De partitieformule van Euler: Een kennismaking met zuivere wiskunde

Bakker, J.H.

De partitieformule van Euler

Een kennismaking met zuivere wiskunde

J.H. Aalberts-Bakker

29 augustus 2008

Doctoraalscriptie wiskunde,
variant Communicatie en Educatie

Afstudeerdocent: Dr. H. Finkelnberg

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Inleiding

Welkom! Voor je ligt een boekje met échte wiskunde...

De bedoeling van dit boekje is dat je kennismaakt met zuivere wiskunde zoals die op de universiteit wordt bedreven. Bij zuivere wiskunde gaat het in de eerste plaats om de wiskunde zélf. Vaak is deze wiskunde een stuk formeler, abstracter en theoretischer dan je van school gewend bent.

Aan het eind van het boekje zul je in staat zijn om de formule van Euler met het bewijs te kunnen begrijpen. Op de weg naar deze stelling kom je verschillende zaken tegen die binnen de wiskunde belangrijk zijn: formele definities, nieuwe symbolen en notaties en daarnaast creatieve en strategische ideeën. Door dit boekje te bestuderen kun je ervaren hoe een wiskundige daar mee omgaat. En hopelijk ook welk plezier hij aan wiskunde beleeft!

Voor dit boekje hoef je geen wiskundig genie te zijn: de creatieve ideeën hoef je namelijk niet zelf te verzinnen. Wel is het nodig dat je de wiskunde (B) van het VWO goed beheerst.

Ook zul je waarschijnlijk even moeten wennen aan de officiële wiskundige taal van dit boekje. Om je te helpen zijn een aantal zaken toegevoegd. Achterin vind je een uitleg over de gebruikte notaties die nieuw zijn in dit boekje. De blokken aan het begin van een hoofdstuk of paragraaf vertellen je wat de bedoeling is van dat gedeelte. Andere blokken (die tussen de tekst in staan) geven je wat extra uitleg of wiskundige achtergrondinformatie die minder relevant is voor de grote lijn van het verhaal. Verder staan er in de tekst veel voorbeelden, waarmee je voor jezelf kunt nagaan of je begrijpt wat er staat.

Veel succes en plezier gewenst bij het bestuderen van dit boekje!

Hoofdstuk 1

Partities

In dit hoofdstuk maak je kennis met 'partities' van positieve gehele getallen. Kort gezegd zijn dit manieren om getallen als som te schrijven van (andere) gehele getallen. De partitieformule van Euler geeft een manier om het aantal mogelijke partities van een getal te berekenen. Om deze formule te kunnen bewijzen, zullen we in dit hoofdstuk een begin maken met het tellen van partities. Eén van de manieren waarop dit kan is door te kijken naar het aantal oplossingen van een vergelijking.

1.1 Wat is een partitie?

Definitie 1.1. *Een* partitie *van een getal* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *is een rijtje getallen* $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ *met*

- $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{Z}_{>0}$
- $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$
- $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$

De getallen $x_1, x_2, \dots, x_k$ *heten de* termen *van de partitie en* k *heet de* lengte *van de partitie.*

Voorbeeld 1.1. Van het getal 11 zijn $(5, 4, 2)$ en $(9, 1, 1)$ partities van lengte 3 en $(4, 3, 2, 2)$ een partitie van lengte 4.

Voorbeeld 1.2. Het getal 5 heeft 7 verschillende partities, namelijk: (5), $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$ en $(1, 1, 1, 1, 1)$

Opmerking. De termen van een partitie van n kunnen nooit groter zijn dan n. Dus er geldt zelfs: $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Een partitie van een getal is eigenlijk een manier om dat getal als een som van positieve gehele getallen te schrijven. De volgorde van de getallen maakt hierbij niet uit.

Voorbeeld 1.3. Met de getallen 2, 2 en 1 kun je op drie verschillende manieren een som van 5 maken:

$$\begin{aligned} 2+2+1 &= 5 \\ 2+1+2 &= 5 \\ 1+2+2 &= 5 \end{aligned}$$

In een partitie moeten de getallen in aflopende volgorde genoteerd worden. Daarom hoort bij alle drie de sommen dezelfde partitie van 5, namelijk $(2,2,1)$.

Voor het tellen van partities zullen we de 'partitiefunctie' gebruiken:

Definitie 1.2. *Voor* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *definiëren we de* partitiefunctie p *als:*

$$p(n) := \text{het aantal partities van } n.$$

Opmerking. Het aantal partities van een getal n is gelijk aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

met $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$.

Bij kleine getallen is het nog mogelijk de waarde van de partitiefunctie te vinden door systematisch alle partities op te schrijven, zoals in voorbeeld 1.2 voor $n = 5$ is gedaan. Op deze manier kun je de volgende waarden van $p(n)$ vinden:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22

Voor grotere waarden van n wordt het erg veel werk om alle partities uit te schrijven en hebben we dus slimmere manieren nodig om de waarde van $p(n)$ te bepalen.

Wiskundigen hebben al eeuwenlang onderzoek gedaan naar de partitiefunctie $p(n)$. Daaruit is gebleken dat er in de rij $p(1), p(2), p(3), \ldots$ geen eenvoudige regelmaat te vinden is. De partitieformule van Euler geeft echter wel een manier waarop je deze waarden *na elkaar* kunt berekenen. Pas in de twintigste eeuw is het een wiskundige gelukt er een *directe* formule voor te vinden!
De Indiase wiskundige Ramanujan maakte belangrijke benaderingen van de partitiefunctie, waarna een andere wiskundige - Rademacher- er de formule voor vond:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(\frac{\pi}{k}\sqrt{2n/3 - 1/36})}{\sqrt{n - 1/24}}\right),$$

met

$$A_k(n) = \sum_{o \leq h < k \; \gcd(h,k)=1} e^{\pi i (s(h,k) - 2nh/k)}$$

en

$$s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k}\left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)$$

In de formule komen nogal wat zaken voor waar je meer wiskundige kennis voor nodig hebt... De partitieformule van Euler ziet er een gelukkig een stuk eenvoudiger uit en zullen we in hoofdstuk 7 zelf kunnen bewijzen.

1.2 Oplossingen van een vergelijking

Uit paragraaf 1.1 weten we dat het aantal partities van een n gelijk is aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \tag{1.1}$$

met $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k$. Van deze vergelijking met bijbehorende voorwaarden is het niet eenvoudig het aantal oplossingen te vinden. We zullen daarom op zoek gaan naar een vergelijking waar we wél het aantal oplossingen van kunnen bepalen en die hetzelfde aantal oplossingen heeft als vergelijking 1.1.

Definitie 1.3. *De* normaalvorm *van een partitie* $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *van* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *is een rijtje getallen* $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *waarin:*

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & \textit{het aantal keren '1' in } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ y_2 & = & \textit{het aantal keren '2' in } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \\ & \vdots & \\ y_n & = & \textit{het aantal keren 'n' in } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \end{array}$$

Voorbeeld 1.4. Bij de partitie (5,4,2) van 11 hoort de normaalvorm

$$[0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Twee verschillende partities van een getal n hebben ook twee verschillende normaalvormen. Bij een normaalvorm $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ hoort namelijk alleen de partitie

$$(\underbrace{n, \ldots, n}_{y_n \text{ keer}}, \ldots, \underbrace{2, \ldots, 2}_{y_2 \text{ keer}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{y_1 \text{ keer}}).$$

Voorbeeld 1.5. De 7 verschillende partities van 5 hebben 7 verschillende normaalvormen:

Partitie	Normaalvorm
(5)	$[0, 0, 0, 0, 1]$
$(4, 1)$	$[1, 0, 0, 1, 0]$
$(3, 2)$	$[0, 1, 1, 0, 0]$
$(3, 1, 1)$	$[2, 0, 1, 0, 0]$
$(2, 2, 1)$	$[1, 2, 0, 0, 0]$
$(2, 1, 1, 1)$	$[3, 1, 0, 0, 0]$
$(1, 1, 1, 1, 1)$	$[5, 0, 0, 0, 0]$

Opmerking. Als $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ een normaalvorm is van een partitie van n, dan geldt:

$$y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 2 + \ldots + y_n \cdot n = n$$

met $y_1 \cdot 1, y_2 \cdot 2, \ldots, y_n \cdot n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Definitie 1.4. *Bij een partitie van n met normaalvorm* $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *definiëren we de* partitiegetallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *door:*

$$\begin{aligned} z_1 &:= y_1 \cdot 1 \\ z_2 &:= y_2 \cdot 2 \\ &\vdots \\ z_n &:= y_n \cdot n \end{aligned}$$

Opmerking. Voor de partitiegetallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ van een partitie geldt:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Verder is elke z_k een k-voud.

We kunnen nu een 'partitievergelijking' voor n definiëren waarvan het aantal oplossingen overeenkomt met het aantal partities van n.

Definitie 1.5. *De* partitievergelijking *van* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *is de vergelijking*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$$

met

$$\begin{aligned} x_1 &\in \{0, 1, \ldots, n\} \\ x_2 &\in \{\textit{de 2-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\ x_3 &\in \{\textit{de 3-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\ &\vdots \\ x_n &\in \{\textit{de } n\textit{-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} = \{0, n\} \end{aligned}$$

We zullen de bovenstaande verzamelingen aangeven met $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Voorbeeld 1.6. Voor $n = 5$ is de partitievergelijking gelijk aan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$$

met

$$\begin{aligned} x_1 &\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ x_2 &\in \{0, 2, 4\} \\ x_3 &\in \{0, 3\} \\ x_4 &\in \{0, 4\} \\ x_5 &\in \{0, 5\} \end{aligned}$$

Opmerking. De partitiegetallen van een partitie zijn een oplossing van de partitievergelijking.

