_3 - 1))}{e^{\beta(\delta+1)p_3}}. \quad (22)$$

Dus is het linker snijpunt in figuur 20(a) stabiel in de zin dat oplossingskrommen, waarbij $0 < p_3(0) < \hat{p}_3$, ernaar convergeren. Hieruit volgt dat oplossingen, waarbij $p_3(0)$ tussen de twee snijpunten ligt in de figuren 20(a) en (b), niet per definitie een evenwicht teweegbrengen.

In de figuren 25(a) en (b) zien we dat, voor een bepaalde selectie van de parameters, de grafieken B_{ij} elkaar in twee punten snijden.



Figuur 25: De grafieken B_{ij} voor $\alpha = 1, \beta = 0.36, \gamma = 0.1$ en $\delta(0) = 9$.

Ook nu maken we onderscheid tussen de domeinen door de maximale en minimale p_{ij} te definiëren waarvoor $B_{ij} = 0$. Vervolgens bepalen we uit de ontstane deelverzamelingen weer het minimum en het maximum. Zo krijgen we

$$\begin{aligned}\underline{\bar{p}}_{ij} &:= \min \left\{ \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \max \{p_{ij} : B(p_{ij}) = 0\} \right\}, \\ \overline{\underline{p}}_{ij} &:= \max \left\{ \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \min \{p_{ij} : B(p_{ij}) = 0\} \right\}, \\ \overline{\bar{p}}_{ij} &:= \max \left\{ \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \max \{p_{ij} : B(p_{ij}) = 0\} \right\} \quad \text{en} \\ \underline{\underline{p}}_{ij} &:= \min \left\{ \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \min \{p_{ij} : B(p_{ij}) = 0\} \right\}.\end{aligned}$$

Verder zijn er nog twee nulpunten in de domeinen

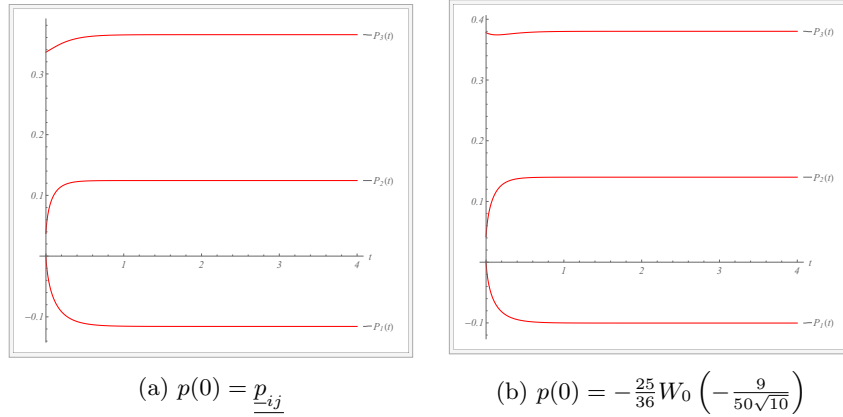
$$\left(\underline{\underline{p}}_{ij}, \underline{\bar{p}}_{ij} \right) \quad \text{en} \quad \left(\overline{\underline{p}}_{ij}, \overline{\bar{p}}_{ij} \right),$$

namelijk

$$-\frac{2}{\beta(\delta-1)}W_0\left(-\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}\right) \quad \text{en} \quad -\frac{2}{\beta(\delta-1)}W_{-1}\left(-\frac{\beta\sqrt{\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

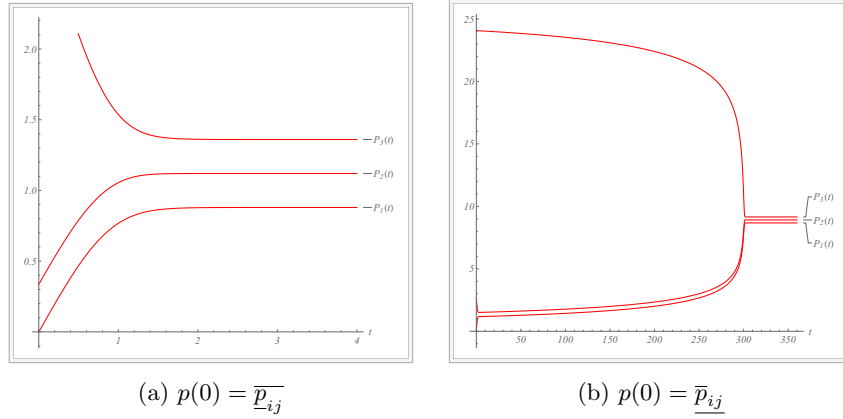
In het vervolg beschouwen we het gedrag van de oplossingen per domein waarbij we met name letten op de evenwichtspaden. Onze keuzes voor de parameters gaan uit naar $\alpha = 1, \beta = 0.36, \gamma = 0.1$ en $\delta(0) = 9$.

1. We zien dat twee paren oplossingen een evenwicht bereiken door te divergeren, namelijk $P_1(t), P_2(t)$ en $P_1(t), P_3(t)$.



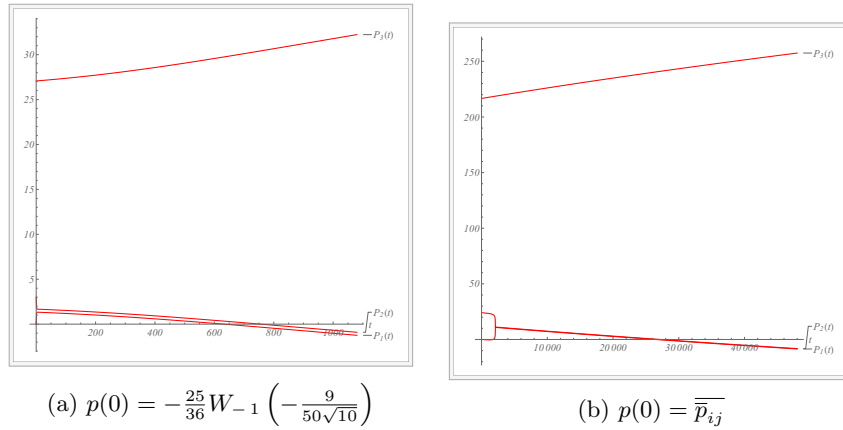
Figuur 26

2. Hier is te zien dat twee paren oplossingen een evenwicht vormen door te convergeren. figuur 27 geeft aan dat een kritieke beginwaarde wordt bereikt. Dit houdt in dat er voor grotere beginwaarden geen evenwicht ontstaat.



Figuur 27

3. Opmerkelijk is dat oplossingen die starten in deze nulpunten geen evenwicht tot stand brengen. In plaats daarvan krijgen we te maken met groepering.



Figuur 28

Zo is er ook voor $\delta(0) = 2$, dus bij gelijkblijvende verhouding, een kritieke waarde voor $p(0)$ waarvoor geen evenwicht wordt gevormd. Overigens een verschijnsel die we in deel 3.4 hebben besproken.

Uit simulaties is gebleken dat oplossingen, waarbij $p(0)$ in een zekere omgeving van een nulpunt, convergeren maar buiten deze omgeving van evenwichtspad veranderen. Dit geldt niet voor de nulpunten

$$\underline{p}_{ij}, \quad -\frac{25}{36} W_0 \left(-9/50\sqrt{10} \right), \quad -\frac{25}{36} W_{-1} \left(-9/50\sqrt{10} \right) \quad \text{en} \quad \bar{p}_{ij}.$$

In het eerste geval convergeren juist alle oplossingen waarbij

$$p(0) \in \left(0, -\frac{25}{36} W_0 \left(-9/50\sqrt{10} \right) \right).$$

Opmerkelijk is dat $\bar{p}_{ij}$ binnen een bepaalde omgeving aantrekkingskracht uitoefent en voor grotere beginwaarden zich juist afstotend gedraagt. Dit punt ligt dus links van $\hat{p}$ als in (22).

In de laatste twee nulpunten is er geen sprake van een evenwicht doordat de oplossingen de neiging hebben te divergeren. Hierdoor liggen deze punten voorbij $\hat{p}$.

Samenvattend hebben we in de laatste paragraaf van dit deel gezien dat kritieke punten een zekere aantrekkingsveld hebben. Het is namelijk zo dat er een deelinterval bestaat tussen evenwichtspunten waarbinnen oplossingskrommen van evenwichtspad veranderen of juist geen evenwicht bereiken. Een interessant vervolgonderzoek is dan ook te baseren op het bestuderen van de gebieden waarin sprake is van aantrekking en afstoting.

4 2 objecten in $\mathbb{R}^2$

Zoals beloofd breiden we in dit deel het eindimensionale model uit. Hierbij zullen we gebruikmaken van soortgelijke definities als in deel 1.

Laten

$$P_1 = P_1(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) \\ P_{21}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad P_2 = P_2(t) = \begin{bmatrix} P_{21}(t) \\ P_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{bmatrix}$$

de posities van twee afzonderlijke objecten in een tweedimensionale ruimte zijn. We definiëren

$$\begin{aligned} p &= p(t) \\ &:= \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(P_{21} - P_{11})^2 + (P_{22} - P_{21})^2} \end{aligned} \quad (23)$$

als de afstand ertussen.

De partiële afgeleiden van de vector p , voor $k \in \{1, 2\}$, zijn

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial P_{1k}} &\stackrel{(23)}{=} \frac{\partial \sqrt{(P_{21} - P_{11})^2 + (P_{22} - P_{21})^2}}{\partial P_{1k}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(P_{21} - P_{11})^2 + (P_{22} - P_{21})^2}} \cdot 2(P_{2k} - P_{1k}) \cdot -1 \\ &= -\frac{P_{2k} - P_{1k}}{p} \\ &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{(P_{21} - P_{11})^2 + (P_{22} - P_{21})^2}} \cdot 2(P_{2k} - P_{1k}) \cdot 1 \right) \\ &\stackrel{(23)}{=} -\frac{\partial \sqrt{(P_{21} - P_{11})^2 + (P_{22} - P_{21})^2}}{\partial P_{2k}} = -\frac{\partial p}{\partial P_{2k}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Merk op dat we, net als in het eindimensionale geval, zonder verlies van algemeenheid, kunnen stellen dat $P_{11} < P_{21}$ en $P_{21} < P_{22}$. Doordat objecten naar elkaar toe of van elkaar af bewegen op een lijn en elkaar niet kunnen passeren, blijven de ongelijkheden gelden voor alle t . Er bestaat immers geen $t = t_0$ waarvoor geldt dat $P_1(t_0) = P_2(t_0)$.

