



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## **Periodieke automorfismen van grafen en oppervlakken**

Wardell, Dean

### **Citation**

Wardell, D. (2021). *Periodieke automorfismen van grafen en oppervlakken*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master Thesis, 2023](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/3674753>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

D.A. Wardell

Periodieke automorfismen van grafen  
en oppervlakken

Bachelorscriptie

29 juni 2021

Scriptiebegeleider: Dr. R.S. de Jong



Universiteit Leiden  
Mathematisch Instituut

# Inhoudsopgave

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Inleiding</b>   | <b>3</b>  |
| <b>1 Eigenschappen van topologische ruimtes</b>                            | <b>4</b>  |
| 1.1 Belangrijke definities en stellingen . . . . .                         | 4         |
| 1.2 Vertakte overdekkingsafbeeldingen . . . . .                            | 6         |
| 1.3 Homologiegroepen van torussen . . . . .                                | 11        |
| <b>2 Eigenschappen van variëteiten</b>                                     | <b>14</b> |
| 2.1 Oriëntatie van topologische variëteiten . . . . .                      | 14        |
| 2.2 De Euler-karakteristiek en de classificatie van oppervlakken . . . . . | 17        |
| <b>3 Periodieke automorfismen van oppervlakken</b>                         | <b>20</b> |
| 3.1 De Riemann-Hurwitz formule . . . . .                                   | 20        |
| 3.2 Homeomorfismen op homologie-niveau . . . . .                           | 22        |
| <b>4 Periodieke automorfismen van grafen</b>                               | <b>26</b> |
| <b>5 Homeomorfismen van oppervlakkencomplexen</b>                          | <b>31</b> |
| <b>6 Discussie</b>   | <b>35</b> |
| <b>Referenties</b>   | <b>36</b> |

## Inleiding

Zij  $X$  een topologische ruimte en zij  $f : X \rightarrow X$  een homeomorfisme van eindige orde. Binnen de algebraïsche topologie kent men een aantal groepen toe aan de ruimte  $X$ , zoals de homologiegroepen  $H_k(X)$ . De afbeelding  $f$  geeft hiermee een geïnduceerd isomorfisme  $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(X)$  tussen de homologiegroepen. Een interessante vraag die hierbij gesteld kan worden is wat de invloed van de geïnduceerde afbeelding  $f_*$  op het homeomorfisme  $f$  is. Bestaat er een aanname voor  $f_*$  die we kunnen maken zodat  $f$  alleen nog maar de identiteit op  $X$  kan zijn? In deze scriptie zullen we een vergelijkbare vraag onderzoeken in het geval dat de ruimte  $X$  een relatief fijne structuur heeft.

In de eerste twee hoofdstukken zullen we deze 'fijne' structuur definiëren. In het eerste hoofdstuk zullen we daarvoor kijken naar de zogeheten oppervlakken en daarbij introduceren we de vertakte overdekkingsafbeeldingen. Hierna zullen we een speciale werking definiëren die ons al een hoop structuur geeft, namelijk een orbifold werking. In de laatste paragraaf van het eerste hoofdstuk zullen we met behulp van de stelling van Mayer-Vietoris de homologiegroepen van een paar standaardoppervlakken bepalen. Dit zal ons een basis geven om in de rest van de scriptie mee te werken.

In het tweede hoofdstuk zullen we het begrip oriëntatie introduceren. In tegenstelling tot in de differentiaalmeetkunde zullen we dit begrip volledig definiëren aan de hand van topologische eigenschappen. Hierdoor zal het relatief makkelijk zijn om te bepalen of een oppervlak oriënteerbaar is. We hoeven daarvoor wegens stelling 2.9 en gevolg 2.10 alleen maar de eerste of tweede homologiegroep van ons oppervlak te weten. In de tweede paragraaf van dit hoofdstuk zullen we kort kijken naar een belangrijke topologische invariant, de Euler-karakteristiek. Dit biedt ons in hoofdstuk 3 een mogelijkheid om de Riemann-Hurwitz formule fijn te formuleren.

Met behulp van deze definities en resultaten zal het in hoofdstuk 3 mogelijk zijn om onze eerste hoofdstelling te bewijzen. We zullen hiervoor als eerst de Riemann-Hurwitz formule met onze structuur bewijzen. Een leuk gevolg van deze formule is de Hurwitz-grens. Uiteindelijk vinden we voor een geschikte ruimte  $X$  bij stelling 3.8 een aanname voor de geïnduceerde afbeelding  $f_*$  zodat  $f$  de identiteit moet zijn. Onder de voorwaarde dat we bereid zijn iets meer structuur aan te nemen wordt deze stelling in de literatuur vaak direct afgeleid uit de Lefschetz-Hopf stelling. Deze stelling is echter een stuk ingewikkelder, en maakt ons niet meteen duidelijker dat we een vergelijkbare stelling voor grafen hebben. Een interessante propositie die uit de hoofdstelling van dit hoofdstuk volgt is dat we in sommige gevallen het aantal vaste punten van de afbeelding  $f$  van boven kunnen begrenzen door de Euler-karakteristiek.

Deze vergelijkbare stelling voor grafen zullen we in hoofdstuk 4 bewijzen. Hiervoor zullen we eerst een topologische graaf definiëren. Hierna laten we zien dat we de graaf kunnen opdelen zodat ieder homeomorfisme van eindige orde een tak van de graaf op zijn plek laat dan en slechts dan als onze afbeelding de identiteit is op deze tak. Hierdoor zal het mogelijk zijn om de hoofdstelling van dit hoofdstuk te bewijzen.

Als kers op de taart combineren we deze hoofdstellingen in hoofdstuk 5 voor een zogeheten oppervlakkencomplex. We kunnen een dergelijk complex zien als een aantal compacte, samenhangende en oriënteerbare oppervlakken die we op een aantal punten aan elkaar vastplakken. Door middel van een paar beperkingen op dit oppervlakkencomplex en op de afbeelding  $f$  zal dezelfde eis op de geïnduceerde afbeelding  $f_*$  ervoor zorgen dat  $f$  alleen de identiteit kan zijn.