Voorbeeld 1.7. De partitie (2,2,1) van 5 heeft normaalvorm $[1, 2, 0, 0, 0]$ en de partitiegetallen zijn:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot 1 = 1 \\ z_2 &= 2 \cdot 2 = 4 \\ z_3 &= 0 \cdot 3 = 0 \\ z_4 &= 0 \cdot 4 = 0 \\ z_5 &= 0 \cdot 5 = 0 \end{aligned}$$

Bij de partitie (2,2,1) van 5 hoort dus de oplossing $1 + 4 + 0 + 0 + 0 = 5$ van de partitievergelijking van 5.

Twee verschillende partities van n hebben twee verschillende rijen partitiegetallen. De partitiegetallen van een partitie vertellen hoeveel termen van een bepaalde waarde in de partitie zitten, namelijk $\frac{z_1}{1}$ termen 1, $\frac{z_2}{2}$ termen 2, ... , $\frac{z_n}{n}$ termen n.

Voorbeeld 1.8. De 7 partities van 5 geven 7 verschillende oplossingen van de partitievergelijking.

Partitie	Normaalvorm	Oplossing van de partitievergelijking
(5)	$[0, 0, 0, 0, 1]$	$0 + 0 + 0 + 0 + 5 = 5$
$(4, 1)$	$[1, 0, 0, 1, 0]$	$1 + 0 + 0 + 4 + 0 = 5$
$(3, 2)$	$[0, 1, 1, 0, 0]$	$0 + 2 + 3 + 0 + 0 = 5$
$(3, 1, 1)$	$[2, 0, 1, 0, 0]$	$2 + 0 + 3 + 0 + 0 = 5$
$(2, 2, 1)$	$[1, 2, 0, 0, 0]$	$1 + 4 + 0 + 0 + 0 = 5$
$(2, 1, 1, 1)$	$[3, 1, 0, 0, 0]$	$3 + 2 + 0 + 0 + 0 = 5$
$(1, 1, 1, 1, 1)$	$[5, 0, 0, 0, 0]$	$5 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5$

Uit de tabel blijkt dat de partitievergelijking voor $n = 5$ minstens even veel oplossingen heeft als er partities zijn (namelijk 7). Het is niet meteen duidelijk of dit alle oplossingen van de partitievergelijking zijn.

Opmerking. Bij elke oplossing $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van de partitievergelijking hoort een partitie, namelijk:

$$(\underbrace{n, \ldots, n}_{\frac{x_n}{n} \text{ keer}}, \ldots, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\frac{x_2}{2} \text{ keer}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{x_1 \text{ keer}}).$$

Gevolg 1.1. Er geldt:

1. Bij elke partitie hoort een oplossing van de partitievergelijking,
2. Twee verschillende partities geven twee verschillende oplossingen van de partitievergelijking,
3. Elke oplossing van de partitievergelijking hoort bij een partitie.

Conclusie. Het aantal partities $p(n)$ van een getal $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ is gelijk aan het aantal oplossingen van de partitievergelijking van n.

Hoofdstuk 2

Polynomen

In hoofdstuk 1 hebben we gezien dat we het aantal partities van een getal n kunnen vinden door het aantal oplossingen van de partitievergelijking te vinden. Om het aantal oplossingen van bepaalde vergelijkingen te kunnen bepalen, zullen we 'polynomen' gaan gebruiken. In dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe je met polynomen kunt rekenen. Waarschijnlijk komt een groot deel daarvan je bekend voor van school. Maar om het wiskundig goed te kunnen verantwoorden, zijn wel een aantal formele definities nodig.

2.1 Wat is een polynoom?

Definitie 2.1. *Een* polynoom *is een uitdrukking van de vorm:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

met

- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$
- $a_n \neq 0$*, tenzij* $P(x) = 0$

De getallen $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ *worden de* coëfficiënten *van het polynoom* P *genoemd en* a_n *de* kopcoëfficiënt*.*

Opmerking. Elk polynoom wordt bepaald door de waarden van de coëfficiënten.

Voorbeeld 2.1.

$$\begin{aligned} P(x) &= 15x^7 + 3x - 7 \text{ is een polynoom met coëfficiënten } 15, 3, 7 \in \mathbb{Z} \\ P(x) &= \frac{1}{2}x + 3 \text{ is geen polynoom, want } \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Definitie 2.2. *Voor elke coëfficiënt a_i met $a_i \neq 0$ heet $a_i x^i$ een* term *van het polynoom P. We noteren dit als $a_i x^i \vdash P$. Hierin wordt i de graad van de term $a_i x^i$ genoemd.*
Als $a_i = 0$ noemen we $a_i x^i$ een nulterm. *We noteren dan $a_i x^i = 0$ en de graad is niet gedefinieerd.*

Opmerking. Nultermen worden meestal weggelaten in de notatie van polynomen.

Definitie 2.3. *De term $a_n x^n$ heet de* kopterm *van een polynoom. De* graad *van een polynoom $P \neq 0$ is gelijk aan de graad van de kopterm.*

Voorbeeld 2.2. Voorbeelden van polynomen zijn:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 3x^3 + 4x + 9 \\ P_2(x) &= 2x^2 + -5x \end{aligned}$$

Het polynoom P_1 heeft graad 3 en bestaat uit de termen $3x^3$, $4x$ en 9.
Het polynoom P_2 heeft graad 2 en bestaat uit de termen $2x^2$ en $-5x$.

Opmerking. De termen van een polynoom worden gescheiden door een +-teken. Dat teken heeft hier nog geen betekenis, omdat nog niet gedefinieerd is hoe we afzonderlijke termen van een polynoom bij elkaar op zouden kunnen tellen. Er zou net zo goed een ander symbool kunnen staan zoals /, $*$ of &. In de volgende paragraaf zullen we bekijken hoe we de termen van een polynoom bij elkaar op kunnen tellen.

Een polynoom lijkt heel erg op een *functie* van x, maar wordt op een andere manier gebruikt: bij functies zijn we bijvoorbeeld geïnteresseerd in de uitkomst bij een bepaalde waarde van x, de grafiek, het bereik van de functie of de afgeleide.
Polynomen gebruiken we alleen ‘formeel’: de variabele x gebruiken we niet om getalswaarden voor in te vullen en we letten niet op het domein, het bereik, de uitkomsten of de afgeleide.
Bij polynomen zullen we vooral kijken naar de waarden van de coëfficiënten, omdat die het polynoom vastleggen.

2.2 Monomen

De termen van een polynoom hebben allemaal dezelfde vorm. Deze vorm zullen we een ‘monoom’ noemen. In deze paragraaf zullen we bekijken hoe we monomen kunnen optellen en vermenigvuldigen. Hiermee kunnen we dan de vermenigvuldiging van polynomen definiëren.

Definitie 2.4. *Een* monoom *is een uitdrukking van de vorm:*

$$ax^i \text{ met } a \in \mathbb{Z} \text{ en } i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Als $a \neq 0$ noemen we i de graad *van het monoom.*

Opmerking. De termen van een polynoom zijn monomen. Andersom is elk monoom ook een polynoom: als $a = 0$ is ax^i gelijk aan het nulpolynoom en als $a \neq 0$ is ax^i een polynoom van graad i.

Definitie 2.5. *De som van twee monomen ax^i en bx^j definiëren we als:*

$$(ax^i) + (bx^j) := \begin{cases} ax^i + bx^j & \text{als } i > j \\ (a+b)x^i & \text{als } i = j \\ bx^j + ax^i & \text{als } i < j \end{cases}$$

Opmerking. De som van twee monomen is een polynoom.

Het optellen van meerdere monomen doen we door de regel voor het optellen van twee monomen herhaald toe te passen. De volgorde waarin we dat doen maakt niet uit. Voor monomen ax^i, bx^j en cx^k geldt bijvoorbeeld:

$$(ax^i + bx^j) + cx^k = ax^i + (bx^j + cx^k)$$

Opmerking. Een polynoom is de som van zijn termen.

Gevolg 2.1. Een som van eindig veel monomen is een polynoom.

Definitie 2.6. *Als ax^i en bx^j twee monomen zijn, dan is het product:*

$$(ax^i) \cdot (bx^j) := abx^{i+j}$$

Opmerking. Het product van twee monomen is een monoom. De graad van het product is gelijk aan de som van de graden van de twee monomen.

Het optellen en vermenigvuldigen van monomen gaat precies op de manier die je op school leert.

Voorbeeld 2.3.

$$\begin{aligned} 3x^5 + 4x^8 + 2x + 2x^5 + 1 + x^8 &= 5x^8 + 5x^5 + 2x + 1 \\ 3x^5 \cdot 4x^8 \cdot 2x \cdot 2x^5 \cdot 1 \cdot x^8 &= 48x^{27} \\ 2x^6 + 0 &= 2x^6 \\ 2x^6 \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Het product van twee polynomen

Definitie 2.7. *Het product van twee polynomen P en Q is gedefinieerd als:*

$$(P \cdot Q)(x) := \sum_{t_1 \vdash P, t_2 \vdash Q} t_1 \cdot t_2$$

Opmerking. De termen van een polynoom zijn monomen. Het product van twee polynomen is dus een (eindige) som van monomen en daarom een polynoom.

Als we het product van twee polynomen berekenen volgens definitie 2.7 voeren we eigenlijk twee stappen uit:

1. Bereken alle mogelijke producten van een term uit het eerste polynoom met een term uit het tweede polynoom,
2. Tel al deze producten bij elkaar op.

In voorbeeld 2.4 kun je zien dat dit niets anders is dan 'haakjes uitwerken'!