Definiëren van

$$\tilde{A}(p) := \frac{A(p)}{p} \quad \text{en} \quad \tilde{R}(p) := \frac{R(p)}{p} \quad (25)$$

zorgt ervoor dat we de aantrekking van P_{1k} in de richting van P_{2k} en de afstoting van P_{2k} in de richting van P_{1k} , voor $k \in \{1, 2\}$, kunnen weergeven door resp.

$$\begin{aligned} A(p) \frac{P_{2k} - P_{1k}}{p} &= \frac{A(p)}{p} (P_{2k} - P_{1k}) \\ &\stackrel{(25)}{=} \tilde{A}(p) (P_{2k} - P_{1k}) \quad \text{en} \\ R(p) \frac{P_{1k} - P_{2k}}{p} &= -\frac{R(p)}{p} (P_{2k} - P_{1k}) \\ &\stackrel{(25)}{=} -\tilde{R}(p) (P_{2k} - P_{1k}). \end{aligned} \quad (26)$$

Dan beschrijft het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= F(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \\ &:= \begin{cases} \dot{P}_{11} = F_1(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \stackrel{(26)}{=} (\tilde{A}(p) - \tilde{R}(p))(P_{21} - P_{11}) \\ \dot{P}_{12} = F_2(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \stackrel{(26)}{=} (\tilde{A}(p) - \tilde{R}(p))(P_{22} - P_{12}) \\ \dot{P}_{21} = F_3(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \stackrel{(26)}{=} (\tilde{R}(p) - \tilde{A}(p))(P_{21} - P_{11}) \\ \dot{P}_{22} = F_4(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}) \stackrel{(26)}{=} (\tilde{R}(p) - \tilde{A}(p))(P_{22} - P_{12}) \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

de mate waarmee P_{11} , P_{12} , P_{21} en P_{22} veranderen in de tijd. Voor

$$\dot{\mathbf{P}} = (\dot{P}_{11}, \dot{P}_{12}, \dot{P}_{21}, \dot{P}_{22}) = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

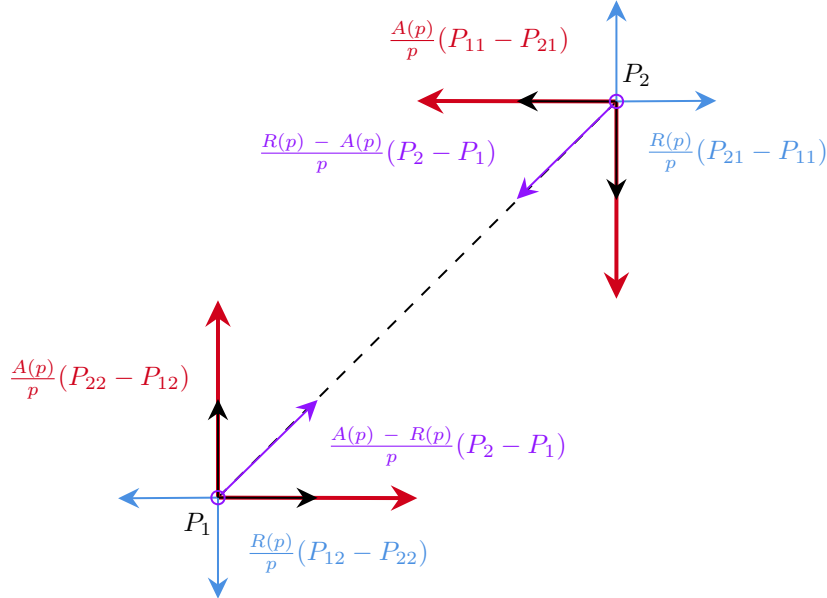
treedt er evenwicht op in een zeker punt

$$\mathbf{P}_* := (P_{11*}, P_{12*}, P_{21*}, P_{22*})$$

waarbij we de afstand tussen P_1 en P_2 in het evenwichtspunt noteren als

$$p_* := \|P_{2*} - P_{1*}\|.$$

In figuur 29 zien we dat de resulterende ‘krachten’ op zowel de eerste als de tweede componenten van de vectoren P_1 en P_2 elkaars tegengestelden zijn.



Figuur 29: De aantrekking (rood) en afstoting (blauw) op de componenten van P_1 en P_2 .

Dus geldt net als in het eendimensionale geval dat $J_{ij} = J_{ji}$ waarbij $i \neq j$. Voor het bepalen van de Jacobiaan is het dan ook, wegens symmetrie, voldoende om twee diagonaalelementen en één niet-diagonaalelement te bepalen. Door gebruik te maken van deze eigenschappen blijkt dat de Jacobi-matrix inderdaad af te leiden is uit de drie partiële afgeleiden

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_{11}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial P_{21}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_{12}},$$

immers

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} &= -\frac{\partial F_1}{\partial P_{21}} = \frac{\partial F_3}{\partial P_{21}}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} &= -\frac{\partial F_1}{\partial P_{22}} = \frac{\partial F_3}{\partial P_{22}} \quad \text{en} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} &= -\frac{\partial F_2}{\partial P_{22}} = \frac{\partial F_4}{\partial P_{22}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Merk op dat $\partial F_2 / \partial P_{21}$ hier niet in voorkomt. Deze bepalen we op soortgelijke manier, namelijk

$$\frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} = \frac{\partial F_2}{\partial P_{11}} = -\frac{\partial F_2}{\partial P_{21}}.$$

Hiermee komt de rechter bovendriehoeksmatrix vast te liggen waarmee we uiteindelijk de Jacobiaan kunnen berekenen.

We schrijven de uitdrukkingen bij (26) om naar

$$\tilde{B} = \tilde{B}(p) := \tilde{A}(p) - \tilde{R}(p) \quad \text{en} \quad \tilde{b}_* = \tilde{b}(p_*) := \tilde{B}'(p_*) \quad (29)$$

en bepalen de partiële afgeleiden van F_1 naar P_{11} en P_{21} en van F_2 naar P_{21} , anders gezegd

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} &\stackrel{(27)}{=} \frac{\partial \tilde{B}(p)(P_{21} - P_{11})}{\partial P_{11}} \\ &= \tilde{B}'(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial P_{11}} \cdot (P_{21} - P_{11}) + \tilde{B}(p) \cdot \frac{\partial(P_{21} - P_{11})}{\partial P_{11}} \\ &\stackrel{(24)}{=} \tilde{B}'(p) \cdot -\frac{P_{21} - P_{11}}{p} \cdot (P_{21} - P_{11}) - \tilde{B}(p) \\ &= -\frac{\tilde{B}'(p)(P_{21} - P_{11})^2}{p} - \tilde{B}(p) \\ &= -\left(\frac{\tilde{B}'(p)(P_{21} - P_{11})^2}{p} + \tilde{B}(p) \right) \\ &= -\left(\tilde{B}'(p) \cdot \frac{P_{21} - P_{11}}{p} \cdot (P_{21} - P_{11}) + \tilde{B}(p) \right) \\ &\stackrel{(24)}{=} -\left(\tilde{B}'(p) \cdot \frac{\partial p}{\partial P_{21}} \cdot (P_{21} - P_{11}) + \tilde{B}(p) \cdot \frac{\partial(P_{21} - P_{11})}{\partial P_{21}} \right) \\ &\stackrel{(27)}{=} -\frac{\partial \tilde{B}(p)(P_{21} - P_{11})}{\partial P_{21}} \stackrel{(28)}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial P_{21}}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} &\stackrel{(27)}{=} -\frac{\tilde{B}'(p)(P_{21} - P_{11})(P_{22} - P_{12})}{p} - \tilde{B}(p) \\ &= -\left(\frac{\tilde{B}'(p)(P_{21} - P_{11})(P_{22} - P_{12})}{p} + \tilde{B}(p) \right) \stackrel{(28)}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial P_{22}} \quad \text{en} \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} &\stackrel{(27)}{=} -\frac{\tilde{B}'(p)(P_{22} - P_{12})^2}{p} - \tilde{B}(p) \\ &= -\left(\frac{\tilde{B}'(p)(P_{22} - P_{12})^2}{p} + \tilde{B}(p) \right) \stackrel{(28)}{=} -\frac{\partial F_2}{\partial P_{22}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Vervolgens definiëren we

$$\tilde{b} = \tilde{b}(p) := \frac{\tilde{B}'(p)}{p}, \quad x := P_{21} - P_{11} \quad \text{en} \quad y := P_{22} - P_{12} \quad (31)$$

en doordat $\tilde{B}(p_*) = 0$ komt de Jacobi-matrix van (27) in het punt $\mathbf{P}_*$ er uit te zien als

$$\begin{aligned} J(F(\mathbf{P}_*)) &= \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, F_4)}{\partial(P_{11*}, P_{12*}, P_{21*}, P_{22*})} \\ &\stackrel{(28)}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & -\frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} & -\frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & \frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} & -\frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & -\frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} & -\frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & -\frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} & \frac{\partial F_1}{\partial P_{12}} & \frac{\partial F_2}{\partial P_{12}} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_*} \\ &\stackrel{(30) \text{ en } (31)}{=} \begin{bmatrix} -\tilde{b}_* x_*^2 & -\tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* x_*^2 & \tilde{b}_* x_* y_* \\ -\tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* y_*^2 & \tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* y_*^2 \\ \tilde{b}_* x_*^2 & \tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* x_*^2 & -\tilde{b}_* x_* y_* \\ \tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* y_*^2 & -\tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* y_*^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (32)$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} |J(F(\mathbf{P}_*)) - \lambda I_4| &= \begin{vmatrix} -\tilde{b}_* x_*^2 - \lambda & -\tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* x_*^2 & \tilde{b}_* x_* y_* \\ -\tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* y_*^2 - \lambda & \tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* y_*^2 \\ \tilde{b}_* x_*^2 & \tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* x_*^2 - \lambda & -\tilde{b}_* x_* y_* \\ \tilde{b}_* x_* y_* & \tilde{b}_* y_*^2 & -\tilde{b}_* x_* y_* & -\tilde{b}_* y_*^2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -\lambda \\ x_*^2 & x_* y_* & -x_*^2 - \lambda & -x_* y_* \\ x_* y_* & y_*^2 & -x_* y_* & -y_*^2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & -x_*^2 - \lambda & -x_* y_* \\ 0 & -\lambda & -x_* y_* & -y_*^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 \left(2\tilde{b}_* (x_*^2 + y_*^2) + \lambda \right) \end{aligned} \quad (33)$$

als de Jacobiaan van (32) waarbij p_* , wegens (23) en (31), gelijk is aan $x_*^2 + y_*^2$.

Opnieuw vinden we $\lambda = 0$ als nulpunt (dit keer drievoudig). Deze oplossing duidt de drie vrijheidsgraden van het evenwicht aan, namelijk de horizontale en verticale translaties als in $\mathbb{R}$ en de rotatie om het zwaartepunt (Engels: center of mass) van $\mathbf{P}_*$, namelijk

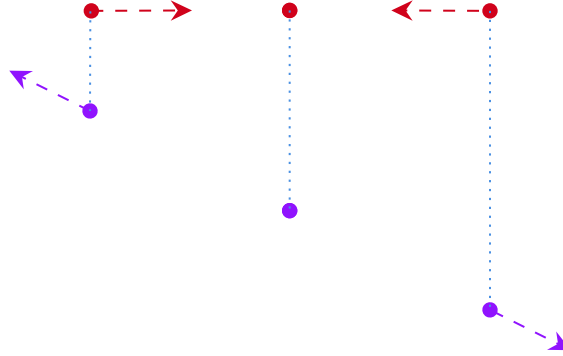
$$M_{12*} := \frac{P_{1*} + P_{2*}}{2}.$$

Verder geldt dat

$$\begin{aligned}
\lambda &= -2\tilde{b}_*(x_*^2 + y_*^2) \\
&\stackrel{(31)}{=} -2 \frac{\tilde{B}'(p_*)}{p_*} \cdot p_*^2 \\
&\stackrel{(29)}{=} -2 \frac{B'(p_*)}{p_*} \cdot p_* \\
&= -2b_* = -2(a_* - r_*)
\end{aligned}$$

en dus is het evenwichtspunt stabiel als $r_* < a_*$ en instabiel als $a_* < r_*$. Ook nu trekken we dezelfde conclusies, met betrekking tot de stabiliteit van de evenwichtspunten, als in het eendimensionale geval. Dit komt er dus ook op neer dat de evenwichtspaden hetzelfde zijn als in $\mathbb{R}$. De objecten verplaatsen zich namelijk op de rechte (ook wel de eendimensionale deelruimte) waar ze op liggen waarbij de oriëntatie ervan niet uitmaakt.