# 1 Eigenschappen van topologische ruimtes

In dit hoofdstuk introduceren we een hoop definities en stellingen uit de literatuur die we zullen gebruiken in deze scriptie. Hiervoor zullen we de theorie van homologie en cohomologie als bekend veronderstellen. In de laatste paragraaf van dit hoofdstuk zullen we de homologiegroepen bepalen van een aantal belangrijke topologische ruimtes.

## 1.1 Belangrijke definities en stellingen

In de algebraïsche topologie wordt er vaak gekeken naar topologische ruimtes waar een redelijk mooie structuur op bestaat. Hierbij kunnen we voornamelijk nadenken over de Euclidische ruimtes  $\mathbb{R}^n$  voor een  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Deze ruimtes vormen de bouwstenen van vele andere topologische ruimtes, en de topologische ruimtes die hierdoor opgebouwd worden kunnen we analyseren aan de hand van deze lokale structuur.

**Definitie 1.1.** Zij  $X$  een topologische ruimte. We noemen  $X$  een **topologische variëteit** als er voor iedere  $x \in X$  een open omgeving  $U \subset X$  van  $x$  en  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  bestaan zodat  $U$  homeomorf is met  $\mathbb{R}^n$ .

De bovenstaande definitie sluit echter niet heel veel uit. We kunnen namelijk ook een topologische variëteit bedenken die geen Hausdorffruimte is. We zullen de definitie hiervoor aanpassen, zodat de topologische ruimtes een fijnere structuur hebben. Hiervoor zullen we de volgende definitie gebruiken.

**Definitie 1.2.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Een **topologische  $n$ -variëteit** of  **$n$ -variëteit** is een Hausdorffruimte  $X$  met de eigenschappen dat er een aftelbare basis voor  $X$  bestaat en dat er voor iedere  $x \in X$  een open omgeving  $U \subseteq X$  van  $x$  bestaat zodat  $U$  homeomorf is met  $\mathbb{R}^n$ . Een 2-variëteit zullen we ook wel een **oppervlak** noemen.

Met deze bovenstaande definitie kunnen we heel specifiek kijken naar objecten die lokaal gezien op een vaste Euclidische ruimte lijken.

Naast de topologische  $n$ -variëteiten zullen we in deze scriptie vaak homologiegroepen van topologische ruimtes gebruiken. In de definitie van deze groepen worden altijd simplices gebruikt, maar de definities van deze simplices kunnen binnen de literatuur verschillen. In deze scriptie zullen we de volgende definitie gebruiken.

**Definitie 1.3** (Hatcher, [3], p103). Zij  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . We definiëren de **standaard  $p$ -simplex**  $\Delta_p$  als de convexe verzameling:

$$\Delta_p := \{(x_0, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x_i \geq 0 \text{ voor alle } 0 \leq i \leq p \text{ en } x_0 + \dots + x_p = 1\}.$$

Zij  $X$  een topologische ruimte, dan definiëren we een **singuliere  $p$ -simplex in  $X$**  als een continue afbeelding  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ .

Verder verschilt de definitie van een simpliciaal complex soms ook binnen de literatuur. In deze scriptie zullen we het vaak hebben over een zogenaemde  $\Delta$ -complex zoals het in het boek van Hatcher beschreven staat. We zullen dit definiëren aan de hand van een triangulatie van een topologische ruimte.

**Definitie 1.4** ( $\Delta$ -complex uit Hatcher, [3], p103). Zij  $X$  een topologische ruimte en zij  $A$  een indexverzameling. Zij  $\phi : A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  een afbeelding. Een **triangulatie** van  $X$  is een collectie continue afbeeldingen  $\{\sigma_\alpha : \Delta_{\phi(\alpha)} \rightarrow X\}_{\alpha \in A}$  die aan de volgende eisen voldoen:

- (i) Voor alle  $\alpha \in A$  is de beperking  $\tau_\alpha := \sigma_\alpha|_{\Delta_{\phi(\alpha)}^\circ}$  een injectieve afbeelding, en voor iedere  $x \in X$  bestaat er precies één dergelijke afbeelding waarvan  $x$  in het beeld van  $\tau_\alpha$  bevat zit.
- (ii) Voor alle  $\alpha \in A$  is de beperking van  $\sigma_\alpha$  tot een kant van  $\Delta_{\phi(\alpha)}$  weer een afbeelding  $\sigma_\beta : \Delta_{\phi(\beta)} \rightarrow X$  voor een zekere  $\beta \in A$ .
- (iii) Zij  $Y = \sqcup_{\alpha \in A} \Delta_{\phi(\alpha)}$  en definieer een equivalentierelatie  $\sim$  op  $Y$  op de volgende manier. Voor  $\alpha, \beta \in A$  en  $x \in \Delta_{\phi(\alpha)}, y \in \Delta_{\phi(\beta)}$  nemen we

$$x \sim y \iff \sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(y).$$

Definieer de afbeelding  $\sigma : Y/\sim \rightarrow X$  door voor iedere  $\alpha \in A$  en iedere  $y \in \Delta_{\phi(\alpha)}$  de klasse van  $y$  in  $Y/\sim$  te sturen naar  $\sigma_\alpha(y)$ . Onze eis is dat  $\sigma$  een homeomorfisme is.

Als er een triangulatie van  $X$  bestaat, dan noemen we  $X$  **trianguleerbaar**. We definiëren een **simpliciaal complex**  $X$  als een topologische ruimte samen met een triangulatie. Als voor de triangulatie ook een eindige collectie continue afbeeldingen gekozen kan worden, dan noemen we  $X$  **eindig trianguleerbaar** of een **eindig simpliciaal complex**.

Het idee achter een triangulatie is dat we een topologische ruimte opdelen in allerlei deelruimtes homeomorf met  $\Delta_n$  voor een zekere  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Als voorbeeld kan men denken aan de zijanten van een tetraëder, want die

worden opgebouwd uit driehoeken homeomorf met  $\Delta_2$ . Men kan ook de hele tetraëder trianguleren, aangezien een tetraëder homeomorf is met  $\Delta_3$ .