Voorbeeld 2.4. We berekenen het product $P_1 \cdot P_2$ met

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 3x^3 + 6x^2 + 4x + 9 \\ P_2(x) &= 2x^2 + 5x + 8 \end{aligned}$$

Om systematisch alle mogelijke producten $t_1 \cdot t_2$ te vinden, kunnen we gebruik maken van een vermenigvuldigschema:

$\Rsh\ \cdot$	$2x^2$	$5x$	8
$3x^3$	$6x^5$	$15x^4$	$24x^3$
$6x^2$	$12x^4$	$30x^3$	$48x^2$
$4x$	$8x^3$	$20x^2$	$32x$
9	$18x^2$	$45x$	72

Als we de termen rangschikken naar graad, zien we:

$$\begin{array}{cccccccc} 6x^5 & 15x^4 & 24x^3 & & & & \\ & 12x^4 & 30x^3 & 48x^2 & & & \\ & & 8x^3 & 20x^2 & 32x & & \\ & & & 18x^2 & 45x & 72 & + \\ \hline 6x^5 & 27x^4 & 62x^3 & 86x^2 & 77x & 72 & \end{array}$$

Dus

$$\begin{aligned} (P_1 \cdot P_2)(x) &= (3x^3 + 6x^2 + 4x + 9) \cdot (2x^2 + 5x + 8) \\ &= 6x^5 + 27x^4 + 62x^3 + 86x^2 + 77x + 72 \end{aligned}$$

2.4 Het product van meerdere polynomen

We zullen nu het product bekijken van meerdere polynomen. Ook hier is de methode eigenlijk hetzelfde als 'haakjes uitwerken'.

Definitie 2.8. *Het product van polynomen* $P_1, P_2, \ldots, P_s$ *met* $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *is gedefinieerd als:*

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_s)(x) := \sum_{t_1 \vdash P_1, t_2 \vdash P_2, \ldots, t_s \vdash P_s} t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$$

In definitie 2.8 mag s ook de waarde 1 of 2 hebben. Voor die waarden van s doet de definitie een uitspraak over dingen die we al eerder gedefinieerd hebben. We moeten daarom checken of dit met elkaar in overeenstemming is.
Voor $s = 1$ wordt de definitie:

$$P_1(x) = \sum_{t_1 \vdash P_1} t_1$$

Dit is precies wat gevolg 2.1 zegt: een polynoom is de som van zijn termen.
Voor $s = 2$ wordt de definitie:

$$(P_1 \cdot P_2)(x) = \sum_{t_1 \vdash P_1, t_2 \vdash P_2} t_1 \cdot t_2$$

Dit is precies definitie 2.7.
Definitie 2.8 is dus in overeenstemming met eerdere definities van (het product van) polynomen.

Definitie 2.9. *Een* termencombinatie *van polynomen* $P_1, P_2, \ldots, P_s$ *is een rijtje*

$$(t_1, t_2, \ldots, t_s)$$

met $t_1 \vdash P_1, t_2 \vdash P_2, \ldots, t_s \vdash P_s$.
De waarde *van de termencombinatie is gelijk aan het product* $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$.

Gevolg 2.2. Het product van polynomen is gelijk aan de som van de waarden van de termencombinaties van de polynomen.

Opmerking. De waarde van elke termencombinatie is een monoom, dus het product van eindig veel polynomen is een polynoom.

Voorbeeld 2.5. We berekenen het product van drie polynomen:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^6 + 8 \\ P_2(x) &= 15x^4 + 2x - 5 \\ P_3(x) &= 3x^3 + 4x^2 - 7x + 1 \end{aligned}$$

Er zijn $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ verschillende termencombinaties van P_1, P_2 en P_3:

Termencombinatie	Waarde	Graad
$(x^6, 15x^4, 3x^3)$	$45x^{13}$	13
$(x^6, 15x^4, 4x^2)$	$60x^{12}$	12
$(x^6, 15x^4, -7x)$	$-105x^{11}$	11
$(x^6, 15x^4, 1)$	$15x^{10}$	10
$(x^6, 2x, 3x^3)$	$6x^{10}$	10
$(x^6, 2x, 4x^2)$	$8x^9$	9
$(x^6, 2x, -7x)$	$-14x^8$	8
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(8, -5, 1)$	-40	0

Het product van P_1, P_2 en P_3 kun je uitrekenen door alle waarden uit de kolom bij elkaar op te tellen.

Het is redelijk wat werk om het product van P_1, P_2 en P_3 uit voorbeeld 2.5 helemaal uit te rekenen: van de 24 verschillende termencombinaties moet je de waarde bepalen en die bij elkaar optellen. Zo'n berekening zou je natuurlijk ook met een computer uit kunnen voeren. Je komt dan uit op:

$$\begin{aligned}(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3)(x) \quad &= \quad 45x^{13} + 60x^{12} - 105x^{11} + 21x^{10} - 7x^9 - 34x^8 \\ &\quad +397x^7 + 475x^6 - 840x^5 + 168x^4 - 56x^3 - 272x^2 \\ &\quad +296x - 40\end{aligned}$$

Het is niet altijd nodig om een heel product uit te rekenen. Soms zijn we alleen geïnteresseerd in een bepaalde coëfficiënt van het productpolynoom. We kunnen deze ook apart bepalen.

Definitie 2.10. *De* graad *van een termencombinatie is gelijk aan de graad van de waarde van de termencombinatie.*

Opmerking. Als $i_1, i_2, \ldots, i_s$ de graden zijn van de termen in de termencombinatie, is de graad van de termencombinatie gelijk aan $i_1 + i_2 + \ldots + i_s$.

Gevolg 2.3. Als $P_1, P_2, \ldots, P_s$ polynomen zijn van graad $n_1, n_2, \ldots, n_s$ dan geldt:

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_s)(x) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2+\ldots+n_s} r_k x^k$$

waarbij $r_k x^k$ gelijk is aan de som van de waarden van de termencombinaties van graad k.

Voorbeeld 2.6. Met behulp van gevolg 2.3 kunnen we de coëfficiënt van x^7 bepalen in het product $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ uit voorbeeld 2.5. We bekijken daarvoor de termencombinaties van graad 7.

Termencombinatie	Waarde	Graad
$(x^6, 2x, 1)$	$2x^7$	7
$(x^6, -5, -7x)$	$35x^7$	7
$(8, 15x^4, 3x^3)$	$360x^7$	7
	$397x^7$	

De som van de waarden van de termencombinaties is gelijk aan $397x^7$. De coëfficiënt van x^7 in het product $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ is dus gelijk aan 397. Dit is in overeenstemming met het resultaat van de computerberekening bij voorbeeld 2.5.

Hoofdstuk 3

Polynomen en partities

Uit hoofdstuk 1 weten we dat het aantal partities van een getal n gelijk is aan het aantal oplossingen van de partitievergelijking. In dit hoofdstuk zullen we zien hoe de oplossingen van deze vergelijking corresponderen met de n^e-graads termencombinaties van een product van n polynomen. We zullen daarbij een speciaal soort polynomen bekijken, '(0,1)'-polynomen, met de eigenschap dat het aantal n^e-graads termencombinaties terug te vinden is als een coëfficiënt in het productpolynoom. Op deze manier kunnen we dus het aantal partities van een getal n bepalen met behulp van een coëfficiënt van een bepaald polynoom.

3.1 De gradenverzameling

We hebben gezien hoe we bij het vermenigvuldigen van polynomen kunnen kijken naar termencombinaties van een bepaalde graad. Bij het zoeken van de termencombinaties van een bepaalde graad, zoek je eigenlijk naar verschillende oplossingen van de vergelijking:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = k,$$

waarbij $i_1, i_2, \ldots i_s$ de graden zijn van de termen in de termencombinatie. De waarden die je daarvoor kunt invullen zijn afhankelijk van de polynomen in het product. We zullen deze aanduiden met de 'gradenverzamelingen' van de polynomen.

Definitie 3.1. *De* gradenverzameling *van een polynoom is de verzameling graden van de termen van het polynoom.*

Voorbeeld 3.1. De gradenverzamelingen van de polynomen uit voorbeeld 2.5 zijn:

Polynoom	Gradenverzameling
$P_1(x) = x^6 + 8$	$A_1 = \{0, 6\}$
$P_2(x) = 15x^4 + 2x - 5$	$A_2 = \{0, 1, 4\}$
$P_3(x) = 3x^3 + 4x^2 - 7x + 1$	$A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

Opmerking. Twee verschillende polynomen kunnen dezelfde gradenverzameling hebben: $P_1(x) = 3x^3 + 4x + 9$ en $P_2(x) = -100x^3 + x - 1$ hebben bijvoorbeeld beide als gradenverzameling $\{0, 1, 3\}$.

Opmerking. In een termencombinatie $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ van $P_1, P_2, \ldots, P_s$ geldt voor de graden $i_1, i_2, \ldots i_s$ van de termen:

$$i_1 \in A_1, i_2 \in A_2, \ldots, i_s \in A_s,$$

waarbij $A_1, A_2, \ldots, A_s$ de gradenverzamelingen zijn van $P_1, P_2, \ldots, P_s$.

Gevolg 3.1. De termencombinaties van graad k corresponderen met de oplossingen van de vergelijking

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = k$$

met $i_1 \in A_1, i_2 \in A_2, \ldots, i_s \in A_s$.

Voorbeeld 3.2. In voorbeeld 2.5 corresponderen de termencombinaties van graad 7 precies met de oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

met $x_1 \in A_1 = \{0, 6\}$, $x_2 \in A_2 = \{0, 1, 4\}$ en $x_3 \in A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Termencombinatie van graad 7	Oplossing van $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ met $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ en $x_3 \in A_3$
$(x^6, 2x, 1)$	$6 + 1 + 0 = 7$
$(x^6, -5, -7x)$	$6 + 0 + 1 = 7$
$(8, 15x^4, 3x^3)$	$0 + 4 + 3 = 7$

We kunnen nu een belangrijk conclusie trekken over het aantal oplossingen van een vergelijking van de vorm $i_1 + i_2 + \ldots + i_s = k$.