In figuur 30 hebben we ervoor gezorgd dat de x_i -coördinaten hetzelfde zijn, zie de blauwe korte strepen. Wél moet dit figuur gezien worden als twee aparte gevallen met drie objecten in plaats van één met zes.



Figuur 30: Objecten in het rood vormen een evenwicht terwijl die in het paars deze uit de weg gaan.

We zien dat de rode punten een evenwicht vormen, door naar elkaar toe te trekken, hetgeen equivalent is aan het eendimensionale geval. De paarse punten in figuur 30 daarentegen laten zien dat het verschil in de y_i -coördinaten ervoor kan zorgen dat p_3 voorbij het instabiele evenwichtspunt ligt waardoor ze uit elkaar (blijven) gaan.

5 3 objecten in $\mathbb{R}^2$

In dit deel breiden we het model juist uit door het aantal objecten te vermeerderen met één. In de delen die volgen zullen we bepaalde evenwichtsconfiguraties bestuderen, de karakterieken ervan bepalen en vermoedens opstellen.

Laten

$$P_1 = P_1(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) \\ P_{12}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}, \quad P_2 = P_2(t) = \begin{bmatrix} P_{21}(t) \\ P_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{en} \\ P_3 = P_3(t) = \begin{bmatrix} P_{31}(t) \\ P_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{31} \\ P_{32} \end{bmatrix}$$

de posities van drie afzonderlijke objecten in $\mathbb{R}^2$ zijn. We definiëren

$$p_{ij} = p_{ij}(t) \\ := ||P_j - P_i|| = \sqrt{(P_{j1} - P_{i1})^2 + (P_{j2} - P_{i2})^2} \quad (34)$$

als de afstanden ertussen. Vanaf nu is het weer noodzakelijk om gebruik te maken van indices om de drie onderlinge afstanden uit elkaar te houden.

De partiële afgeleiden van een vector p_{ij} zijn voor $k \in \{1, 2\}$ uit te drukken als

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ij}}{\partial P_{ik}} &\stackrel{(34)}{=} \frac{\partial \sqrt{(P_{j1} - P_{i1})^2 + (P_{j2} - P_{i2})^2}}{\partial P_{ik}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(P_{j1} - P_{i1})^2 + (P_{j2} - P_{i2})^2}} \cdot 2(P_{jk} - P_{ik}) \cdot -1 \\ &= -\frac{P_{jk} - P_{ik}}{p_{ij}} \\ &= -\left(\frac{P_{jk} - P_{ik}}{p_{ij}}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{(P_{j1} - P_{i1})^2 + (P_{j2} - P_{i2})^2}} \cdot 2(P_{jk} - P_{ik}) \cdot 1\right) \\ &\stackrel{(34)}{=} -\frac{\partial \sqrt{(P_{j1} - P_{i1})^2 + (P_{j2} - P_{i2})^2}}{\partial P_{jk}} = -\frac{\partial p_{ij}}{\partial P_{jk}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Definiëren van

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}(p_{ij}) := \frac{A(p_{ij})}{p_{ij}} \quad \text{en} \quad \tilde{R}_{ij} = \tilde{R}(p_{ij}) := \frac{R(p_{ij})}{p_{ij}} \quad (36)$$

zorgt ervoor dat de aantrekking van P_{ik} in de richting van P_{jk} en de afstoting van P_{jk} in de richting van P_{ik} , voor $i, j \in \{1, 2, 3\}$ en $k \in \{1, 2\}$, worden gegeven door resp.

$$\begin{aligned} A(p_{ij}) \frac{P_{jk} - P_{ik}}{p_{ij}} &= \frac{A(p_{ij})}{p_{ij}} (P_{jk} - P_{ik}) \\ &= \tilde{A}(p_{ij}) (P_{jk} - P_{ik}) \quad \text{en} \\ R(p_{ij}) \frac{P_{ik} - P_{jk}}{p_{ij}} &= -\frac{R(p_{ij})}{p_{ij}} (P_{jk} - P_{ik}) \\ &= -\tilde{R}(p_{ij}) (P_{jk} - P_{ik}). \end{aligned} \quad (37)$$

Dan wordt het stelsel, in termen van aantrekking en afstoting, als in het geval van twee objecten in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_3 &= F(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \\ &:= \begin{cases} \dot{P}_{11} = F_1(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} \tilde{B}(p_{12})x_{12} \\ \quad + \tilde{B}(p_{13})x_{13} \\ \dot{P}_{12} = F_2(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} \tilde{B}(p_{12})y_{12} \\ \quad + \tilde{B}(p_{13})y_{13} \\ \dot{P}_{21} = F_3(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} -\tilde{B}(p_{12})x_{12} \\ \quad + \tilde{B}(p_{23})x_{23} \\ \dot{P}_{22} = F_4(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} -\tilde{B}(p_{12})y_{12} \\ \quad + \tilde{B}(p_{23})y_{23} \\ \dot{P}_{31} = F_5(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} -\tilde{B}(p_{13})x_{13} \\ \quad - \tilde{B}(p_{23})x_{23} \\ \dot{P}_{32} = F_6(P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}, P_{31}, P_{32}) \stackrel{(37)}{=} -\tilde{B}(p_{13})y_{13} \\ \quad - \tilde{B}(p_{23})y_{23} \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

waarbij

$$\tilde{B} = \tilde{B}(p_{ij}) := \tilde{A}(p_{ij}) - \tilde{R}(p_{ij}), \quad x_{ij} := P_{j1} - P_{i1} \quad \text{en} \quad y_{ij} := P_{j2} - P_{i2}. \quad (39)$$

Verder geldt net als bij (31) dat

$$\tilde{b}_{ij} = \tilde{b}(p_{ij}) := \frac{\tilde{B}'(p_{ij})}{p_{ij}} \quad (40)$$

en door (29) toe te passen kunnen we de evaluatie ervan in het evenwichtspunt $\mathbf{P}_{3*}$ noteren als

$$\tilde{b}_{ij*} = \tilde{b}(p_{ij*}) := \frac{\tilde{B}'(p_{ij*})}{p_{ij*}}.$$

De matrix, beschreven door

$$J(F(\mathbf{P}_*)) - \lambda I_6 = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)}{\partial(P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}, P_{31}, P_{32})} \Big|_{\mathbf{P}_*},$$

ziet er, door gebruik te maken van (38), (39) en (40), uit als

$$\left[\begin{array}{cc} -\tilde{b}_{12} * x_{12}^2 * -\tilde{b}_{13} * x_{13}^2 * -\lambda & -\tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * -\tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * \\ -\tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * -\tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * & -\tilde{b}_{12} * y_{12}^2 * -\tilde{b}_{13} * y_{13}^2 * -\lambda \\ \tilde{b}_{12} * x_{12}^2 * & \tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * \\ \tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * & \tilde{b}_{12} * y_{12}^2 * \\ \tilde{b}_{13} * x_{13}^2 * & \tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * \\ \tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * & \tilde{b}_{13} * y_{13}^2 * \\ \\ \tilde{b}_{12} * x_{12}^2 * & \tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * \\ \tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * & \tilde{b}_{12} * y_{12}^2 * \\ -\tilde{b}_{12} * x_{12}^2 * -\tilde{b}_{23} * x_{23}^2 * -\lambda & -\tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * -\tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * \\ -\tilde{b}_{12} * x_{12} * y_{12} * -\tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * & -\tilde{b}_{12} * y_{12}^2 * -\tilde{b}_{23} * y_{23}^2 * -\lambda \\ \tilde{b}_{23} * x_{23}^2 * & \tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * \\ \tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * & \tilde{b}_{23} * y_{23}^2 * \\ \\ \tilde{b}_{13} * x_{13}^2 * & \tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * \\ \tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * & \tilde{b}_{13} * y_{13}^2 * \\ \tilde{b}_{23} * x_{23}^2 * & \tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * \\ \tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * & \tilde{b}_{23} * y_{23}^2 * \\ \\ -\tilde{b}_{13} * x_{13}^2 * -\tilde{b}_{23} * x_{23}^2 * -\lambda & -\tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * -\tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * \\ -\tilde{b}_{13} * x_{13} * y_{13} * -\tilde{b}_{23} * x_{23} * y_{23} * & -\tilde{b}_{13} * y_{13}^2 * -\tilde{b}_{23} * y_{23}^2 * -\lambda \end{array} \right].$$

Dit geeft

$$\begin{aligned} & \lambda^3(\lambda(b_{13*}b_{23*}(x_{23*}^2(3x_{13*}^2 + 4y_{13*}^2) - 2x_{13*}x_{23*}y_{13*}y_{23*} + (4x_{13*}^2 + \\ & \quad 3y_{13*}^2)y_{23*}^2) + 2b_{13*}(x_{13*}^2 + y_{13*}^2)\lambda + \lambda(2b_{23*}(x_{23*}^2 + y_{23*}^2) + \lambda)) + \\ & \quad b_{12*}(6b_{13*}b_{23*}(x_{23*}^2(x_{13*}^2y_{12*}^2 - x_{12*}x_{13*}y_{12*}y_{13*} + (x_{12*}^2 + y_{12*}^2)y_{13*}^2) - \\ & \quad x_{23*}(x_{13*}y_{12*} + x_{12*}y_{13*})(x_{12*}x_{13*} + y_{12*}y_{13*})y_{23*} + (x_{13*}^2(x_{12*}^2 + y_{12*}^2) - \\ & \quad x_{12*}x_{13*}y_{12*}y_{13*} + x_{12*}^2y_{12*}^2)y_{23*}^2) + b_{13*}(x_{13*}^2(3x_{12*}^2 + 4y_{12*}^2) - \\ & \quad 2x_{12*}x_{13*}y_{12*}y_{13*} + (4x_{12*}^2 + 3y_{12*}^2)y_{13*}^2)\lambda + \lambda(b_{23*}(x_{23*}^2(3x_{12*}^2 + \\ & \quad 4y_{12*}^2) - 2x_{12*}x_{23*}y_{12*}y_{23*} + (4x_{12*}^2 + 3y_{12*}^2)y_{23*}^2) + 2(x_{12*}^2 + y_{12*}^2)\lambda))) \end{aligned}$$

als het karakteristieke polynoom.

Het gaat er ons natuurlijk niet om het bestuderen van de nulpunten van een polynoom behorende bij een evenwichtspunt waarvan de configuratie vooraf onbekend is.

Wel is het belangrijk op te merken dat in elk geval de symmetrieën waaronder het systeem invariant blijft aanwezig zijn als het drievoudige nulpunt $\lambda = 0$. Ook nu zullen we, zonder verlies van algemeenheid, relatief eenvoudige begininformaties kiezen zodat we meer houvast krijgen op het probleem.

5.1 Collineariteit in $\mathbb{R}^2$

Drie punten zijn collineair als ze op een lijn liggen. Voor een evenwichtssituatie geldt bovendien dat

$$2p_{12*} = p_{13*} = 2p_{23*}.$$

In dit deel tonen we aan dat de verhouding van de afstanden tussen de objecten wordt overgedragen aan de verhouding van de afstanden tussen de corresponderende coördinaten ervan.