Verder definiëren we ook direct een deelcomplex van een simpliciaal complex  $X$ . Dit is een deelruimte  $A \subseteq X$  opgebouwd uit de simplices die op de triangulatie van  $X$  voorkomen.

**Definitie 1.5.** Zij  $X$  een simpliciaal complex met triangulatie  $\mathcal{T}$ . Zij  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  een deelcollectie en definieer  $A := \cup_{\sigma \in \mathcal{S}} \text{Im}(\sigma) \subseteq X$ . Dan noemen we  $A$  een **deelcomplex** van  $X$  als  $\mathcal{S}$  een triangulatie van  $A$  is.

Naast deze definities zullen we gebruik maken van zogenoemde simpliciale afbeeldingen tussen simpliciaal complexen  $X$  en  $Y$ . Dit is een afbeelding die iedere deelcomplex van  $X$  overbrengt in een deelcomplex van  $Y$ .

**Definitie 1.6.** Zijn  $X, Y$  simpliciaal complexen en zij  $\pi : X \rightarrow Y$  een surjectieve continue afbeelding. We noemen  $\pi$  een **simpliciale afbeelding** als voor iedere continue afbeelding  $\sigma$  uit de triangulatie van  $X$  de afbeelding  $\pi \circ \sigma$  in de triangulatie van  $Y$  zit.

Voor een simpliciaal complex hoeft men niet ver te zoeken. We kunnen namelijk allerlei standaard  $n$ -simplices op een geschikte manier aan elkaar plakken om hier meteen een voorbeeld van te krijgen. Zodra we met ingewikkelde topologische ruimtes werken is het echter niet meteen duidelijk of hiervan een triangulatie bestaat. De volgende stelling vertelt ons gelukkig wel dat ieder oppervlak deze fijne structuur bevat. Dit zal ons helpen om de structuur van oppervlakken beter te begrijpen.

**Stelling 1.7** (Moise, [6], p60). *De triangulatiestelling voor oppervlakken. Ieder oppervlak is trianguleerbaar.*

Het overige deel van deze paragraaf zal bestaan uit allerlei belangrijke stellingen en proposities uit de literatuur. We beginnen met een stelling die ons in staat stelt om de lokale homologie makkelijker uit te rekenen, de uitsnijdingsstelling.

**Stelling 1.8** (Hatcher, [3], p119). *De uitsnijdingsstelling. Zij  $X$  een topologische ruimte en zijn  $Z, A$  topologische deelruimten van  $X$  zodat  $\bar{Z} \subseteq A^\circ$ . Dan geldt voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  dat de inclusie  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$  isomorfismen  $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow H_n(X, A)$  induceert.*

*Zijn  $A, B \subseteq X$  topologische deelruimten met  $A^\circ \cup B^\circ = X$ . Dan geldt voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  dat de inclusie  $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$  isomorfismen  $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$  induceert.*

De volgende twee proposities zijn bedoeld als ruggensteun om een aantal homologiegroepen te berekenen zodra wij hier aan toekomen.

**Propositie 1.9** (Lee, [5], p345). *Zij  $X$  een topologische ruimte. Zij  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de verzameling wegsamenhangscomponenten van  $X$  en laat  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$  de inclusieafbeeldingen zijn. Dan geldt voor iedere  $p \geq 0$  dat de afbeelding*

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H_p(X_\alpha) \rightarrow H_p(X),$$

*waarvan de restrictie tot  $H_p(X_\alpha)$  precies  $(\iota_\alpha)_* : H_p(X_\alpha) \rightarrow H_p(X)$  is, een isomorfisme is.*

**Propositie 1.10** (Lee, [5], p346). *Zij  $X$  een topologische ruimte. Dan is de groep  $H_0(X)$  een vrije abelse groep met een basis bestaande uit een willekeurig punt uit iedere wegsamenhangscomponent.*

Er geldt dus dat  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  als  $X$  wegsamenhangend is. Merk verder op dat singuliere 0-simplices  $\sigma : \Delta_0 \rightarrow X$  constant zijn, omdat  $\Delta_0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$ . We kunnen  $\sigma$  daardoor identificeren door  $\sigma(1) \in X$ . We krijgen het volgende gevolg.

**Gevolg 1.11.** *Zij  $X$  een wegsamenhangende topologische ruimte en zij  $f : X \rightarrow X$  continu. Dan is de geïnduceerde afbeelding  $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(X)$  de identiteit.*

*Bewijs.* Zij  $x \in X$  en zij  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  een weg met  $\gamma(0) = x$  en  $\gamma(1) = f(x)$ . Definieer 0-simplices  $\sigma_x, \sigma_{f(x)} : \Delta_0 \rightarrow X$  door  $\sigma_x(1) = x$  en  $\sigma_{f(x)}(1) = f(x)$ . Dan merken we op dat  $\partial\gamma = \sigma_{f(x)} - \sigma_x$ , dus  $\sigma_{f(x)} - \sigma_x \in B_0(X)$ . We concluderen dat  $[\sigma_{f(x)}] = [\sigma_x] \in H_0(X)$ . Wegens propositie 1.10 is  $[\sigma_x]$  een voortbrenger van de groep  $H_0(X)$ , dus er geldt dat  $f_*([\sigma_x]) = [\sigma_{f(x)}] = [\sigma_x]$ . We zien dat  $f_* = \text{id}_{H_0(X)}$ .

□

De twee proposities die boven het bovenstaande gevolg staan, zijn natuurlijk niet altijd genoeg om alle homologiegroepen van een topologische ruimte te berekenen. De volgende stelling, ook wel bekend als de stelling van Mayer-Vietoris, zal hier een hoop mee helpen.

