Op weg naar de Riemann Hypothese

Polle, R.C.

R.C. Pollé

Op weg naar de Riemann Hypothese

Doctoraalscriptie, verdedigd op 7 april 2006

Scriptiebegeleider: Dr. H. Finkelnberg

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

Lijst van figuren

Lijst van tabellen

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Woord vooraf

In deze Master PO is het de bedoeling dat jullie kennis maken met de Riemann Hypothese, een beroemd wiskundig probleem dat betrekking heeft op de verdeling van priemgetallen. En natuurlijk is de 'weg' hier naar toe zeer belangrijk. Zo zullen jullie kennis maken met *complexe getallen, Taylor polynomen, reeksen, verschillende eigenschappen van priemgetallen, de Gamma-functie, de Riemann-Zeta functie, Fourier reeksen, bewijzen met inductie en natuurlijk ook de Riemann Hypothese.*

Deze hypothese speelt een belangrijke rol op het gebied van de getaltheorie. Een *hypothese* wil zeggen dat het vermoeden bestaat dat iets geldt. Er is echter nog geen bewijs voor geleverd.

Nu volgt een passage uit het NRC-handelsblad van 19 juni 2004: Onlangs heeft de Franse wiskundige Louis de Branges geclaimd een bewijs te hebben voor de Riemann Hypothese. De Branges, verbonden aan de universiteit van Purdue in de Verenigde Staten, heeft zijn bewijs van het Riemann-vermoeden gepubliceerd op zijn website. Collega's zijn uitgenodigd het artikel van 124 pagina's te controleren. Die hebben zich in hun eerste reacties zeer sceptisch uitgelaten. Al minstens twee keer eerder heeft De Branges namelijk een bewijs geclaimd dat bij nadere beschouwing vol fouten bleek te zitten. Mocht het bewijs twee jaar stand houden, dan valt De Branges eeuwige roem ten deel. Bovendien strijkt hij een miljoen dollar op van het Clay Mathematisch Instituut in Cambridge, Massachusetts, dat die prijs heeft uitgeloofd voor de oplossing van elk van zeven grote wiskundige problemen[1]. En honderden andere wiskundige stellingen, die uitgaan van de juistheid van de Riemann Hypothese, zijn dan in één klap bewezen. Hoewel

[1] Een korte beschrijving van de problemen kun je vinden op de site www.claymath.org/millennium/ . De benamingen van de problemen zijn als volgt: The Birch and Swinnerton Dyer Conjecture, The Hodge Conjecture, The Navier-Stokes Equations, P vs NP, The Poincare Conjecture, The Riemann Hypothesis en The Yang-Mills Theory

het werk van De Branges omstreden is, kan toch niemand zich veroorloven het te negeren. In 1985 verraste hij de wiskundige wereld met een (geldig) bewijs van het Bieberbach-vermoeden.

Je begrijpt al dat we zelf niet meteen een bewijs voor dit probleem gaan zoeken in deze Master PO, maar we willen wel graag weten wat die Riemann Hypothese nou precies zegt.

1.2 Over Riemann zelf

Het leven van de Duitse wiskundige Bernhard Riemann heeft niet lang geduurd, maar in die tijd heeft hij erg veel voor de wiskunde betekend. Hij heeft veel artikelen geschreven waaronder slechts één artikel over getaltheorie. En dit is het artikel over de Riemann Hypothese waar deze Master P.O. zijn einddoel heeft. Namelijk duidelijk maken wat deze Riemann Hypothese is. Maar voor we aan de wiskunde gaan beginnen volgt eerst een korte introductie over het leven van Bernhard Riemann en hoe het er in zijn tijd aan toe ging.

Figuur 1.1: Bernhard Riemann

Riemann werd geboren op 17 september 1826 in Breselenz in het koninkrijk van Hannover. Tot zijn 14^e leefde hij bij zijn familie in het geïsoleerde Hannover Wendland, een klein niet ontwikkeld gebied aan de rand van de Elbe rivier. Daarna ging hij naar Hannover (1840-1842) en Lüneberg (1846-1846) en daar behaalde hij zijn gymnasium en vervolgens studeerde hij aan de universiteit van Göttingen en Berlijn. In 1851 behaalde hij in Göttingen zijn doctoraat. In 1857 werd hij aan dezelfde universiteit assistent Professor en in 1859 volledig Professor. Ondanks deze mooie loopbaan was Riemann altijd erg eenzaam. Hij kon zijn hele leven erg moeilijk contact maken met andere mensen. Veel collegae (waaronder Dedekind[2] deden verwoede pogingen om in contact met hem te komen, maar Riemann bleef zich afzonderen in de eenzaamheid van zijn kamer. Toch trouwde hij in juni 1862 met Elise Koch, een vriendin van zijn zus. Hij had bijna zijn gehele leven een slechte gezondheid. In de herfst van 1862 kreeg hij pleuritis (borstvliesontsteking), wat resulteerde in een permanente beschadiging van

[2]Richard Dedekind was wiskundige die leefde van 1831 tot 1916. Hij schreef ook een biografie over Riemann

zijn longen. Vanwege deze slechte gezondheid bevond hij zich een groot deel van zijn leven in Italië. Deze verblijven in Italë heelden niet zijn fysieke gestel maar brachten hem wel geestelijke rust. Zijn enige dochter werd daar geboren. In 1866, in de eerste dagen van de oorlog met Pruisen, besloot hij weer naar het zuiden te gaan. Hij overleed op 20 juli 1866 in Selasca, een plaatsje aan het Lago Maggiore. Hij was toen nog geen veertig jaar. Maar ondanks zijn korte leven heeft hij erg veel voor de wiskunde (en de natuurkunde) betekend.

Hoofdstuk 2

Partieel integreren

Dit hoofdstuk legt in het kort de techniek van het partieel integreren uit. Deze techniek zal in de Master PO regelmatig terugkomen bij het uitrekenen van integralen. Ter voorbereiding op de *methode van het partieel integreren* en om wat inzicht te krijgen beginnen we met de *substitutiemethode*.

2.1 De substitutiemethode

Van de middelbare school kennen we de *kettingregel voor differentiëren*. Deze luidt als volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{2.1}$$

Ter ondersteuning volgt een voorbeeld:

Voorbeeld 2.1 *Bepaal de afgeleide van* $f(x) = \sin(x^2 + x)$.
Dan stellen we:

$$y = \sin(u) \text{ met } u = x^2 + x$$

En dan lossen we de vraag als volgt op:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u) \cdot (2x + 1) = (2x + 1)cos(x^2 + x)$$

We zullen de *kettingregel voor differentiëren* uit 2.1 nu iets formeler formuleren:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) \tag{2.2}$$

Nu gaan we de kettingregel 'vertalen' naar *primitiveren.* Als we de kettingregel voor differentiëren gebruiken en deze primitiveren volgt dat

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Als we vervolgens ook de *substitutie* $u = g(x)$ toepassen, krijgen we

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du.$$

En tot slot stellen we $F' = f$ en dan volgt

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

We zullen deze *substitutiemethode* als volgt formaliseren:

Stelling 2.1 *(De substitutiemethode.)Stel f is een integreerbare functie en $u = g(x)$ is een differentieerbare functie, die gedefinieerd is op het interval I en waarvan het beeld bevat is in het domein van f. Dan geldt*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Dan volgt nu een voorbeeld.

Voorbeeld 2.2 *Vind $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$.*
We substitueren $u = x^4+2$ omdat z'n afgeleide $du = 4x^3dx$ is, welke, behalve de constante factor 4, in de integraal voorkomt. Dus gebruik makend van het feit dat $x^3dx = \frac{du}{4}$ en de substitutiemethode vinden we

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos(u)du =$$

$$\frac{1}{4}\sin(u) + C = \frac{1}{4}\sin(x^4 + 2) + C$$

Opgave 2.1 *Laat zien dat:*

$$\int \sqrt{(2x+1)}dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

En ook

$$\int \cos^3(x)dx = \sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

2.2 Partieel integreren

Iedere differentieer regel heeft een corresponderende integreer regel. Bij de *kettingregel* was dit de *substitutiemethode* en bij de *productregel* is het *partieel integreren.*

We beginnen deze paragraaf met een herhaling van de *productregel voor differentiëren*. Deze regel luidde als volgt:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

In de onbepaalde integraal notatie wordt deze vergelijking

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

of

$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x).$$

Deze laatste vergelijking kunnen we herschikken tot

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \tag{2.3}$$

Formule 2.3 wordt de *formule voor partieel integreren* genoemd.

Een veel voorkomende notatie (die misschien makkelijker te onthouden is) is de volgende. Stel $u = f(x)$ en $v = g(x)$. Dan krijgen we dat $du = f'(x)dx$ en $dv = g'(x)dx$ en volgt uit de substitutiemethode dat formule 2.3

$$\int udv = uv - \int vdu$$

wordt.

Allereerst volgt nu een voorbeeld van de product regel voor differentiëren en daarna volgt een voorbeeld van het partieel integreren.

Voorbeeld 2.3 *Stel $f(x) = xe^x$ en we willen $f'(x)$ weten. Hiervoor maken we gebruik van de product regel.*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) = xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

Opgave 2.2 *Vind de n^{de} afgeleide van $f(x) = xe^x$.*

Voorbeeld 2.4 *We willen de volgende integraal uitrekenen: $\int x\sin(x)dx$. We lossen deze op met behulp van partieel integreren. Stel we kiezen $f(x) = x$ en $g'(x) = \sin(x)$. Dan $f'(x) = 1$ en $g(x) = -\cos(x)$. Als we nu formule 2.3 gebruiken, krijgen we*

$$\begin{aligned}\int x\sin(x) &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \\ &= x(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx \\ &= -x\cos(x) + \int(\cos(x))dx \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) + C\end{aligned}$$

Bij dit voorbeeld moet nog wel de volgende kanttekening gemaakt worden. Ons doel met het gebruik van partiële integratie is om een 'simpelere' integraal te verkrijgen dan waar we mee begonnen. In dit voorbeeld begonnen we met $\int x\sin(x)dx$ *en deze hebben we uitgedrukt in termen van de simpelere integraal* $\int \cos(x)dx$*. Als we* $f(x) = \sin(x)$ *en* $g'(x) = x$ *hadden gekozen, zouden we het volgende hebben gekregen*

$$\int x\sin(x)dx = (\sin(x)\frac{x^2}{2}) - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)dx.$$

Maar het moge duidelijk zijn dat $\int x^2\cos(x)dx$ *een 'moeilijkere' integraal is dan degene waarmee we begonnen waren. In het algemeen proberen we* $f(x)$ *zo te kiezen dat als deze gedifferentieerd wordt deze 'simpeler' wordt (in ieder geval niet 'gecompliceerder') en* $g'(x)$ *kiezen we zo dat deze gemakkelijk geïntegreerd kan worden.*

Opgave 2.3 *Integreer*
1) $\int \ln(x)dx$
2) $\int x^2e^x dx$
3) $\int e^x\sin(x)dx$[1]
4) $\int \tan^{-1}(x)dx$[2]

[1] Hint: Pas twee maal partiële integratie toe en kijk goed wat je dan hebt.
[2] Hint: Gebruik partiële integratie en de substitutiemethode.

Hoofdstuk 3

Complexe getallen

3.1 Van natuurlijke ($\mathbb{N}$) naar complexe ($\mathbb{C}$) getallen

Wat zijn complexe getallen? Dat is de vraag die we ons stellen in deze paragraaf. Om deze vraag te beantwoorden beginnen we met het bekijken van de verzameling natuurlijke getallen. Vervolgens breiden we deze verzameling steeds uit tot aan de verzameling van complexe getallen.

We beginnen dus met een verzameling die we al kennen, de verzameling der *natuurlijke getallen*[1]

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Ieder getal uit deze verzameling kan zonder problemen worden opgeteld of vermenigvuldigd met een ander getal uit deze verzameling. Het resultaat van de optelling of vermenigvuldiging zit weer in de verzameling $\mathbb{N}$. We noemen $\mathbb{N}$ gesloten onder optelling en vermenigvuldiging.

Voor aftrekken geldt niet dat de oplossing altijd weer in $\mathbb{N}$ ligt. Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$x + 7 = 3,$$

dit geeft als oplossing de vergelijking

$$x = 3 - 7,$$

deze heeft geen oplossing in $\mathbb{N}$. Daarvoor breiden we $\mathbb{N}$ uit met de negatieve getallen tot de verzameling der *gehele getallen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Er geldt nu dat het resultaat van optelling, aftrekking en vermenigvuldiging in de verzameling $\mathbb{Z}$ zit.

[1] Sommige wiskundigen rekenen het element 0 niet tot de natuurlijke getallen en het element 0 is niet-natuurlijk in de zin dat het net als de negatieve getallen een vinding van latere datum is die bijvoorbeeld bij de Grieken nog niet voorkomt. Wij doen dit dus wel.

De volgende uitbreiding hebben we nodig als we gaan delen. Neem nu als voorbeeld

$$2x = 6.$$

Deze vergelijking is oplosbaar in zowel $\mathbb{N}$ als $\mathbb{Z}$ (de *oplossing* zit in deze verzamelingen), maar

$$6x = 2$$

is niet oplosbaar in deze verzamelingen (de *oplossing* zit niet in deze verzamelingen). Hiervoor moeten we onze verzameling wederom uitbreiden met nieuwe getallen: de breuken. De verzameling $\mathbb{Z}$ uitgebreid met breuken noemen we de verzameling der *rationale getallen* $\mathbb{Q}$.

Je zou nu zeggen dat we alle getallen op de 'getallenlijn' door 0 en 1 nu wel gehad hadden, maar dat is niet zo. Neem bijvoorbeeld de vergelijking

$$x^2 = 2.$$

Deze vergelijking heeft zoals we weten als oplossing $\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$. En $\sqrt{2}$ is niet te schrijven als een breuk. $\sqrt{2}$ behoort tot de *irrationale getallen* (waaronder bijvoorbeeld ook $\sqrt{3}$, π, e). Laten we eerst maar eens bewijzen dat $\sqrt{2}$ niet te schrijven is als breuk.

Stelling 3.1 *$\sqrt{2}$ is irrationaal.*

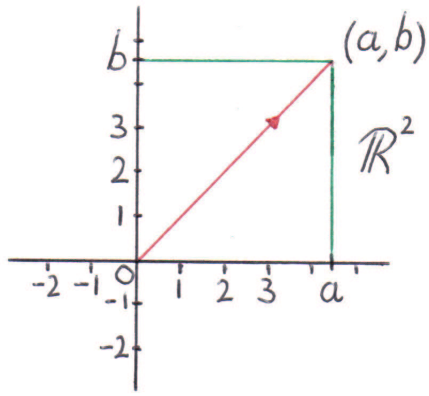
Bewijs 3.1 *We zullen dit bewijzen uit het ongerijmde (Stel dat het niet zo is). Stel dat $\sqrt{2}$ niet irrationaal en wel rationaal is. Dus $\sqrt{2}$ is een element van $\mathbb{Q}$. Dan zijn er gehele getallen p en q zodat $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ en de $ggd(p, q)$*[2] *$= 1$ (Het grootste getal waardoor p en q beide te delen zijn, is 1). Dit laatste betekent dat de breuk $\frac{p}{q}$ niet te vereenvoudigen is. Kwadrateren geeft: $2 = \frac{p^2}{q^2}$, dus $p^2 = 2q^2$, dus p^2 is even. Hieruit volgt dat p ook even moet zijn, immers, het kwadraat van een oneven getal is altijd oneven. Dus $p = 2a$ voor zekere a, en $p^2 = 4a^2$. Er volgt: $2q^2 = p^2 = 4a^2$, dus q^2 is even. Hieruit volgt eveneens dat q even is. Omdat p en q beide even zijn geldt dat ze beide deelbaar zijn door 2 (of eventueel een ander groter even getal), dus de $ggd(p, q) \geq 2$, dus $ggd(p, q) \neq 1$. Dit is een tegenspraak. Dus is $\sqrt{2}$ irrationaal.*

We hebben zoals je kunt zien niet meer genoeg aan onze verzameling $\mathbb{Q}$ en daarom breiden we $\mathbb{Q}$ uit[3] met de *irrationale getallen* tot de verzameling der *reële getallen* $\mathbb{R}$.

---

[2]Zie ook bijlage C

[3]De overgang van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$ is echter zeer moeilijk. De stap die gemaakt wordt gaat van een aftelbare naar een overaftelbare verzameling en is niet zoals alle vorige stappen gebaseerd op het oplossen van vergelijkingen. De stap is dus niet gebaseerd op een algebraïsche techniek maar op een metrische topologische (metrische completering).



Figuur 3.1: Twee getallenlijnen ($\mathbb{R}^2$).

De vraag die nu rijst is 'Bevat $\mathbb{R}$ genoeg getallen om voor elke polynomiale vergelijking een oplossing te hebben?'. Het antwoord hierop is 'nee'. Laten we bijvoorbeeld eens kijken naar de vergelijking

$$x^2 = -1.$$

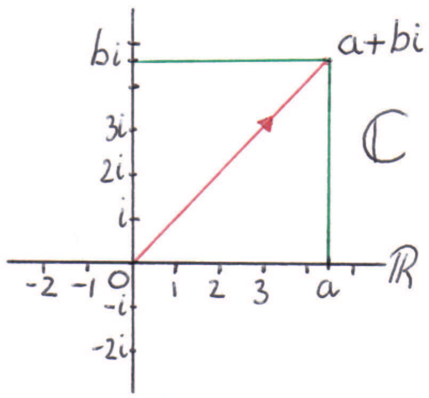
Deze vergelijking heeft zoals we weten geen oplossing in $\mathbb{R}$, omdat we geen wortel van een negatief getal kunnen nemen. Laten we nu het volgende definiëren.

Definitie 3.1 *We definiëren i door de vergelijking $i^2 = -1$.*

Om te beginnen zullen we eerst definitie 3.1 wat gaan visualiseren en vervolgens kijken we of er ook mee gerekend kan worden. De verzameling $\mathbb{R}$ wordt vaak voorgesteld door een rechte lijn, de *reële rechte*. Ieder punt op deze lijn komt voor in $\mathbb{R}$. Hoe we $\mathbb{R}$ ook gaan uitbreiden, we kunnen de nieuwe verzameling niet voorstellen binnen deze lijn. We doen daarom het volgende.

We maken een assenstelsel van twee getallenlijnen waarmee we ook wel het vlak $\mathbb{R}^2$ voorstellen (zie figuur 3.1). Een punt in dit vlak leggen we vast door de coördinaten a en b (notatie (a, b)), net zoals we dat met een vector in $\mathbb{R}^2$ zouden doen.

Om onze uitbreiding van $\mathbb{R}$ te kunnen realiseren gaan we dit nog iets aanpassen. Bij de verticale as voeren we het symbool i uit definitie 3.1 in. Het idee is nu dat we de getallen op de horizontale as gaan beschouwen als de reële getallen en alle getallen daarbuiten als de 'nieuwe' getallen waarbij de i dus een rol speelt. Een punt b op de verticale as noteren we vanaf nu als bi (dus als 'product' van b en i met de afspraak dat $0i$ ook als 0 geschreven mag worden). En een punt in het vlak, vastgelegd door de coördinaten a en bi, noteren we als $a + bi$ (dus als 'som' van a en bi). Dan krijgen we de



Figuur 3.2: Het complexe vlak

dus de volgende situatie (zie figuur 3.2). Het vlak dat we nu geconstrueerd hebben noemen we het *complexe vlak* of ook het *Gauss-vlak*, naar de Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauss.