Gevolg 3.2. Bij de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_s$ met gradenverzamelingen A_1, A_2, $\ldots A_s$ is het aantal k^e-graads termencombinaties van $P_1, P_2, \ldots, P_s$ gelijk aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = k$$

met $i_1 \in A_1, i_2 \in A_2, \ldots, i_s \in A_s$.

We kunnen dit resultaat koppelen aan hoofdstuk 1, waarin we konden concluderen dat het aantal partities van een getal n gelijk is aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$$

met

$$\begin{aligned}
x_1 &\in V_1 = \{0, 1, \ldots, n\} \\
x_2 &\in V_2 = \{\text{de 2-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\
x_3 &\in V_3 = \{\text{de 3-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\
&\vdots \\
x_n &\in V_n = \{\text{de } n\text{-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} = \{0, n\}.
\end{aligned}$$

Gevolg 3.3. Als $P_1, P_2, \ldots, P_n$ polynomen zijn met gradenverzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$, dan is het aantal partities van n gelijk aan het aantal n^e-graads termencombinaties van polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Voorbeeld 3.3. We definiëren vijf polynomen met de gradenverzamelingen V_1, V_2, V_3, V_4 en V_5 (zie voorbeeld 1.6).

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 17x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 9 \\
P_2(x) &= 3x^4 + 3x^2 + 3 \\
P_3(x) &= 6x^3 + 5 \\
P_4(x) &= x^4 + 7 \\
P_5(x) &= 2x^5 + 8
\end{aligned}$$

Er zijn precies 7 termencombinaties van graad 5 en $p(5) = 7$.

Termencombinaties van graad 5
$(17x^5, 3, 5, 7, 8)$
$(5x^3, 3x^2, 5, 7, 8)$
$(2x^2, 3, 6x^3, 7, 8)$
$(x, 3x^4, 5, 7, 8)$
$(x, 3, 5, x^4, 8)$
$(9, 3x^2, 6x^3, 7, 8)$
$(9, 3, 5, 7, 2x^5)$

3.2 (0,1)-polynomen

Definitie 3.2. *Een* $(0, 1)$-polynoom *is een polynoom*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

met $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 \in \{0, 1\}$.

Opmerking. De gradenverzameling van een $(0, 1)$-polynoom legt het polynoom vast: bij elke eindige deelverzameling van $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ is er precies één (0,1)-polynoom met die verzameling als gradenverzameling.

Voorbeeld 3.4. Het (0,1)-polynoom $x^3 + x + 1$ is het enige (0,1)-polynoom met als gradenverzameling $\{0, 1, 3\}$

Alle (0,1)-polynomen zijn polynomen, dus we kunnen ze ook bij elkaar optellen en vermenigvuldigen. De som of het product van twee (0,1)-polynoom hoeft echter geen (0,1)-polynoom te zijn.

Voorbeeld 3.5.

$$\begin{array}{rcll}(x^3+x^2)+(x+1) & = & x^3+x^2+x+1 & \text{is een (0,1)-polynoom}\\ (x^3+x^2)+(x^2+1) & = & x^3+\mathbf{2}x^2+1 & \text{is \textit{geen} (0,1)-polynoom}\\ (x^3+x^2)\cdot(x^2+1) & = & x^5+x^4+x^3+x^2 & \text{is een (0,1)-polynoom}\\ (x^3+x^2)\cdot(x+1) & = & x^4+\mathbf{2}x^3+x^2 & \text{is \textit{geen} (0,1)-polynoom}\end{array}$$

Ook bij het bepalen van producten van (0,1)-polynomen kun je termencombinaties gebruiken. Iedere term van een (0,1)-polynoom is van de vorm $x^j (= 1\cdot x^j)$ met $1 \leq j \leq n$. Een termencombinatie van (0,1)-polynomen is dus van de vorm

$$(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_s})$$

met waarde $x^{i_1+i_2+\ldots+i_s}$.

Voorbeeld 3.6. We berekenen de termencombinaties van drie polynomen met:

$$\begin{array}{rcl}P_1(x) & = & x^4+x+1\\ P_2(x) & = & x^3+x^2+x+1\\ P_3(x) & = & x^2+1\end{array}$$

Termencombinatie	Waarde	Graad
(x^4, x^3, x^2)	x^9	9
$(x^4, x^3, 1)$	x^7	7
(x^4, x^2, x^2)	x^8	8
$(x^4, x^2, 1)$	x^6	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(1, 1, 1)$	1	0

Opmerking. Alle termencombinaties van graad k hebben waarde x^k. Hieruit volgt dat de de som van de waarden van k^e-graadstermencombinaties gelijk is aan het *aantal* termencombinaties van graad k.

Gevolg 3.4. Het product van (0,1)-polynomen $P_1, P_2, \ldots P_s$ met gradenverzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_s$ is gelijk aan:

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_s)(x) = \sum_{k=0}^{n_1+n_2+\ldots+n_s} r_k x^k$$

met

$$\begin{array}{rcl}r_k & = & \text{het aantal termencombinaties van } P_1, P_2, \ldots, P_s \text{ van graad } k\\ & = & \text{het aantal oplossingen van de vergelijking } i_1+i_2+\ldots+i_s = k\\ & & \text{met } i_1 \in A_1, i_2 \in A_2, \ldots, i_s \in A_s.\end{array}$$

Voorbeeld 3.7. We bepalen r_2 en r_3 in het product van P_1, P_2 en P_3 uit voorbeeld 3.6. Er zijn 3 termencombinaties van graad 2:

Termencombinatie	Waarde	Graad
$(x, x, 1)$	x^2	2
$(1, x^2, 1)$	x^2	2
$(1, 1, x^2)$	x^2	2

De som van de waarden is gelijk aan $3x^2$, dus $r_2 = 3$.
Er zijn 4 termencombinaties van graad 3:

Termencombinatie	Waarde	Graad
$(x, x^2, 1)$	x^3	3
$(x, 1, x^2)$	x^3	3
$(1, x^3, 1)$	x^3	3
$(1, x, x^2)$	x^3	3

De som van de waarden is nu gelijk aan $4x^3$, dus $r_3 = 4$.
Berekening van het product $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ levert op:

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3)(x) = x^9 + x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

3.3 Het aantal partities

Om het aantal partities van n te bepalen zullen we de (0,1)-polynomen bestuderen met de gradenverzamelingen $V_1, V_2, \ldots, V_n$. We zullen zien dat we $p(n)$ direct als coëfficiënt terug kunnen vinden in het product van deze polynomen!

Definitie 3.3. *Voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ definiëren we $P_1, P_2, \ldots, P_n$ als de (0,1)-polynomen met gradenverzamelingen*

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{0, 1, \ldots, n\} \\
V_2 &= \{\textit{de 2-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\
V_3 &= \{\textit{de 3-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\
&\vdots \\
V_n &= \{\textit{de } n\textit{-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} = \{0, n\}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.8. Voor $n = 7$ geldt:

Gradenverzameling	Polynoom
$V_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$P_1(x) = x^7 + x^6 + \ldots + x + 1$
$V_2 = \{0, 2, 4, 6\}$	$P_2(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$
$V_3 = \{0, 3, 6\}$	$P_3(x) = x^6 + x^3 + 1$
$V_4 = \{0, 4\}$	$P_4(x) = x^4 + 1$
$V_5 = \{0, 5\}$	$P_5(x) = x^5 + 1$
$V_6 = \{0, 6\}$	$P_6(x) = x^6 + 1$
$V_7 = \{0, 7\}$	$P_7(x) = x^7 + 1$

Opmerking. De definitie van de polynomen $P_1, P_2, \ldots P_n$ hangt af van de waarde van n. Voor $n = 3$ zijn de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_3$ bijvoorbeeld gelijk aan:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ P_2(x) &= x^2 + 1 \\ P_3(x) &= x^3 + 1 \end{aligned}$$

We hebben de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ natuurlijk niet zomaar gedefinieerd. Met behulp van gevolg 3.4 kun je zien dat in het product van deze polynomen de coëfficiënt van x^n gelijk aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$$

met

$$\begin{aligned} x_1 &\in V_1 = \{0, 1, \ldots, n\} \\ x_2 &\in V_2 = \{\text{de 2-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\ x_3 &\in V_3 = \{\text{de 3-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} \\ &\vdots \\ x_n &\in V_n = \{\text{de } n\text{-vouden in } \{0, 1, \ldots, n\}\} = \{0, n\}. \end{aligned}$$

Dit is precies de partitievergelijking!

Stelling 3.5. *Voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt:*

$$p(n) = \textit{de coëfficiënt van } x^n \textit{ in het product } P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$$

Voorbeeld 3.9. Voor $n = 7$ is het product van de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_7$ gelijk aan:

$$\begin{aligned} (P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_7)(x) &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 \\ &\quad +18x^8 + 24x^9 + \ldots + x^{40} + x^{41} \end{aligned}$$

De coëfficiënt van x^7 is inderdaad gelijk aan $p(7)$, namelijk 15.

Stelling 3.2 is het resultaat van hoofdstuk 1 t/m 3. De redenering kunnen we als volgt samenvatten:

- Het aantal partities van n is gelijk aan het aantal oplossingen van de partitievergelijking
- Het aantal oplossingen van de partitievergelijking is gelijk aan het aantal termencombinaties van de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en dit is gelijk aan de coëfficiënt van x^n in het product $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$.

In voorbeeld 3.10 kun je voor $n = 7$ nog eens nagaan hoe partities, oplossingen van de partitievergelijking en termencombinaties met elkaar corresponderen.