Voor de eenvoud kiezen we ervoor, gebruikmakende van de symmetrieën in het vorige deel, de verschillen tussen de y_* -coördinaten gelijk te stellen aan nul, oftewel

$$y_{12*} = y_{13*} = y_{23*} = 0.$$

Dan krijgen we

$$2p_{12*} = 2\sqrt{x_{12*}^2} = \sqrt{4x_{12*}^2} = \sqrt{(2x_{12*})^2} = \sqrt{x_{13*}^2} = p_{13*}$$

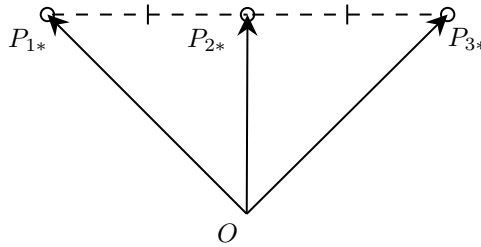
en doordat geldt

$$x_{13*} = x_{12*} + x_{23*}$$

vinden we

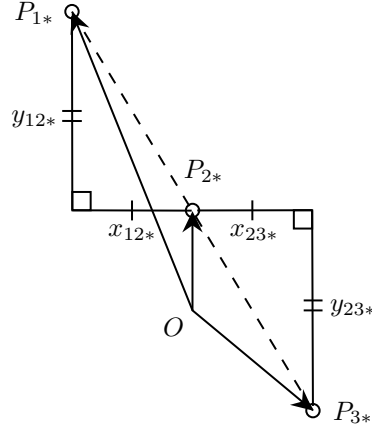
$$2x_{12*} = x_{13*} = 2x_{23*}.$$

In figuur 31 zien we hier een voorbeeld van.



Figuur 31: Drie objecten op een lijn gezien vanuit een referentiepunt O .

De verhoudingen tussen de x_{i*} -coördinaten geldt overigens ook voor de y_{i*} -coordinate. Hieronder geven we een voorbeeld waarbij de oriëntatie van de rechte willekeurig gekozen is. Wij vereenvoudigen dit geval dus door het triviale geval te bekijken.



Figuur 32: De onderlinge afstandsverhoudingen tussen objecten op een ‘scheve’ lijn.

Dan komt de Jacobiaan van (38) in het punt $\mathbf{P}_{3*}$ er uit te zien als

$$J(F(\mathbf{P}_{3*})) - \lambda I_6 = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)}{\partial(P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}, P_{31}, P_{32})} \Big|_{\mathbf{P}_{3*}} - \lambda I_6$$

$$= \begin{bmatrix} -\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - 4\tilde{b}_{13*}x_{12*}^2 - \lambda & 0 & \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & 0 & -2\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\tilde{b}_{13*}x_{12*}^2 & 0 & \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4\tilde{b}_{13*}x_{12*}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{13*}x_{12*}^2 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4\tilde{b}_{13*}x_{12*}^2 - \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

met als karakteristiek polynoom

$$\lambda^4(\lambda + 3b_{12*})(\lambda + b_{12*} + 2b_{13*}) = 0.$$

We zien dat de niet-nul eigenwaarden hetzelfde zijn als bij (21), oftewel als in het eendimensionale geval. Hierdoor behouden de evenwichtspunten hun karakter voor parameter- en beginwaarden als in paragraaf 3.4 en 3.5.

Naast de drie eigenwaarden nul, voor de drie vrijheidsgraden van het systeem, vinden we een vierde eigenwaarde nul. Deze is op de volgende twee manieren te interpreteren:

1. óf de objecten vormen geen collineair equilibrium ingeval ze niet op één lijn beginnen;
2. óf perturberen van objecten in een collineaire toestand resulteert in een andere evenwichtsconfiguratie. Voorbeelden hiervan komen we in het volgende deel tegen.

(1) komt doordat een collineair equilibrium niet vanuit nature wordt bereikt. Dus is dit, in tegenstelling tot het eendimensionale equivalent, een instabiele evenwichtsformatie. Dit betekent dus dat objecten, mits gedwongen zoals in $\mathbb{R}$, elkaar niet benaderen om op een lijn plaats te nemen.

Dit heeft niets te maken met het rechter evenwichtspunt in figuur 7 uit paragraaf 2.2. Daar bevonden objecten zich immers al op een lijn en was de onderlinge beginafstand te groot om een ruststand te kunnen bereiken. Hier gaat het juist om een configuratie die niet wordt geprefereerd.

Hieruit concluderen we dat als de $x_i(0)$ -coördinaten in zowel $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}^2$ gelijk zijn het er niet per definitie op neerkomt dat in beide gevallen een evenwicht optreedt. In $\mathbb{R}^2$ is het namelijk van belang dat de objecten collineair zijn. Ingeval er verschil zit tussen de $y_i(0)$ -coördinaten ervan, door een perturbatie bijvoorbeeld, volgt uit de tweede interpretatie dat er een mogelijkheid bestaat waarbij geen sprake is van evenwicht of juist een andere evenwichtsformatie wordt aangenomen.

5.2 Gelijkzijdigheid in $\mathbb{R}^2$

Net als in het collineaire geval gaan we, gebruikmakende van de symmetrieën van het systeem, aan het werk door een eenvoudige configuratie te construeren. We zorgen er hierbij voor dat de verhouding van de x_{ij*} -coördinaten hetzelfde blijft als in het collineaire geval, oftewel

$$2x_{12*} = x_{13*} = 2x_{23*}.$$

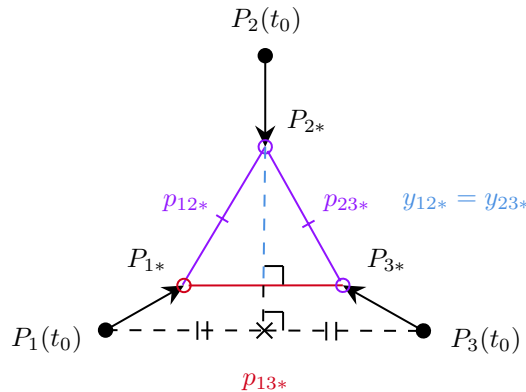
Voor de y_{ij*} -coördinaten kiezen we

$$y_{12*} = y_{23*} \quad \text{en} \quad y_{13*} = 0$$

zodat wegens gelijkzijdigheid geldt

$$y_{12*} = x_{12*}\sqrt{3},$$

zie figuur 33.



Figuur 33: De vorming van een gelijkzijdige driehoek.

Overigens kunnen we dit figuur interpreteren als het gevolg van een perturbatie van P_2 over de middelloodlijn door P_1 en P_3 .

Nu hebben we het aantal variabelen gereduceerd tot één en een evenwicht beschreven waarbij objecten de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek opzoeken zoals in figuur 33. Dit komt mede doordat $\tilde{b}_{12*}$ vast komt te liggen als x_{12*} bepaald wordt. Dan krijgt de Jacobi-matrix van (38) in het punt $\mathbf{P}_{3*}$ de vorm van

$$\begin{aligned}
J(F(\mathbf{P}_{3*})) - \lambda I_6 &= \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)}{\partial(P_{11}, P_{21}, P_{12}, P_{22}, P_{31}, P_{32})} \Big|_{\mathbf{P}_{3*}} - \lambda I_6 \\
&= \begin{bmatrix}
-5\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
-\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -\frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & \frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -2\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & \\
\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
4\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & 0 & \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & 4\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & 0 & \\
\frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & 0 & 0 & \\
-\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
-\frac{3}{2}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & \frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -5\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & \\
\frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 & -\frac{3}{4}\tilde{b}_{12*}x_{12*}^2 - \lambda &
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

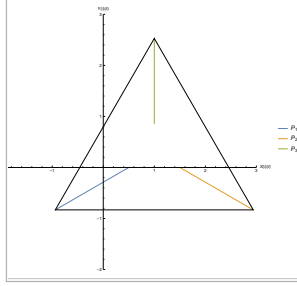
met als karakteristiek polynoom

$$\begin{aligned}
&\lambda^3(\lambda + 21b_{12*}x_{12*}^2/4)(\lambda + (39 + \sqrt{1137})b_{12*}x_{12*}^2/8) \cdot \\
&(\lambda + (39 - \sqrt{1137})b_{12*}x_{12*}^2/8).
\end{aligned}$$

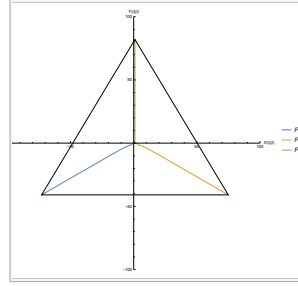
We zien dat $21/4$, $(39 + \sqrt{1137})/8$ en $(39 - \sqrt{1137})/8$ groter zijn dan nul, anders gezegd zijn alle eigenwaarden negatief. Dit betekent dat deze formatie stabiel is. Dus zullen drie geïdealiseerde dieren, ook wel objecten, onder een invloed van een aantrekkings-/afstotingskrachtveld een gelijkzijdige driehoek-kudde vormen.

In het vervolg onderscheiden we de (evenwichts)paden door telkens verbanden te leggen met de equivalente gevallen ervan in $\mathbb{R}$:

1. In figuur 34(a) zien we dat de objecten zich initieel als $1 : 1 : 1$ verhouden tot elkaar, zie hiervoor de beginpunten in de buurt van de oorsprong. Na verloop van tijd blijft deze verhouding behouden maar komt er geen evenwicht tot stand. Dit geval kwamen we tegen in figuur 22.



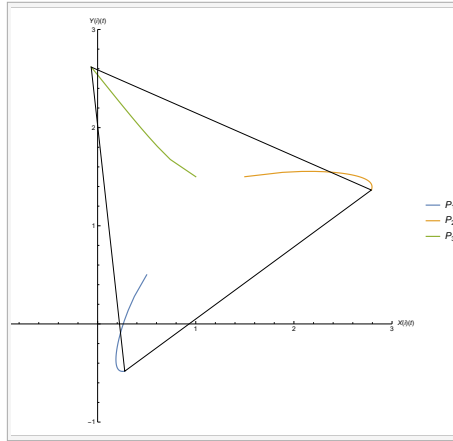
(a)



(b)

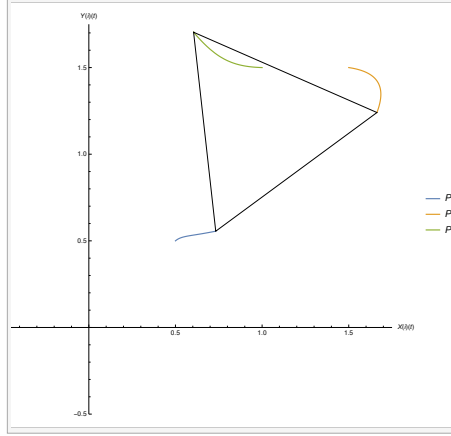
Figuur 34: $\alpha = 0.81, \beta = 0.36, \gamma = 8.1, P_1(0) = (1/2, 0), P_2(0) = (3/2, 0), P_3(0) = (1, \sqrt{3}/2)$ en $t \in [0, 2/5]$ (links) & $\gamma = 3.61, P_2(0) = 1/10$ en $t \in [0, 1000]$ (rechts).

2. De objecten, niet beginnend op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek in figuur 34(b), nemen de evenwichtsverhouding wel aan maar ook nu is er geen sprake van evenwicht. Dit gedrag zagen we ook in figuur 23. We maken hieruit op dat de gelijkzijdige driehoek daadwerkelijk een stabiel evenwicht is. Dus zijn er situaties mogelijk waarbij er geen evenwicht tot stand komt maar dat de objecten toch in deze formatie uit elkaar gaan.
3. We zien dat de objecten een evenwicht vormen waarbij de afstanden ertussen groter worden zoals in de figuren 26(a) en (b).