Definitie 3.2 *Deze nieuwe getallen van de vorm $a+bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$ noemen we de* complexe getallen. *Notatie:* $\mathbb{C}$.

We noemen de horizontale as in het complexe vlak voortaan de *reële as* en de verticale as de *imaginaire as*. Omdat i zelf op de imaginaire as ligt, op een soortgelijke plaats als de 1 op de reële as, noemen we i ook wel de *imaginaire eenheid*. Voor complexe getallen gebruiken we vaak de letters $z, w, \alpha, \beta, \ldots$ en voor de reële getallen zijn dat vaak $x, y, a, b, \ldots$.
Als een complex getal z wordt vastgelegd door de uitdrukking $a + bi$, voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$, dan schrijven we

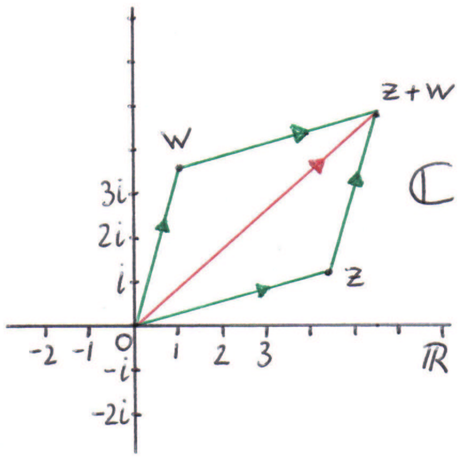
$$z = a + bi.$$

Van een complex getal $z = a + bi$ noemen we a het reële deel (notatie $a = Re(z)$ of $\Re z$) en b het imaginaire deel (notatie $b = Im(z)$ of $\Im z$). Een complex getal van de vorm $z = a + 0i$, voor het gemak genoteerd als $z = a$, noemen we *reëel* en een complex getal van de vorm $z = 0 + bi$, voor het gemak genoteerd als $z = bi$, noemen we *zuiver imaginair*.

Nu we dit weten kunnen we de rekenkundige operaties op $\mathbb{C}$ definiëren.

Definitie 3.3 *Zij $z = a + bi$ en $w = c + di$ (met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.) Op $\mathbb{C}$ definiëren een* som *en een* product *als volgt:*
Som:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$



Figuur 3.3: Optelling in $\mathbb{C}$

Product:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Opgave 3.1 *Laat zien dat als we alleen de reële as bekijken, dat dan onze standaard optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$ hieruit volgt.*

Opgave 3.2 *Laat zien dat de associatieve en commutatieve eigenschap gelden. De associatieve eigenschap wil zeggen $z(w\alpha) = (zw)\alpha$ en de commutatieve eigenschap wil zeggen $zw = wz$ voor complexe z, w en α*[4].

Gevolg 3.1 *Zij wederom $z = a + bi$ en $w = c + di$ (met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.) Het* verschil *en het* quotiënt *op $\mathbb{C}$ zijn dan als volgt:*
Verschil:

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

Quotiënt: (Denk er hierbij aan dat $w = c + di \neq 0$.)

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd)}{(c^2 + d^2)} + \frac{(bc - ad)}{(c^2 + d^2)} i$$

Opgave 3.3 *Laat zien hoe het verschil en het quotiënt op $\mathbb{C}$ volgen uit definitie 3.3.*

De notatie van de som illustreert dat de optelling in $\mathbb{C}$ net zo gaat als vectoroptelling in $\mathbb{R}^2$ (zie figuur 3.3), volgens een parallellogram.

[4] Met nog enkele eigenschappen is aan te tonen dat $\mathbb{C}$ een *lichaam* is.

Hieronder volgt een voorbeeld van een quotiënt op een intuïtieve manier. We willen weten wat $\frac{(3+2i)}{(4+i)}$ is. Als het te schrijven is als $a+bi$ (dus als complex getal) dan moet gelden:

$$(a+bi)\cdot(4+i) = \frac{(3+2i)}{(4+i)}\cdot(4+i) = (3+2i)$$

Dit kunnen we uitwerken:

$$(a+bi)\cdot(4+i) = 4a+ai+4bi-b = (4a-b)+(a+4b)i = (3+2i)$$

Er moet dus gelden:

$$4a-b=3$$

$$a+4b=2$$

Waaruit volgt dat $a=\frac{14}{17}$ en $b=\frac{5}{17}$. We vinden dus:

$$\frac{(3+2i)}{(4+i)} = \frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$$

Nu we dit gedaan hebben kun je zelf de volgende opgaven proberen.

Opgave 3.4 *Bereken:*
1) $(3-i)(4+4i)$
2) $(1-i)(1+i)$
3) $(\sqrt{5}+i)^2$
4) $\frac{3-2i}{1+i}$
5) $\frac{1+i}{i}$
6) $\frac{1}{i}$

We zullen nu drie belangrijke begrippen definiëren die veel gebruikt worden bij berekeningen met complexe getallen. De eerste hiervan is de *geconjugeerde* of *complex toegevoegde* of *geadjungeerde* van z. Hieronder volgt de definitie van de *geconjugeerde* van z.

Definitie 3.4 *Zij $z=a+bi$ dan definiëren we z-geconjugeerd als $\overline{z}=a-bi$.*

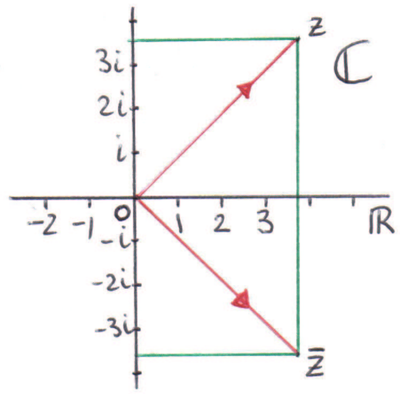
In het vlak is het dus de gespiegelde van z in de reële as (zie figuur 3.4).

Het tweede begrip is de *modulus* of *lengte* of *norm* of *absolute waarde* van $z=a+bi$. Deze is als volgt gedefinieerd:

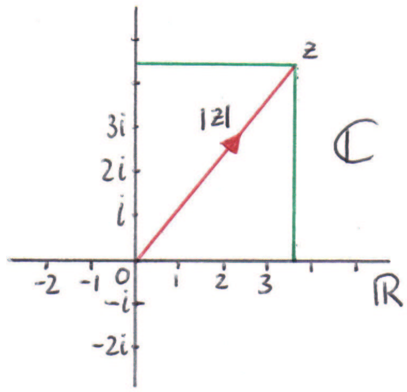
Definitie 3.5 *Zij $z\in\mathbb{C}$. De modulus $|z|$ wordt gedefinieerd door*

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2},$$

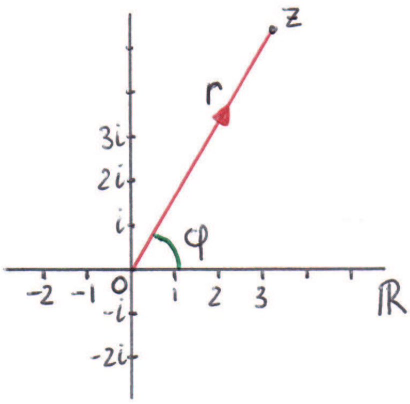
ofwel de 'afstand' van z tot de oorsprong in het complexe vlak (een reëel getal ≥ 0 dus) (zie figuur 3.5).



Figuur 3.4: Spiegeling in de reële as



Figuur 3.5: Modulus van z



Figuur 3.6: Poolcoördinaten

Voor het gemak noemen we $\overline{z}$ vanaf nu altijd *geconjugeerde* van z en $|z|$ de *modulus* van z.

En dan nu als derde en laatste zullen we het begrip ‘afstand’ definiëren:

Definitie 3.6 *Voor $z, w \in \mathbb{C}$ is de afstand tussen z en w gedefinieerd door $|z - w|$.*

3.2 Poolcoördinaten

Tot nu toe hebben we een complex getal steeds vastgelegd door de coördinaten a en b en genoteerd als $a + bi$. Er is nog een andere manier om de complexe getallen weer te geven, namelijk door middel van *poolcoördinaten*.

We nemen van een complex getal z de modulus $r := |z|$ en de hoek φ (in radialen en modulo 2π) die het lijnstuk van de oorsprong naar z maakt met de positieve reële as (zie figuur 3.6). Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt dan:

$$a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi.$$

En omgekeerd:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \varphi = \arctan\frac{b}{a}.$$

Nog even de volgende opmerking: als φ voldoet, dan voldoet ook $\varphi + 2n\pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. We kiezen bij voorkeur de φ met $-\pi < \varphi \leq \pi$ (het komt ook wel eens voor dat de voorkeur uitgaat naar $0 \leq \varphi < 2\pi$). We noemen de waarde van deze φ de *hoofdwaarde van het argument* van z, of kortweg het *argument* van z, notatie $arg(z)$.

Nu hebben we de poolcoördinaten gedefinieerd. Er is echter nog wel iets speciaals met 0 aan de hand. Als $z = 0$, dan is $r = 0$, maar φ kan iedere waarde hebben. Daarom kunnen we het getal 0 niet in poolcoördinaten uitdrukken.

Met deze manier van noteren krijgen product en quotiënt van complexe getallen een nieuwe interpretatie.

Opgave 3.5 *Zij $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ en $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$. Laat zien dat:*

$$zw = rs(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))$$

Dit betekend dus dat de *modulus wordt het product van de moduli* en het *argument wordt de som van de argumenten.* Let hierbij op dat alles modulo $2\pi\mathbb{Z}$ is.

Opgave 3.6 *Laat zien dat:*

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)) \text{ en } s \neq 0$$

En dit betekend dat de *modulus wordt het quotiënt van de moduli* en het *argument wordt het verschil van de argumenten modulo $2\pi\mathbb{Z}$.*

Uit opgave 3.5 volgt met *inductie*[5] dat:

Stelling 3.2 *(Stelling van De Moivre[6]) Voor iedere $k \in \mathbb{N}$ geldt:*

$$z^k = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$$

Bewijs 3.2 *Zoals gezegd zullen we de stelling bewijzen met inductie. Allereerst laten we zien dat de stelling klopt voor het geval $k = 1$. $z^1 = r^1(\cos(1\varphi) + i\sin(1\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = z$ en dit klopt, want zo hebben we precies z in poolcoördinaten gekregen. Nu gaan we over naar de inductiestap. We nemen aan dat de stelling correct is voor $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ met $n > 1$. En moeten nu laten zien dat de stelling ook voor $k = n$ klopt. De aanname noemen we de inductiestap. We krijgen nu het volgende: $z^n = z \cdot z^{n-1} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot r^{n-1}(\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)) = r \cdot r^{n-1}(\cos(\varphi + (n-1)\varphi) + i\sin(\varphi + (n-1)\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. En hiermee is bewezen dat de stelling van De Moivre correct is.*

[5] Zie bijlage A

[6] Naar de Franse wiskundige Abraham De Moivre die leefde van 1667 tot 1754

3.3 De Taylorontwikkeling

Polynomen zijn een van de simpelste soorten functies die voorkomen in de analyse. Ze zijn fijn om mee te werken in numerieke berekeningen want hun waarden kunnen worden gevonden door een eindig aantal optellingen en vermenigvuldigingen uit te voeren. In deze sectie zullen we laten zien dat exponentiële en goniometrische functies kunnen worden benaderd door polynomen. Als het verschil tussen de functie en zijn polynomiale benadering voldoende klein is, dan kunnen we voor praktische doelen de polynomiale benadering gebruiken in plaats van de originele functie[7].

Er zijn veel manieren om een gegeven functie f te benaderen met polynomen, afhankelijk van het doel van de benadering. In deze sectie zullen we geïnteresseerd zijn in het verkrijgen van een polynomiale benadering die aan f en sommige van zijn afgeleiden, in een gegeven punt voldoet[8].

We beginnen eerst met een voorbeeld.

Voorbeeld 3.1 *Stel f is de exponentiële functie,*

$$f(x) = e^x.$$

In het punt $x = 0$ zijn f en al zijn afgeleiden gelijk aan de waarde 1. Het lineaire polynoom,

$$g(x) = 1 + x$$

heeft eveneens $g(0) = 1$ en $g'(0) = 1$, zo voldoet het aan f en zijn eerste afgeleide in 0. Geometrisch gezien betekent dit dat de grafiek van g de raaklijn van f in $(0, 1)$ is.

Als we f benaderen met een kwadratisch polynoom h die voldoet aan f (hiermee bedoelen we $h(0) = f(0)$) en zijn eerste twee afgeleiden in 0 (dus $h'(0) = f'(0)$ en $h''(0) = f''(0)$), verwachten we een betere benadering van f dan de lineaire functie g, in ieder geval in de buurt van het punt $(0, 1)$. Het polynoom

$$h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

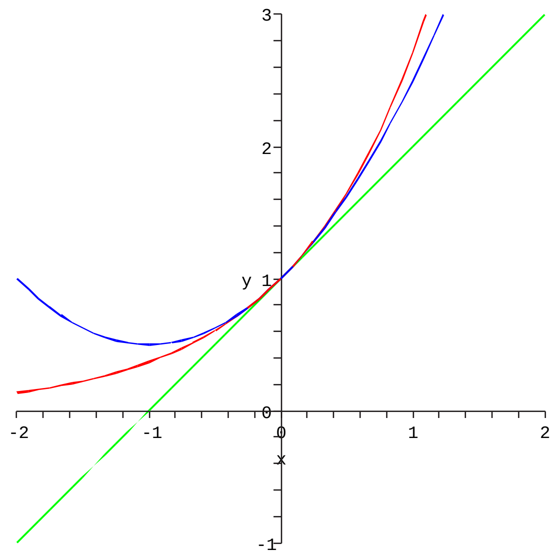
heeft $h(0) = h'(0) = h''(0) = 1$ (zie figuur 3.7: $f(x)$ is rood, $g(x)$ is groen en $h(x)$ is blauw gekleurd). We kunnen de nauwkeurigheid van de benadering verbeteren door polynomen te gebruiken die ook aan de derde en hogere afgeleiden van f voldoen.

Opgave 3.7 *Laat zien dat polynoom*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

[7] Een machine kan dit!

[8] D.w.z. $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$, enz



Figuur 3.7: Benaderingen van e^x rond $x = 0$.

voldoet aan de exponentiële functie $f(x) = e^x$ en zijn eerste n afgeleiden in punt $x = 0$.

Natuurlijk moeten we voordat we deze polynomen kunnen gebruiken, om benaderingen van waarden te berekenen, informatie hebben over de fout in de benadering[9]. Dit zullen we nu achterwege laten en we richten ons op de theorie.

Stel f heeft afgeleiden tot en met orde n en de n^e afgeleide is continu, in het punt $x = 0$, met $n \geq 1$[10]. Laten we een polynoom proberen te vinden die voldoet aan f en zijn eerste n afgeleiden in 0. Er zijn $n + 1$ condities waar we aan moeten voldoen, namelijk

(3.1) $P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ \ldots\ ,\ P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

Dus proberen we een polynoom van graad n, zeg

(3.2) $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$

met $n + 1$ coëfficiënten die we moeten bepalen. We zullen de voorgaande condities uit 3.1 gebruiken om de coëfficiënten te bepalen.

[9] Meer hierover in bijlage B

[10] Zo'n functie noemen we n keer continu differentieerbaar

Allereerst vullen we $x = 0$ in vergelijking 3.2 in en vinden we

$$P(0) = c_0$$

en dus $c_0 = f(0)$. Vervolgens differentiëren we beide zijden van vergelijking 3.2 en vullen weer $x = 0$ in en vinden

$$P'(0) = c_1.$$

En er volgt $c_1 = f'(0)$. Als we vergelijking 3.2 nogmaals differentiëren en wederom $x = 0$ invullen vinden we

$$P''(0) = 2c_2$$

dus is $c_2 = \frac{f''(0)}{2}$. Na k maal differentiëren vinden we

$$P^{(k)}(0) = k!c_k$$

en dit geeft ons de volgende formule[11]

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \text{ voor } k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Dit argument bewijst dat als er een polynoom van graad $\leq n$ bestaat en voldoet aan vergelijking 3.2 en de coëfficiënten dan bepaald zijn door vergelijking 3.3. Nu we dit hebben laten zien volgt de volgende stelling.

Stelling 3.3 *Laat f een functie zijn met afgeleiden van orde n in punt $x = 0$. Dan bestaat er precies één polynoom P van graad $\leq n$ die voldoet aan de $n + 1$ condities*

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ \ldots\ ,\ P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Dit polynoom wordt gegeven door de formule:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Op dezelfde manier kunnen we laten zien dat er precies één polynoom van graad $\leq n$ is dat voldoet aan f en zijn eerste n afgeleiden in een punt $x = a$. We kunnen zelfs in plaats van vergelijking 3.2, P in machten van $x - a$ schrijven en vervolgen zoals we gedaan hebben. Als we de afgeleiden in a bekijken in plaats van in 0, leidt dit tot het polynoom

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \tag{3.4}$$

[11] met $k = 0$ krijgen we $f^{(0)}(0)$ en bedoelen we $f(0)$

Dit is precies dat ene polynoom dat voldoet aan

$$P(a) = f(a),\ P'(a) = f'(a),\ \dots\ ,\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

en staat bekend als een *Taylor polynoom*[12]. Om precies te zijn noemen we het polynoom uit vergelijking 3.4 *het Taylor polynoom van graad n gegenereerd door f in punt a*. Nu nog de notatie. We schrijven

$$P = T_n f \text{ of } P = T_n(f)$$

om het verband aan te geven tussen P, f en n. Het symbool T_n heet de *Taylor operator* van graad n. Als deze operator wordt toegepast op een functie f, dan volgt een nieuwe functie $T_n f$, het Taylor polynoom van graad n. De waarde van deze functie in x wordt genoteerd als

$$T_n f(x) \text{ of door } T_n[f(x)].$$

Als we ook de afhankelijkheid van a willen noteren schrijven we $T_n f(x;a)$ in plaats van $T_n f(x)$. Als we voor f nu de exponentiële functie e^x nemen dan is het Taylor polynoom van graad n in het punt $x = 0$ gelijk aan

$$T_n(f) = T_n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Als we dezelfde functie nemen maar dan in punt $a = 1$ krijgen we het volgende polynoom

$$T_n f(x;1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k.$$

Opgave 3.8 *Laat zien dat het volgende geldt:*
Het Taylor polynoom van graad $2n+1$ voor de $\sin x$ in punt 0 is

$$T_{2n+1}(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

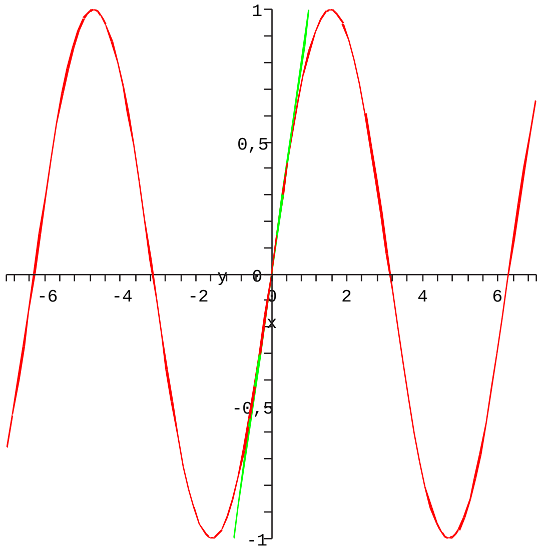
Het Taylor polynoom van graad $2n$ voor de $\cos x$ in punt 0 is

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

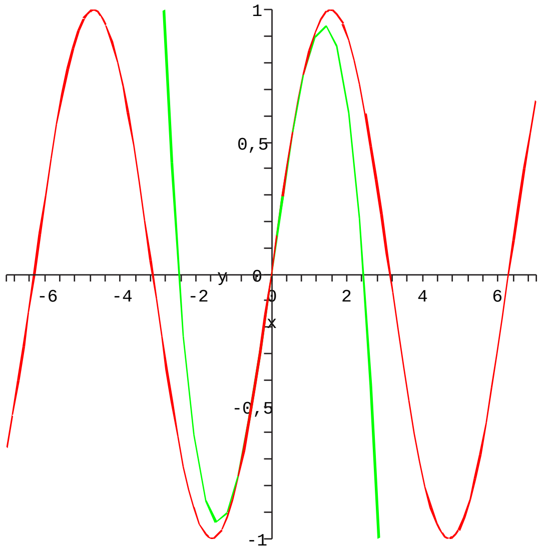
Nu volgen een aantal figuren van het Taylor polynoom voor de $\sin x$ in het punt 0. De figuren 3.8, 3.9, 3.10 en 3.11 zijn respectievelijk de Taylor polynomen voor de $\sin(x)$ van graad 1, 3, 5 en 9.