**Stelling 1.12** (Lee, [5], p356). *De stelling van Mayer-Vietoris.* Zij  $X$  een topologische ruimte en zijn  $U, V \subseteq X$  open deelverzamelingen met  $U \cup V = X$ . Schrijf  $i : U \cap V \hookrightarrow U$ ,  $j : U \cap V \hookrightarrow V$ ,  $k : U \hookrightarrow X$  en  $l : V \hookrightarrow X$  voor de inclusieafbeeldingen. Definieer voor iedere  $p \geq 0$  de afbeelding  $i_* \oplus j_* : H_p(U \cap V) \rightarrow H_p(U) \oplus H_p(V)$  door  $[\alpha] \mapsto (i_*([\alpha]), j_*([\alpha]))$  en de afbeelding  $k_* - l_* : H_p(U) \oplus H_p(V) \rightarrow H_p(X)$  door  $([\alpha], [\beta]) \mapsto k_*([\alpha]) - l_*([\beta])$ .

Dan is er voor iedere  $p \geq 1$  een homomorfisme  $\partial_* : H_p(X) \rightarrow H_{p-1}(U \cap V)$  zodat de volgende rij exact is:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{k_* - l_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \cdots$$

Naast het bepalen van de homologiegroepen hebben we ook een methode nodig om de cohomologiegroepen van een ruimte te berekenen. Een belangrijke manier om dit soort groepen te bepalen is aan de hand van andere topologische ruimtes, of met behulp van de homologiegroepen. De volgende stelling laat het verband zien tussen de (co)homologiegroepen van een simpliciaal complex waar een eindige groep homeomorfismen  $X \rightarrow X$  op werkt en de banenruimte  $X/G$ .

**Propositie 1.13** (Putman, [7], propositie 1.1). *Zij  $X$  een simpliciaal complex en zij  $G$  een eindige groep homeomorfismen  $X \rightarrow X$  zodat iedere  $g \in G$  een simpliciale afbeelding is. Dan geldt voor alle  $p \geq 0$  dat*

$$H^p(X/G; \mathbb{Q}) \cong (H^p(X; \mathbb{Q}))^G := \{[\phi] \in H^p(X; \mathbb{Q}) \mid \text{voor alle } g \in G \text{ geldt } g^*([\phi]) = [\phi]\} \text{ en,}$$

$$H_p(X/G; \mathbb{Q}) \cong (H_p(X; \mathbb{Q}))_G := H_p(X; \mathbb{Q}) / \langle g_*(\alpha) - \alpha \mid \alpha \in H_p(X; \mathbb{Q}) \rangle.$$

De volgende stelling laat zien dat de cohomologiegroepen voorkomen als duale groepen van de homologiegroepen in het geval dat we een lichaam van karakteristiek nul bekijken.

**Stelling 1.14** (Lee, [5], p378). *Zij  $X$  een topologische ruimte en zij  $\mathbb{F}$  een lichaam van karakteristiek nul. Dan geldt voor alle  $p \geq 0$  dat de vectorruimten  $H^p(X; \mathbb{F})$  en  $\text{Hom}(H_p(X), \mathbb{F})$  kanoniek isomorf zijn onder de afbeelding die  $[\varphi] \in H^p(X; \mathbb{F})$  stuurt naar het homomorfisme gedefinieerd door  $[c] \mapsto \varphi(c)$ .*

Veronderstel nu dat  $H_p(X)$  eindig voortgebracht wordt, dan is de dimensie van  $H^p(X; \mathbb{F})$  gelijk aan de rank van  $H_p(X)$ .

## 1.2 Vertakte overdekkingsafbeeldingen

Zij  $X$  een oppervlak. Ons doel wordt om eisen te leggen op een groep  $G$  bestaande uit homeomorfismen  $X \rightarrow X$  zodat de banenruimte  $X/G$  altijd aan bepaalde mooie eisen voldoet. Onder meer is het belangrijk dat deze banenruimte weer een oppervlak wordt.

Voordat we hieraan beginnen is het handig om vertakte overdekkingsafbeeldingen te definiëren. Deze afbeeldingen zullen namelijk belangrijk zijn voor de eigenschappen van de quotiëntafbeelding  $X \rightarrow X/G$ . We beginnen met wat notatie die we in de hele scriptie zullen gebruiken.

*Notatie.* We schrijven  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  voor de open eenheidsschijf in  $\mathbb{C}$ .

*Notatie.* Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Dan schrijven we  $\mu_n := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^n = 1\}$  voor de multiplicatieve groep van  $n$ -de machts eenheidswortels in  $\mathbb{C}$ .

Als eerst zullen we een standaard vertakte overdekkingsafbeelding definiëren. Dit is een vorm van een vertakte overdekkingsafbeelding tussen topologische ruimtes homeomorf met  $\mathbb{D}$ .

**Definitie 1.15.** Zij  $V, W$  topologische ruimtes homeomorf met  $\mathbb{D}$  en zij  $p : V \rightarrow W$  een continue afbeelding. Zij  $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ . We noemen  $p$  een **standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d$**  als  $p$  de volgende eigenschap heeft: er bestaan  $w \in W$  en  $v \in V$  zodat  $p^{-1}\{w\} = \{v\}$  en zodat  $p|_{V \setminus \{v\}} : V \setminus \{v\} \rightarrow W \setminus \{w\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding is. Als  $p$  een homeomorfisme is, dan noemen we  $p$  een **standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index 1**.

Merk op dat voor standaard vertakte overdekkingsafbeeldingen  $p$  van index  $d > 1$  het element  $w \in W$  op deze wijze uniek wordt bepaald. Dit is immers het enige punt waarvan het inverse beeld onder de afbeelding  $p$  uit exact één punt bestaat. We zullen dit punt daarmee de **kritieke waarde** van de afbeelding  $p$  noemen. Als  $p$  een homeomorfisme is, dan geven we  $p$  geen kritieke waarde.

Zij  $p : V \rightarrow W$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding met een kritieke waarde  $w \in W$  en zij  $v \in V$  zodat  $p^{-1}\{w\} = \{v\}$ . Dan is de afbeelding  $p|_{V \setminus \{v\}} : V \setminus \{v\} \rightarrow W \setminus \{w\}$  een overdekkingsafbeelding. Echter zijn  $W \setminus \{w\}$  en  $V \setminus \{v\}$  beide homotopie-equivalent met een cirkel, dus de fundamentealgroepen zijn isomorf met  $\mathbb{Z}$ . Vanwege de overdekkingsafbeeldingen theorie weten we al snel op isomorfie na welke overdekkingsafbeelding dit nu is.