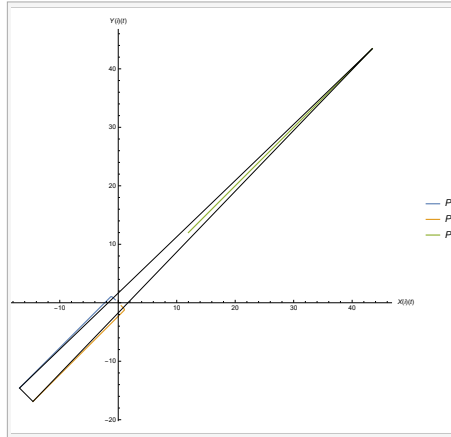
Figuur 35: $\alpha = 2.56, \beta = 0.36, \gamma = 8.1, P_1(0) = (1/2, 1/2), P_2(0) = (3/2, 3/2), P_3(0) = (1, 3/2)$ en $t \in [0, 128]$.

4. In dit geval wordt een evenwicht bereikt waarbij aan de evenwichtspaden te zien is dat de onderlinge afstanden kleiner worden. We zien namelijk dat twee objecten naar elkaar toe trekken (blauw en oranje) en dat het derde object (groen) ruimte vrijmaakt door een klein stuk weg te trekken van de overige twee deeltjes. Deze correspondeert met de figuren 27(a) en (b).



Figuur 36: $\alpha = \gamma = 1, \beta = 0.25, P_1(0) = (1/2, 1/2), P_2(0) = (3/2, 3/2), P_3(0) = (1, 3/2)$ en $t \in [0, 6]$.

5. Tot slot beschouwen we het geval, uitgaande van een willekeurige beginsituatie, waarbij zowel geen evenwicht wordt bereikt als geen evenwichtsverhouding wordt aangenomen. Hiermee is dit gedrag parallel aan het clusteringsgedrag in de figuren 28(a) en (b) en krijgen we te maken met het tot stand komen van een gelijkbenige driehoek.



Figuur 37: $\alpha = 0.36, \beta = 0.25, \gamma = 1.69, P_1(0) = (-1/2, 1/2), P_2(0) = (1/2, -1/2), P_3(0) = (12, 12)$ en $t \in [0, 1]$.

We concluderen dat objecten, die initieel niet-collineair zijn óf uit collineaire toestand worden gehaald, de neiging hebben om een gelijkzijdige driehoek te vormen voor bepaalde parameters α, β en γ en beginwaarden $P_i(0)$.

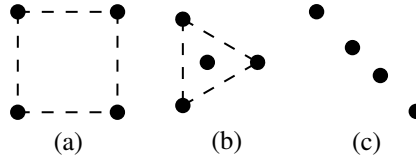
Dus is dit de stabiele evenwichtsconfiguratie waar we in het voorgaande deel al impliciet naar verwezen.

6 n objecten in $\mathbb{R}^2$

Tot zover hebben we gezien dat collineaire evenwichten instabiel zijn in de zin dat kleine verstoringen ervan leiden tot overgang in andere evenwichtsconfiguraties. In dit deel beschouwen we de opstellingen die objecten aannemen in ruststanden. Hiertoe zullen we voor enkele $n > 3$ de waargenomen formaties laten zien.

6.1 $n = 4$

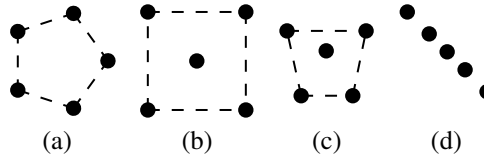
In figuur 38 zien we drie evenwichtspunten waarvan (b) en (c) niet vanzelfsprekend worden gevormd. Hiervoor zijn specifieke beginstanden vereist doordat we weten dat kleine perturbaties hieraan resulteren in ofwel (a) ofwel in een uiteenvalling van de ruststand.



Figuur 38: Evenwichtssituaties voor vier objecten.

6.2 $n = 5$

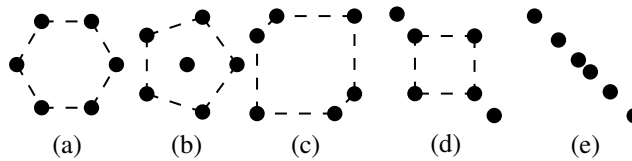
We beginnen langzaam maar zeker een hiërarchie te zien in de equilibria. We hebben figuur 39(c) niet waargenomen maar vermoeden wel dat deze bestaat. De beredenering berust namelijk op de ruststand bij figuur 39(b). Het verschil wordt veroorzaakt door het middelste object, die op de middelloodlijn door twee willekeurige aanliggende hoekpunten van het vierkant beweegt, en ervoor zorgt dat twee van de vier deeltjes naar elkaar toe bewegen terwijl de overige twee juist van elkaar weg.



Figuur 39: Evenwichtstoestanden voor vijf objecten.

6.3 $n = 6$

Voor deze n hebben we voor het eerst resultaten gekregen waar we niet op hadden gerekend. Het is namelijk zo dat figuur 40(d), de 1-4-1-opstelling, zowel symmetrische als asymmetrische vormen kent. In beide gevallen is er sprake van een groep, binnen een kudde van zes individuen, die een vierkant vormen waarbij de overige twee dieren erbuiten vallen.



Figuur 40: Evenwichtsconfiguraties voor zes objecten.

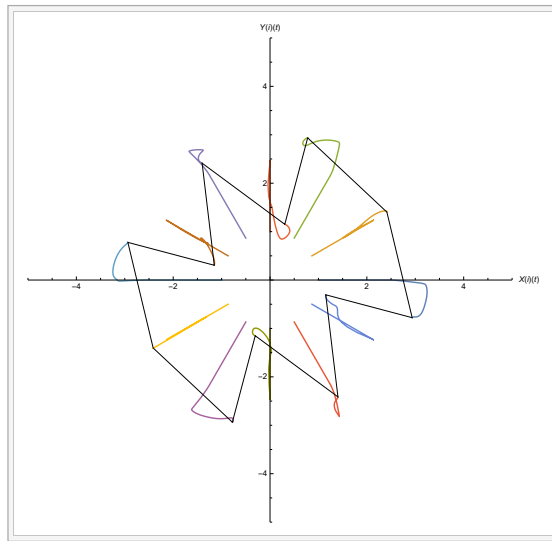
Figuur 40(c) laat zien dat ‘de vierkant’ een equilibrium is bij zes objecten. Dit wordt gerealiseerd door twee paren van objecten die zo dicht mogelijk bij elkaar blijven en als het ware bewegen als één individu. Hierdoor vestigen de overige twee objecten zich in de resterende hoekpunten. Dergelijk gedrag zagen we overigens ook bij drie objecten die geen evenwicht vormden, zie figuur 37.

We merken verder op dat het collineair equilibrium steeds geconcentreerder wordt rondom het middelpunt ervan doordat er een grotere ‘druk’ bestaat van de wat verder weg naar buiten gelegen objecten. Daarentegen is de aantrekkingskracht die werkt op deze objecten groot genoeg om een evenwicht te vormen maar te laag om dichter tegen het midden te liggen. Dit komt door de relatief lage druk van buitenaf waardoor deze objecten geneigd zijn om de vrije ruimtes op te zoeken. Overigens zien we hier een overeenkomst met het idee van een equilibrium, namelijk het laagste energieniveau opzoeken waarbij een individu zo min mogelijk afstoting ondervindt.

Vermoedelijk bestaat er ook een formatie met twee gelijkzijdige driehoeken. Echter zullen de drie buitenste objecten de binnenste drie niet omringen doordat in dat geval de onderlinge afstanden tussen deze drie te groot zal zijn voor het in stand houden van een evenwicht. Een bewijs of waarneming hiervan ontbreekt echter.

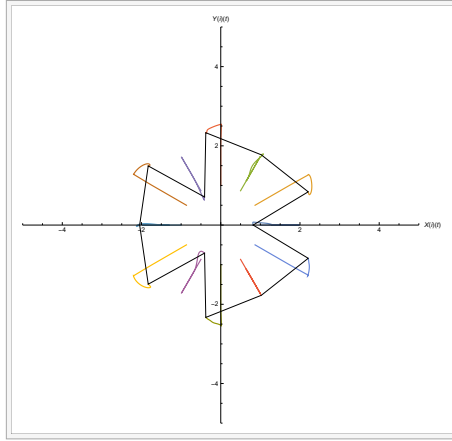
6.4 $n = 12$

Voor grotere n blijken er meerdere stabiele formaties mogelijk te zijn. Daarentegen verliest de reguliere n -hoek zijn prioriteit voor een zekere $n > 3$ (d.w.z. dat objecten dit equilibrium niet vanuit nature aannemen). Een voorbeeld hiervan zien we in figuur 41.



Figuur 41: Een onregelmatige symmetrische achthoek en een vierkant waarbij $\alpha = 1, \beta = 0.64, \gamma = 0.16, P_1(0) = (1.05, 0)$ en $t \in [0, 360]$.

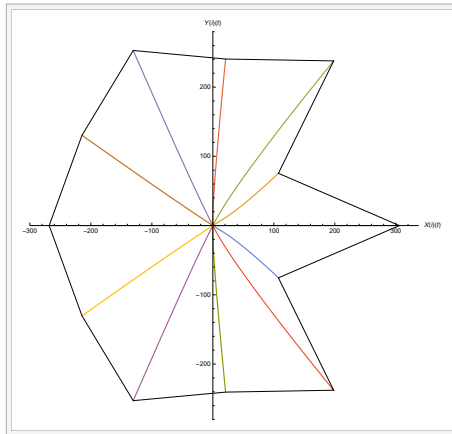
We zien dat een beginsituatie in de vorm van een onregelmatige twaalfhoek uiteenvalt in een vierkant en een onregelmatige symmetrische achthoek. (Alle P_i , op P_1 na, beginnen op de eenheidscirkel met de oorsprong als middelpunt.) In de onderstaande figuur gaan we juist uit van een willekeurige beginsituatie. Echter is ook deze niet geheel willekeurig omdat we de positie van slechts één object uit figuur 41 geperturbeerd hebben. Merk op dat hiermee twee punten op de eerder genoemde eenheidscirkel verplaatst zijn.



Figuur 42: $P_i(0)$ willekeurig waarbij $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0.49$ en $t \in [0, 2880]$.

Dit keer krijgen we een gelijkzijdige driehoek aan de binnenkant en een onregelmatige symmetrische negenhoek aan de buitenkant. De onregelmatigheid ervan berust, net als in figuur 41, op het feit dat niet alle binnehoeken identiek zijn aan elkaar.

Er blijken ook evenwichten te bestaan die minder symmetrieën bevatten. Zo zien we hieronder dat twee objecten plaatsnemen binnen een niet-convexe symmetrische deca-
gon.



Figuur 43: $P_i(0)$ willekeurig waarbij $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0.49$ en $t \in [0, 2880]$.

Wat blijkt is dat een regelmatige twaalfhoek, uitgaande van willekeurige $P_i(0)$, niet eenvoudig bereikbaar is. De vraag is of er een $n \geq 3$ bestaat zó dat de regelmatige n -hoek ook nog eens zijn stabiliteit verliest. Hiervoor moeten we echter de mogelijkheid dat het karakteristieke polynoom van het corresponderende systeem bestaat uit alleen maar negatieve eigenwaarden, voor alle parameter- en beginwaarden, kunnen uitsluiten.