Opgave 3.9 *Probeer zelf figuren te maken van het Taylor polynoom voor de $\cos x$.*

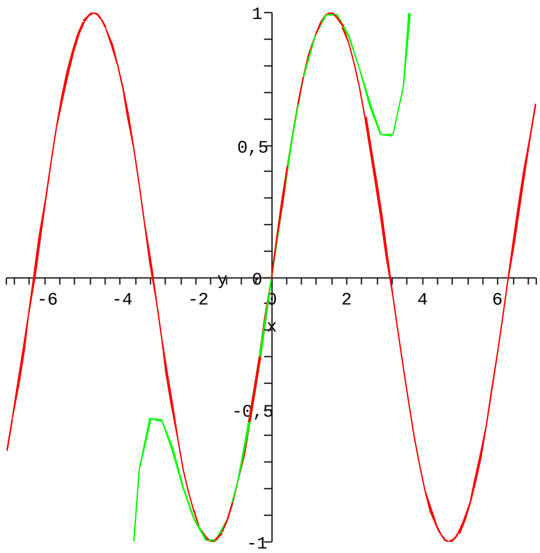
[12] Naar de Engelse wiskundige Brook Taylor die leefde van 1685 tot 1731.



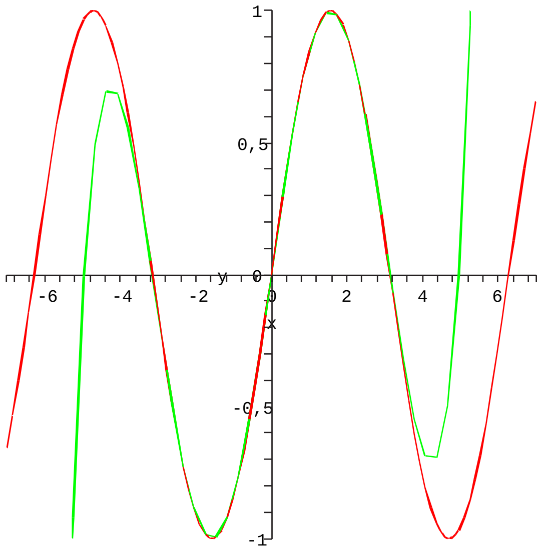
Figuur 3.8: $T_1(\sin(x)) = x$



Figuur 3.9: $T_3(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{6}$



Figuur 3.10: $T_5(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$



Figuur 3.11: $T_5(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$

3.4 Exponentiële schrijfwijze

Het zijn mede de eigenschappen uit sectie 3.2 die aanleiding geven de volgende notatie in te voeren.

Definitie 3.7 *(De formule van Euler*[13]*)* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *voor* $\varphi \in \mathbb{R}$

De gedachte achter deze formule is als volgt. We kennen de e-machtsfunctie op dit moment alleen voor reële getallen en we zijn natuurlijk vrij om een functie met dezelfde naam te definiëren voor getallen op de *imaginaire as*. We zullen nu zien waarom Euler's definitie een goede keus is.

Allereerst merken we op: omdat 0 zowel in $\mathbb{R}$ als op de imaginaire as voorkomt eisen we dat $e^0 = e^{i0} = 1$; gelukkig is dat hier inderdaad het geval. Als we vervolgens de Taylorontwikkeling van de reële e-machtsfunctie nemen en $i\varphi$ voor de variabele invullen, krijgen we:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots$$

Men kan bewijzen dat deze som bestaat en een limiet heeft in $\mathbb{C}$. Wanneer we ook eens kijken naar de Taylorontwikkelingen van de reële sinus en cosinus (met variabele φ),

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

dan valt ons iets verrassends op: wanneer we namelijk de reeks van $\cos\varphi + i\sin\varphi$ uitrekenen door term voor term op te tellen, krijgen we na enig uitwerken precies de reeks voor $e^{i\varphi}$. Dus is het niet zo gek om te stellen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, ook al is het voorgaande wiskundig niet correct beargumenteerd[14].

We hebben nu een derde schrijfwijze voor complexe getallen gevonden: $z = re^{i\varphi}$, als $r = |z|$ en $\varphi = arg(z)$. We noemen dit de *exponentiële schrijfwijze*.

De regels ten aanzien van het product en quotiënt van complexe getallen in poolcoördinaten reduceren nu tot:

$$re^{i\varphi}se^{i\theta} = rse^{i(\varphi+\theta)} \text{ en met De Moivre: } (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$$

$$\frac{re^{i\varphi}}{se^{i\theta}} = \frac{r}{s}e^{i(\varphi-\theta)}$$

[13] Naar de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler die deze notatie bedacht heeft.

[14] We hebben namelijk Taylorontwikkelingen gebruikt en dat zijn benaderingen.

En dit soort regels zijn gebruikelijk voor de 'gewone' e-machtsfunctie. We zien nu nogmaals dat je met Euler's definitie van de imaginaire e-macht een functie krijgt die zich qua regels gedraagt zoals zijn reële tegenhanger.

De functie $e^{i\varphi}$ voldoet aan de volgende kenmerkende eigenschappen:

$e^{i\varphi}$ is periodiek modulo 2π , ofwel $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2n\pi)} \forall n \in \mathbb{Z}$

$e^{i2\pi} = 1$ en $e^{i\pi} + 1 = 0$

Tot slot hebben we nu de gelegenheid om een algemenere definitie van *machten van een complex getal* te geven. Zij $t \in \mathbb{R}$ en $z = re^{i\varphi}$ dan geldt

$$z^t = r^t e^{it\varphi}.$$

Hierbij moeten we wel nog even de volgende opmerking maken. z^t heeft strikt genomen meerdere waarden. Te weten de *hoofdwaarde* $r^t e^{it\varphi}$ als $z = re^{i\varphi}$ met $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, maar ook $r^t e^{i(t\varphi+tk\pi)}$ met $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Hoofdstuk 4

Reeksen

Van een gegeven rij van reële of complexe getallen kunnen we altijd weer een *nieuwe* rij genereren door opvolgende termen bij elkaar op te tellen. Dus als de gegeven rij de volgende termen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

heeft, dan kunnen we de volgende *partiële sommen* vormen,

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

en als we zo vervolgen vinden we de *partiële som* s_n van de eerste n termen die als volgt is gedefinieerd:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

De rij $\{s_n\}$ van partiële sommen wordt *oneindige reeks* genoemd of kortweg een *reeks*. Een reeks kan op de volgende manieren worden genoteerd:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \text{ of } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

De symbolen hierboven zijn bedoeld om ons eraan te herinneren dat de rij partiële sommen $\{s_n\}$ verkregen wordt uit de rij $\{a_n\}$ door opvolgende termen bij elkaar op te tellen.

Definitie 4.1 *Als er een reëel of complex getal S is zo dat*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

en $\{s_n\}$ convergent is noemen we de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent *en heeft de reeks als* som *S. We schrijven dit als volgt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Als $\{s_n\}$ *divergent is, noemen we de reeks* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent *en heeft de reeks geen* som.

Laten we nu kijken naar een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 4.1 *We nemen de volgende* oneindige reeks*:*

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad (a \neq 0).$$

Elke term is verkregen door de vorige term te vermenigvuldigen met r*.*

Als $r = 1$*, dan* $s_n = a + a + a + \ldots + a = na \to \pm\infty$ *als* $n \to \infty$*. Omdat* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *niet bestaat,* divergeert *de* oneindige reeks *in dit geval.*

Als $r \neq 1$ *hebben we*

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

en

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^n.$$

Door deze twee vergelijkingen van elkaar af te trekken krijgen we het volgende:

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

En hieruit volgt weer dat:

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \tag{4.1}$$

Als $-1 < r < 1$*, we weten dat* $r^n \to 0$ *als* $n \to \infty$*, dan volgt*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}.$$

Dus als $|r| < 1$*, is de* oneindige reeks convergent *en is zijn* som $\frac{a}{1-r}$*.*

Als $r \leq -1$ *of* $r > 1$*, is de rij* $\{r^n\}$ divergent *en dus (vanwege vergelijking 4.1) bestaat* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *niet. Daarom* divergeert *de* oneindige reeks *in die gevallen.*

Voorbeeld 4.2 *Laten we nu eens de volgende reeks bekijken:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Als je goed kijkt kunnen we met behulp van het vorige voorbeeld 4.1 laten zien dat deze reeks convergeert *en als* som 1 *heeft. Neem voor* $a = \frac{1}{2}$ *en voor* $r = \frac{1}{2}$*, dan volgt het direct.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Voorbeeld 4.3 *En dan nu nog een laatste voorbeeld. We zullen laten zien dat*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

een divergente *reeks is. We doen hiervoor het volgende:*

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

En als we zo vervolgen volgt $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ *en in het algemeen*

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

Hieruit volgt dus dat $s_{2^n} \to \infty$ *als* $n \to \infty$ *en daarom is de rij* $\{s_n\}$ *divergent. En daarom is dus ook de reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent.

Aan het einde van deze paragraaf plaatsen we nog de volgende opmerking. Let op dat je de termen van een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ niet zomaar van plaats mag verwisselen als de reeks absoluut convergeert. Als een reeks wel convergent is, maar niet absoluut convergent dan kunnen de termen zo gerangschikt worden dat de reeks convergeert naar iedere willekeurige waarde. Dit wordt ook wel de *herschikkingsstelling van Riemann* genoemd.

Opgave 4.1 *Laat zien dat de reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

convergent *is en bepaal de* som[1].

[1]Hint: Bereken de partiële som s_n en gebruik de volgende breuksplitsing $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

Hoofdstuk 5

Priemgetallen

5.1 Priemgetallen

Definitie 5.1 *Een getal groter dan* 1 *dat alleen* 1 *en zichzelf als positieve deler heeft noemen we een* priemgetal*.*

De rij priemgetallen begint als volgt,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, \ldots$$

Het onvoorspelbare verloop van deze rij priemgetallen heeft de mensen door de eeuwen heen gefascineerd. Er is inmiddels veel over bekend en er is nog meer onbekend. Voorlopig melden we het volgende feit dat voor sommigen van jullie niet onbekend is.

Stelling 5.1 *Zij n een geheel getal groter dan* 1*. Zij p de kleinste deler van n ongelijk aan* 1*. Dan is p een priemgetal. Als n zelf niet priem is, dan geldt $p \leq \sqrt{n}$.*

Bewijs 5.1 *Deze stelling zegt in het bijzonder dat elk getal groter of gelijk aan* 2 *een priemdeler heeft. Als p niet priem is dan zijn er namelijk $a, b > 1$ zó dat $p = ab$. Maar dan is a een deler van n die nog kleiner is dan p en bovendien $a > 1$. Dit kan niet omdat p al de kleinste deler is. Dus moet p priem zijn. Als n samengesteld is, dan geldt zeker $p < n$. Maar dan is $\frac{n}{p}$ ook een deler van n ongelijk aan* 1*. Dus $p \leq \frac{n}{p}$ en hieruit volgt dat $p \leq \sqrt{n}$.*

De klassieke methode om de eerste, niet al te grote, priemgetallen te bepalen is de *zeef van Erathostenes*. Hoewel deze methode tegenwoordig alleen nog folkloristische waarde heeft zullen we hem toch even beschrijven. Je kunt er aardig alle priemgetallen onder de 100 mee vinden.

Allereerst schrijven we alle getallen van 2 tot 100 op (zie tabel 5.1). Het principe van de zeef is een procedure waarin we veelvouden van bepaalde getallen uitwissen. Elke stap bestaat er uit dat we het eerste getal zoeken

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Tabel 5.1: De getallen 2 tot 100.

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

Tabel 5.2: De getallen 2 tot 100 zonder de even getallen.

waarmee nog niet gewist is. Noem dit getal p. Dan is p een priemgetal. Wis vervolgens alle p-vouden, behalve p zelf en herhaal het proces. In tabel 5.1 is 2 het eerste getal en er is nog niet mee gewist. Dus $p = 2$ en dit is uiteraard priem.

Wis nu alle even getallen behalve 2 zelf (zie tabel 5.2). Het volgende getal is 3. Wis nu alle 3-vouden behalve 3 zelf (zie tabel 5.3). Dan zien we dat het volgende getal 5 is. Wis alle 5-vouden behalve 5 zelf (zie tabel 5.4). En tenslotte de 7-vouden (zie tabel 5.5).

Het is duidelijk dat we op deze manier de achtereenvolgende priemgetallen vinden. Maar nu komt het aardige van onze zeef. Elk samengesteld getal kleiner dan 100 is deelbaar door een priemgetal kleiner dan 10. Dit volgt immers uit stelling 5.1. Maar alle getallen deelbaar door een priemgetal kleiner dan 10 hadden we al weggestreept. Dit betekent dat alle nog niet weggestreepte getallen priem zijn. Hiermee hebben we in een paar stappen alle priemgetallen kleiner dan 100 gevonden. Het is duidelijk dat we deze zeef ook groter kunnen maken. Maar niet te groot, om alle getallen tot

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	
		53		55				59	
61				65		67			
71		73				77		79	
		83		85				89	
91				95		97			

Tabel 5.3: De getallen 2 tot 100 zonder de even getallen en zonder 3-vouden.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47		49	
		53						59	
61						67			
71		73				77		79	
		83						89	
91						97			

Tabel 5.4: De getallen 2 tot 100 zonder de even getallen, zonder 3-vouden en zonder 5-vouden.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
91						97			

Tabel 5.5: De getallen 2 tot 100 zonder de even getallen, zonder 3-vouden, zonder 5-vouden en zonder 7-vouden.

bijvoorbeeld tienduizend te moeten opschrijven is geen prettig vooruitzicht. Nu, met de komst van de pc, kan iedereen met de juiste programmatuur gemakkelijk priemgetallen genereren van willekeurig formaat. Je kunt op de computer een grote zeef maken of, wat meestal gebeurt, modernere methoden gebruiken.

Er is echter één ding dat we niet kunnen doen met de computer, namelijk bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Hoewel we dit onbewust misschien al lang wisten, is er wel degelijk een bewijs voor nodig.

Stelling 5.2 [1] *(Euclides) Er zijn oneindig veel priemgetallen.*

Bewijs 5.2 *We laten dit zien door een oneindige rij priemgetallen te construeren. Begin door als eerste priemgetal $p_1 = 2$ te kiezen. Kies vervolgens voor p_2 een priemdeler van $N_1 = p_1 + 1$. Dat is dan 3. Kies voor p_3 een priemdeler van $N_2 = p_1p_2 + 1$, etc. In het algemeen, kies voor p_n een priemdeler van $N_{n-1} = p_1p_2 \dots p_{n-1} + 1$. We beweren dat p_n verschillend is van de voorgaande priemgetallen $p_1, \dots, p_{n-1}$. Stel namelijk dat het tegendeel waar is, dat wil zeggen, $p_n = p_i$ voor zekere $i < n$. Dan deelt p_n zowel $p_1 \cdots p_{n-1}$ als N_{n-1} en p_n zou dan ook het verschil 1 delen. Dit kan niet. Dus moet p_n een nieuw priemgetal zijn. Op deze manier vinden we een oneindig lange rij verschillende priemgetallen.*

5.2 Priemontbinding

Laten we kijken naar de volgende stelling.

Stelling 5.3 *(Hoofdstelling van de rekenkunde) Elk natuurlijk getal groter dan 1 is, op volgorde van factoren na, op precies één manier te schrijven als product van priemgetallen.*

Een iets formelere formulering luidt, elk natuurlijk getal $n > 1$ kan geschreven worden in de vorm

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} \text{ waarin } k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{N} \text{ en } p_1 < p_2 < \dots < p_r \text{ priem zijn.}$$

Bovendien zijn de k_i en p_i uniek bepaald. We noemen deze schrijfwijze voor de ontbinding de *standaardontbinding*. Een factor van de vorm $p_i^{k_i}$ noemen we een *primaire factor*. Om op een snelle manier tot een bewijs te komen van stelling 5.3 voeren we nu het begrip *verschillenverzameling* in.

Definitie 5.2 *Een verzameling V van natuurlijke getallen heet een verschillenverzameling als voor iedere tweetal $s, t \in V$ met $s > t$ geldt dat het verschil $s - t$ ook in V zit.*

[1] Er zijn vele bewijzen voor de oneindigheid van de verzameling priemgetallen, hieronder volgt er één.

Misschien is het niet meteen duidelijk wat we ons bij een verschillenverzameling moeten voorstellen. Hier is een voorbeeld.

Voorbeeld 5.1 *Stel we willen een verschillen verzameling maken waar* 8 *en* 5 *in zitten. Het verschil* $3 = 8 - 5$ *moet dus ook in* V *zitten. Het verschil* $2 = 5 - 3$ *moet dan ook in* V *zitten. En dus ook* $3 - 2 = 1 \in V$*. Maar als* 1 *in* V *zit, dan ook* $8 - 1 = 7$*,* $7 - 1 = 6$ *etc. Alle getallen van* 1 *tot en met* 8 *zitten dus in* V*.*

Opgave 5.1 *(Over verschillenverzamelingen)*
1) Controleer dat $\{1, 2, \ldots, 8\}$ *inderdaad een verschillenverzameling is.*
2) Laat zien dat de kleinste verschillenverzameling waar 15 *en* 9 *in zitten* $V = \{3, 6, 9, 12, 15\}$*.*

In de vorige opgave heb je kunnen zien dat de verschillenverzameling bestaat uit veelvouden van het kleinste getal. Er zijn ook *oneindige* verschillenverzamelingen. Bijvoorbeeld alle veelvouden van het getal d. Het feit dat verschillenverzamelingen altijd bestaan uit *veelvouden* van het kleinste element is belangrijk voor onze toepassingen. We maken er een stelling van:

Stelling 5.4 *Zij* $V \in \mathbb{N}$ *een verschillenverzameling. Zij* d *het kleinste element van* V*. Dan is ieder element van* V *een veelvoud van* d*.*

Bewijs 5.3 *Om deze stelling in te zien kiezen we* $a \in V$ *en getallen* $q, r \in \mathbb{Z}$ *zó dat* $a = qd + r$ *en* $0 \leq r < d$*. Als* $r = 0$*, dan zijn we klaar,* d *deelt dan* a*. Als* $r > 0$ *dan is* r *ook bevat in* V *omdat* V *een verschillenverzameling is. Maar omdat* $r < d$ *krijgen we een tegenspraak met het feit dat* d *kleinste element in* V *is. De mogelijkheid* $r > 0$ *kan dus niet optreden. We concluderen dat elke* $a \in V$ *een veelvoud van* d *is.*

Met stelling 5.4 kunnen we de volgende fundamentele eigenschap van priemgetallen aantonen.