**Propositie 1.16** (Fulton, [2], p189). *Zij  $X$  een samenhangende, lokaal wegsamenhangende en semi-lokaal enkelvoudig samenhangende topologische ruimte. Zij  $x \in X$  een punt. Voor iedere ondergroep  $H$  van  $\pi_1(X, x)$  bestaat er een samenhangende gepunte overdekking  $p_H : (Y_H, y) \rightarrow (X, x)$  zodat  $H = (p_H)_*(\pi_1(Y, y)) \subseteq \pi_1(X, x)$ . Iedere andere dergelijke gepunte overdekking is kanoniek isomorf hieraan.*

*Voorbeeld 1.17.* Zij  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$  en zij  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding  $z \mapsto z^d$ . Als  $d = 1$  dan is  $f$  de identiteit en daarmee een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index 1. Als  $d > 1$  dan merken we op dat  $f|_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding is en dat  $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ . We zien hiermee dat  $f$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d$  is.

Op homeomorfie na blijken dit echter ook de enige vertakte overdekkingsafbeeldingen te zijn. We brengen namelijk in herinnering dat er voor  $x \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  een correspondentie tussen de verzameling isomorfieklassen van gepunte overdekkingsafbeeldingen  $p : (Y, y) \rightarrow (\mathbb{D} \setminus \{0\}, x)$  met  $Y$  samenhangend en de verzameling ondergroepen van  $\pi_1(\mathbb{D} \setminus \{0\}, x) \cong \mathbb{Z}$  bestaat. Deze bijjectie wordt hierbij gegeven door de toewijzing aan  $p$  van de ondergroep  $p_*(\pi_1(Y, y)) \leq \pi_1(\mathbb{D} \setminus \{0\}, x)$ . Zie hiervoor ook wel propositie 1.16. Voor  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$  hebben de ondergroepen  $d\mathbb{Z} = \{d \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$  van  $\mathbb{Z}$ . Deze ondergroepen zullen op isomorfie na corresponderen met de overdekkingsafbeeldingen  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  van de vorm  $z \mapsto z^d$ . De enige andere ondergroep is de triviale groep, maar die correspondeert met een universele overdekkingsafbeelding van  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ . De fundamentealgroep van  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  is niet triviaal, dus de universele overdekkingsafbeelding is niet isomorf met een overdekkingsafbeelding  $\mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ .

Zij  $p : V \rightarrow W$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Zij  $w$  de kritieke waarde van  $p$  in het geval dat  $d > 1$ , of een willekeurig element van  $W$  als  $d = 1$ . Laat  $v \in V$  het unieke element zijn met  $p(v) = w$  en schrijf  $q = p|_{V \setminus \{v\}} : V \setminus \{v\} \rightarrow W \setminus \{w\}$  voor de  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding. Kies homeomorfismen  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow V$  en  $\phi : W \rightarrow \mathbb{D}$  met  $\psi(0) = v$  en  $\phi(w) = 0$ . Merk op dat  $(\phi \circ p \circ \psi)|_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding is, dus met de bovenstaande correspondentie zien we dat dit op isomorfie na de  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding  $z \mapsto z^d$  is. Het is snel te zien dat dit een  $\mu_d$ -overdekking is, waaruit volgt dat de overdekkingsafbeelding  $q$  ook een  $\mu_d$ -overdekking moet zijn.

Dit geeft ons de volgende propositie.

**Propositie 1.18.** *Zij  $p : V \rightarrow W$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d$ . Zij  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding  $z \mapsto z^d$ . Dan bestaan er homeomorfismen  $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$  en  $\phi : W \rightarrow \mathbb{D}$  zodat het diagram*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{D} \\ \downarrow p & & \downarrow f \\ W & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{D} \end{array}$$

*commutatief is.*

*Bewijs.* Als  $p$  van index 1 is, dan is  $p$  een homeomorfisme waardoor de bewering meteen klopt. Stel daarom dat  $p$  van index  $d > 1$  is en zij  $w \in W$  de kritieke waarde van  $p$ . Kies homeomorfismen  $\phi : W \rightarrow \mathbb{D}$  en  $\psi' : \mathbb{D} \rightarrow V$  met  $\phi(w) = 0$  en  $\psi'(0) = v$ . Dan is de afbeelding  $(\phi \circ p \circ \psi')|_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding. Aangezien de fundamentealgroep  $\pi_1(\mathbb{D} \setminus \{0\}, z)$  voor een willekeurig punt  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  isomorf is met  $\mathbb{Z}$ , zien we hiermee dat er een isomorfisme van overdekkingsafbeeldingen bestaat tussen deze overdekkingsafbeelding en de overdekkingsafbeelding  $f$ . Er zal daardoor een homeomorfisme  $\rho : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$  bestaan zodat voor alle  $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  geldt dat  $f(\rho(z)) = \phi(p(\psi'(z)))$ . Het kiezen van  $\psi_0 := \rho \circ (\psi')^{-1}|_{V \setminus \{v\}} : V \setminus \{v\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$  geeft ons nu een homeomorfisme zodat voor alle  $z \in V \setminus \{v\}$  geldt dat  $\phi(p(z)) = \phi(p(\psi'((\psi')^{-1}(z)))) = f(\rho((\psi')^{-1}(z))) = f(\psi_0(z))$ . Zij  $\psi : V \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding gedefinieerd door  $\psi(z) = \psi_0(z)$  als  $z \neq v$  en  $\psi(v) := 0$ . We willen nu nog laten zien dat  $\psi$  een homeomorfisme is.