Naar veronderstelling is voor $n > 5$ elke regelmatige n -hoek splitsbaar in een regelmatige d -hoek en een regelmatige $n-d$ -hoek waarbij d een deler is van n . Wel zien we, als in het geval van $n = 6$, dat er hiernaast ($4 \nmid 6$) ook andere evenwichtsconfiguraties mogelijk zijn.

6.5 Prooi-roofdier-model

Tot slot beschouwen we de configuraties die ontstaan uit enkele simulaties van prooi- en roofdieren. Hiertoe breiden we het systeem uit met één roofdier. Er wordt een roofdier aan het model toegevoegd door bij elke van de n vergelijkingen in 27 voor de prooidieren een afstotende kracht

$$\delta \cdot \frac{P_i(t) - P_{n+1}(t)}{\|P_i(t) - P_{n+1}(t)\|^2}$$

te definiëren. Hierbij stelt $P_{n+1}(t)$ het roofdier voor en $P_i(t)$ één van de n prooidieren. De resulterende aantrekkende kracht die de prooidieren op het roofdier uitoefenen, wordt gegeven door

$$\dot{P}_{n+1}(t) = \frac{\eta}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_i(t) - P_{n+1}(t)}{\|P_i(t) - P_{n+1}(t)\|^\zeta}.$$

De constanten δ en η hebben een vergelijkbare functie als die van α en γ . Daarentegen zorgen β en ζ ervoor dat de aantrekkingskrachten binnen een bepaald bereik blijven. Hiermee wordt dus vastgelegd vanuit welke kant het roofdier de meeste aantrekkingskracht ondervindt van de prooidieren.

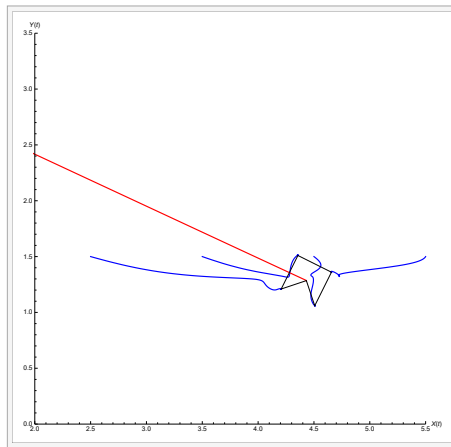
In dit deel hebben we grenzen gesteld aan de ruimte waarin de individuen zich bevinden doordat deze anders uit elkaar blijven gaan en geen neiging vertonen tot het vormen van een evenwicht. Hierbij gaan de vergelijkingen bij 27 over in

$$F_i + 0.1 \left(\frac{P_{i1}(t)}{\|P_{i1}(t)\|^2} - \frac{3 - P_{i1}(t)}{\|3 - P_{i1}(t)\|^2} + \frac{P_{i2}(t)}{\|P_{i2}(t)\|^2} - \frac{3 - P_{i2}(t)}{\|3 - P_{i2}(t)\|^2} \right).$$

De individuen bevinden zich in het vlak $(X, Y) \in [0, 3] \times [0, 3]$. Net als in het een-dimensionale geval zullen de objecten zich van de randen af bewegen.

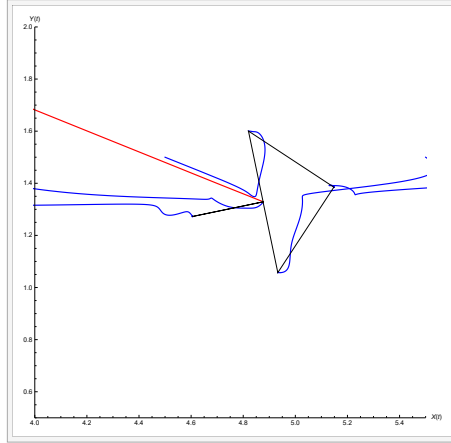
Ook nu is het mogelijk om de oplossingen, net als in het prooi-prooidiermodel, te laten bewegen in een vierkante kader. Zo zien we dat de prooidieren een evenwichtsconfiguratie aannemen, namelijk die in figuur 38.

Hieronder is een verloop van het geval van 4 prooidieren en 1 roofdier te zien. Er wordt een regelmatige vierhoek, dus een vierkant, gevormd door de prooidieren (blauw) waarbij het roofdier (rood) zich in het zwaartepunt ervan bevindt.



Figuur 44: $\alpha = \beta = \delta = 1, \gamma = \eta = \zeta = 0.1$ en $t \in [0, 120]$.

Vermeederen van het aantal prooidieren met één levert in het bijzonder de onderste figuur op.



Figuur 45: $\alpha = \beta = \delta = 1, \gamma = \eta = 0.1, \zeta = 0.81$ en $t \in [0, 144]$.

We zien dezelfde formatie als in figuur 44. Het verschil is echter dat één van de prooidieren zich samen met het roofdier in het centrum van de overige prooidieren bevindt. Dit betekent dat het prooidier gepakt wordt door het roofdier. Merk op dat δ niet als in het eendimensionale geval is. Er is immers geen sprake van collineariteit.

Tot slot zien we dat zowel in het prooi-prooidiermodel als in het prooi-roofdiermodel gestreven wordt naar formaties die samengesteld zijn uit regelmatige of onregelmatige symmetrische n -hoeken. Kennelijk is dit een intrinsieke eigenschap van de modellen die we bestuderen.

7 Discussie

In dit deel stellen we enkele vermoedens in het daglicht op basis waarvan verdere onderzoeks vragen te formuleren zijn.

De figuren in deel 3.4 en 3.5 laten zien dat er een relatie bestaat tussen $\delta(0)$ en $p(0)$ voor het tot stand brengen van een evenwicht. Het interval waarin $\delta(0)$ zich bevindt voor willekeurige parameterwaarden en $p(0)$ is echter onbekend. Bovendien maken we uit simulaties op dat de verhoudingen van de afstanden aan het begin of aan het eind, de vorming van een evenwicht niet per definitie garanderen of uitsluiten.

Verder blijkt het systeem, zoals eerder vermeld, niet invariant te zijn onder de eerder beschreven symmetrieën indien er een rand aanwezig is waarbinnen de objecten zich bevinden. De vraag is dus hoe een evenwichtsconfiguratie in dat geval eruit ziet. Deze is triviaal bij een cirkelvormige rand met het massamiddelpunt van de evenwichtsformatie als het middelpunt ervan.

Ons vermoeden is dat naarmate er meer objecten bij elkaar in de buurt blijven de afstanden met de overige objecten groter worden. Dit komt doordat het benaderen van een groep binnen een kudde, vanuit theoretisch perspectief, altijd meer afstotend is dan dat het slechts één individu bedraagt. Hierdoor nemen beesten ook meer afstand van de rest in geval ze een groep vormen binnen een kudde. Zo is er, naar vermoeden, voor $n = 6$ ook een formatie waarbij drie paren van individuen zich als één individu gedragen en de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek opzoeken. Dit vermoeden is deels gebaseerd op de 1-2-1-2-formatie en deels op de waarneming van de vorming van drie gelijkzijdige driehoeken bij $n = 9$ (de 3-3-3-opstelling).

Bovendien denken we dat de regelmatige n -hoek voor grotere n zeldzamer tot stand komt uit een willekeurige beginsituatie. Hierdoor zal de $n - 1$ -1-formatie stabiel zijn voor uiterst specifieke begin- en parameterwaarden.

Wat we absoluut niet hadden verwacht waren de vorming van onregelmatige vlakken bij evenwichten. Zo blijkt dit fenomeen zich naar zekerheid voor te doen voor $n \geq 5$. Hier hebben we het dus over onregelmatige en/of niet-convexe polygonen zoals in het geval $n = 12$. De eerste onregelmatige configuratie komen we tegen bij $n = 6$, namelijk een onregelmatige 5-1-configuratie.

Verder is het interessant om te weten of regelmatige polygonen voor hogere n altijd te onderverdelen zijn in kleinere polygonen. Net als in het voorgaande deel gaat het om niet-convexe/regelmatige maar wel symmetrische, symmetrische of onregelmatige d -hoeken waarbij d een deler is van n . Zo blijken voor $n = 6$ de groeperingen 6 (hexagon), 5-1 (pentagon), 1-4-1 (al dan niet symmetrisch) en 1-2-1-2 (vierkant) te bestaan. Vermoedelijk zijn er ook specifieke parameter- en beginwaarden waarvoor een 2-2-2-formatie (gelijkzijdige driehoek) ontstaat. Wel is gebleken dat voor negen objecten een regelmatige 7-hoek ontstaat met daarin de overige 2 objecten. Dit is vergelijkbaar met het collineair equilibrium voor $n = 4$ terwijl voor $n = 5$ twee objecten zich temidden van de overige drie zouden moeten bevinden. Hiervoor moeten de afstanden tussen de overige drie objecten relatief groot zijn. Dus krijgen we te maken met een grotere onwaarschijnlijkheid en zal deze configuratie vermoedelijk niet optreden.

Tot slot blijken de buitenste objecten in $\mathbb{R}$ vanaf een bepaalde n steeds verder uit elkaar te gaan. De vraag hierbij is bij hoeveel n de objecten groepen gaan vormen die allemaal een andere evenwicht hebben en deze op verscheidene tijdstippen bereiken. De buitenste objecten hebben namelijk de neiging om verder af te staan van hun enige buur doordat de aantrekking, wegens de afstand tot het centrum, minder is.

8 Appendix

De Appendix bevat, zoals eerder vermeld, de numerieke simulaties van de modellen in Wolfram Mathematica 11. Verder worden per deel eventuele uitbreidingen of aanpassingen van het model beschreven.

8.1 Prooi-Prooidier-model in $\mathbb{R}$

In dit deel hebben we onder andere grenzen gesteld aan de ruimte waarin de individuen zich bevinden. Hierbij gaan de vergelijkingen bij 3 over in

$$F_i + \left(\frac{0.1}{P_i(t)} - \frac{0.1}{5 - P_i(t)} \right).$$

De individuen bevinden zich in het interval $P \in [0, 5]$. We zien dat de breuken naar oneindig gaan ingeval $P_i(t) \rightarrow 0$ of 5. Hierdoor zullen de objecten, als de onderlinge afstoting relatief klein is, zich van de randen af begeven.