Stelling 5.5 *Zij* $a, b, p \in \mathbb{N}$ *en stel dat* p *een priemgetal is. Stel bovendien dat* p *een deler is van* ab *(notatie* $p|ab$*). Dan deelt* p *minstens één van de getallen* a *of* b*.*

Bewijs 5.4 *Voor het bewijs gaan we stelling 5.4 toepassen en kiezen voor* V *de verzameling van alle natuurlijke getallen* m *zó dat* p *deler is van* mb*. Uiteraard is* V *een verschillenverzameling. Als namelijk* sb *en* tb *deelbaar zijn door* p *dan is* $(s - t)b$ *dat ook. Omdat* $p|ab$ *geldt, zien we dat* $a \in V$*. Uiteraard geldt ook* $p \in V$*. De stelling zegt dat het kleinste element* $d \in V$ *alle elementen van* V *deelt. In het bijzonder,* $d|p$ *en* $d|a$*. Omdat* p *priem is kan* d *alleen maar* 1 *of* p *zijn. Als* $d = 1$ *dan hebben we, omdat* $d = 1 \in V$*, dat* p *deler is van* $1 \cdot b = b$*. We zijn dan klaar. Als* $d = p$ *dan weten we, omdat* $d|a$*, dat* a *veelvoud van* p *is. In dat geval zijn we ook klaar.*

We zullen trouwens niet stelling 5.5 zelf gebruiken maar wel een direct gevolg ervan, dat gemakkelijk met volledige inductie naar n is aan te tonen.

Gevolg 5.1 *Stel $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Zij p een priemgetal en stel dat p deler is van het product $a_1 a_2 \cdots a_n$. Dan deelt p minstens één van de getallen a_i ($i = 1, \ldots, n$).*

Opgave 5.2 *Bewijs gevolg 5.1 met inductie naar n.*

Met al deze voorbereidingen zijn we nu klaar om de hoofdstelling van de rekenkunde te bewijzen (Stelling 5.3).

Bewijs 5.5 *(van de hoofdstelling van de rekenkunde) Zij n het natuurlijke getal waarvoor we éénduidige priemontbinding moeten aantonen. Het bewijs verloopt via volledige inductie naar n. Als $n = 2$, dan is n priem en is de stelling evident.*

Stel nu $n > 2$ en stel dat onze stelling bewezen is voor alle getallen kleiner dan n. Dit is onze inductiehypothese. Nu de inductiestap. Als n priem is zijn we klaar. Stel dat n niet priem is. Zij p de kleinste deler van n groter dan 1. Dan is p automatisch een priemgetal (Zie stelling 5.1). Omdat $1 < \frac{n}{p} < n$ heeft $\frac{n}{p}$ een priemontbinding volgens onze inductiehypothese. Dus na vermenigvuldiging met p zien we dat n ook een ontbinding heeft. Nu nog de uniciteit.

We beweren dat elke ontbinding van n de factor p bevat. Stel namelijk $n = p_1 p_2 \cdots p_n$ met $p_1, p_2, \ldots, p_n$ priem. Omdat p het product van p_i deelt, deelt hij volgens Gevolg 5.1 minstens één van de p_i. Dus $p | p_i$ voor zekere i. Maar p_i is priem. Dus $p = p_i$ en we zien dat p in de ontbinding van n voorkomt. Uit de inductiehypothese weten we dat de ontbinding van $\frac{n}{p}$ uniek is. Maar hiermee heeft n ook een éénduidige ontbinding, namelijk de ontbinding van $\frac{n}{p}$ maal p. De inductiestap is hiermee voltooid.

Voor de begrippen *grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijke veelvoud* en *Het Euclidisch algoritme* verwijzen we naar bijlage C.

5.3 Het aantal priemgetallen

We hebben in de vorige twee paragrafen kennis gemaakt met de echt elementaire zaken rond priemgetallen zoals de unieke priemontbinding en de oneindigheid van de verzameling priemgetallen. In deze paragraaf zullen we wat dieper ingaan op de vraag hoeveel priemgetallen er zijn.

We maken hiermee een begin door nogmaals te kijken naar een bewijs over de oneindigheid van de verzameling priemgetallen. Dit zullen we doen aan de hand van een opmerkelijk bewijs van Euler (over de oneindigheid van de verzameling priemgetallen).

Stelling 5.6 *(Euler) De som* $\sum \frac{1}{p}$*, genomen over alle priemgetallen* p*, divergeert. D.w.z dat de som*

$$\sum_{p \leq N \text{ en } p \text{ priem}} \frac{1}{p},$$

naar oneindig gaat als $N \to \infty$*. In het bijzonder betekent dit dat er oneindig veel priemgetallen zijn.*

Bewijs 5.6 *Het bewijs van Euler beschouwt het product*

$$\prod_{p \leq N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1}$$

over alle priemgetallen $p \leq N$*.*

Nu hebben we een stukje analyse nodig over meetkundige reeksen. De meetkundige reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

is convergent *als* $|r| < 1$ *en zijn som is*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ voor } |r| < 1.$$

Als $|r| \geq$ *1 is, dan is de meetkundige reeks* divergent*.*

Nu we dit weten kunnen we $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ *herschrijven. Neem* $a = 1$ *en* $r = \frac{1}{p}$*, dan krijgen we dat*

$$\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$$

Hiermee vinden we dus

$$\prod_{p \leq N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} = \prod_{p \leq N} \Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\Big).$$

Om dit laatste te berekenen moeten we de haakjes wegwerken. Dan krijgen we het volgende:

$$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots)(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots)(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots) \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

We hebben dus een som van termen gekregen van de vorm $\frac{1}{n}$ *waarin* n *bestaat uit priemfactoren* $\leq N$. *Bovendien komt, vanwege éénduidige priemontbinding, voor elke* n *die bestaat uit priemgetallen* $\leq N$ *de term* $\frac{1}{n}$ *in de sommatie voor. In het bijzonder komt elke term met* $\frac{1}{n}$ *met* $n \leq N$ *voor in onze sommatie. Dus*

$$\prod_{p \leq N} \Big(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\Big) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

Omdat de reeks

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

divergeert[2] *concluderen we dat het product*

$$\prod_{p \leq N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1}$$

naar oneindig gaat als $N \to \infty$.

En dan nu het laatste stukje van het bewijs. Daarvoor hebben we nog een klein beetje analyse nodig. We kunnen in het volgende plaatje (zie figuur 5.1) zien dat $x > \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-x}$ *voor de waarden* $0 < x \leq \frac{1}{2}$. *Hieruit volgt, met* $x = \frac{1}{p}$,

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \sum_{p \leq N} \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2} \ln \Big(\prod_{p \leq N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \Big).$$

Omdat het laatste product naar oneindig gaat als $N \to \infty$ *volgt uit deze ongelijkheid dat de reeks*

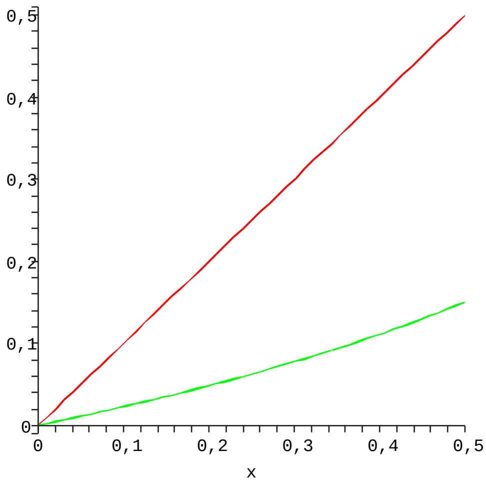
$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p}$$

divergeert.

We hebben nu dus laten zien dat $\sum_{p<N} \frac{1}{p}$ divergeert. Er volgt nu een kort uitstapje vanwege het feit dat dit in een enorm langzaam tempo gaat. Uit de analyse[3] blijkt dat $\sum_{p<N} \frac{1}{p}$ in ongeveer hetzelfde tempo groeit als $\log \log N$. Wiskundig geformuleerd als de *stelling van Mertens* is dit:

[2] Er komt nog een extra stuk over reeksen

[3] Uit technisch oogpunt laten we dit hier achterwege



Figuur 5.1: $x > \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-x}$ met $0 < x \leq \frac{1}{2}$

Stelling 5.7 *(Stelling van Mertens) Het verschil*

$$\sum_{p<N}\frac{1}{p} - \log\log N$$

convergeert naar een limiet A *als* $N \to \infty$. *Bovendien geldt*

$$A = \gamma + \sum_{p \text{ priem}} \Big(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\Big)$$

waarin γ Euler's constante[4] *is.*

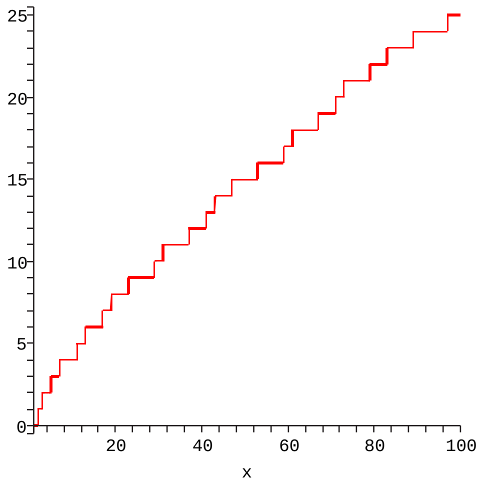
Hoewel de functie $\sum_{p<N}\frac{1}{p}$ naar oneindig gaat als $N \to \infty$, gaat dit in een ongelofelijk langzaam tempo. Bijvoorbeeld bij $N = 10^4$ is de som $2,483$ bij $N = 10^5$ is het $2,705$. Bij $N = 10^6, 10^7$ vinden we respectievelijk $2,887$ en $3,041$. Deze waarden kun je met een wiskundig programma zoals Maple gemakkelijk nagaan. (De pc is bij de laatste berekening wel erg lang bezig.)

We gaan nu de functie $\pi(x)$ bekijken.

Definitie 5.3 *De functie* $\pi(x)$ *telt het* aantal priemgetallen $\leq x$. *Netter geformuleerd:*

$$\pi(x) = \#\{p \leq x | p \text{ priem}\}$$

[4]Euler's constante wordt gedefinieerd door $\gamma = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\Big)$

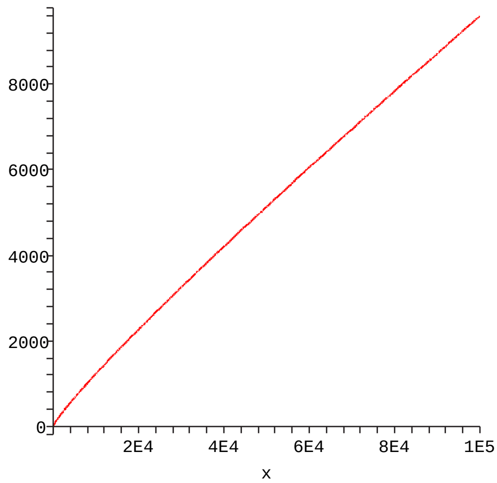


Figuur 5.2: $\pi(x)$ voor $x \leq 100$

Het gedrag van deze functie heeft wiskundigen altijd al geboeid. De rij priemgetallen heeft een onvoorspelbaar gedrag in die zin dat als we een priemgetal hebben dan is het onmogelijk te voorspellen wanneer het volgende priemgetal zal voorkomen.

Als we naar de functie kijken op kleine schaal dus zeg $\pi(x)$ voor $x \leq 100$, krijgen we het volgende (zie figuur 5.2).

Als we de functie $\pi(x)$ nu voor een grotere schaal gaan bekijken dan zien we de sprongen niet meer. Het lijkt nu of de functie een vloeiend verloop heeft. Kijk maar naar de volgende grafiek (zie figuur 5.3) waarin we $x \leq 100000$ hebben gesteld. Deze grafiek lijkt bijna lineair te zijn.



Figuur 5.3: $\pi(x)$ voor $x \leq 100000$

Hoofdstuk 6

Analytische functies

Dit hoofdstuk dient ter ondersteuning van de hoofdstukken 7 en 9.

Voor we beginnen aan dit hoofdstuk zullen we eerst kennis maken met het begrip *gebied*. Deze term zal in dit hoofdstuk een aantal maal gebruikt worden dus vandaar volgt de introductie.

Een punt $\alpha \in S$ heet een *inwendig punt* van S als er een ε-omgeving $U_\varepsilon(\alpha) = \{z \in \mathbb{C}| \quad |z - \alpha| < \varepsilon\}$ van α bestaat met $U_\varepsilon(\alpha) \subset S$. De verzameling S heet *open* indien ieder punt van S inwendig punt van S is. Merk op dat $\emptyset$ en $\mathbb{C}$ open zijn. Een open verzameling O van $\mathbb{C}$ heet *splitsbaar* indien er open verzamelingen U en V bestaan zó dat $O = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U \neq \emptyset$ en $V \neq \emptyset$. Als O niet splitsbaar is, dan heet O *samenhangend*. Een open samenhangende verzameling heet een *gebied*.

6.1 Complexe functies

Laten we beginnen met de definitie van een complexe functie.

Definitie 6.1 *Een* complexe functie *is een functie*

$$f : D \to \mathbb{C}$$

van een deelverzameling D van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$.

Naast de definitie van een complexe functie willen we natuurlijk ook weten wat een limiet is en wat continu is. Hier volgen van beide begrippen de definities.

Definitie 6.2 *Zij $f : D \to \mathbb{C}$ een complexe functie. Zij α in D. We zeggen dat L in $\mathbb{C}$ de* limiet *is van f voor z naar α, notatie*

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L,$$

als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle z in D met

$$0 < |z - \alpha| < \delta$$

geldt dat

$$|f(z) - L| < \varepsilon.$$

Definitie 6.3 *De complexe functie $f : D \to \mathbb{C}$ heet* continu *in α in D indien*

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha).$$

De functie f heet continu *(op D) als f continu is in ieder punt van D.*

De theorie van limieten en continuïteiten voor complexe functies lijkt als twee druppels water op die van functies $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vandaar dat we hier volstaan met het geven van de definities en de opmerking dat voor limieten en continuïteiten de gebruikelijke regels gelden. We nemen wel nog de volgende stelling mee.

Stelling 6.1 *Zij $f : G \to \mathbb{C}$ een complexe functie. Zij $g : D \to \mathbb{C}$ een complexe functie of een complexe functie van een reële veranderlijke (d.w.z $D \subset \mathbb{C}$ of $D \subset \mathbb{R}$). Als $g(D) \subset G$ en f en g continu zijn, dan is ook de samenstelling $f \circ g : D \to \mathbb{C}$ continu.*

6.2 Differentieerbaarheid van complexe functies

De definitie van differentieerbaarheid van complexe functies lijkt in vorm veel op die van functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Toch zal blijken dat differentieerbaarheid van complexe functies een heel speciale eis is.

Definitie 6.4 *Laat $f : D \to \mathbb{C}$ een complexe functie zijn op een open deelverzameling D van $\mathbb{C}$. Dan heet f* differentieerbaar *in een punt α van D indien*

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

bestaat. Die limiet heet dan de afgeleide van f in α. *Notatie: $f'(\alpha)$. Als f differentieerbaar is in ieder punt van D, dan heet f* differentieerbaar op D.

Vanaf nu zijn D en G open deelverzamelingen van $\mathbb{C}$.

Definitie 6.5 *Als de complexe functie $f : D \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is op D, dan is de* afgeleide *f' gedefinieerd door*

$$f' : D \to \mathbb{C}, \qquad \alpha \xrightarrow{f'} f'(\alpha) \quad \textit{voor } \alpha \textit{ in } D.$$

Ook wordt de notatie $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z)$ gebruikt.

We zullen ter illustratie van de definitie twee voorbeelden geven.

Voorbeeld 6.1 *Zij n een geheel getal en $n \geq 1$. De functie $f(z) = z^n$ is differentieerbaar op $\mathbb{C}$ met afgeleide nz^{n-1}. Immers voor α in $\mathbb{C}$ is*

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{z^n - \alpha^n}{z - \alpha} = \lim_{z \to \alpha} (z^{n-1} + z^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) = n\alpha^{n-1}$$

Voorbeeld 6.2 *De functie $f(z) = \overline{z}$ is nergens differentieerbaar. Zij $\alpha \in \mathbb{C}$. Laat h een reële veranderlijke aanduiden. Zou f differentieerbaar zijn in α, dan zou enerzijds*

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{\overline{z} - \overline{\alpha}}{z - \alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{\alpha + h} - \overline{\alpha}}{h} = 1$$

maar anderzijds

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{\overline{z} - \overline{\alpha}}{z - \alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{\alpha + ih} - \overline{\alpha}}{ih} = -1.$$

En dit is een tegenspraak.

Er geldt zelfs dat als f differentieerbaar is op D, dan is f ook oneindig vaak differentieerbaar op D. Het bewijs hiervan laten we hier echter om technische redenen achterwege. De volgende stelling kan na het voorgaande nauwelijks nog een verrassing zijn.

Stelling 6.2 *Als de complexe functie $f : D \to \mathbb{C}$ differentieerbaar is in het punt α in D, dan is f continu in α.*

Bewijs 6.1 *Hier volgt dan het korte bewijs.*

$$\lim_{z \to \alpha} (f(z) - f(\alpha)) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \cdot \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) = f'(\alpha) \cdot 0 = 0.$$

Definitie 6.6 *Een complexe functie $f : D \to \mathbb{C}$ heet* analytisch *als f continu differentieerbaar is op D, d.w.z. als f differentieerbaar is op D en f' continu is op D.*

De gebruikelijke regels betreffende de verwisseling van algebraïsche operaties en differentiëren zijn geldig. Het bewijs van de nu volgende kettingregel is een directe generalisatie van het bewijs van de kettingregel voor functies van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Stelling 6.3 *(Kettingregel) De samenstelling van analytische functies is weer analytisch.*

Bewijs 6.2 *Laat $g : D \to \mathbb{C}$ en $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch zijn. Laat α in D en veronderstel $\beta = g(\alpha) \in G$. We zullen bewijzen dat $f \circ g$ differentieerbaar is in α, terwijl*

$$(f \circ g)'(\alpha) = f'(\beta)g'(\alpha) = f'(g(\alpha))g'(\alpha).$$

Hieruit volgt dan de stelling met behulp van stelling 6.1. Definieer daartoe $\varphi : G \to \mathbb{C}$ *door*

$$\varphi(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(\beta)}{w-\beta} & \text{voor } w \neq \beta, \\ f'(\beta) & \text{voor } w = \beta. \end{cases}$$

De functie φ *is continu in* β *omdat* f *daar differentieerbaar is. Verder is* $f(w)-f(\beta) = \varphi(w)(w-\beta)$, *voor alle* w *in* G. *Schrijf nu* $w = g(z)$, $\beta = g(\alpha)$ *en deel door* $z - \alpha$. *Er komt, voor* $z \neq \alpha$,

$$\frac{f(g(z)) - f(g(\alpha))}{z - \alpha} = \varphi(g(z))\frac{g(z) - g(\alpha)}{z - \alpha}.$$

Dus

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(g(z)) - f(g(\alpha))}{z - \alpha} = \varphi(g(\alpha))g'(\alpha) = \varphi(\beta)g'(\alpha) = f'(\beta)g'(\alpha).$$

Het volgende nevenresultaat valt op nagenoeg dezelfde wijze te bewijzen[1].