Voorbeeld 3.10. De partitievergelijking voor $n = 7$ is gelijk aan:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 7$$

met

$$\begin{aligned}
x_1 &\in V_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\
x_2 &\in V_2 = \{0, 2, 4, 6\} \\
x_3 &\in V_3 = \{0, 3, 6\} \\
x_4 &\in V_4 = \{0, 4\} \\
x_5 &\in V_5 = \{0, 5\} \\
x_6 &\in V_6 = \{0, 6\} \\
x_7 &\in V_7 = \{0, 7\}.
\end{aligned}$$

In tabel 3.3 kun je zien hoe de partities van 7 corresponderen met de oplossingen van de partitievergelijking en de 7^e-graads termencombinaties van de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_7$.

Termencombinatie	Oplossing partitievergelijking	Partitie
$(x^7, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$7+0+0+0+0+0+0=7$	$(1,1,1,1,1,1,1)$
$(x^5, x^2, 1, 1, 1, 1, 1)$	$5+2+0+0+0+0+0=7$	$(2,1,1,1,1,1)$
$(x^4, 1, x^3, 1, 1, 1, 1)$	$4+0+3+0+0+0+0=7$	$(3,1,1,1,1)$
$(x^3, x^4, 1, 1, 1, 1, 1)$	$3+4+0+0+0+0+0=7$	$(2,2,1,1,1)$
$(x^3, 1, 1, x^4, 1, 1, 1)$	$3+0+0+4+0+0+0=7$	$(4,1,1,1)$
$(x^2, x^2, x^3, 1, 1, 1, 1)$	$2+2+3+0+0+0+0=7$	$(3,2,1,1)$
$(x^2, 1, 1, 1, x^5, 1, 1)$	$2+0+0+0+5+0+0=7$	$(5,1,1)$
$(x, x^6, 1, 1, 1, 1, 1)$	$1+0+6+0+0+0+0=7$	$(2,2,2,1)$
$(x, x^2, 1, x^4, 1, 1, 1)$	$1+2+0+0+4+0+0=7$	$(4,2,1)$
$(x, 1, x^6, 1, 1, 1, 1)$	$1+0+6+0+0+0+0=7$	$(3,3,1)$
$(x, 1, 1, 1, 1, x^6, 1)$	$1+0+0+0+0+6+0=7$	$(6,1)$
$(1, x^4, x^3, 1, 1, 1, 1)$	$0+4+3+0+0+0+0=7$	$(3,2,2)$
$(1, x^2, 1, 1, x^5, 1, 1)$	$0+2+0+0+5+0+0=7$	$(5,2)$
$(1, 1, x^3, x^4, 1, 1, 1)$	$0+0+3+4+0+0+0=7$	$(4,3)$
$(1, 1, 1, 1, 1, 1, x^7)$	$0+0+0+0+0+0+7=7$	(7)

Tabel 3.1: De partities van 7 met bijbehorende termencombinaties en oplossingen van de partitievergelijking.

Hoofdstuk 4

Machtreeksen

In hoofdstuk 3 hebben we gezien dat we $p(n)$ kunnen vinden als coëfficiënt in het product van de polynomen $P_1, P_2, \ldots, P_n$. De definitie van deze polynomen hangt af van de waarde van n.
In dit hoofdstuk zullen we polynomen bekijken die oneindig lang kunnen zijn, zogenaamde 'machtreeksen'. We zullen een product van machtreeksen bekijken waarin we $p(n)$ terug kunnen vinden als coëfficiënt. De definitie van deze machtreeksen is onafhankelijk van de waarde van n.
Vervolgens zullen we een product van oneindig veel machtreeksen bekijken waarin we zelfs álle waarden van de partitiefunctie, $p(1), p(2), \ldots$, als coëfficiënt kunnen terugvinden.
Het werk in dit hoofdstuk is redelijk formeel, terwijl je de conclusie misschien direct al gelooft op grond van hoofdstuk 3. Dit hoofdstuk is vooral van belang om de volgende hoofdstukken, waarin we verder toewerken naar de partitieformule van Euler, goed wiskundig te kunnen onderbouwen.

4.1 Wat is een machtreeks?

Definitie 4.1. *Een machtreeks is een oneindig lange uitdrukking van de vorm:*

$$M(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

met $a_0, a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{Z}$.
Een machtreeks M *noteren we als:*

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

De getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *worden de* coëfficiënten *van de machtreeks genoemd.*
Voor elke coëfficiënt a_i *met* $a_i \neq 0$ *heet* $a_i x^i$ *een* term *van de machtreeks.*
Notatie: $a_i x^i \vdash M$.

Voorbeeld 4.1. De machtreeks $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$ wordt de *geometrische* of *meetkundige* reeks genoemd. Alle coëfficiënten van de geometrische reeks zijn gelijk aan 1.

Opmerking. Elk polynoom $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is op te vatten als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$.

Voorbeeld 4.2. Het polynoom $P(x) = -x+1$ is op te vatten als de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ en $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 0$

Doordat een polynoom uit slechts eindig veel termen bestaat, kunnen we een kopterm aanwijzen en heeft een polynoom een graad. In de notatie van polynomen is het gebruikelijk de kopterm voorop te zetten, bijvoorbeeld:

$$x^8 + 2x^5 - 31x + 7$$

Bij een machtreeks die uit oneindig veel termen bestaat, kunnen we niet spreken van een graad en kunnen we geen kopterm aanwijzen. Om die reden worden de termen van een machtreeks juist in oplopende volgorde van graden genoteerd, bijvoorbeeld:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Net als polynomen gebruiken we machtreeksen alleen formeel: we vullen geen waarden in voor de variabele x. We hoeven dus ook niet na te denken over de vraag of we de optelling van oneindig veel termen wel kunnen uitrekenen ('convergentie').

Opmerking. Een machtreeks kunnen we, net als polynomen, opvatten als een som van monomen. Bij machtreeksen kan het gaan om oneindig veel monomen. De monomen in een machtreeks hebben allemaal een verschillende graad. Andersom kunnen we oneindig veel monomen met een verschillende graad optellen tot een machtreeks. Monomen van dezelfde graad kunnen we alleen bij elkaar optellen als het er eindig veel zijn.

Voorbeeld 4.3. De geometrische reeks $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is de som van de monomen $1, x, x^2, x^3, \ldots$

Gevolg 4.1. Een oneindige hoeveelheid monomen kunnen we alleen bij elkaar optellen tot een machtreeks als er van elke graad slechts eindig veel monomen zijn. Het resultaat is een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ waarbij $a_i x^i$ de som is van de monomen van graad i.

Voorbeeld 4.4. De som van 1 keer het monoom x, 2 keer het monoom x^2, 3 keer het monoom x^3, enzovoorts, is gelijk aan de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

Machtreeksen waarvan de coëfficiënten een bijzondere rij vormen, worden ook wel de 'voortbrengende functie' van die rij genoemd. De voortbrengende functie van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ zullen we gebruiken om de partitieformule van Euler af te leiden.

Definitie 4.2. *Een machtreeks* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *heet de* voortbrengende functie *van de rij* $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Voorbeeld 4.5. De voortbrengende functie van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$$

We zullen deze machtreeks noteren als $P(x)$.

4.2 Het product van machtreeksen

Definitie 4.3. *Het product van machtreeksen* M_1, M_2, $\ldots$, M_s *definiëren we als:*

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_s)(x) := \sum_{t_1 \vdash M_1, t_2 \vdash M_2, \ldots, t_s \vdash M_s} t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$$

Opmerking. De producten $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$ vormen een verzameling monomen waarin er slechts eindig veel van elke graad voorkomen. De som van al deze monomen is dus te schrijven als een machtreeks.

Definitie 4.4. *Een* termencombinatie *van machtreeksen* $M_1, M_2, \ldots, M_s$ *is een rijtje* $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ *met* $t_1 \vdash M_1, t_2 \vdash M_2, \ldots, t_s \vdash M_s$.
De waarde *van een termencombinatie is gelijk aan het product* $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_s$.

Opmerking. Het product van de machtreeksen $M_1, M_2, \ldots, M_s$ is gelijk aan de som van de waarden van alle termencombinaties. Wanneer alle coëfficiënten van de machtreeksen gelijk zijn aan 0 of 1, geldt net als bij $(0,1)$-polynomen:

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_s)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$$

met r_k = het aantal termencombinaties van graad k.

Voorbeeld 4.6. We berekenen het product van twee machtreeksen $M_1 \cdot M_2$ met

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ M_2(x) &= 1 + x \end{aligned}$$

Om systematisch alle mogelijke producten $t_1 \cdot t_2$ te vinden, gebruiken we een vermenigvuldigschema:

$\Rsh \cdot$	1	x	x^2	x^3	x^4	$\dots$
1	1	x	x^2	x^3	x^4	$\dots$
x	x	x^2	x^3	x^4	x^5	$\dots$

Als we de termen rangschikken naar graad, zien we:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots & \\
 & x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots & + \\
\hline
1 & 2x & 2x^2 & 2x^3 & 2x^4 & \dots &
\end{array}
$$

Dus

$$(M_1 \cdot M_2)(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

Definitie 4.5. *We definiëren de machtreeksen $G_1, G_2, \dots$ door:*

$$G_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^k)^n = 1 + x^k + x^{2k} + \dots$$

De reeks G_k is de geometrische reeks in x^k.

Opmerking. De reeks G_k heeft alleen nullen en enen als coëfficiënten. De coëfficiënt van x^n in het product $G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_n$ is dus gelijk aan het aantal n^e-graads termencombinaties van $G_1, G_2, \dots, G_n$.

> Voor een getal n vormen de machtreeksen $G_1, G_2, \dots, G_n$ eigenlijk een 'uitbreiding' van de polynomen $P_1, P_2, \dots, P_n$ zoals die in hoofdstuk 3 zijn gedefinieerd: iedere machtreeks G_k bevat de termen van het polynoom P_k en daarnaast alleen termen van graad $n + 1$ of hoger.

Opmerking. De n^e-graads termencombinaties van $G_1, G_2, \dots, G_n$ zijn precies de n^e-graads termencombinaties van de polynomen $P_1, P_2, \dots, P_n$ zoals die in hoofdstuk 3 zijn gedefinieerd.