Nonlinear Dynamics of Natural Systems

Prey-Prey Model $\mathbb{R}$

Presentator: M. Ercan

Supervisors: Prof. dr. A. Doelman, Leiden University and
Jasper A. J. Eikelboom, PhD candidate
Wageningen University

Introduction

`ClearAll["Global`*"];`

Assumptions and Definitions

The absolute difference between the i -th and j -th prey is given by

$$p[i_, j_] = P[j][t] - P[i][t];$$

Attraction and Repulsion

The attraction towards and repulsion against the j -th prey of the i -th prey is divided into two parts :

For j less than i the attraction and repulsion are defined as

$$A@p[j, i] = \frac{a * p[j, i]}{\text{Exp}[b * p[j, i]]};$$

$$R@p[j, i] = \frac{c}{p[j, i]};$$

which sum up to

$$\text{summand1} = R@p[j, i] - A@p[j, i];$$

For i less than j the attraction and repulsion are given by

$$A@p[i, j] = \frac{a * p[i, j]}{\text{Exp}[b * p[i, j]]};$$

$$R@p[i, j] = \frac{c}{p[i, j]};$$

which sum up to

```
summand2 = A@p[i, j] - R@p[i, j];
```

Below are plots of the attraction and repulsion for one prey and two preys respectively

```
Manipulate[Plot[{ $\frac{1 * p}{Exp[1 * p]}$ ,  $\frac{4}{Exp[2] * p}$ }, {p, 0, P},
  TicksStyle → 24, ImageSize → Large, PlotLabels → {A[p], R[p]},
  LabelStyle → Directive[FontFamily → "Times New Roman",
    FontSlant → "Italic", FontSize → 24], AxesLabel → {p},
  PlotRange → Automatic, AspectRatio → 1], {{P, 1}, .1, 100}]

Manipulate[
  Plot[{ $\frac{p}{Exp[p]} + \frac{7 * p}{Exp[7 * p]}$ ,  $\frac{196 + 28 * Exp[12]}{8 * Exp[14] * p} + \frac{196 + 28 * Exp[12]}{8 * Exp[14] * 7 * p}$ },
    {p, 0, P}, ImageSize → Large, PlotLabels → {A12 + A13, R12 + R13},
    PlotRange → Automatic, AspectRatio → 1], {{P, 1}, .1, 100}]
```

System of Coupled Nonlinear DEs

We assume that there are

```
n = 3;
```

prey and define the total force acting on the i -th prey, in which the repulsion caused by a fence is included, as

```
sys1 =
  Table[P[i]'[t] == Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] + Sum[If[i < j,
    summand2, 0], {j, 1, n}] + ( $\frac{.1}{P[i][t]} - \frac{.1}{5 - P[i][t]}$ ), {i, 1, n}];
```

Numerical solutions to this system are determined by

```
sol1 = ParametricNDSolveValue[{sys1, P[1][0] == 1, P[2][0] == 1.1,
  P[3][0] == 3}, P /@ Range[3], {t, 0, 500}, {a, b, c}];

Manipulate[Plot[sol1[a, b, c][t] // Through // Evaluate,
  {t, 0, T}, AxesLabel → {t, P[i][t]}, PlotRange → Automatic,
  ImageSize → Large, AspectRatio → 1], {{a, 1}, .1, 10},
  {{b, 1}, .1, 10}, {{c, 1}, .1, 10}, {{T, 1}, .1, 500}]
```

Plotting the Solutions

Below are parametric plots of the solutions to this system, without a fence, for different values of n

$n = 2$;

```
sys0 = Table[P[i]'[t] == Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
  Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}];
```

```
sol0 = ParametricNDSolveValue[{sys0, P[1][0] == 0, P[2][0] == 1},
  P /@ Range[2], {t, 0, 100}, {a, b, c}];
```

```
Manipulate[Plot[sol0[a, b, c][t] // Through // Evaluate,
  {t, 0, T}, AxesLabel -> {t, P[i][t]}, PlotRange -> Automatic,
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1], {{a, 1}, 0.1, 10},
  {{b, 1}, 0.1, 10}, {{c, 1}, 0.1, 1000}, {{T, 1}, 0.1, 100}]
```

$n = 3$;

```
sys2 = Table[P[i]'[t] == Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
  Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}];
```

```
sol2 = ParametricNDSolveValue[
  {sys2, P[1][0] == 0, P[2][0] == 4, P[3][0] == 9 * (4)},
  P /@ Range[3], {t, 0, 1000000}, {a, b, c}];
```

```
Manipulate[Plot[sol2[a, b, c][t] // Through // Evaluate,
  {t, 0, T}, AxesLabel -> {t, P[i][t]}, PlotRange -> Automatic,
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1], {{a, 1}, 0.1, 10},
  {{b, 1}, 0.1, 10}, {{c, 1}, 0.1, 1000}, {{T, 1}, 0.1, 1000000}]
```

8.2 Prooi-Prooidier-model in $\mathbb{R}^2$

In dit deel hebben we onder andere grenzen gesteld aan de ruimte waarin de individuen zich bevinden. Hierbij gaan de vergelijkingen bij 27 over in

$$F_i + 0.1 \left(\frac{X_i(t)}{\|X_i(t)\|^2} - \frac{3 - X_i(t)}{\|3 - X_i(t)\|^2} + \frac{Y_i(t)}{\|Y_i(t)\|^2} - \frac{3 - Y_i(t)}{\|3 - Y_i(t)\|^2} \right).$$

De individuen bevinden zich in het vlak $(X, Y) \in [0, 3] \times [0, 3]$. Als in het een-dimensionale geval zullen de objecten zich van de randen af bewegen.

De polygonen worden gevormd door de coördinaten van de oplossingskrommen voor $t \rightarrow \infty$.

Nonlinear Dynamics of Natural Systems

Prey-Prey Model $\mathbb{R}^2$

Presentator: M. Ercan

Supervisors: Prof. dr. A. Doelman, Leiden University and
Jasper A. J. Eikelboom, PhD candidate
Wageningen University

Introduction

`ClearAll["Global`*"];`

Assumptions and Definitions

We assume that there are

$n = 5;$

prey whose positions are defined as

$P[i_][t_] = \{X[i_][t_], Y[i_][t_]\};$

The absolute difference between the i -th and j -th prey is given by

$p[j_ , i_] = \text{Norm}[P[i_][t] - P[j_][t]];$

Attraction and Repulsion

The attraction towards and repulsion against the j -th prey of the i -th prey is divided into two parts:

For j less than i the attraction and repulsion are defined as

$A@p[j, i] = (a * (P[i][t] - P[j][t])) / \text{Exp}[b * p[j, i]];$

$R@p[j, i] = (c * (P[i][t] - P[j][t])) / p[j, i]^2;$

which sum up to

$\text{summand1} = R@p[j, i] - A@p[j, i];$

For i less than j the attraction and repulsion are given by

$$A@p[i, j] = (a * (P[j][t] - P[i][t])) / \text{Exp}[b * p[i, j]];$$

$$R@p[i, j] = (c * (P[j][t] - P[i][t])) / p[i, j]^2;$$

which sum up to

$$\text{summand2} = A@p[i, j] - R@p[i, j];$$

System of Coupled Nonlinear DEs

The total force acting on the i -th prey, in which the repulsion caused by a fence is included, is defined as

$$\begin{aligned} \text{sys} = & \left\{ \text{Table} \left[D[P[i][t], t] = \frac{1}{n} * \text{Sum}[\text{If}[j < i, \text{summand1}, 0], \{j, 1, n\}] + \right. \right. \\ & \left. \frac{1}{n} * \text{Sum}[\text{If}[i < j, \text{summand2}, 0], \{j, 1, n\}] \right. \\ & \left. + .1 \left\{ \frac{X[i][t]}{\text{Norm}[\{X[i][t], 0\}]^2} - \frac{3 - X[i][t]}{\text{Norm}[\{3 - X[i][t], 0\}]^2}, \right. \right. \\ & \left. \frac{Y[i][t]}{\text{Norm}[\{0, Y[i][t]\}]^2} - \right. \\ & \left. \left. \frac{3 - Y[i][t]}{\text{Norm}[\{0, 3 - Y[i][t]\}]^2} \right\}, \{i, 1, n\} \right] \right\}; \end{aligned}$$

Numerical solutions to this system are determined by

```
sol = ParametricNDSolveValue[
  {sys, P[1][0] == {.5, 1.5}, P[2][0] == {.65, 1.5},
   P[3][0] == {2.7, .75}, P[4][0] == {2.75, 1.5}, P[5][0] == {2.5, 2}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n}], {t, 0, 1000}, {a, b, c}];

Manipulate[ParametricPlot[sol[a, b, c] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[i][t], Y[i][t]}, PlotRange -> {{0, 3}, {0, 3}},
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1, Epilog ->
  {EdgeForm[Black], FaceForm[None], Polygon[sol[a, b, c] /. t -> T]}],
  {{a, 1}, .1, 5}, {{b, 1}, .1, 5}, {{c, 1}, .1, 5}, {{T, 1}, .1, 1000}]
```

Plotting the Solutions

Below are parametric plots of the solutions to this system for different values of n

$$n = 3;$$

```

sys = {Table[D[P[i][t], t] == Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
  Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}];
sol2 = ParametricNDSolveValue[{sys, P[1][0] == {-0.5, 0.5},
  P[2][0] == {0.5, -0.5}, P[3][0] == {12, 12}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n}], {t, 0, 1000}, {a, b, c}];
Manipulate[ParametricPlot[sol2[a, b, c] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[i][t], Y[i][t]}, PlotLegends -> {P1[t], P2[t], P3[t]},
  PlotRange -> Automatic, ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1, Epilog ->
  {EdgeForm[Black], FaceForm[None], Polygon[sol2[a, b, c] /. t -> T]}],
  {{a, 1}, .1, 10}, {{b, 1}, .1, 10}, {{c, 1}, .1, 10},
  {{T, 1}, .1, 1000}]

n = 6;
sys = {Table[D[P[i][t], t] ==  $\frac{1}{n}$  * Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
   $\frac{1}{n}$  * Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}];
sol4 = ParametricNDSolveValue[
  {sys, P[1][0] == {1, 0}, P[2][0] == {10/2,  $\sqrt{3}/2$ },
  P[3][0] == {-1/2,  $\sqrt{3}/2$ }, P[4][0] == {-1, 1},
  P[5][0] == {-10/2,  $-\sqrt{3}/2$ }, P[6][0] == {1/2,  $-\sqrt{3}/2$ }},
  Table[P[i][t], {i, 1, n}], {t, 0, 100000}, {a, b, c}];
Manipulate[ParametricPlot[sol4[a, b, c] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[i][t], Y[i][t]}, PlotRange -> {{-4, 0}, {6, 10}},
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1, Epilog ->
  {EdgeForm[Black], FaceForm[None], Polygon[sol4[a, b, c] /. t -> T]}],
  {{a, 1}, .1, 5}, {{b, 1}, .1, 5}, {{c, 1}, .1, 5}, {{T, 1}, .1, 100000}]

```

Below is a parametric plot of the solutions to this system for 12 preys starting on the vertices of a regular dodecagon

```

n = 12;
sys = {Table[D[P[i][t], t] ==  $\frac{1}{n}$  * Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
   $\frac{1}{n}$  * Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}];

```

```

sol3 = ParametricNDSolveValue[
  {sys, P[1][0] == {1, 0}, P[2][0] == {sqrt[3]/2, 1/2},
    P[3][0] == {1/2, sqrt[3]/2}, P[4][0] == {0, 1},
    P[5][0] == {-1/2, sqrt[3]/2}, P[6][0] == {-sqrt[3]/2, 1/2},
    P[7][0] == {-1, 0}, P[8][0] == {-sqrt[3]/2, -1/2},
    P[9][0] == {-1/2, -sqrt[3]/2}, P[10][0] == {0, -1},
    P[11][0] == {1/2, -sqrt[3]/2}, P[12][0] == {sqrt[3]/2, -1/2}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n}], {t, 0, 100000}, {a, b, c}];

Manipulate[ParametricPlot[sol3[a, b, c] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[i][t], Y[i][t]}, PlotRange -> {{-5, 5}, {-5, 5}},
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1, Epilog ->
  {EdgeForm[Black], FaceForm[None], Polygon[sol3[a, b, c] /. t -> T]}],
  {{a, 1}, .1, 5}, {{b, 1}, .1, 5}, {{c, 1}, .1, 5}, {{T, 1}, .1, 100000}]

```

Below is a parametric plot of the solutions to this system for 12 preys starting on the vertices of a perturbed dodecagon

$n = 12$;

```

sys = {Table[D[P[i][t], t] == 1/n * Sum[If[j < i, summand1, 0], {j, 1, n}] +
  1/n * Sum[If[i < j, summand2, 0], {j, 1, n}], {i, 1, n}]}];