Stelling 6.4 *Laat* $g : D \to \mathbb{C}$ *een continu differentieerbare complexe functie van een reële veranderlijke zijn* ($D \subset \mathbb{R}$ *en* D *open). Zij* $f : G \to \mathbb{C}$ *analytisch. Als* $g(D) \subset G$, *dan is de samenstelling* $f \circ g : D \to \mathbb{C}$ *weer een continu differentieerbare functie.*

6.3 De vergelijkingen van Cauchy en Riemann

Of een complexe functie al dan niet analytisch is, wordt vaak onderzocht met behulp van de *vergelijkingen van Cauchy en Riemann*. Deze vergelijkingen zullen we beknopt bespreken.

Laat $f : G \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn. Voor z in G schrijven we

$$z = x + iy, \qquad x = Re(z) \text{ en } y = Im(z),$$

en

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$\text{waarin } u(x, y) = Re(f(x + iy)) \text{ en } v(x, y) = Im(f(x + iy)).$$

We nemen z vast. Omdat f differentieerbaar is in z geldt

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z).$$

[1] We laten dit nu echter achterwege vanwege de beschikbare tijd voor de Master P.O.

We berekenen nu $f'(z)$ door w op twee speciale manieren naar z te laten naderen. Zij h een reële variabele. Met $w = z + h$ vinden we

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \Big(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \Big)$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Met $w = z + ih$ vinden we

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{ih}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \Big(\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \Big)$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Door nu reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk te stellen vinden we de *vergelijkingen van Cauchy en Riemann*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Er geldt

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\Big)$$

(alle partiële afgeleiden berekend in (x, y)). Bij de afleiding van deze formule is alleen gebruik gemaakt van het feit dat f differentieerbaar is in z. We leggen dit resultaat als volgt vast.

Stelling 6.5 *Als een complexe functie f differentieerbaar is in een punt, dan voldoen het reële en imaginaire deel van f aan de vergelijkingen van Cauchy en Riemann in dat punt.*

Als f analytisch is, dan is in ieder punt voldaan aan de vergelijkingen van Cauchy en Riemann. Verder vinden we, omdat f' continu is, dat de partiële afgeleiden $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ continu zijn. We formuleren dit in de volgende stelling, die we zonder bewijs geven[2].

[2] Dit weer in verband met de tijd van deze Master P.O.

Stelling 6.6 *Laat $f : G \to \mathbb{C}$ een complexe functie zijn. We schrijven $z = x + iy$ met $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ en $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, waarin $u(x, y) = Re(f(x + iy))$ en $v(x, y) = Im(f(x + iy))$. Dan geldt: f is analytisch dan en slechts dan als de partiële afgeleiden van u en v naar x en y continu zijn en voldoen aan de vergelijkingen van Cauchy en Riemann.*

We zullen nu twee voorbeelden geven.

Voorbeeld 6.3 *We zullen laten zien dat de functie $f(z) = e^z$ analytisch is en dat de afgeleide $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ is. We weten uit paragraaf 3.4 dat*

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

Nu is

$$u(x, y) = e^x \cos(y) \text{ en } v(x, y) = e^x \sin(y).$$

u en v zijn partieel differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$ en u_x, u_y, v_x, v_y zijn alle continu.

$$u_x = e^x \cos(y) \text{ en } u_y = -e^x \sin(y)$$

$$v_x = e^x \sin(y) \text{ en } v_y = e^x \cos(y)$$

Aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen is voldaan want,

$$u_x = v_y = e^x \cos(y) \text{ en } u_y = -v_x = -e^x \sin(y)$$

en er geldt dus dat de functie $f(z) = e^z$ analytisch is. We hebben gezien dat $f'(z) = u_x(x, y) + iv_y(x, y)$ en dus geldt dat

$$f'(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^z.$$

Voorbeeld 6.4 *Nu zullen we laten zien dat de functie $f(z) = \overline{z}$ niet analytisch is. Laat $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy$ met $z = x + iy$. Nu is*

$$u(x, y) = x \text{ en } v(x, y) = -y.$$

$$u_x = 1 \text{ en } u_y = 0$$

$$v_x = 0 \text{ en } v_y = -1$$

De Cauchy-Riemann vergelijkingen gelden nu dus niet want $u_x \neq v_y$. Daarom kan de functie $f(z) = \overline{z}$ niet analytisch zijn.

Opgave 6.1 *De functie $f(z) = z^3 + 1$ is analytisch. Laat zien dat er aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen is voldaan.*

6.4 Machtreeksen

In deze paragraaf geven we enkele definities en stellingen zonder bewijs die we nodig hebben voor de volgende paragraaf.

Definitie 6.7 *Zij* (γ_n) *een complexe rij en* α *in* $\mathbb{C}$. *Dan heet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n$$

een machtreeks in $(z-\alpha)$ *of ook een* machtreeks om α. *We zeggen dat de machtreeks* convergeert in β *indien de reeks* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\beta-\alpha)^n$ *convergeert. De machtreeks heet* absoluut convergent in β *indien* $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n(\beta-\alpha)^n|$ *convergent is.*

Voor we de definitie van de convergentiestraal van een machtreeks kunnen geven moeten we eerst het begrip *supremum* behandelen.

In de wiskunde is een *bovengrens* van een verzameling S een getal u waarvoor geldt dat $x \leq u \quad \forall x \in S$. (Op analoge wijze kunnen we ook een *ondergrens* definiëren. Hiervoor vervangen we $\leq$ door $\geq$ in het bovengenoemde.) Indien er voor een verzameling S een element $M \in S$ bestaat zodanig dat $M \geq a \quad \forall a \in S$, dan heet M het *maximum* van S. M dient dus een bovengrens te zijn en tevens tot S te behoren. We noteren: $M = max(S)$. Analoog is $m \in S$ een *minimum* van S indien voor alle $a \in S$ geldt dat $m \leq a$. Ook hier is m dus een ondergrens die tot de verzameling behoort. We noteren: $m = min(S)$. Dan zijn we nu toegekomen aan het *supremum*. Het *supremum* is de *kleinste bovengrens* van een verzameling. In feite is het *supremum* s van S dus het minimum van de verzameling bovengrenzen van S. We noteren: $s = sup(S)$. Analoog hieraan kunnen we het *infimum* definiëren. Dit is de *grootste ondergrens* van S. Het *infimum* i van S is dus het maximum van de verzameling ondergrenzen van S. We noteren: $i = inf(S)$.

Enkele voorbeelden zijn:

Voorbeeld 6.5 *Stel* S *is het interval* $[0,1]$. *Hierin is* $min(S) = inf(S) = 0$ *en* $max(S) = sup(S) = 1$.

Voorbeeld 6.6 *Stel* S *is het interval* $(0,1)$. S *heeft geen minimum en geen maximum. Wel is* $inf(S) = 0$ *en het* $sup(S) = 1$.

Voorbeeld 6.7 *Stel* $S = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. S *heeft geen minimum. Wel is* $max(S) = sup(S) = 1$ *en* $inf(S) = 0$.

Dan kunnen we nu verder gaan met de definitie van de convergentiestraal van een machtreeks.

Definitie 6.8 *Men definieert de* convergentiestraal *van de machtreeks* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n$ *door*

$$R = sup\{|z-\alpha| \qquad | \lim_{n\to\infty} |\gamma_n (z-\alpha)^n| = 0\}.$$

Stelling 6.7 *Zij* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n$ *een machtreeks.*
Als $R = 0$*, dan convergeert de machtreeks alleen voor* $z = \alpha$*.*
Als $R = \infty$*, dan convergeert de machtreeks voor iedere* z*.*
Als $0 < R < \infty$*, dan convergeert de machtreeks absoluut voor iedere* z *met* $|z-\alpha| < R$ *en divergeert de machtreeks voor iedere* z *met* $|z-\alpha| > R$*.*

Stelling 6.8 *Als* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$ *convergentiestraal* R *heeft, dan heeft de machtreeks* $\sum_{n=0}^{\infty} n\gamma_n z^{n-1}$ *eveneens convergentiestraal* R*.*

Een machtreeks stelt binnen de convergentiecirkel een analytische functie voor. De afgeleide wordt gevonden door termsgewijs differentiëren van de machtreeks. Dat is de inhoud van de volgende stelling.

Stelling 6.9 *Zij* $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$ *een machtreeks met convergentiestraal* R*. Noem*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n.$$

Dan is $f(z)$ *analytisch op de open schijf* $U_R(0)$ *en*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\gamma_n z^{n-1}.$$

We komen nu terug op paragraaf 3.3 over de Taylorontwikkeling. Naast de Taylorontwikkeling voor reële functie is er ook een Taylorontwikkeling voor complexe functies. Een reële functie van een reële veranderlijke, ook al is deze oneindig vaak differentieerbaar, kan niet altijd voorgesteld worden door een Taylor-reeks. Een veel genoemd voorbeeld is:

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ voor } x \neq 0, \qquad f(0) = 0.$$

In tegenstelling hiermee kan een analytische functie wel altijd door een Taylor-reeks worden voorgesteld.

Stelling 6.10 *Zij* $f : D \to \mathbb{C}$ *een complexe functie op een open verzameling* D*. Dan is* f *analytisch dan en slechts dan als* f *in ieder punt* α *van* D *in een machtreeks om* α *met positieve convergentiestraal ontwikkeld kan worden.*

De Taylor-reeksen van de exponentiële functie, de sinus functie en cosinus functie worden op de gebruikelijke manier gevonden.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

In alle gevallen is de convergentiestraal ∞.

Naast Taylor-reeksen bestaat er nog een andere soort ontwikkeling die we nodig hebben, de *Laurent-reeksen*. De *Laurent-reeksen* zien er als volgt uit:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n z^n \text{ of } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n$$

Omwille van de eenvoud van de notatie beperken we ons vaak tot het geval dat $\alpha = 0$. We zeggen dat de Laurent-reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n z^n$ *convergent* is indien zowel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \text{ als } \sum_{n=-\infty}^{-1} \gamma_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{-n} z^{-n}$$

convergent zijn.

Stelling 6.11 *Zij G een gebied en $\alpha \in \mathbb{C}$ (al of niet tot G behorend). Laat $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ reële getallen zijn zo dat de ring $\{z | R_1 < |z - \alpha| < R_2\}$ in G ligt. Zij f analytisch op G. Dan is f te ontwikkelen in een Laurent-reeks*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n, \qquad R_1 < |z-\alpha| < R_2.$$

Er kan zelfs aangetoond worden dat deze reeksontwikkeling uniek is.

6.5 Singulariteiten

Definitie 6.9 *Zij α in $\mathbb{C}$. Als de complexe functie f analytisch is op een gereduceerde omgeving $U_r(\alpha) \setminus \{\alpha\}$ van α, terwijl f niet gedefinieerd is in α, dan zeggen we dat f een* geïsoleerde singulariteit *heeft in α.*

Definitie 6.10 *Zij α een geïsoleerde singulariteit van f. Zij*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (z-\alpha)^n, \qquad 0 < |z-\alpha| < R$$

de Laurent-reeksontwikkeling. Dan heet
α een ophefbare singulariteit *indien $\gamma_n = 0$ voor alle $n \leq -1$;*
α een pool van orde k *($k = 1, 2, 3, \ldots$) indien $\gamma_{-k} \neq 0$, terwijl $\gamma_n = 0$ voor alle $n < -k$;*
α een essentiële singulariteit *indien $\gamma_n \neq 0$ voor oneindig veel negatieve n.*

6.6 Analytische voortzetting

Stelling 6.12 *(Het principe van analytisch voortzetten, identiteitsstelling) Zij f en g analytisch in een gebied A. Stel er is een rij $z_1, z_2, \ldots$ verschillende punten van A, die convergeert naar $z_0 \in A$, zodat $f(z_n) = g(z_n)$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dan is $f = g$ op heel A. De conclusie is geldig, in het bijzonder, als $f = g$ in een zekere omgeving van een zeker punt in A.*

Stelling 6.13 *Stel $f : A \to \mathbb{C}$ en $g : B \to \mathbb{C}$ analytisch in gebieden A en B, zodanig dat $f = g$ op $A \cap B$. Definieer*

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \textit{als } z \in A; \\ g(z) & \textit{als } z \in B. \end{cases}$$

Dan is h analytisch op $A \cup B$ en het is de enige analytische functie op $A \cup B$ gelijk aan f op A (respectievelijk aan g op B). We zeggen dat h een analytische voortzetting *is van f (respectievelijk g).*

Hoofdstuk 7

Speciale functies

De zeta-functie is bij wiskundigen bekend vanwege de nog steeds onopgeloste Riemann-Hypothese. Maar wat echt telt is dat het één van de belangrijkste niet elementaire functies is. We zullen in dit hoofdstuk aandacht schenken aan beide functies. Te beginnen met de gamma-functie.

7.1 De gamma functie

Er worden over het algemeen drie definities van de gamma-functie gebruikt. Wij zullen er hier één als definitie geven en de andere twee als proposities. De definitie die we geven is vernoemd naar Euler en luidt als volgt:

Definitie 7.1 *De limiet:*

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \text{ voor } z \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}.$$

Als we z vervangen door $z+1$ hebben we het volgende:

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)} n^{z+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z$$

$$= z\Gamma(z)$$

Opgave 7.1 *Laat zien (gebruik makend van het voorgaande) dat:* $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$ *en in het algemeen* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

De eerste propositie die ook naar Euler is vernoemd (wordt vaak Euler's vorm genoemd), luidt als volgt:

Propositie 7.1 *De integraal notatie:*

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \text{ , waarbij } Re(z) > 0.$$

Opgave 7.2 *Laat zien (gebruik makend van partiële integratie) dat ook nu weer geldt:*
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (Re(z) > 0)$.

De tweede propositie is vernoemd naar Weierstrass en luidt als volgt:

Propositie 7.2 *De oneindige product notatie:*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{\frac{-z}{n}},$$

waarbij γ *de Euler-Mascheroni constante is,*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} (1 + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0.577216\ldots$$

7.2 De zeta-functie

Dan nu de zeta-functie. Hiervoor hebben we de volgende definitie.

Definitie 7.2 *De Riemann zeta-functie is de functie gedefinieerd op* $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ *door de som*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

Op $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ is de Riemann zeta-functie analytisch[1]. Deze functie kan analytisch worden voortgezet naar het complexe vlak met uitzondering van $z = 1$, waar de functie een pool van orde 1 heeft. De Riemann zeta-functie kan dus als volgt worden geschreven als een *Laurent-reeks* rond $z = 1$:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \gamma_0 + \gamma_1(z-1) + \gamma_2(z-1)^2 + \ldots$$

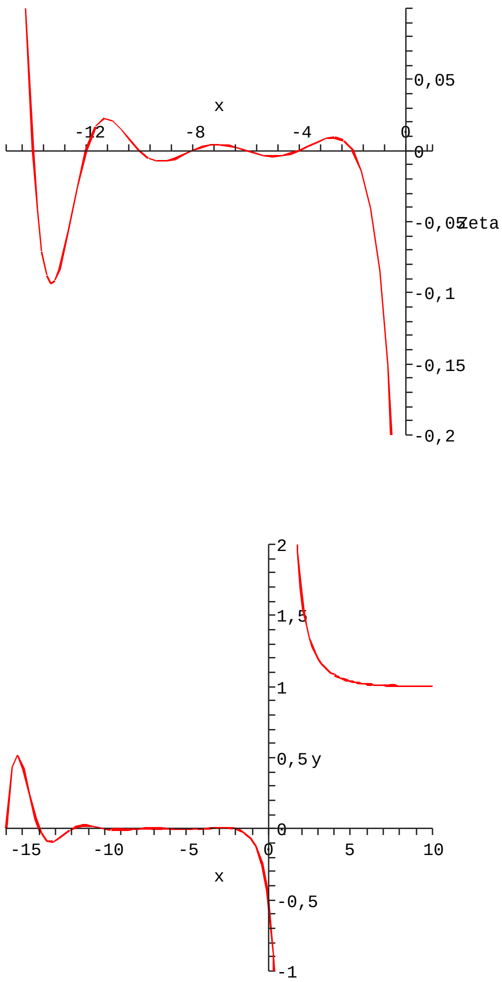
De constanten γ_n worden de *Stieltjes constanten* genoemd en zijn als volgt gedefinieerd:

$$\gamma_n \equiv \lim_{m\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{m} \frac{(\ln k)^n}{k} - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1}\Big]$$

Als $n = 0$ hebben we γ_0 en dat is de Euler-Mascheroni constante (zie ook propositie 7.2). Met behulp van deze Laurent-reeks en definitie 6.10 volgt dat bij $z = 1$ de Riemann zeta-functie een pool van orde 1 heeft.

Ter illustratie van de Riemann zeta-functie volgen twee grafieken (figuur 7.1) van de Riemann zeta-functie. De zeta-functie is eigenlijk voor het eerst

[1] Een bewijs hiervoor kan gevonden worden in het boek ‘Basic complex analysis’ van J.E.Marsden.



Figuur 7.1: $\zeta(z)$; bij bovenste figuur is $z \in \mathbb{R}^-$, bij onderste figuur is $z \in \mathbb{R}$

gedefinieerd door Euler in de eerste helft van de achttiende eeuw. Euler's werk werd gemotiveerd door het probleem van het berekenen van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

(dit is $\zeta(2)$ in onze notatie), dat werd gesteld in de zeventiende eeuw door Mengoli. Euler heeft uiteindelijk laten zien dat $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$[2]. Sommige beginpogingen van Euler bestonden uit het numeriek berekenen van $\zeta(2)$ en betroffen de ontwikkeling die nu de Euler-Maclaurin formule wordt genoemd. Dit was het eerste verband tussen numerieke analyse en de zeta-functie. De zeta-functie speelt ook een belangrijke rol bij de verdeling van priemgetallen. Daar zullen we in Hoofdstuk 9 aandacht aan besteden.

[2] Dit wordt behandeld in Hoofdstuk 8

Hoofdstuk 8

Fourier reeksen

8.1 Het idee

De Franse wiskundige Jean-Baptiste-Joseph Fourier die leefde van 1768 tot 1830, is vooral bekend om zijn Fourier theorie en Fourier reeksen. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot de Fourier reeksen.

Voor Fourier zich aan de wiskunde wijdde was de reeks

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots$$

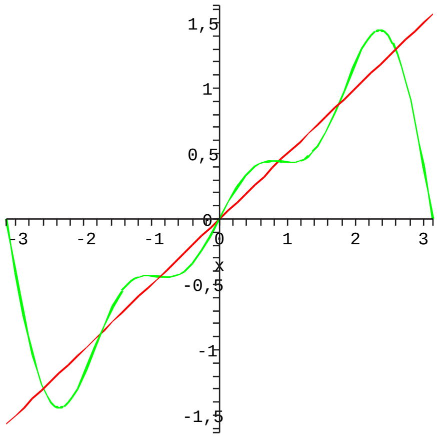
al bekend. Deze *trigonometrische reeks*, een som van de trigonometrische functies $\sin nx$ en $\cos nx$, was al gevonden door de Zwitserse wiskundige Leonhard Euler, die echter niet vermeldde hoe hij er aan kwam. Hij vertelde ook niet dat de reeks alleen geldt als $-\pi < x < \pi$.