Zij  $A \subseteq \mathbb{D}$  open en stel dat  $0 \notin A$ . Aangezien  $\psi|_{V \setminus \{v\}} = \psi_0$  continu is, zien we dat  $\psi^{-1}A \subseteq V$  open is. Stel nu dat  $0 \in A$ . Dan is  $\mathbb{D} \setminus A$  een gesloten deelverzameling met  $0 \notin \mathbb{D} \setminus A$ . Weer wegens de continuïteit zien we dat  $\psi^{-1}(\mathbb{D} \setminus A) = V \setminus \psi^{-1}A$  gesloten is, dus  $\psi^{-1}A$  is open. We concluderen dat  $\psi$  continu is. Merk op dat  $\psi$  bijectief is. Geheel analoog met de opmerking dat  $\psi_0^{-1} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow V \setminus \{v\}$  geldt zien we dan nu ook dat  $\psi^{-1}$  continu is. Dus  $\psi$  is een homeomorfisme.

□



*Voorbeeld 1.19.* Zij  $p : V \rightarrow W$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d$  en zij  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding  $z \mapsto z^d$ . Zijn  $\psi, \phi$  homeomorfismen zoals in de vorige propositie. Merk op dat de open afbeeldingsstelling vanuit de complexe functietheorie ons vertelt dat de afbeelding  $f$  een open afbeelding is. Daarnaast geldt dat homeomorfismen en hun inversen open zijn. Zij  $U \subseteq V$  open, dan geldt nu dat  $p(U) = \phi^{-1}(f(\psi(U)))$  open is, dus  $p$  is een open afbeelding.

Naast de standaard vertakte overdekkingsafbeelding kan het ook voorkomen dat we meerdere verzamelingen  $V_1, \dots, V_n$  homeomorf met  $\mathbb{D}$  afbeelden op  $W \cong \mathbb{D}$ . Dit geeft aanleiding tot de definitie van een triviale vertakte overdekkingsafbeelding.

**Definitie 1.20.** Zijn  $V, W$  topologische ruimten waarvan  $W$  homeomorf is met  $\mathbb{D}$  en zij  $p : V \rightarrow W$  een continue afbeelding. We noemen  $p$  een **triviale vertakte overdekkingsafbeelding** als er een eindige en niet-lege verzameling  $I$  bestaat, een decompositie  $V = \sqcup_{i \in I} V_i$  van de samenhangscomponenten van  $V$  en een functie  $d : I \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  zodat voor alle  $i \in I$  de afbeelding  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow W$  een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $d(i)$  is en zodat de kritieke waarden van de afbeeldingen  $p|_{V_i}$  met  $d(i) > 1$  overeenkomen. Als er een dergelijke kritieke waarde bestaat, dan is dit de **kritieke waarde van  $p$** . We noemen  $\sum_{i \in I} d(i) \in \mathbb{Z}_{>0}$  de **graad van  $p$** .

*Voorbeeld 1.21.* Zij  $p : V \rightarrow W$  een triviale vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Schrijf  $V = \sqcup_{i \in I} V_i$  voor een zekere eindige en niet-lege verzameling  $I$ , waarbij de  $V_i$  de samenhangscomponenten van  $V$  zijn. Merk ten eerste op dat  $p$  een open afbeelding is, aangezien de beperkingen  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow W$  voor iedere  $i \in I$  dat zijn. Stel eerst dat  $p$  een kritieke waarde  $w \in W$  heeft, dan merken we op dat  $p|_{V \setminus p^{-1}\{w\}} : V \setminus p^{-1}\{w\} \rightarrow W \setminus \{w\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding is. Als  $p$  geen kritieke waarde heeft, dan zijn de beperkingen  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow W$  voor iedere  $i \in I$  homeomorfismen. In dit geval zal  $p$  meteen een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding zijn.

De vertakte overdekkingsafbeeldingen die we al gedefinieerd hebben zullen ons helpen om een (normale) vertakte overdekkingsafbeelding tussen oppervlakken te definiëren. Hierbij maken we flink gebruik van de eigenschap dat ieder punt op een oppervlak een omgeving homeomorf met  $\mathbb{D}$  heeft.

**Definitie 1.22.** Zijn  $X, Y$  oppervlakken. We noemen een continue afbeelding  $p : Y \rightarrow X$  een **vertakte overdekkingsafbeelding** als er voor alle  $x \in X$  een open omgeving  $W \subseteq X$  van  $x$  bestaat die homeomorf is met  $\mathbb{D}$  zodanig dat  $p|_{p^{-1}W} : p^{-1}W \rightarrow W$  een triviale vertakte overdekkingsafbeelding is.

*Voorbeeld 1.23.* Zij  $p : Y \rightarrow X$  een vertakte overdekkingsafbeelding tussen oppervlakken  $X$  en  $Y$ . Zij  $x \in X$  en stel dat er twee open omgevingen  $W, W' \subseteq X$  van  $x$  bestaan met de eigenschap zoals in de bovenstaande definitie. Zij  $y \in p^{-1}\{x\}$ . Dan zijn er nu per definitie open deelverzamelingen  $V_i, V'_i$  van  $Y$  zodat  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow W$  en  $p|_{V'_i} : V'_i \rightarrow W'$  standaard vertakte overdekkingsafbeeldingen zijn. Laat  $d$  respectievelijk  $d'$  de indices van deze standaard vertakte overdekkingsafbeeldingen zijn. De beperkingen  $p|_{V_i \setminus \{y\}}$  en  $p|_{V'_i \setminus \{y\}}$  zijn beide overdekkingsafbeeldingen, maar  $V_i \setminus \{y\}$  en  $V'_i \setminus \{y\}$  hebben een niet-lege doorsnede. De graad van een overdekkingsafbeelding is lokaal constant, waaruit nu volgt dat  $d = d'$  moet gelden. Merk verder op dat de graad van de triviale overdekkingsafbeelding  $p|_{p^{-1}W} : p^{-1}W \rightarrow W$  constant is, aangezien  $W$  samenhangend is. Hieruit volgt dat voor ieder tweetal punten  $x, x' \in X$  dat in dezelfde samenhangscomponent zit deze graden overeenkomen. We kunnen dus de graad van  $p$  definiëren in het geval dat  $X$  samenhangend is.