Gevolg 4.2. De coëfficiënt van x^n in de machtreeks $G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_n$ is gelijk aan $p(n)$.

Voorbeeld 4.7. Het product van de machtreeksen $G_1, G_2, \dots, G_7$ is gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
(G_1 \cdot G_2 \cdot \dots \cdot G_7)(x) &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 \\
&\quad + 18x^8 + 24x^9 + \dots
\end{aligned}
$$

De coëfficiënt van x^7 is inderdaad gelijk aan $p(7) = 15$.

We kunnen nog iets bijzonders zien in het product: de coëfficiënten van x^1 tot en met x^7 zijn precies gelijk aan $p(1), p(2), \dots, p(7)$!

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22

4.3 Groeiende machtreeksen

> Voor elk geheel, positief getal n kunnen we $p(n)$ terugvinden als coëfficiënt van x^n in het product van de machtreeksen $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Deze rij machtreeksen heeft een mooie eigenschap, zodat we zelfs de waarden van $p(1), p(2), \ldots, p(n-1)$ als coëfficiënten van het product terug kunnen vinden. We zullen in deze paragraaf laten zien waarom dat zo is.

Definitie 4.6. *Een rij machtreeksen heet een* groeiende *rij als de rij aan beide onderstaande eigenschappen voldoet:*

1. *Elke machtreeks bevat de term 1*
2. *De k^e machtreeks bevat naast de term 1 alleen termen van graad k of hoger*

Voorbeeld 4.8. De machtreeksen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ vormen een groeiende rij machtreeksen:

$$\begin{aligned} G_1 &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ G_2 &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots \\ G_2 &= 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots \\ &\vdots \\ G_n &= 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots \end{aligned}$$

Opmerking. Een termencombinatie van graad k bevat alleen termen van graad k of lager. In een groeiende rij van n machtreeksen is elke k^e-graads termencombinatie daarom van de vorm:

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k, 1, \ldots, 1),$$

waarbij $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termen zijn uit de eerste k machtreeksen van de rij.
Het aantal termencombinaties van graad k is dus gelijk aan het aantal termencombinaties van graad k van de eerste k machtreeksen.

Stelling 4.3. *In het product $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n$ zijn de coëfficiënten van $x^1, x^2, \ldots, x^n$ gelijk aan $p(1), p(2), \ldots, p(n)$.*

Bewijs. In het product $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n$ is de coëfficiënt van x^k gelijk aan het aantal termencombinaties van graad k. Omdat $G_1, G_2, \ldots, G_n$ een groeiende rij machtreeksen is, is het aantal termencombinaties van graad k gelijk aan het aantal termencombinaties van graad k in het product $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_k$. Dit is volgens gevolg 4.2 gelijk aan $p(k)$. □

De enige termencombinatie van graad 0 in $G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_n$ is de termencombinatie $(1, 1, \ldots, 1)$ De coëfficiënt van x^0 in het product is dus gelijk aan 1. We definiëren daarom:

Definitie 4.7. $p(0)$=*1*

4.4 Het product van oneindig veel machtreeksen

We hebben een product van machtreeksen gevonden waarvan de eerste $n+1$ coëfficiënten gelijk zijn aan $p(0), p(1), \ldots, p(n)$. De vraag is nu of we ook een product van machtreeksen kunnen vinden met als uitkomst de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$.
We zullen hiervoor het product van oneindig veel machtreeksen definiëren.

Definitie 4.8. *Een* termencombinatie *van een oneindig lange rij machtreeksen* $M_1, M_2, \ldots$ *is een oneindig lange uitdrukking*

$$(t_1, t_2, \ldots$$

met $t_1 \vdash M_1, t_2 \vdash M_2, \ldots$*, waarbij slechts eindig veel termen ongelijk aan 1 zijn.*

We nemen aan dat het product van oneindig veel enen gelijk is aan 1. In een termencombinatie van de machtreeksen $M_1, M_2, \ldots$ zijn er naast de enen slechts eindig veel termen ongelijk aan 1. Deze termen kunnen we met elkaar vermenigvuldigen zoals we gewend zijn. De uitkomst is een monoom van een bepaalde graad.

Definitie 4.9. *Voor een termencombinatie van een oneindig lange rij machtreeksen definiëren we:*
De waarde *van een termencombinatie is gelijk aan het product van de niet-1-termen in de termencombinatie.*
De graad *van een termencombinatie is de graad van de waarde van de termencombinatie.*

Opmerking. De waarde van een termencombinatie is een product van eindig veel termen. Wanneer deze termen in volgorde veranderen, blijft het product van de termen gelijk. Als de volgorde van de rij machtreeksen verandert, blijven de waarden van de termencombinaties dus hetzelfde.

Definitie 4.10. *Als een oneindig lange rij machtreeksen* $M_1, M_2, \ldots$ *van elke graad k slechts eindig veel termencombinaties heeft, dan is het product gedefinieerd als:*

$$\prod_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

met

$$a_n x^n = \textit{som van de waarden van de termencombinaties van graad } n$$

Opmerking. Wanneer een oneindig lange rij machtreeksen een product heeft zoals hierboven gedefinieerd, dan mag de volgorde van de machtreeksen veranderd worden: het product verandert hierdoor niet.

Opmerking. In een groeiende rij machtreeksen komt elke term $x^k \neq 1$ slechts eindig vaak voor. Daarom zijn er van elke graad ook slechts eindig veel termencombinaties mogelijk en is het product van de machtreeksen goed gedefinieerd.

Voorbeeld 4.9. De rij $G_1, G_2, \ldots$ is een groeiende rij machtreeksen. Het oneindige product $\prod_{k=1}^{\infty} G_k$ is daarom goed gedefinieerd. De coëfficiënten in dit product worden bepaald door het aantal termencombinaties van iedere graad. Het aantal termencombinaties van graad k is gelijk aan het aantal termencombinaties van graad k van de eerste k machtreeksen. De coëfficiënten van het product zijn dus gelijk aan $p(0), p(1), \ldots$.

Conclusie. De voortbrengende functie van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ is gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} G_k \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k + x^{2k} + \ldots) \\
&= (1 + x + x^2 + \ldots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \ldots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + \ldots) \cdot \ldots
\end{aligned}
$$

Hoofdstuk 5

De inverse machtreeks

In hoofdstuk 4 hebben we gezien dat we machtreeksen met elkaar kunnen vermenigvuldigen tot een nieuwe machtreeks. Er zijn bijzondere gevallen waarin twee machtreeksen die beide ongelijk aan 1 zijn, als product 1 hebben.
We zullen zien dat je bij bepaalde machtreeksen een machtreeks kunt vinden waarmee het product 1 oplevert. Deze machtreeks heet de 'inverse machtreeks' van de oorspronkelijke machtreeks.
Voor de voortbrengende functie van $p(n)$ bestaat er ook een inverse. Euler gebruikte deze inverse in de partitieformule om de waarden van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ te berekenen.

5.1 Wat is een inverse machtreeks?

Definitie 5.1. *Twee machtreeksen M_1 en M_2 heten elkaars* inverse *als geldt:*

$$(M_1 \cdot M_2)(x) = (M_2 \cdot M_1)(x) = 1$$

De machtreeks M_2 wordt een inverse machtreeks *van M_1 genoemd en andersom.*

Voorbeeld 5.1. We berekenen het product van $1-x$ met de geometrische reeks $1 + x + x^2 + \ldots$:

$\cdot$	1	x	x^2	x^3	$\ldots$
1	1	x	x^2	x^3	$\ldots$
$-x$	$-x$	$-x^2$	$-x^3$	$-x^4$	$\ldots$

Vanaf $k = 1$ wordt elke term x^k in de bovenste rij gecompenseerd door een term $-x^k$ uit de onderste rij. Juist omdat dit eindeloos doorgaat wordt elke term gecompenseerd en krijgen we:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & x^4 & + & \ldots & \\ & - & x & - & x^2 & - & x^3 & - & x^4 & - & \ldots & + \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Het product van $1-x$ met de geometrische reeks is dus gelijk aan 1. De geometrische reeks en $1-x$ zijn dus elkaars inverse.

Een product van twee polynomen is zelden gelijk aan 1. Een product van twee polynomen P en Q waar 1 uitkomt kun je schrijven als:

$$\begin{aligned}(P \cdot Q)(x) &= (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n b_m x^{n+m} + \ldots + a_0 b_0 \\ &= 1\end{aligned}$$

De polynomen P en Q zijn ongelijk aan 0, dus $a_n, b_m \neq 0$. Hieruit volgt dat $n+m$ gelijk moet zijn aan 0 en $a_n = b_m$ aan ± 1. De polynomen P en Q zijn dus óf beide 1 óf beide -1.
Voor machtreeksen kunnen we zoiets niet stellen, omdat we geen kopterm kunnen aanwijzen.

5.2 Het berekenen van een inverse

We willen weten onder welke voorwaarden een machtreeks een inverse heeft en hoe we deze inverse kunnen bepalen. We zullen hiervoor nader onderzoeken wat de coëfficiënten zijn in het product van twee machtreeksen.