Ter illustratie volgen twee figuren voor de trigonometrische reeks van $\frac{1}{2}x$. Figuur 8.1 is tot en met de derde term en figuur 8.2 is tot en met de twaalfde term. Het is duidelijk te zien dat de laatste benadering al redelijk dicht in de buurt van $\frac{1}{2}x$ komt.

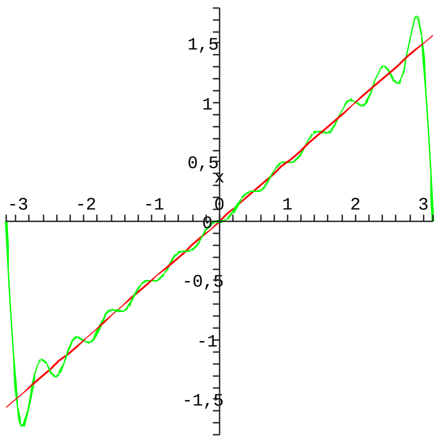
Fourier zag in dat deze reeks niet op zichzelf stond. Hij vermoedde dat *elke* functie te schrijven is als som van sinussen en cosinussen, met bepaalde coëfficienten, die tegenwoordig te zijner ere *Fourier-coëfficienten* genoemd worden. Veel wiskundigen van zijn tijd geloofden hem niet, maar in 1828 werd zijn vermoeden bewezen voor *periodieke* functies, door de wiskundige Dirichlet[1].

Periodieke functies zijn functies die zichzelf herhalen. Alle sinusfuncties $\sin nx$ zijn periodiek: Als je ze over een afstand van 2π over de horizontale as verschuift is hun grafiek weer precies als tevoren. Een som van zulke functies is dus ook periodiek (er moet wel gelden $\frac{p_1}{p_2} \in \mathbb{Q}$). Dit is goed te zien als we $\frac{1}{2}x$ en de Fourier-benadering ervan bekijken buiten het interval $(-\pi, \pi)$, zie figuur 8.3.

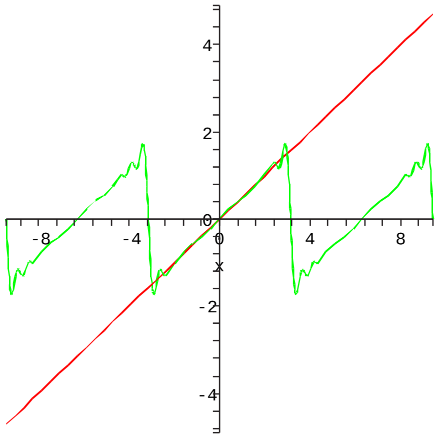
[1] Duits wiskundige die leefde van 1805 tot 1859.



Figuur 8.1: Trigonometrische reeks voor $\frac{1}{2}x$ tot en met de derde term.



Figuur 8.2: Trigonometrische reeks voor $\frac{1}{2}x$ tot en met de twaalfde term.



Figuur 8.3: De trigonometrische reeks voor $\frac{1}{2}x$ tot en met de twaalfde term over drie perioden.

8.2 Fourier reeksen

Een *Fourier reeks* mag gedefinieerd worden als een representatie van een functie in een *reeks van sinussen en cosinussen* zoals:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx). \tag{8.1}$$

De *Fouriercoëfficienten* a_0, a_n en b_n zijn gerelateerd aan de periodieke functie $f(x)$ door bepaalde integralen:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \text{ met } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \text{ met } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Condities op $f(x)$ om vergelijking 8.1 *geldig* te maken zijn dat $f(x)$[2] een *eindig aantal eindige discontinuïteiten*[3] en een *eindig aantal extreme waarden, maxima en minima in het interval* $[0, 2\pi]$ heeft. Functies die aan deze condities voldoen noemen we *stuksgewijs regulier*. De condities staan ook wel bekend als de *Dirichlet condities*.

[2]Niet iedere functie heeft een Fourierreeks.

[3]Sprong in discontinuïteit (linker en rechter limiet bestaat, $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ i.p.v. f(x). De laatste is daar niet gedefinieerd.)

Voor we nu verder gaan, doen we eerst weer een stukje analyse. In hoofdstuk 3 hebben we kennis gemaakt met complexe getallen en de *exponentiële schrijfwijze*. We willen nu laten zien dat de $\sin(ax)$ en de $\cos(ax)$ te schrijven zijn met e-machten.

Opgave 8.1 *Laat zien met behulp van de* exponentiële schrijfwijze *dat:*

$$\sin(ax) = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \quad \textit{en} \quad \cos(ax) = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}.$$

Als we $\cos(nx)$ en $\sin(nx)$ in exponentiële vorm schrijven wordt vergelijking 8.1:

$$(8.2) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

met

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \text{ met } n > 0,$$

en

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0.$$

Vergelijking 8.1 wordt wel de *Fourier-cosinus-sinus-reeks* genoemd en vergelijking 8.2 wordt wel de *exponentiële-Fourier-reeks* genoemd.

Het interval $[0, 2\pi]$ is niet het enige interval dat we mogen gebruiken. We mogen namelijk ieder interval $[x_0, x_0 + 2\pi]$ gebruiken. Vaak zal $x_0 = -\pi$ worden genomen om het interval $[-\pi, \pi]$ te verkrijgen. Al deze intervallen hebben lengte 2π. Deze restrictie kan gemakkelijk worden versoepeld. Als $f(x)$ periodiek is met een periode $2L$, dan kunnen we het volgende schrijven:

$$(8.3) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right]$$

met

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \text{ met } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}dt, \text{ met } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Deze formules zijn verkregen door in vergelijking 8.1 x te vervangen door $\frac{\pi x}{L}$ en in de formules voor de *Fouriercoëfficienten* t te vervangen door $\frac{\pi t}{L}$. (Voor het gemak zijn de intervallen van de Fouriercoëfficienten verschoven naar het interval $[-\pi, \pi]$.) De keuze van een symmetrisch interval $[-L, L]$ is *niet* noodzakelijk. Voor $f(x)$ periodiek met periode $2L$ voldoet elk interval $[x_0, x_0 + 2L]$. De keuze is een kwestie van gemak of persoonlijke voorkeur.

Definitie 8.1 *Als een functie $f(x)$ voldoet aan*

$$f(-x) = f(x)$$

voor iedere x uit het domein van f, dan noemen we f een even functie. *En als een functie $f(x)$ voldoet aan*

$$f(-x) = -f(x)$$

voor iedere x uit het domein van f, dan noemen we f een oneven functie*.*

Het *even* of *oneven* zijn van een functie speelt een belangrijke rol bij het bepalen van de Fourier reeks van een functie op het interval $[-\pi, \pi]$. $\cos(nx)$ is dus een *even functie* en $sin(nx)$ een *oneven functie* op het interval $[-\pi, \pi]$. Als $f(x)$ dus een *oneven functie* is op $[-\pi, \pi]$ dan is

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

En als $f(x)$ een *even functie* is op $[-\pi, \pi]$ dan is

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Dan zullen we nu een voorbeeld geven.

Voorbeeld 8.1 *Een driehoekige golf wordt gegeven door de volgende formule (zie ook figuur 8.4):*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{als } 0 < x < \pi \\ -x & \textit{als } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

We gaan $f(x)$ nu ontwikkelen in een Fourier reeks.

Om te beginnen kunnen we zien dat $f(x)$ even *is. Hieruit volgt meteen $b_n = 0$. Dan vervolgen we met a_0.*

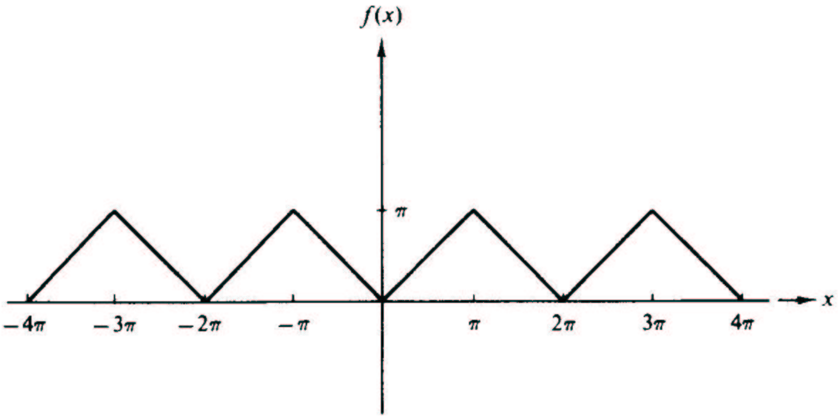
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_0^{\pi} = \pi.$$

Nu we a_0 hebben berekend gaan we a_n berekenen voor $n > 0$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big[x\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{sin(nx)}{n}dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{cos(nx)}{n^2}\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\Big((-1)^n - 1\Big)$$



Figuur 8.4: Driehoekige golf

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi} & \textit{als } n \textit{ oneven} \\ 0 & \textit{als } n \textit{ even.} \end{cases}$$

Voor $f(x)$ krijgen we dus de volgende Fourier reeks:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Opgave 8.2 *Visualiseer dit laatste door het maken van grafieken.*

8.3 Fourierreeksen en de Riemann Zeta functie

Met deze informatie over Fourierreeksen zullen we aantonen dat de waarde van de Riemann Zeta functie $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. We beschouwen het probleem om de functie x^2 te ontwikkelen. Laat

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Vanwege het *even* zijn van $f(x)$ zijn alle $b_n = 0$. Voor de a_n's krijgen we

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\cdot\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\{\Big[\frac{x^2}{n}\sin(nx)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\sin(nx)dx\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\{0 + \Big[\frac{2x}{n^2}\cos(nx)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{n^2}\cos(nx)dx\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\{\frac{2\pi}{n^2}\cos(n\pi) - 0 - \Big[\frac{2}{n^3}\sin(nx)\Big]_0^\pi\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\{\frac{2\pi}{n^2}\cdot(-1)^n - 0\} = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Hiermee krijgen we de volgende Fourier reeks:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Deze vergelijking op zich zelf is niet zo bijzonder, maar als we $x = \pi$ nemen, $\cos(n\pi) = (-1)^n$, krijgen we het volgende:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

En hieruit volgt direct,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \equiv \zeta(2).$$

Naast dit mooie resultaat voor $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ kunnen we op een soortgelijke manier aantonen dat $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Dat is de dan ook de bedoeling van de volgende opgave.

Opgave 8.3 *We beschouwen nu weer het puur wiskundige probleem om de functie x^4 te ontwikkelen. Laat*

$$f(x) = x^4, \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Ga nu hetzelfde te werk[4] *als in het voorbeeld van $\zeta(2)$, om aan te tonen dat geldt:*

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

[4] Je zult ook gebruik moeten maken van het resultaat dat $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Hoofdstuk 9

Zeta functie en behaalde resultaten

We zullen in dit hoofdstuk duidelijk proberen te maken wat het verband is tussen de *zeta-functie* en de *verdeling van priemgetallen.*

9.1 De zeta-functie en priemgetallen

We zetten alles nog een keer rustig op een rij. In paragraaf 5.2 is de *hoofdstelling van de rekenkunde* bewezen. Deze stelling zegt dat elk positief geheel getal op precies één manier te schrijven is als product van priemgetallen, als we niet op de volgorde letten. Dit betekent dat elk positief geheel getal $n > 1$ op precies één manier te schrijven is als $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ waarbij $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ priemgetallen zijn en $k_1, k_2, \ldots, k_r$ positieve gehele getallen. Voor een willekeurig reëel getal x volgt dat

$$n^x = p_1^{k_1 x} p_2^{k_2 x} \cdots p_r^{k_r x}$$

We hadden ook al gezien dat als $N \to \infty$:

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\right)$$

$$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots)(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots)(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots) \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Hieruit volgt direct dat

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{p^{2x}} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Dit product wordt ook wel het *Euler-product* genoemd. Verder herkennen we de Riemann-zeta functie $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Het Euler-product geeft dus een nauw verband aan tussen $\zeta(x)$ en priemgetallen. Euler was de eerste die een aantal belangrijke relaties tussen de zeta-functie en priemgetallen vond, maar het was Riemann die in de jaren rond 1850 het volledige verband aantoonde. Riemann liet zien dat de verdeling van priemgetallen wordt bepaald door de niet triviale nulpunten van $\zeta(z)$, dat zijn de nulpunten van $\zeta(z)$ die liggen in de strook $0 < Re(z) < 1$, ook wel de kritieke strook genoemd. Dit zal verder worden uitgewerkt in de volgende paragraaf.

9.2 De nulpunten van $\zeta(z)$ en de Riemann hypothese

Voordat we verder kunnen moeten we eerst iets weten over de nulpunten van de zeta-functie. $\zeta(z)$ heeft triviale nulpunten en niet triviale nulpunten. We beginnen met de triviale nulpunten.

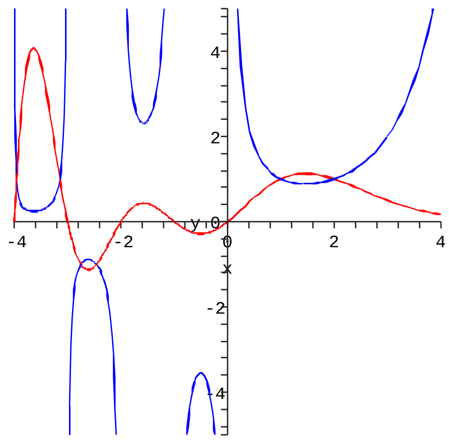
We gaan hiervoor eerst de gamma-functie nog eens nader bekijken. In het rechter halfvlak ($Re(z) > 0$) is de gamma-functie analytisch. Er is een eenvoudig verband tussen de functiewaarden $\Gamma(z)$ en $\Gamma(z+1)$, namelijk $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Zo'n verband heet een *functionaal-vergelijking*. We kennen dat van de cosinus en sinus-functie, namelijk: $\cos(z) = \cos(-z)$ en $\sin(z) = \sin(\pi - z)$. Via de functionaal-vergelijking $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ kunnen we steeds verder in het linker halfvlak doordringen. Een eerste stap levert als resultaat dat de functie voortgezet kan worden in de strook $-1 < Re(z) < 0$. Daar $\Gamma(z+1)$ analytisch is in 0 en $\Gamma(0+1) \neq 0$ is $z = 0$ een pool van orde 1. Laten we $\Gamma(z)$ wat verder uitwerken met de functionaal-vergelijking, dan krijgen we het volgende:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)} = \frac{\Gamma(z+4)}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$$

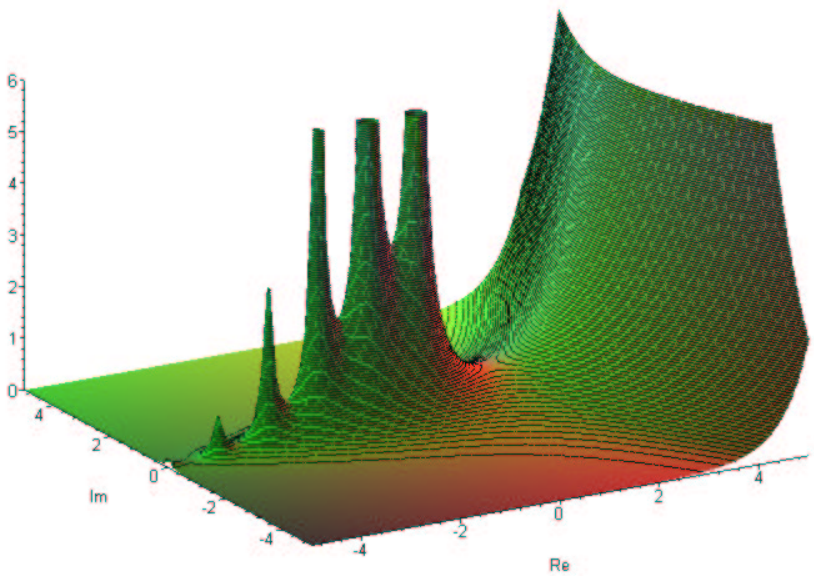
Zo kunnen we nog wel even doorgaan. Het belangrijkste nu is, dat we zien dat $z = -1$, $z = -2$ en $z = -3$ ook polen van orde 1 zijn. Hiermee wordt duidelijk dat de gamma-functie in het linker halfvlak enkelvoudige polen heeft voor elke niet-positieve gehele waarde van z.

We kunnen nu dus zeggen dat $\Gamma(z)$ via recursie gedefinieerd is voor alle waarden van $z \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ of dat $\Gamma(z)$ analytisch is voortgezet tot $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, ...\}$. Verder is $\Gamma(z) = \infty$ voor $z = 0, -1, -2, \dots$. Dit zullen we nog even illustreren met de figuren 9.1 en 9.2.

Met dit gegeven gaan we verder naar Riemann's fundamentele ontdekking dat er een eenvoudig verband is tussen de functiewaarden $\zeta(z)$ en $\zeta(1 - z)$.



Figuur 9.1: Grafiek van $\Gamma(x)$ (Blauw) en $\frac{1}{\Gamma(x)}$ (Rood) met x reëel.



Figuur 9.2: Landschap van $|\Gamma(z)|$ voor complexe waarden van z

Het is niet zo dat $\zeta(z) = \zeta(1-z)$. In de functionaal-vergelijking voor $\zeta(z)$ speelt ook de gamma-functie $\Gamma(z)$ een belangrijke rol. De *functionaal-vergelijking van Riemann* zegt dat

$$\pi^{-\frac{1}{2}z}\Gamma(\frac{1}{2}z)\zeta(z) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-z)}\Gamma(\frac{1}{2}(1-z))\zeta(1-z).$$

Hieruit zijn de nulpunten van $\zeta(z)$ voor $Re(z) < 0$ gemakkelijk te bepalen. Omdat $\Gamma(z) = \infty$ voor $z = 0, -1, -2, \ldots$ en nergens anders, volgt dat $\zeta(z) = 0$ voor $z = -2, -4, -6, \ldots$ en voor geen andere waarde van z met $Re(z) < 0$. De nulpunten $-2, -4, -6, \ldots$ heten de *triviale nulpunten* van $\zeta(z)$.

In 1914 is bewezen[1], dat er oneindig veel nulpunten op de *kritieke lijn* $Re(z) = \frac{1}{2}$ liggen. Dit werd als eerst gedaan door Hardy.

Er moeten dus nog oneindig veel meer nulpunten zijn en deze moeten wel in de *kritieke strook* $0 \leq Re(z) \leq 1$ liggen, want uit definitie 7.2 volgt dat $\zeta(z) \neq 0$ voor $Re(z) > 1$ en voor $Re(z) < 0$ heeft $\zeta(z)$ alleen triviale nulpunten.

Uit de functionaal-vergelijking en het feit dat $\zeta(\overline{z}) = \overline{\zeta(z)}$ volgt dat als $\frac{1}{2} + z$ een nulpunt van $\zeta(z)$ is, ook $\frac{1}{2} - z$, $\frac{1}{2} - \overline{z}$ en $\frac{1}{2} + \overline{z}$ nulpunten van $\zeta(z)$ zijn. We hoeven dus alleen naar het bovenhalfvlak te kijken en de nulpunten komen in paren, tenzij ze op de *kritieke lijn* $Re(z) = \frac{1}{2}$ liggen.