De definitie van een vertakte overdekkingsafbeelding geeft aanleiding tot de definitie van een graad, een kritieke waarde en een vertakkingspunt van deze afbeelding. Deze definities hebben we hierbij apart gezet om het overzicht te behouden.

**Definitie 1.24.** Zijn  $X, Y$  oppervlakken en zij  $p : Y \rightarrow X$  een vertakte overdekkingsafbeelding. Zij  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Veronderstel dat voor alle  $x \in X$  en open omgevingen  $W$  van  $x$  zoals in de definitie van een vertakte overdekkingsafbeelding geldt dat de triviale vertakte overdekkingsafbeelding  $q = p|_{p^{-1}W} : p^{-1}W \rightarrow W$  van graad  $d$  is. Dan definiëren we de **graad van  $p$**  als het getal  $d$ .

*Opmerking 1.25.* Merk op dat een vertakte overdekkingsafbeelding  $p : Y \rightarrow X$  altijd een graad heeft als  $X$  samenhangend is.

**Definitie 1.26.** Zijn  $X, Y$  oppervlakken en zij  $p : Y \rightarrow X$  een vertakte overdekkingsafbeelding. Zij  $x \in X$  en zij  $W$  een open omgeving van  $x$  zoals in de definitie van een vertakte overdekkingsafbeelding. Dan noemen we  $x$  een **kritieke waarde van  $p$**  als  $x$  optreedt als de kritieke waarde voor de triviale vertakte overdekkingsafbeelding  $p|_{p^{-1}W} : p^{-1}W \rightarrow W$ .

**Definitie 1.27.** Zijn  $X, Y$  oppervlakken en zij  $p : Y \rightarrow X$  een vertakte overdekkingsafbeelding. Veronderstel dat  $x \in X$  een kritieke waarde van  $p$  is en zij  $W$  een open omgeving van  $x$  zoals in de definitie van een vertakte overdekkingsafbeelding. Zij  $V$  de unieke samenhangscomponent van  $p^{-1}W$  die  $y$  bevat. We noemen  $p$  een **vertakkingspunt van  $p$**  als de index van de standaard vertakte overdekkingsafbeelding  $p|_V : V \rightarrow W$  groter is dan 1. In het bijzonder definiëren we de **orde** van  $y$  onder  $p$  als deze index.

*Voorbeeld 1.28.* Zij  $p : Y \rightarrow X$  een vertakte overdekkingsafbeelding en veronderstel dat  $X$  samenhangend is. Stel verder ook dat  $x \in X$  een kritieke waarde van  $p$  is. Schrijf  $d$  voor de graad van  $p$  en zij  $W$  een open omgeving van  $x$  in  $X$  zoals in de definitie van een vertakte overdekkingsafbeelding. Merk op dat  $p|_{p^{-1}(W \setminus \{x\})} : p^{-1}(W \setminus \{x\}) \rightarrow W \setminus \{x\}$  een  $d$ -bladige overdekkingsafbeelding is. In het bijzonder geldt er voor ieder punt  $z \in W \setminus \{x\}$  dat  $p^{-1}\{z\}$  uit  $d$  elementen bestaat, dus per definitie zal er geen enkele andere kritieke waarde in  $W$  zitten. We concluderen dat de kritieke waarden discreet liggen in  $X$ .

Zij  $y \in Y$  een vertakkingspunt en stel dat  $p(y) = x$ . Zij  $V$  de unieke samenhangscomponent van  $p^{-1}W$  die  $y$  bevat. Merk op dat iedere  $v \in V \setminus \{y\}$  niet naar het kritieke punt  $x$  wordt gestuurd en daarmee geen vertakkingspunt is. We zien dus ook dat de verzameling vertakkingspunten discreet ligt in  $X$ .

Als  $X, Y$  beide compact zijn zien we in het bijzonder dat er maar eindig veel kritieke waarden en vertakkingspunten zullen zijn.

We kunnen met deze theorie nu beginnen om onze eisen te leggen op een eindige groep  $G$  die op een oppervlak werkt door middel van homeomorfismen. Het idee bij deze definitie is dat we lokaal gezien de structuur zoals in propositie 1.18 hebben.

**Definitie 1.29.** Zij  $G$  een eindige groep en zij  $Y$  een oppervlak waar  $G$  op werkt door middel van homeomorfismen. We noemen de werking van  $G$  op  $Y$  een **orbifold werking** als voor alle  $y \in Y$ :

- (1) Er bestaat een  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ ;
- (2) Er bestaat een groepsisomorfisme  $\lambda_y : G_y \rightarrow \mu_d$ , waarbij  $G_y$  de stabilisator van  $y$  in  $G$  is;
- (3) Er bestaat een open omgeving  $U$  van  $y$  samen met een homeomorfisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ ;

zodat het volgende geldt:

- Voor alle  $g \in G \setminus G_y$  geldt  $gU \cap U = \emptyset$ ;
- $G_y \cdot U = U$ ;
- Zij  $s : \mathbb{D} \times \mu_d \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding  $(w, z) \mapsto w \cdot z$ . Dan is het diagram

$$\begin{array}{ccc} U \times G_y & \xrightarrow{(z,g) \mapsto g(z)} & U \\ \downarrow (\phi, \lambda_y) & & \downarrow \phi \\ \mathbb{D} \times \mu_d & \xrightarrow{s} & \mathbb{D} \end{array}$$

commutatief.

We noemen  $y \in Y$  een **orbifold vertakkingspunt** als  $G_y$  niet-triviaal is.

Ook de ondergroepen van een groep die orbifold werkt op een oppervlak  $Y$  zullen orbifold werken op  $Y$ . Het onderstaande bewijs zal hiervoor simpelweg alle eisen nagaan.

**Gevolg 1.30.** Zij  $G$  een eindige groep en zij  $Y$  een oppervlak voorzien van een orbifold werking  $G \curvearrowright Y$ . Zij  $H \leq G$  een ondergroep. Dan is de geïnduceerde werking van  $H$  op  $Y$  ook een orbifold werking.