Een product van twee machtreeksen $M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $M_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ heeft als vermenigvuldigingstabel:

$\cdot$	b_0	$b_1 x$	$b_2 x^2$	$\ldots$
a_0	$a_0 b_0$	$a_0 b_1 x$	$a_0 b_2 x^2$	$\ldots$
$a_1 x$	$a_1 b_0 x$	$a_1 b_1 x^2$	$a_1 b_2 x^3$	$\ldots$
$a_2 x^2$	$a_2 b_0 x^2$	$a_2 b_1 x^3$	$a_2 b_2 x^4$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

We kunnen de coëfficiënten r_n van de product-machtreeks uitrekenen met behulp van een 'coëfficiëntenschema':

$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$a_0 b_4$	$\ldots$	
	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$\ldots$	
		$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$\ldots$	
			$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$\ldots$	
				$a_4 b_0$	$\ldots$	$+$
r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	$\ldots$	

Gevolg 5.1. Voor het product $M_1 \cdot M_2$ geldt de formule:

$$(M_1 \cdot M_2)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

met

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Wanneer het product van de twee machtreeksen gelijk is aan 1, dan geldt:

$$r_0 = 1 \text{ en } r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = 0$$

en

$$\begin{aligned}
r_0 &= a_0 b_0 \\
r_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
r_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Opmerking. De waarden van $a_0, a_1, a_2, \ldots$ leggen de waarden van $b_0, b_1, \ldots$ vast. We kunnen ze stap voor stap berekenen:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{a_0} \text{ (want } r_0 = 1) \\
b_1 &= \frac{-a_1 b_0}{a_0} \text{ (want } r_1 = 0) \\
&\quad \textit{b_0 is berekend in stap 1, dus b_1 ligt vast.} \\
b_2 &= \frac{-a_1 b_1 - a_2 b_0}{a_0} \text{ (want } r_2 = 0) \\
&\quad \textit{b_0 en b_1 zijn berekend in stap 1 en 2, dus b_2 ligt vast.}
\end{aligned}$$

Als a_0 gelijk is aan ± 1, weten we zeker dat $b_0, b_1, b_2, \ldots$ gehele getallen zijn.

Gevolg 5.2. Een machtreeks $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met $a_0 = \pm 1$ heeft een inverse machtreeks $M^{-1}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$.
We noteren de inverse machtreeks als:

$$M^{-1}(x) = \frac{1}{M(x)}.$$

De coëfficiënten van de inverse machtreeks zijn gelijk aan:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{a_0} \\
b_n &= \frac{-\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}}{a_0} \text{ (voor } n > 0)
\end{aligned}$$

Voorbeeld 5.2. De machtreeks $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ heeft een inverse. De coëfficiënten van de inverse kunnen we berekenen met behulp van het coëfficiënten schema.

Er geldt: $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 1$ en $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = -1$. Het coëfficiëntenschema ziet er als volgt uit:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|cc}
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & \\
 & -b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 & \ldots & \\
 & & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & \\
 & & & -b_0 & -b_1 & \ldots & \\
 & & & & b_0 & \ldots & + \\
\hline
r_0 = 1 & r_1 = 0 & r_2 = 0 & r_3 = 0 & r_4 = 0 & \ldots &
\end{array}$$

stap 1: r_0 moet gelijk zijn aan 1, dus $b_0 = 1$,

stap 2: r_1 moet gelijk zijn aan 0, dus $b_1 = -b_0 = 1$.

stap 3: r_2 moet gelijk zijn aan 0, dus $b_2 = b_1 - b_0 = 0$.

stap 4: r_3 moet gelijk zijn aan 0, dus $b_3 = b_2 - b_1 + b_0 = 0$.

En zo vinden we ook: $b_4 = b_5 = \ldots = 0$. De inverse machtreeks van $M(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ is dus gelijk aan $1 + x$. Met andere woorden:

$$M(x) = \frac{1}{1+x}$$

5.3 De inverse van $P(x)$

De machtreeks $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ heeft volgens gevolg 5.2 een inverse machtreeks. Deze inverse gaat een belangrijke rol spelen in het bewijs van de partitieformule van Euler. In deze paragraaf zullen we onderzoeken wat we op dit moment van deze inverse weten.

Gevolg 5.2 kunnen we toepassen op de voortbrengende functie van $p(n)$.

Gevolg 5.3. De voortbrengende functie $P(x)$ van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ heeft een inverse machtreeks.
We zullen deze noteren als

$$P^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n)x^n$$

De machtreeks P^{-1} heeft als inverse de machtreeks P. Wanneer we de waarden van de coëfficiënten van P^{-1} kunnen bepalen, kunnen we met behulp van gevolg 5.2 de waarden $p(0), p(1), p(2), \ldots$ berekenen:

$$\begin{aligned}
p(0) &= \frac{1}{q(0)} \\
p(1) &= \frac{-q(1)p(0)}{q(0)} \\
p(2) &= \frac{-q(1)p(1) - q(2)p(0))}{q(0)} \\
p(3) &= \frac{-q(1)p(2) - q(2)p(1) - q(3)p(0)}{q(0)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

We zullen in het volgende hoofdstuk op zoek gaan naar een manier om de coëfficiënten $q(0), q(1), q(2), \ldots$ van P^{-1} te bepalen.

Vanwege gevolg 5.2 kunnen we de machtreeksen $G_1, G_2, \ldots$ uit hoofdstuk 4 noteren als

$$G_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^k)^n = \frac{1}{1 - x^k}$$

Gevolg 5.4. De voortbrengende functie $P(x)$ is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n &= \prod_{k=1}^{\infty} G_k \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}
\end{aligned}$$

In hoofdstuk 4 hebben we gezien dat in een oneindig product van machtreeksen we de factoren van volgorde mogen verwisselen. We kunnen zo een mooie uitdrukking vinden voor de inverse van $P(x)$.

Stelling 5.5. *De voortbrengende functie $P(x)$ heeft als inverse het oneindige product*

$$P^{-1}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)$$

Bewijs. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}\cdot(1-x^k) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Hoofdstuk 6

Partities met verschillende termen

In dit hoofdstuk zullen we op zoek gaan naar een uitdrukking voor het oneindige product
$$P^{-1}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)$$
De informatie over de coëfficiënten van dit product komt uit onverwachte hoek: partities die uit verschillende termen bestaan.

6.1 Partities met verschillende termen

Definitie 6.1. *We definiëren voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$:*

$$p_v(n) = \text{ het aantal partities van } n \text{ in onderling verschillende termen}$$

Voorbeeld 6.1. Er zijn 5 partities van 7 die uit verschillende termen bestaan, namelijk (7), (6,1), (5,2), (4,3) en (4,2,1). Er geldt dus: $p_v(7) = 5$.

Met behulp van systematisch tellen kun je zo ook vinden:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22
$p_v(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6

Opmerking. Een partitie die uit onderling verschillende termen bestaat heeft een normaalvorm $[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ met $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \{0, 1\}$. Voor de partitiegetallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ geldt:

$$z_1 \in \{0, 1\}, z_2 \in \{0, 2\}, \ldots, z_n \in \{0, n\}$$

De redenering die we hebben gevolgd om de voortbrengende functie van $p(n)$ te vinden kunnen we ook toepassen op $p_v(n)$:

- $p_v(n)$ is gelijk aan het aantal oplossingen van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$$

met $x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,2\}, \ldots, x_n \in \{0,n\}$

- $p_v(n)$ is gelijk aan de coëfficiënt van x^n in het product

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$$

(gevolg 3.4)

- een partitie van n die uit verschillende termen bestaat, correspondeert met een n^e-graads termencombinatie van het product

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$$

Voorbeeld 6.2. Voor $n = 5$ corresponderen de partities in verschillende termen en de termencombinaties van $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$ als volgt:

Partitie	Termencombinatie
(5)	$(1,1,1,1,x^5)$
$(4,1)$	$(x,1,1,x^4,1)$
$(3,2)$	$(1,x^2,x^3,1,1)$

6.2 De coëfficiënten van $P^{-1}(x)$

In paragraaf 6.1 hebben we gezien hoe het aantal partities in verschillende termen terug te vinden is in het product $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$. We willen uiteindelijk de coëfficiënten bepalen van de machtreeks

$$P^{-1}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$$

In deze paragraaf zullen we onderscheid maken in partities die uit een oneven aantal delen of uit een even aantal delen bestaan. Daarmee zullen we dan de coëfficiënten van $P^{-1}(x)$ kunnen bepalen.

Definitie 6.2. *We definiëren:*

- $p_e(n) :=$ *aantal partities van n in een* even *aantal verschillende termen*
- $p_o(n) :=$ *aantal partities van n in een* oneven *aantal verschillende termen*
- $\tilde{p}(n) := p_e(n) - p_o(n)$

Opmerking. Er geldt:

$$p_v(n) = p_e(n) + p_o(n)$$

We willen $\tilde{p}(n)$ net als $p(n)$ gaan bepalen via een product van polynomen. We bekijken daarvoor het product:

$$(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$$

Elke n^e-graads termencombinatie in dit product kunnen we direct koppelen aan een n^e-graadstermencombinatie van het product $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ en dus aan een partitie van n in verschillende termen.
In het product $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$ heeft elke termencombinatie van graad n de waarde x^n of $-x^n$. Een termencombinatie waarin een *even* aantal niet-1-termen voorkomen heeft de waarde x^n en een termencombinatie met een *oneven* aantal niet-1-termen heeft de waarde $-x^n$. Het aantal niet-1-termen is precies het aantal termen van de partitie waarmee de termencombinatie correspondeert.

Voorbeeld 6.3. Voor $n = 5$ zien we:

Partitie	Termencombinatie	Waarde
(5)	$(1,1,1,1,-x^5)$	$-x^5$
$(4,1)$	$(-x,1,1,-x^4,1)$	x^5
$(3,2)$	$(1,-x^2,-x^3,1,1)$	x^5

De waarden van de n^e-graads termencombinaties zijn bij elkaar opgeteld gelijk aan het aantal termencombinaties met een even aantal niet-1-termen min het aantal termencombinaties met een oneven aantal niet-1-termen.

Gevolg 6.1. In het product

$$(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)$$

is de som van de waarden van de n^e-graads termencombinaties gelijk aan $\tilde{p}(n)$.