De Hypothese 9.1 *(De Riemann Hypothese)*
Riemann vermoedde dat alle *niet triviale nulpunten op de kritieke lijn liggen. Dit vermoeden wordt ook wel de* Riemann hypothese *genoemd en staat bekend als het meest belangrijke onopgeloste probleem in de wiskunde.*

Inmiddels is dit, door Xavier Gourdon, voor de eerste 10.000.000.000.000 nulpunten geverifieerd. Hij heeft dit geverifieerd door gebruik te maken van het Odlyzko-Schönhage algoritme[2]. We zullen nu in tabel 9.1[3] de geschiedenis van de verificatie van de niet triviale nulpunten van de zeta-functie op een rijtje zetten. Het is duidelijk te zien dat met de komst van steeds snellere computers het aantal geverifieerde nulpunten sterk is toegenomen. Het bewijs is tot op heden nog niet gevonden (maar misschien is het bewijs van Louis de Branges wel sluitend[4]) en er is daarom een beloning van één miljoen dollar uitgeloofd voor het sluitende bewijs van de Riemann hypothese. Zou je een tegenvoorbeeld vinden waardoor het tegendeel van de hypothese waar is dan zul je het moeten doen met slechts duizend dollar. Overigens is in

[1] In 'The Theorie of the Riemann Zeta-function' door E.C. Titchmarsh (isbn 0198533691) worden vijf verschillende bewijzen gegeven van dit probleem.

[2] Referentie: http//numbers.computation.free.fr/Constants/Miscallaneous/zetazeroscompute.html

[3] Referentie: http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeroscompute.html

[4] zie inleiding

Jaar	# nulpunten	Uitvoerende
1903	15	J.P. Gram
1914	79	R.J. Backlund
1925	138	J.I. Hutchinson
1935	1041	E.C. Titchmarsh
1953	1104	A.M. Turning
1956	25000	D.H. Lehmer
1958	35337	N.A.Meller
1966	250000	R.S. Lehman
1968	3500000	J.B.Rosser, J.M. Yohe, L. Schoenfeld
1977	40000000	R.P. Brent
1979	81000001	R.P. Brent
1982	200000001	R.P. Brent, J. v/d Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter
1983	300000001	J. van de Lune, H.J.J. te Riele
1986	1500000001	J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter
2001	10000000000	J. van de Lune (Niet gepubliceerd)
2004	900000000000	S. Wedeniwski
2004	10000000000000	X. Gourdon, P. Demichel

Tabel 9.1: Geschiedenis van de niet triviale nulpunten van $\zeta(z)$

1974 door Levinson bewezen dat tenminste een derde deel van de niet triviale nulpunten van $\zeta(z)$ op de kritieke lijn ligt[5]. Dit resultaat is inmiddels aangescherpt tot 40% door Conrey. De eerste tien niet triviale nulpunten staan vermeld in tabel 9.2[6] en de eerste zes kun je zien in figuur 9.3[7].

9.3 De Riemann hypothese en priemgetallen

Wat is nu het verband tussen de Riemann hypothese en de priemgetallen? Gauss (die leefde van 1777-1855) had al een vermoeden dat $\pi(x)$, het aantal priemgetallen $\leq x$[8], groeit als $\frac{x}{\ln(x)}$ wanneer $x \to \infty$. Chebyshev had al omstreeks 1859 aangetoond dat $0,92\frac{x}{\ln(x)} < \pi(x) < 1,11\frac{x}{\ln(x)}$ voor x groot genoeg en dat als $\pi(x)$ uiteindelijk voor elke $\epsilon > 0$ tussen $(c-\epsilon)\frac{x}{\ln(x)}$ en $(c+\epsilon)\frac{x}{\ln(x)}$ ingeklemd zou worden, het getal c gelijk aan 1 moet zijn.

Het probleem om de *priemgetalstelling*,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)},$$

[5]Referentie: http//mathworld.wolfram.com/ReimannHypothesis.html

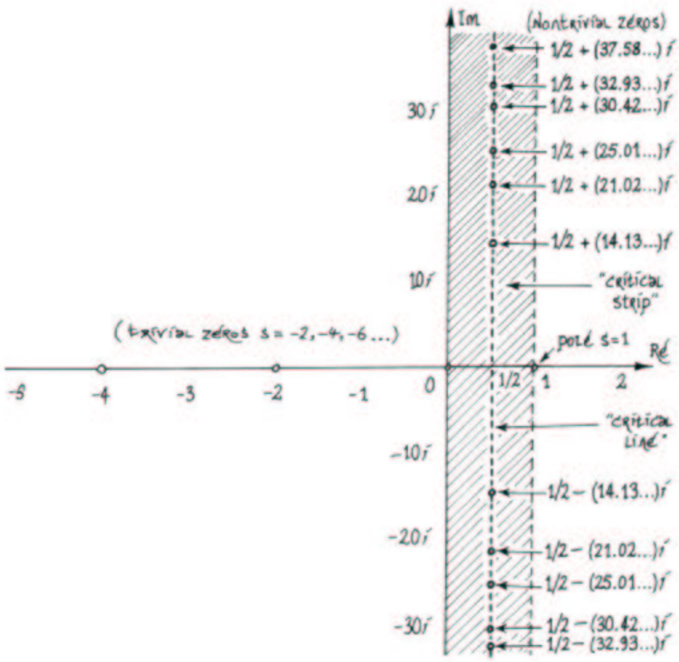
[6]Referentie: http://www.zetagrid.net/zeta/ZetaGrid-Conference_ in_ honour_ of_ Hugh_ Williams_ 2003.pdf

[7]Referentie: http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/encoding1.htm

[8]Zie 5.3

	nulpunt bij benadering
1^e	$\frac{1}{2} + 14,135i$
2^e	$\frac{1}{2} + 21,022i$
3^e	$\frac{1}{2} + 25,011i$
4^e	$\frac{1}{2} + 30,425i$
5^e	$\frac{1}{2} + 32,935i$
6^e	$\frac{1}{2} + 37,586i$
7^e	$\frac{1}{2} + 40,919i$
8^e	$\frac{1}{2} + 43,327i$
9^e	$\frac{1}{2} + 48,005i$
10^e	$\frac{1}{2} + 49,774i$

Tabel 9.2: De eerste tien niet triviale nulpunten van $\zeta(z)$.



Figuur 9.3: De eerste zes niet triviale nulpunten van $\zeta(z)$.

d.w.z. dat voor elke $\epsilon > 0$ en x groot genoeg, $\pi(x)$ ingeklemd wordt tussen $(1-\epsilon)\frac{x}{\ln(x)}$ en $(1+\epsilon)\frac{x}{\ln(x)}$, te bewijzen was dus aan te tonen dat $\pi(x)$ voldoende regelmatig groeit. Dit nu is equivalent met $\zeta(1+iy) \neq 0$ voor $y > 0$. In 1896 werd dit laatste tegelijkertijd door Hadamard en door De la Vallée Poussin bewezen. Andere formuleringen van de priemgetalstelling zijn:

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} =: li(x), \qquad (x \to \infty),$$

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \ln(p) \sim x, \qquad (x \to \infty),$$

$$\psi(x) := \sum_{p^m \leq x} \ln(p) \sim x, \qquad (x \to \infty).$$

Een verband tussen $\psi(x)$ en de niet triviale nulpunten ρ van $\zeta(z)$ met $y > 0$ wordt gegeven door de volgende formule van Von Mangoldt (1895):

$$\psi(x) - x = -\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln(1 - \frac{1}{x^2}) \qquad (x \in \mathbb{R}_{>0}, x \notin \mathbb{Z}).$$

De volgende vraag was hoe regelmatig deze functies $\pi(x), \theta(x), \psi(x)$ groeien, m.a.w. hoe groot de restfuncties $\pi(x) - li(x), \theta(x) - x, \psi(x) - x$ kunnen worden. Uit Von Mangoldt's formule blijkt dat dit nauw verbonden is met de ligging van de nulpunten van $\zeta(z)$. Laat a een getal zijn zo dat er nulpunten $z = x + iy$ van $\zeta(z)$ zijn met $x < a$ en $a - x$ willekeurig klein, maar geen met $x > a$. Dan geldt: $\forall\ \epsilon > 0$:

$$|\pi(x) - li(x)| < x^{a+\epsilon}$$

voor x voldoende groot, maar

$$|\pi(x) - li(x)| > x^{a-\epsilon}$$

komt voor willekeurige grote x voor. Als de Riemann hypothese waar is, geldt zelfs dat

$$|\pi(x) - li(x)| > \frac{\sqrt{(x)}}{\ln(x)} \ln(\ln(\ln(x)))$$

voor alle x groot genoeg. Echt regelmatig zijn de priemgetallen zeker niet verdeeld, maar als de Riemann hypothese geldt, gedragen de priemgetallen zich nog ongeveer zoals de wet van de grote aantallen voorschrijft. Als de Riemann hypothese niet geldt, is het gedrag opmerkelijk wild. Hilbert (die leefde van 1862-1943) dacht dat de Riemann hypothese eerder bewezen zou worden dan de laatste stelling van Fermat, zelfs nog tijdens zijn leven. Het toont aan dat ook de groten der aarde niet in kunnen schatten hoe moeilijk onopgeloste problemen zijn.

Het resultaat dat het verste in de richting van de Riemann hypothese gaat is alweer 40 jaar oud. Richert bewees dat

$$\zeta(x+iy) \neq 0 \text{ voor } x > 1 - \frac{c}{(\ln(|y|))^{\frac{2}{3}}(\ln(\ln(|y|)))^{\frac{1}{3}}}$$

waarbij $c = \frac{1}{8757}$, als y groot genoeg is[9]. Deze nulpuntvrije strook komt willekeurig dicht bij de lijn $x = 1$ als $y \to \infty$. Uit dit voorgaande volgt een bovengrens voor de grootte van de afwijking van $\pi(x) - li(x)$, namelijk

$$|\pi(x) - li(x)| < xe^{\frac{-(\ln(x))^{\frac{3}{5}}}{\ln(\ln(x))}}$$

voor x voldoende groot.

[9] Referentie: http://www.cwi.nl/events/conferences/VC99/tijdeman.pdf

Bijlage A

Bewijzen met inductie

Veel bewijzen in de wiskunde worden uitgevoerd via *volledige inductie*. Dit is een bewijsprincipe dat vaak gebruikt wordt als we een uitspraak willen bewijzen die geldig is voor alle natuurlijke getallen. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld.

Gegeven een getal $x \neq 1$. We willen laten zien dat voor elk natuurlijk getal n de gelijkheid

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geldt. We kunnen dit als volgt bewijzen.

Om te beginnen geldt

$$1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}.$$

Dus voor $n = 1$ geldt onze uitspraak.

Nu we dit weten kunnen we ook $1 + x + x^2$ uitrekenen, waarbij we het voorgaande resultaat gebruiken. Namelijk,

$$1 + x + x^2 = \frac{1 - x^2}{1 - x} + x^2 = \frac{1 - x^2 + x^2(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^3}{1 - x}.$$

Dus voor $n = 2$ geldt de stelling ook. In de volgende stap maken we gebruik van het zojuist gevonden resultaat,

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{1 - x^3}{1 - x} + x^3 = \frac{1 - x^3 + x^3(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^4}{1 - x}.$$

Het zojuist gevonden resultaat kunnen we weer gebruiken in de volgende stap,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^4}{1 - x} + x^4 = \frac{1 - x^4 + x^4(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

We zien dat we zo doorgaand ons resultaat voor elk natuurlijk getal n tevoorschijn krijgen. Het is echter alleen vermoeiend om steeds dezelfde soort berekening uit te moeten voeren om van één natuurlijk getal naar het volgende natuurlijke getal te komen. Daarom voeren we deze stap één keer uit, in de vorm van een *modelstap*.

Stel namelijk $k \geq 1$ en stel dat we weten dat

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Anders gezegd, we nemen aan dat de stelling waar is voor $n = k$. Dit proces noemen we de *inductiehypothese*.

Dan volgt daaruit dat

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + x^{k+1} = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} + x^{k+1} =$$

$$\frac{1 - x^{k+1} + x^{k+1}(1 - x)}{1 - x} = \frac{1 - x^{k+2}}{1 - x}.$$

We zien dat de stelling nu ook waar is voor $n = k + 1$. Deze stap hierboven is expliciet voor $k = 1, 2, 3, 4$ uitgevoerd. We noemen deze stap de *inductiestap*. Door deze modelstap te gebruiken voor $k = 5, 6, \ldots$ concluderen we dat onze stelling waar is voor $1 + x + \ldots + x^5$, $1 + x + \ldots + x^6$, ... Met andere woorden de stelling is waar voor iedere som

$$1 + x + \ldots + x^n.$$

In het algemeen is de procedure voor het bewijzen met inductie als volgt:

- Bewijs de stelling eerst voor een startwaarde ($n =$ *startwaarde* en vaak $n = 1$ of $n = 2$). Dit is vaak triviaal en meestal een kwestie van invullen.

- Vervolgens komt de inductiehypothese: Neem aan dat de stelling klopt voor $n \leq k$. En bewijs de volgende *implicatie*:
  De stelling is OK voor $n \leq k \Rightarrow$ De stelling is OK voor $n = k + 1$.
  Je hoeft je dus niet druk te maken over het bewijzen van de stelling voor $n \leq k$, maar concentreert je op het bewijzen van de implicatie om te laten zien dat de stelling voor iedere n waar is.

De combinatie van deze twee stappen maakt het *een bewijs met inductie.*

Bijlage B

Fout in de Taylor benadering

In dit hoofdstuk[1] komen we zoals beloofd terug op de *fout* in de Taylor benadering van een polynoom. Hiervoor beginnen we met *Taylor's formule met rest* en zullen we vervolgens kijken naar of we iets meer over deze *rest* kunnen zeggen.

B.1 Taylor's formule met rest

We zullen meteen beginnen met de definitie voor de *fout*.

Definitie B.1 *De* fout $E_n(x)$ *in de benadering van een functie* f *door zijn Taylor polynoom* T_nf *in punt* a *is:*

$$E_n(x) = f(x) - T_nf(x).$$

Dus als f *een afgeleide van orde* n *heeft in* a *kunnen we het volgende schrijven*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x).$$

Deze laatste formule staat ook wel bekend als *Taylor's formule met rest* $E_n(x)$. Deze formule is te gebruiken als we de grootte van $E_n(x)$ kunnen schatten. Om een idee te krijgen over deze 'fout', zullen we eerst kijken naar de fout die we krijgen bij een lineaire vergelijking.

Stelling B.1 *Stel* f *heeft een continue tweede afgeleide* f'' *in een omgeving van* a*. Dan hebben we voor elke* x *in deze omgeving*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x),$$

en

$$E_1(x) = \int_a^x (x-t)f''(t)dt.$$

[1] Werk eerst het hoofdstuk 2 door.

Bewijs B.1 *Uit de definitie van de fout volgt*

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \\ &= \int_a^x f'(t)dt - f'(a)\int_a^x dt = \int_a^x [f'(t) - f'(a)]dt. \end{aligned}$$

De laatste integraal kunnen we schrijven als $\int_a^x udv$, *met* $u = f'(t) - f'(a)$ *en* $v = t - x$. *Nu volgt* $\frac{du}{dt} = f''(t)$ *en* $\frac{dv}{dt} = 1$. *En als we nu partieel integreren krijgen we*

$$E_1(x) = \int_a^x udv = uv\Big|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)dt = \int_a^x (x-t)f''(t)dt,$$

omdat $u = 0$ *als* $t = a$ *en* $v = 0$ *als* $t = x$. *En daarmee is de stelling bewezen.*

Het corresponderende resultaat voor een polynoom van graad n volgt in de volgende stelling. Deze stelling zullen we geven zonder bewijs (uit oogpunt op de tijd). Het bewijs kan geleverd worden met inductie voor degenen die het willen bewijzen.

Stelling B.2 *Stel* f *heeft een continue afgeleide van orde* $n+1$ *in een gegeven interval dat* a *bevat. Dan is voor elke* x *in dit interval de Taylor formule*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x),$$

waarbij

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

B.2 Schatters voor de 'fout' in Taylor's formule

Aangezien de fout $E_n(x)$ in Taylor's formule uitgedrukt is als een integraal die de $(n+1)^{de}$ afgeleide van f bevat, zullen we wat meer informatie nodig hebben over $f^{(n+1)}$ voor we de grootte van de fout $E_n(x)$ kunnen schatten. Als de boven- en ondergrens voor $f^{(n+1)}$ bekend zijn, dan kunnen we de boven- en ondergrens voor $E_n(x)$ bepalen met de nu volgende stelling.

Stelling B.3 *Als de* $(n+1)^{de}$ *afgeleide van* f *voldoet aan de volgende ongelijkheden*

(B.1) $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$

voor alle t in een gegeven interval dat a bevat, dan hebben we voor elke x in dit interval de volgende schatters:

$$\text{(B.2)}\ m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{als } x > a,$$

en

$$\text{(B.3)}\ m\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1}E_n(x) \leq M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{als } x < a,$$

Bewijs B.2 *Stel eerst $x > a$. Dan is de integraal voor $E_n(x)$ uitgestrekt over het interval $[a, x]$. Voor iedere t in dit interval hebben we $(x-t)^n \geq 0$ en m.b.v. ongelijkheden B.1 geeft dit*

$$m\frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \leq M\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Als we nu integreren van a tot x krijgen we

$$\text{(B.4)}\ \frac{m}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt \leq E_n(x) \leq \frac{M}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt.$$

Door nu de substitutie $u = x - t$ en $du = -dt$ toe te passen krijgen we

$$\int_a^x (x-t)^n dt = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

en kan vergelijking B.4 terug worden gevoerd tot vergelijking B.2.

Als $x < a$, vindt de integratie plaats over het interval $[x, a]$. Voor elke t in dit interval hebben we $t \geq x$, dus $(-1)^n(x-t)^n = (t-x)^n \geq 0$. Daarom vermenigvuldigen we de ongelijkheden B.1 met $\frac{(-1)^n(x-t)^n}{n!}$ en integreren we van x tot a om de ongelijkheden B.3 te krijgen.

Tot slot van deze paragraaf over de ‘fout’ in de Taylor benadering nog een voorbeeld.

Voorbeeld B.1 *Als $f(x) = e^x$ en $a = 0$, dan hebben we de volgende formule*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x).$$

Omdat $f^{(n+1)} = e^x$ en de afgeleide $f^{(n+1)}$ monotoon stijgend is op elk interval, gelden de volgende ongelijkheden

$$e^b \leq f^{(n+1)} \leq e^c$$

op elk interval van de vorm $[b, c]$. In zo’n interval wordt aan de ongelijkheden voor $E_n(x)$ uit stelling B.3 voldaan met $m = e^b$ en $M = e^c$. In het bijzonder, als $b = 0$, hebben we

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \textit{als } 0 < x \leq c.$$

We kunnen deze afschattingen gebruiken om het Euler getal e te berekenen. We nemen $b = 0$, $c = 1$, $x = 1$ en we gebruiken de ongelijkheid $e < 3$ en krijgen het volgende

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1), \textit{ waarbij } \frac{1}{(n+1)!} \leq E_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Hiermee kunnen we e zo nauwkeurig als we willen uitrekenen. Laten we $n = 12$ nemen. Dan levert de som s de volgende afgeronde uitkomst

$$s = \sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} = 2,718281828.$$

Dit betekent dat $2,7182818275 \leq s < 2,7182818285$. *Met behulp van onze foutafschatting voor $E_{12}(1)$*

$$0.0000000002 \leq E_{12}(1) < 0.0000000005,$$

is de waarde van het getal e, correct tot de achtste decimaal $2,71828182$ *en afgerond op acht decimalen* $2,71828183$.