```

```

sol3 = ParametricNDSolveValue[
  {sys, P[1][0] == {1.05, 0}, P[2][0] == {sqrt[3]/2, 1/2},
    P[3][0] == {1/2, sqrt[3]/2}, P[4][0] == {0, 1},
    P[5][0] == {-1/2, sqrt[3]/2}, P[6][0] == {-sqrt[3]/2, 1/2},
    P[7][0] == {-1, 0}, P[8][0] == {-sqrt[3]/2, -1/2},
    P[9][0] == {-1/2, -sqrt[3]/2}, P[10][0] == {0, -1},
    P[11][0] == {1/2, -sqrt[3]/2}, P[12][0] == {sqrt[3]/2, -1/2}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n}], {t, 0, 100000}, {a, b, c}];

Manipulate[ParametricPlot[sol3[a, b, c] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[i][t], Y[i][t]}, PlotRange -> Automatic,
  ImageSize -> Large, AspectRatio -> 1, Epilog ->
  {EdgeForm[Black], FaceForm[None], Polygon[sol3[a, b, c] /. t -> T]}],
  {{a, 1}, .1, 5}, {{b, 1}, .1, 5}, {{c, 1}, .1, 5}, {{T, 1}, .1, 100000}]

```

8.3 Prooi-Roofdier-model in $\mathbb{R}^2$ (Herhaling)

Er wordt een roofdier aan het model toegevoegd door bij elke van de n vergelijkingen in 27 voor de prooidieren een afstotende kracht

$$\delta \cdot \frac{P_i(t) - P_{n+1}(t)}{\|P_i(t) - P_{n+1}(t)\|^2}$$

te definiëren. Hierbij stelt $P_{n+1}(t)$ het roofdier voor. De aantrekkende kracht op de prooidieren wordt gemodelleerd door

$$\dot{P}_{n+1}(t) = \frac{\eta}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t) - P_{n+1}(t)}{\|X_i(t) - P_{n+1}(t)\|^\zeta}.$$

De constanten δ en η hebben een vergelijkbare functie als die van α en γ . Daarentegen zorgen β en ζ ervoor dat de aantrekkingskrachten binnen een bepaald bereik blijven.

Ook nu is het mogelijk de oplossingen te laten bewegen in een kader van 3 bij 3. Zo zien we dat de prooidieren ten alle tijde een evenwichtsconfiguratie aannemen. Naar vermoeden bestaan er ook parameterwaarden waarvoor de oplossingen, op symmetrische wijze maar zonder behoud van een evenwichtsconfiguratie, zich verwijderen van het roofdier.

Nonlinear Dynamics of Natural Systems

Predator-Prey Model in $\mathbb{R}^2$

Presentator: M. Ercan

Supervisors: Prof. dr. A. Doelman, Leiden University and
Jasper A. J. Eikelboom, PhD candidate Wageningen University

Introduction

ClearAll["Global`"];*

Assumptions and Definitions

We assume that there are

$m = 1;$

predator and

$n = 1;$

prey whose positions are defined as

$P[i][t] = \{X[i][t], Y[i][t]\};$

The absolute difference between the i -th and j -th object is given by

$p[j, i] = \text{Norm}[P[i][t] - P[j][t]];$

Attraction and Repulsion

The attraction towards and repulsion against the j -th object of the i -th object is defined as:

$A@p[i, j] = (a * (P[j][t] - P[i][t])) / \text{Exp}[b * p[j, i]];$

$R@p[j, i] = (c * (P[i][t] - P[j][t])) / p[j, i]^2;$

which sum up to

$\text{summand1} = A@p[i, j] + R@p[j, i];$

Predator-Prey Attraction and Repulsion

We model the predator-prey interactions as an attractive force through

$$\frac{1}{n} * \text{Sum}[(e * (P[i][t] - P[n+1][t])) / \text{Norm}[P[i][t] - P[n+1][t]]^f, \{i, 1, n\}];$$

The predator acts as a repulsive particle on the prey through

$$(d * (P[i][t] - P[n+1][t])) / (\text{Norm}[P[i][t] - P[n+1][t]]^2);$$

System of Coupled Nonlinear DEs

The i -th prey moves in the direction of the average force in which the repulsion caused by a fence is included

$$\begin{aligned} \text{sys} = & \left\{ \text{Table} \left[D[P[i][t], t] = \frac{1}{n} * \text{Sum}[\text{If}[j \neq i, \text{summand1}, 0], \{j, 1, n\}] \right. \right. \\ & + (d * (P[i][t] - P[n+1][t])) / (\text{Norm}[P[i][t] - P[n+1][t]]^2) \\ & + .1 \left\{ \frac{X[i][t]}{\text{Norm}[\{X[i][t], 0\}]^2} - \frac{3 - X[i][t]}{\text{Norm}[\{3 - X[i][t], 0\}]^2}, \right. \\ & \left. \left. \frac{Y[i][t]}{\text{Norm}[\{0, Y[i][t]\}]^2} - \frac{3 - Y[i][t]}{\text{Norm}[\{0, 3 - Y[i][t]\}]^2} \right\}, \{i, 1, n\} \right], \\ & D[P[n+1][t], t] = \frac{e}{n} * \text{Sum}[(P[i][t] - P[n+1][t]) / \\ & (\text{Norm}[P[i][t] - P[n+1][t]]^f) + .1 \left\{ \frac{X[n+1][t]}{\text{Norm}[\{X[n+1][t], 0\}]^2} - \right. \\ & \left. \frac{3 - X[n+1][t]}{\text{Norm}[\{3 - X[n+1][t], 0\}]^2}, \frac{Y[n+1][t]}{\text{Norm}[\{0, Y[n+1][t]\}]^2} - \right. \\ & \left. \left. \frac{3 - Y[n+1][t]}{\text{Norm}[\{0, 3 - Y[n+1][t]\}]^2} \right\}, \{i, 1, n\} \right] \right\}; \end{aligned}$$

Numerical solutions to this system are determined by

$$\begin{aligned} \text{sol} = & \text{ParametricNDSolveValue}[\\ & \{\text{sys}, P[1][0] = \{2.05, 0.95\}, P[2][0] = \{2, 2.05\}\}, \\ & \text{Table}[P[i][t], \{i, 1, n+1\}], \{t, 0, 100\}, \{a, b, c, d, e, f\}]; \end{aligned}$$

Plotting the Solutions (1 Predator - 1 Prey)

Below is a parametric plot of the solutions to this system

```
Manipulate[ParametricPlot[sol[a, b, c, d, e, f] // Evaluate,
  {t, 0, T}, AxesLabel → {X[t], Y[t]}, PlotRange → {{0, 3}, {0, 3}},
  ImageSize -> Large, PlotStyle → {Blue, Red}, AspectRatio → 1
], {{a, 1}, .1, 4}, {{b, 1}, .1, 4}, {{c, 1}, .1, 4}, {{d, 1}, .1, 1.4},
  {{e, 0.1}, .1, 1.5}, {{f, 0.1}, 0.1, 0.9}, {{T, 1}, .1, 100}]
```

Plotting the Solutions (1 Predator - n Prey)

Below are other parametric plots of the solutions to this system for different values of n

$n = 4;$

```
sys = {Table[D[P[i][t], t] ==  $\frac{1}{n} * \text{Sum}[\text{If}[j \neq i, \text{summand1}, 0], \{j, 1, n\}]$ 
  + (d * (P[i][t] - P[n + 1][t])) / (Norm[P[i][t] - P[n + 1][t]] ^ 2),
  {i, 1, n}], D[P[n + 1][t], t] ==  $\frac{e}{n} * \text{Sum}[(P[i][t] - P[n + 1][t]) /$ 
  (Norm[P[i][t] - P[n + 1][t]] ^ f), {i, 1, n}]};
```

```
sol2 = ParametricNDSolveValue[
  {sys, P[1][0] == {2.5, 1.5}, P[2][0] == {3.5, 1.5},
  P[3][0] == {5.5, 1.5}, P[4][0] == {4.5, 1.5}, P[5][0] == {.75, 3}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n + 1}], {t, 0, 1000}, {a, b, c, d, e, f}];
Manipulate[ParametricPlot[sol2[a, b, c, d, e, f] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel → {X[t], Y[t]}, PlotRange → {{2, 5.5}, {0, 3.5}},
  ImageSize -> Large, PlotStyle → {Blue, Blue, Blue, Blue, Red},
  AspectRatio → 1, Epilog → {EdgeForm[Black],
  FaceForm[None], Polygon[sol2[a, b, c, d, e, f] /. t → T]}
], {{a, 1}, .1, 2}, {{b, 1}, .1, 4}, {{c, 0.1}, .1, 5}, {{d, 1}, .1, 1.4},
  {{e, 0.1}, .1, 1.5}, {{f, 0.1}, 0.1, 1}, {{T, 1}, .1, 1000}]
```

$n = 5;$

```
sys = {Table[D[P[i][t], t] ==  $\frac{1}{n} * \text{Sum}[\text{If}[j \neq i, \text{summand1}, 0], \{j, 1, n\}]$ 
  + (d * (P[i][t] - P[n + 1][t])) / (Norm[P[i][t] - P[n + 1][t]] ^ 2),
  {i, 1, n}], D[P[n + 1][t], t] ==  $\frac{e}{n} * \text{Sum}[(P[i][t] - P[n + 1][t]) /$ 
  (Norm[P[i][t] - P[n + 1][t]] ^ f), {i, 1, n}]};
```

```

sol3 = ParametricNDSolveValue[{sys, P[1][0] == {2.5, 1.5},
  P[2][0] == {3.5, 1.5}, P[3][0] == {5.5, 1.5},
  P[4][0] == {6.5, 1.5}, P[5][0] == {4.5, 1.5}, P[6][0] == {.75, 3}},
  Table[P[i][t], {i, 1, n + 1}], {t, 0, 1000}, {a, b, c, d, e, f}];
Manipulate[ParametricPlot[sol3[a, b, c, d, e, f] // Evaluate, {t, 0, T},
  AxesLabel -> {X[t], Y[t]}, PlotRange -> {{4, 5.5}, {0.5, 2}},
  ImageSize -> Large, PlotStyle -> {Blue, Blue, Blue, Blue, Blue, Red},
  AspectRatio -> 1, Epilog -> {EdgeForm[Black],
  FaceForm[None], Polygon[sol3[a, b, c, d, e, f] /. t -> T]}
], {{a, 1}, .1, 2}, {{b, 1}, .1, 4}, {{c, 0.1}, .1, 1}, {{d, 1}, .1, 1.4},
  {{e, 0.1}, .1, 1.5}, {{f, 0.1}, 0.1, 1}, {{T, 1}, .1, 1000}]

```

9 Bibliografie

9.1 Literatuurlijst

Chen Y, Kolokolnikov T. (2014). A minimal model of predator - swarm interactions. *J. R. Soc. Interface* **11**: 20131208. <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.1208>.

Iain D. Couzin et al. (2002). Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups. *J. theor. Biol* **218**, 1 - 11 doi:10.1006/yjtbi.3065.

Nijman T. (2017). Modelling Interactions between Conspecifics under the Influence of Resources and Predation Risk.

Krause & Ruxton (2002). Living in Groups.

Hopcraft, Olf & Sinclair (2010). Herbivores, Resources and Risks: Alternating Regulation along Primary Environmental Gradients in Savannas.

Patridge & Pitcher (1980); Patridge (1982). Collective Memory and Spatial Sorting in Animal Groups.

9.2 Figuren

De figuren zijn vervaardigt met TikZ en het computerprogramma Wolfram Mathematica 11.