Voorbeeld 6.4. Als voorbeeld bekijken we de partities in verschillende termen van 7. Er geldt: $p_e(7) = 3$, $p_o(7) = 2$ en $\tilde{p}(7) = 3 - 2 = 1$.
We kunnen deze waarde ook vinden door te kijken naar de 7^e-graadstermencombinaties in het product $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^7)$

Partitie	Termencombinatie	Waarde
(7)	$(1,1,1,1,1,1,-x^7)$	$-x^7$
$(6,1)$	$(-x,1,1,1,1,-x^6,1)$	x^7
$(5,2)$	$(1,-x^2,1,1,-x^5,1,1)$	x^7
$(4,3)$	$(1,1,-x^3,-x^4,1,1,1)$	x^7
$(4,2,1)$	$(-x,-x^2,1,-x^4,1,1,1)$	$-x^7$
		x^7

De som van de waardes is gelijk aan $3x^7 - 2x^7 = (p_e(7) - p_o(7))x^7 = x^7$. De coëfficiënt van x^7 in het product $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^7)$ is dus gelijk aan $\tilde{p}(7) = 1$.

Gevolg 6.2. Er geldt: $\tilde{p}(n)$ is gelijk aan de coëfficiënt van x^n in het product

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)$$

Opmerking. De polynomen $1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3, \ldots$ vormen, wanneer we ze opvatten als machtreeksen, een groeiende rij.
Het oneindige product $\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)$ is dus gedefinieerd als machtreeks, waarin de coëfficiënt van x^n gelijk is aan de coëfficiënt van x^n in het product $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)$.

Gevolg 6.3. De voortbrengende functie van $\tilde{p}(n)$ is gelijk aan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)$$

Het bepalen van $\tilde{p}(n)$ lijkt nog een stuk ingewikkelder dan het bepalen van $p(n)$, maar dat is niet het geval. Voor $\tilde{p}(n)$ vond Euler al een mooie formule:

Stelling 6.4 (Euler)**.** *Er geldt:*

$$\tilde{p}(n) = \begin{cases} (-1)^h & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3h^2-h}{2} \text{ is} \\ (-1)^h & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3h^2+h}{2} \text{ is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Het bewijs van deze stelling laten we hier weg. In de tabellen zie je een aantal waarden berekend.

h	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{3h^2-h}{2}$	0	1	5	12	22	35	51	70
$\frac{3h^2+h}{2}$	0	2	7	15	26	40	57	77

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\tilde{p}(n)$	1	−1	−1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	−1

Hoofdstuk 7

De partitieformule van Euler

In dit hoofdstuk komen aan bij ons eindresultaat: de partitieformule van Euler! We zullen laten zien hoe je met deze formule de waarden van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ kunt berekenen. Maar wat nog belangrijker is: we zullen laten zien dat de formule het resultaat is van het werk dat we in alle vorige hoofdstukken hebben gedaan!

7.1 Berekening van $p(0), p(1), p(2), \ldots$

We weten uit hoofdstuk 6 dat de inverse machtreeks van $P(x)$ gelijk is aan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots$$

Vanuit gevolg 5.2 weten we dat we de coëfficiënten van $P(x)$ kunnen uitrekenen met de vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
p(0) &= \frac{1}{\tilde{p}(0)} \\
p(1) &= \frac{-\tilde{p}(1)p(0)}{\tilde{p}(0)} \\
p(2) &= \frac{-\tilde{p}(1)p(1) - \tilde{p}(2)p(0)}{\tilde{p}(0)} \\
p(3) &= \frac{-\tilde{p}(1)p(2) - \tilde{p}(2)p(1) - \tilde{p}(3)p(0)}{\tilde{p}(0)} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Met $\tilde{p}(0) = 1, \tilde{p}(1) = -1, \tilde{p}(2) = -1$ en $\tilde{p}(3) = 0$ vinden we daarmee:

$$\begin{aligned}
p(0) &= 1 \\
p(1) &= p(0) = 1 \\
p(2) &= p(0) + p(1) = 2 \\
p(3) &= p(2) + p(1) = 3 \\
p(4) &= p(3) + p(2) = 5 \\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 7 \\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 11 \\
p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15
\end{aligned}$$

Op deze manier kun je alle waarden van $p(0), p(1), p(2), \ldots$ na elkaar uitrekenen.

7.2 De formule

De partitieformule van Euler ziet er als volgt uit:

Stelling 7.1.

$$\begin{aligned}
p(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \{p(n - \frac{3k^2 - k}{2}) + p(n - \frac{3k^2 + k}{2})\} \\
&= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \\
&\quad + p(n-12) + p(n-15) - \ldots
\end{aligned}$$

Bij het gebruiken van deze formule nemen we aan:

$$\begin{aligned}
p(0) &= 1 \\
\text{en voor } n < 0\text{: } p(n) &= 0
\end{aligned}$$

Wanneer je met de formule waarden van $p(n)$ berekent ziet dat er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
p(0) &:= 1 \\
p(1) &= p(0) = 1 \\
p(2) &= p(0) + p(1) = 2 \\
p(3) &= p(2) + p(1) = 3 \\
p(4) &= p(3) + p(2) = 5 \\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 7 \\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 11 \\
p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15
\end{aligned}$$

Dit is precies hetzelfde als wat we vonden in paragraaf 7.1, hoewel je dat op het eerste gezicht misschien niet duidelijk was. We zullen nu laten zien hoe de partitieformule volgt uit de methode die we in paragraaf 7.1 hebben gebruikt. Daarmee is ons doel van dit boekje bereikt.

Bewijs stelling 7.1. De voortbrengende functie $P(x)$ is de inverse van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n)$. Vanwege gevolg 5.2 geldt daarom:

$$\begin{aligned} p(0) &= \frac{1}{\tilde{p}(0)} = 0 \\ \text{en voor } n > 0\text{: } p(n) &= -\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}(k)p(n-k) \end{aligned}$$

Wanneer we aannemen voor $n < 0$: $p(n) = 0$, dan geldt voor $k > n$:$p(n-k) = 0$
Er geldt daarom voor $n > 0$:

$$\begin{aligned} p(n) &= -\sum_{k=1}^{n} \tilde{p}(k)p(n-k) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{p}(k)p(n-k) \end{aligned}$$

Nu gebruiken we de formule van Euler voor $\tilde{p}(n)$:

$$\tilde{p}(n) = \begin{cases} (-1)^h & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3h^2-h}{2} \text{ is} \\ (-1)^h & \text{als } n \text{ van de vorm } \frac{3h^2+h}{2} \text{ is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

We vervangen in de sommatie de waarden k door de waarden $\frac{3h^2-h}{2}$ en $\frac{3h^2+h}{2}$:

$$\begin{aligned} p(n) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{p}(k)p(n-k) \\ &= -\{\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{p}(\frac{3h^2-h}{2})p(n-\frac{3h^2-h}{2}) + \sum_{h=1}^{\infty} \tilde{p}(\frac{3h^2+h}{2})p(n-\frac{3h^2+h}{2})\} \\ &= -\{\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h p(n-\frac{3h^2-h}{2}) + \sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h p(n-\frac{3h^2+h}{2})\} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty}(-1)^{h-1}\{p(n-\frac{3h^2-h}{2}) + p(n-\frac{3h^2+h}{2})\} \end{aligned}$$

Hiermee is de stelling bewezen! $\square$

Bijlage A

Toelichting op de gebruikte notatie

A.1 Verzamelingen

Eindige verzamelingen van getallen kun je opschrijven door alle getallen op te sommen en tussen accolades $\{\}$ te plaatsen. Het teken $\in$ gebruik je om aan te geven dat een bepaald getal in de verzameling zit.

Voorbeeld A.1. De verzameling A bestaat uit de getallen $3, 12, 16, 99$, notatie: $A = \{3, 12, 16, 99\}$.
Het getal 12 zit in de verzameling A, notatie: $12 \in A$.
Het getal 13 zit niet in de verzameling A, notatie: $13 \notin A$.

De belangrijkste oneindige verzameling die in dit boekje wordt gebruikt is de verzameling van gehele getallen: $\mathbb{Z}$. Soms bekijken we alleen een deel van deze verzameling. In de tabel staat een overzicht van de gebruikte notaties.

Notatie	Omschrijving	Verzameling
$\mathbb{Z}$	alle gehele getallen	$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_{>0}$	gehele getallen groter dan 0	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	gehele getallen groter of gelijk aan 0	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

A.2 Sommen en producten

Als een som uit veel termen bestaat wordt het sommatieteken $\sum$ gebruikt om de som korter op te schrijven. Boven en onder het sommatieteken staat aangegeven waar de som begint en eindigt.

Voorbeeld A.2. De som van de getallen 1 t/m 10 kun je noteren als:

$$\sum_{n=1}^{10} n$$

Hetzelfde kun je doen voor een product met het teken $\prod$.

Voorbeeld A.3. Het product van de getallen 1 t/m 10 kun je noteren als:

$$\prod_{n=1}^{10} n$$

Soms wordt op een andere manier aangegeven welke elementen je moet optellen of vermenigvuldigen. Dit kunnen bijvoorbeeld de elementen van een bepaalde verzameling zijn.

Voorbeeld A.4. De som van de getallen uit de verzameling $A = \{3, 12, 16, 99\}$ kun je noteren als:

$$\sum_{x \in A} x = 3 + 12 + 16 + 99$$

De tekens $\sum$ en $\prod$ komen uit het Griekse alfabet: $\sum$ is de Griekse letter S en $\prod$ is de Griekse letter P.

Bibliografie

[1] G.E. Andrews en K. Eriksson (2004), *Integer Partitions.* Cambridge University Press.

[2] F. Beukers (1999), Ramanujan en de partitiefunctie. *Pythagoras*, jaargang 38, nummer 6.

[3] R.P. Grimaldi (1989), *Discrete and combinatorial mathematics.* Addison-Wesley.

[4] J.H. van Lint en R.M. Wilson (1992), *A Course in Combinatorics.* Cambridge University Press.