Bijlage C

GGD, KGV en Het Euclidisch algoritme

We beginnen deze bijlage met de volgende stelling.

Stelling C.1 *Zij* $a, b \in \mathbb{N}$ *en*

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} \qquad b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_r^{b_r}$$

de priemontbindingen van a, b *met* $p_1 p_2 \ldots p_r$ *verschillende priemgetallen en* $a_i, b_i \geq 0 \quad \forall i$. *Dan geldt dat* $b|a$ *precies dan als*

$$b_1 \leq a_1, \qquad b_2 \leq a_2, \qquad \ldots \qquad , b_r \leq a_r.$$

Voor we deze stelling bewijzen eerst even een opmerking ter verduidelijking. Ogenschijnlijk suggereren bovenstaande schrijfwijzen voor de priemontbindingen van a, b dat a en b uit dezelfde priemfactoren $p_1, \ldots, p_r$ bestaan. Dit hoeft echter niet zo te zijn. Als voorbeeld $a = 3 \cdot 5^2$ en $b = 2 \cdot 7^3$ dan kunnen we dit schrijven als $a = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^0$ en $b = 2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^3$. Op deze manier hoeven we niet steeds bij te houden welke priemfactoren wel of niet in a, b bevat zijn.

Bewijs C.1 *Als* $b_i \leq a_i \quad \forall i$, *dan is het duidelijk dat* $\frac{a}{b} = p_1^{a_1 - b_1} \cdots p_r^{a_r - b_r}$ *geheel is, dus* $b|a$. *Als omgekeerd* $b|a$, *stel dan* $c = \frac{b}{a}$ *en zij* $p_1^{c_1} \cdots p_r^{c_r}$ *de priemontbinding van* c. *Uit* $a = bc$ *volgt,*

$$p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} = p_1^{b_1 + c_1} \cdots p_r^{b_r + c_r}.$$

Uit de éénduidigheid van priemontbinding volgt dat $a_i = b_i + c_i$ *voor alle* i. *Omdat* $c_i \geq 0$ *impliceert dit* $a_i \geq b_i$ *voor alle* i.

C.1 Grootste gemeenschappelijke deler (ggd) en Kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv)

Een belangrijk begrip is de *grootste gemeenschappelijke deler* van twee gehele getallen a en b. Dat is het grootste getal dat zowel a als b deelt. Notatie: $ggd(a,b)$. In het bijzonder, als $ggd(a,b) = 1$ dan noemen we a en b *relatief priem*, ze hebben geen gemeenschappelijke deler behalve 1.

Stel dat $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ en $b = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ de priemontbindingen van a, b zijn. Voor elke deler $d = p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r}$ van zowel a als b geldt dat $d_i \leq a_i, b_i$ voor alle i. We vinden dus de grootste gemeenschappelijke deler door $d_i = min(a_i, b_i)$ voor $i = 1, \ldots, r$ te kiezen. Dus

$$ggd(a,b) = p_1^{min(a_1,b_1)} \cdots p_r^{min(a_r,b_r)}.$$

Met deze formule zijn de volgende eigenschappen min of meer vanzelfsprekend.

Stelling C.2 *Stel $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dan gelden de volgende zaken,*

1. *Als $d|a$ en $d|b$ dan $d|ggd(a,b)$. Met andere woorden, iedere gemeenschappelijke deler van a, b deelt ook $ggd(a,b)$.*
2. *Als $b|ac$ en $ggd(a,b) = 1$ dan $b|c$.*
3. *Als $a|c$, $b|c$ en $ggd(a,b) = 1$ dan $ab|c$.*
4. *Stel $d = ggd(a,b)$ dan $ggd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.*

Naast de grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen a, b hebben we ook het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud*. Dat is het kleinste getal dat zowel door a als b deelbaar is. Notatie: $kgv(a,b)$. Als $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ en $b = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ de priemontbindingen van a, b zijn, dan is het nu duidelijk dat

$$kgv(a,b) = p_1^{max(a_1,b_1)} \cdots p_r^{max(a_r,b_r)}.$$

Omdat $max(a_i, b_i) + min(a_i, b_i) = a_i + b_i$ voor elke i volgt, als curiositeit, dat $ab = ggd(a,b)kgv(a,b)$.

Tenslotte moge het duidelijk zijn dat we het kgv en de ggd ook kunnen nemen over meer dan twee getallen. Bovendien hoeven deze getallen niet positief te zijn.

Beschouw de getallen $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{Z}$, niet alle nul. De grootste gemeenschappelijke deler van deze getallen is het grootste natuurlijke getal dat elk van de getallen $a_1, \ldots, a_k$ deelt. Omdat niet alle a_i nul zijn bestaat een dergelijk getal. Notatie: $ggd(a_1, \ldots, a_k)$. Als geen van de a_i nul is, dan noemen we het kleinste positieve getal deelbaar door elk van deze getallen het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van $a_1, \ldots, a_k$. Notatie: $kgv(a_1, \ldots, a_k)$.

C.2 Het Euclidisch algoritme

Er is echter een simpelere manier om de *ggd* van twee getallen uit te rekenen. Deze is al bekend sinds de oudheid en wordt het *Euclidisch algoritme* genoemd.

Stel, ter illustratie, dat we de $ggd(654321, 123456)$ willen berekenen. We kunnen dit doen met priemontbinding, $654321 = 3 \cdot 218107$ en $123456 = 2^6 \cdot 3 \cdot 643$. We constateren dat 3 de *ggd* is. Het ontbinden van getallen is een notoir moeilijk probleem, vooral als ze groot zijn. Om de ontbinding van 654321 met de hand te doen moeten we aantonen dat 218107 priem is, wat niet echt makkelijk is zonder rekentuig.

Het Euclidisch algoritme gaat anders te werk. De belangrijkste observatie is de volgende. Stel $a, b \in \mathbb{N}$ en $a = qb + r$ met $0 \leq r < b$. Merk op dat iedere gemeenschappelijke deler van a en b ook gemeenschappelijke deler van b en r is. Als namelijk $d|a$ en $d|b$ dan volgt uit $r = a - qb$ dat ook $d|r$. Omgekeerd zien we dat iedere gemeenschappelijke deler van b en r ook gemeenschappelijke deler van a en b is. Dus geldt $ggd(a, b) = ggd(b, r)$. We passen dit toe. We vinden,

$$ggd(654321, 123456)$$

$$= ggd(123456, 654321 - 5 \cdot 123456) = ggd(123456, 37041)$$

$$= ggd(37041, 123456 - 3 \cdot 37041) = ggd(37041, 12333)$$

$$= ggd(12333, 37041 - 3 \cdot 12333) = ggd(12333, 42)$$

$$= ggd(42, 12333 - 293 \cdot 42) = ggd(42, 27)$$

$$= ggd(27, 42 - 27) = ggd(27, 15)$$

$$= ggd(15, 27 - 15) = ggd(15, 12)$$

$$= ggd(12, 15 - 12) = ggd(12, 3) = ggd(3, 0) = 3$$

Iets minder omslachtig opgeschreven,

$$654321 = 5 \cdot 123456 + 37041$$

$$123456 = 3 \cdot 37041 + 12333$$

$$37041 = 3 \cdot 12333 + 42$$

$$12333 = 293 \cdot 42 + 27$$

$$42 = 1 \cdot 27 + 15$$

$$27 = 1 \cdot 15 + 12$$

$$15 = 1 \cdot 12 + 3$$

$$12 = 4 \cdot 3.$$

Uit dit voorbeeld is het hopelijk duidelijk hoe het Euclidisch algoritme werkt. De bepaling van de $ggd(a, b)$ gaat in het algemeen als volgt.

Zij r_1 de rest bij deling van a door b, zij r_2 de rest bij deling van b door r_1, r_3 de rest bij deling van r_1 door r_2, enzovoorts. Dit proces houdt natuurlijk op zodra we een rest tegenkomen die 0 is. Omdat de rij resten $r_1, r_2, \ldots$ een dalende rij vormen moet dit wel gebeuren. We komen dus een k tegen zó dat $r_k = 0$. Maar dan geldt $ggd(a, b) = r_{k-1}$. Dat wil zeggen, de gevraagde ggd is gelijk aan de laatste rest ongelijk nul.

In het algemeen ziet het Euclidisch algoritme er dus als volgt uit,

$$a = q_0 b + r_1$$

$$b = q_1 r_1 + r_2$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3$$

$$\ldots$$

$$r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k$$

$$\ldots$$

en we gaan net zo lang door tot $r_k = 0$ voor zekere k. Dan geldt: $r_{k-1} = ggd(a, b)$.

We zien dat we ggd's kunnen bepalen zonder gebruik te maken van de priemontbindingen van a en b. Echter, de belangrijkste verdienste van het Euclidische algoritme is zijn verbazingwekkende snelheid. In het voorgaande voorbeeld starten we met getallen van zes cijfers, maar we waren in negen stappen klaar. Op het eerste gezicht is het niet meteen duidelijk dat het altijd zo snel gaat. Immers de dalende rij resten $r_1, r_2, \ldots$ kan wel eens heel langzaam dalen, bijvoorbeeld doordat elke rest 1 kleiner is dan de voorgaande. In dat geval zou het aantal stappen even groot zijn als a of b zelf en de berekening ondoenlijk voor grote a, b. We kunnen echter de volgende listige opmerkingen maken.

Stel $a > b$, hetgeen zeker geen beperking is. De bewering is nu dat $r_1 < \frac{a}{2}$. Als namelijk $b \le \frac{a}{2}$ dan is dit duidelijk omdat $r_1 < b \le \frac{a}{2}$. Als daarentegen $b > \frac{a}{2}$, dan levert deling van a door b quotient 1 op en rest $r_1 = a - b$. Omdat $b > \frac{a}{2}$ volgt hieruit wederom dat $r_1 < a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$. Op dezelfde manier zien we dat $r_2 < \frac{b}{2} < \frac{a}{2}$, $r_3 < \frac{r_1}{2} < \frac{a}{4}$, $r_4 < \frac{r_2}{2} < \frac{a}{4}$, enzovoorts. Door volledige inductie naar m bewijzen we nu gemakkelijk dat

$r_m < \frac{a}{2^{\frac{m}{2}}}$ voor alle $m > 0$. In het bijzonder geldt dat $1 \leq r_{k-1} < \frac{a}{2^{\frac{k-1}{2}}}$. Dus $2^{\frac{k-1}{2}} < a$ en we vinden,

$$k < 2\frac{\ln a}{\ln 2} + 1.$$

Nu volgt een voorbeeld om te illustreren hoe goed of slecht deze ongelijkheid is. Als a een getal van ongeveer 40 cijfers is, dus $10^{39} \leq a < 10^{40}$, dan is het Euclidisch algoritme met deze a in minder dan $2\frac{\ln 10^{40}}{\ln 2} + 1 = 266,75\ldots$ stappen klaar. Om met de hand 266[1] stappen uit te voeren is natuurlijk ook een heidens karwei, maar een computer heeft hier geen enkele moeite mee.

Met het Euclidische algoritme kunnen we nog meer dan alleen maar *ggd*'s uitrekenen. Stel we passen het algoritme toe op a, b. Het is duidelijk dat $a = 1 \cdot a + 0 \cdot b$ en $b = 0 \cdot a + 1 \cdot b$. Met deze flauwe opmerking hebben we laten zien dat a en b gehele lineaire combinaties van a, b zijn. Maar hetzelfde geldt ook voor alle resten r_n, die immers uit a, b ontstaan zijn door herhaalde lineaire combinatie. In het bijzonder geldt dat r_{k-1} een gehele lineaire combinatie van a, b is, dat wil zeggen, er zijn $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat $ggd(a, b) = xa + yb$.

Laten we het voorgaande voorbeeld nog eens nemen met $a = 654321$ en $b = 123456$. Er bestaan blijkbaar $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat $3 = 654321x + 123456y$[2]. We gaan als volgt te werk. We voeren het Euclidische algoritme als voorgaand uit en maken nog een extra kolom die de resten r_n als lineaire combinatie van a, b bijhoudt.

$$\begin{array}{ll}
 & 654321 = 1a + 0b \\
 & 123456 = 0a + 1b \\
654321 = 5 \cdot 123456 + 37041 & 37041 = 1a - 5b \\
123456 = 3 \cdot 37041 + 12333 & 12333 = -3a + 16b \\
37041 = 3 \cdot 12333 + 42 & 42 = 10a - 53b \\
12333 = 293 \cdot 42 + 27 & 27 = -2993a + 15545b \\
42 = 1 \cdot 27 + 15 & 15 = 2943a - 15598b \\
27 = 1 \cdot 15 + 12 & 12 = -5876a + 31143b \\
15 = 1 \cdot 12 + 3 & 3 = 8819a - 46741b \\
12 = 4 \cdot 3 & 0 = 41152a - 218107b.
\end{array}$$

[1] Merk op hoe klein 266 ten opzichte van 10^{40} is!

[2] Probeer voor de aardigheid eens of je gemakkelijk dergelijke getallen x, y ziet.

In de rechter kolom van deze twee kolommen ontstaat bijvoorbeeld het rechter element op rij zes door het element op rij vijf 293 maal van rij vier af te trekken. We zien in deze tabel nogmaals dat we beginnen met $654321 = 1 \cdot a + 0 \cdot b$ en $123456 = 0 \cdot a + 1 \cdot b$ en deze vervolgens lineair combineren op de manier voorgeschreven door het Euclidisch algoritme. We vinden achtereenvolgens de r_n als lineaire combinaties van 654321 en 123456 om tenslotte op

$$3 = 8819 \cdot 654321 - 46741 \cdot 123456$$

te eindigen.

We vatten het een en ander in de volgende stelling samen.

Stelling C.3 *Stel $a, b \in \mathbb{N}$. Dan zijn er $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat $ax + by = ggd(a, b)$.*

We hebben gezien hoe deze stelling bewezen kan worden door gebruik te maken van het Euclidisch algoritme. Het aardige is dat er ook nog een andere manier is om deze stelling in te zien. Begin met de getallen a, b en bouw hieruit een verschillenverzameling op zoals we eerder in deze Master PO (zie paragraaf 5.2) hebben geschetst. Omdat alle getallen die we toevoegen om een verschillenverzameling te maken kleiner zijn dan $max(a, b)$ is dit een procédé dat eindigt. Neem het kleinste element uit de verschillenverzameling en noem dit d. Vanwege stelling 5.4 weten we dat d zowel a als b deelt. Dus $d \leq ggd((a, b)$. Tevens is d uit a, b ontstaan door herhaaldelijk verschillen te nemen. Dit betekent dat er $x, y \in \mathbb{Z}$ bestaan zó dat $d = ax + by$. Omdat $ggd(a, b)$ beide termen rechts deelt, deelt hij ook d. Dus $ggd(a, b) \leq d$. Samen met $d \leq ggd(a, b)$ impliceert dit $d = ggd(a, b)$. Conclusie, er zijn $x, y \in \mathbb{Z}$ zó dat $ggd(a, b) = ax + by$.

Terugblikkend kunnen we zeggen dat het Euclidisch algoritme een snellere manier is om het kleinste element uit de verschillenverzameling bepaald door a, b uit te rekenen.

Index

Literatuurlijst

Boeken

1. Aarts, J.M. (1996). Complexe functies, de eerste stappen. Epsilon Uitgaven, Utrecht. ISBN 9050410278.

2. Apostol, T.M. (1967). Calculus, Volume 1 Second Edition. John Wiley and Sons, New York. ISBN 0471000051.

3. Arfken, G.B., Weber, H.J. (1995). Mathematical methods for physicists, Fourth edition. Academic Press, San Diego. ISBN 0120598167.

4. Beukers, F. (1999). Getaltheorie voor Beginners. Epsilon Uitgaven, Utrecht. ISBN 9050410499.

5. Getal en Ruimte 5/6V-B2, Tweede druk (1993). EPN, Culemborg. ISBN 9011023633.

6. Kortram, R.A. (1996). De Theorie van Complexe Functies. Epsilon Uitgaven, Utrecht. ISBN 9050410170.

7. Laugwitz, D (1999). Bernhard Riemann 1826-1866, Turning Points in the Conception of Mathematics (translated by A. Shenitzer). Birkhäuser, Boston. ISBN 0817640401.

8. Marsden, J.E. (1973). Basic complex analysis. W.H. Freeman and Company, San Fransisco. ISBN 071670451X.

9. Stewart, J. (1998). Calculus, concepts and contexts. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove. ISBN 0534343309.

10. Titchmarsh, E.C. (1986). The Theory of the Riemann Zeta-function. Oxford University Press, New York. ISBN 0198533691.

Dictaten en Artikelen

1. Wiskunde voor de poen, Honderd jaar na Hilbert zijn taaie wiskunde problemen geld waard. Dirk van Delft. NRC Handelsblad 5 augustus 2000.

2. Van Bieberbach tot Riemann, Rob van den Berg. NRC Handelsblad 19 juni 2004.

3. Finkelnberg, H. (najaar 2003). Caleidoscoop. Mathematisch Instituut Universiteit Leiden.

4. Kooman, R.J. (2000-2001). Analyse 4. Universiteit Leiden.
5. Stevenhagen, P. (1998). Algebra I. Universiteit van Amsterdam.
6. Stevenhagen, P. (2000). Algebra II. Thomas Stieltjes Instituut.
7. Tijdeman, R. (najaar 1997). Caleidoscoop. Universiteit Leiden.

Internetsites

1. http://www.cwi.nl/events/conferences/VC99/tijdeman.pdf
2. http://www.cwi.nl/events/conferences/VC99/stevenhagen-990720.pdf
3. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zeta.pdf
4. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros.pdf
5. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeroscompute.html
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_ series_ theorem
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_ Zeta_ Function
8. http://en.wikipedia.org/wiki/Substitution_ rule
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_ continuation
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Pole_ (complex_ analysis)
11. http://nl.wikipedia.org/wiki/Supremum
12. http://nl.wikipedia.org/wiki/Parti%C3%ABle_ integratie
13. http://nl.wikipedia.org/wiki/Bernhard_ Riemann
14. http://mathworld.wolfram.com/Factorial.html
15. http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html
16. http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html
17. http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html
18. http://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html
19. http://www.stats.ox.ac.uk/∼lunter/papers/fourier.pdf
20. http://staff.science.uva.nl/∼dcslob/lesbrieven/michel/Complexe%20getallen.pdf
21. http://web.mala.bc.ca/pughg/Riemannzeta/riemannzetalong.html
22. http://primes.utm.edu/notes/rh.html

23. http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=riemann

24. http://www.cs.vu.nl/~dijkstra/teaching/CF/CFdiktaat.pdf

25. http://www.cs.vu.nl/~aeweber/complexegetallen1.html

26. http://www.cs.vu.nl/~aeweber/complexegetallen2.html

27. http://www.cs.vu.nl/~aeweber/bewijzen.html

28. http://www.zetagrid.net/zeta/ZetaGrid-Conference_ in_ honour_ of_ Hugh_ Williams_ 2003.pdf

29. http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/encoding1.htm

Reeds Verlopen Internetsites

1. http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2de05/week82deo05.pdf

2. http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/anx3/zeta2.html

3. http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/anx3/zeta4.html