*Bewijs.* Zij  $y \in Y$  en schrijf  $G_y$  voor de stabilisatorondergroep van  $y$  in  $G$ . Kies  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ , een groepsisomorfisme  $\lambda_y : G_y \rightarrow \mu_d$  en een open omgeving  $U$  van  $y$  samen met een homeomorfisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  zoals in de definitie van een orbifold werking. Merk op dat de stabilisatorondergroep van  $y$  in  $H$  gelijk is aan  $H_y := H \cap G_y$ . Dit is een ondergroep van de cyclische groep  $G_y$  en daarmee ook cyclisch. Zij  $c$  de orde van  $H_y$ . Dan krijgen we een

geïnduceerd isomorfisme  $\sigma_y = \lambda_y|_{H_y} : H_y \rightarrow \mu_c$ . Immers is  $\mu_c$  de unieke ondergroep van  $\mu_d$  van orde  $c$ . Schrijf  $t : \mathbb{D} \times \mu_c \rightarrow \mathbb{D}$  voor de afbeelding  $(w, z) \mapsto w \cdot z$ . Het diagram

$$\begin{array}{ccc} U \times H_y & \xrightarrow{(z, g) \mapsto g(z)} & U \\ \downarrow (\phi, \sigma_y) & & \downarrow \phi \\ \mathbb{D} \times \mu_c & \xrightarrow{t} & \mathbb{D} \end{array}$$

is nu per constructie commutatief. □

Zij  $Y$  een oppervlak. Een orbifold werking  $G \curvearrowright Y$  van een eindige groep  $G$  geeft ons genoeg structuur op  $G$  zodat  $Y/G$  ook een oppervlak is. Hiernaast zullen we ook nog zien dat de quotiëntafbeelding  $Y \rightarrow Y/G$  een vertakte overdekkingsafbeelding wordt.

**Lemma 1.31.** *Zij  $G$  een eindige groep en zij  $Y$  een oppervlak voorzien van een orbifold werking  $G \curvearrowright Y$ . Dan is de quotiëntafbeelding  $\pi : Y \rightarrow Y/G$  een vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $|G|$ .*

*Bewijs.* Zij  $y \in Y$ . Definieer  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ , een open omgeving  $U$  van  $y$  en een homeomorfisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$  zoals in de definitie van een orbifold werking. Zij  $\pi_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}/\mu_d$  de quotiëntafbeelding en zij  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de afbeelding  $z \mapsto z^d$ . Merk op dat voor  $x, x' \in Y$  geldt dat  $f(x) = f(x')$  dan en slechts dan als  $\pi_0(y) = \pi_0(x')$  geldt. Bekijk het volgende diagram.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \xrightarrow{\pi_0} & \mathbb{D}/\mu_d \\ \downarrow f & \searrow q & \\ \mathbb{D} & & \end{array}$$

Wegens de universele eigenschap van de quotiënttopologie krijgen we een unieke continue afbeelding  $q : \mathbb{D}/\mu_d \rightarrow \mathbb{D}$  die het diagram commutatief maakt. Met de eerdere opmerking zien we dat  $q$  een bijectie is.

Merk verder ook op dat  $\pi_0$  een open afbeelding is. Er geldt namelijk dat  $\mu_d$  op  $\mathbb{D}$  werkt door middel van homeomorfismen, dus voor iedere open deelverzameling  $V \subseteq \mathbb{D}$  geldt dat  $\pi_0^{-1}(\pi_0(V)) = \cup_{\zeta \in \mu_d} \zeta(V)$  open is. Uit de open afbeeldingsstelling van de complexe functietheorie zien we dat  $f$  ook een open afbeelding is. Hieruit volgt dat  $q$  een open afbeelding is, waardoor we zien dat  $q$  ook daadwerkelijk een homeomorfisme is.

Wegens het commutatieve diagram in de definitie van een orbifold werking zien we dat er op homeomorfie na met  $U/G_y$  exact hetzelfde gebeurt, dus  $U/G_y$  is ook homeomorf met  $\mathbb{D}$ . Hiermee heeft  $\pi(y)$  een open omgeving die homeomorf is met  $\mathbb{D}$ .

Zijn  $x, x' \in Y/G$  met  $x \neq x'$  en schrijf  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Laat  $y \in \pi^{-1}\{x\}$  en laat  $y' \in \pi^{-1}\{x'\}$ . Schrijf  $A = Gy \cup Gy'$  voor de vereniging van de banen van  $y$  en  $y'$  onder de werking van  $G$  en merk op dat  $A$  een eindige deelverzameling van  $Y$  is. Kies voor alle  $a \in A$  een open omgeving  $B_a$ , zodat voor ieder paar elementen  $a, a' \in A$  met  $a \neq a'$  geldt dat  $B_a \cap B_{a'} = \emptyset$ . Definieer nu voor  $i = 1, \dots, n$  de open verzamelingen  $U_i := B_{g_i(y)}$  en  $V_i := B_{g_i(y')}$ . Laat  $U = \cap_{i=1}^n g_i^{-1}U_i$  en  $V = \cap_{i=1}^n g_i^{-1}V_i$ . We zien dat voor alle  $g \in G$  geldt dat  $g(U) \cap V = \emptyset$ , dus de open deelverzamelingen  $\pi(U)$  en  $\pi(V)$  zijn disjunct. Dit zijn open omgevingen van  $x$  respectievelijk  $x'$ , waardoor we zien dat  $Y/G$  een Hausdorffruimte is.

Zoals we al zagen is een deelverzameling  $U \subseteq Y/G$  open dan en slechts dan als  $\pi^{-1}U \subseteq Y$  open is, dus het bestaan van een aftelbare basis van  $Y$  geeft ons een aftelbare basis van  $Y/G$ . We concluderen dat  $Y/G$  een oppervlak is.

Zij  $y \in Y$  en zij  $U$  als in de definitie van een orbifold werking. Schrijf  $G_x$  voor iedere  $x \in Y$  voor de stabilisator van  $x$  in  $G$ . Laat  $W := \pi(U) \cong \mathbb{D}$ . We zien dat er  $g_1, \dots, g_n \in G$  bestaan zodat  $\pi^{-1}W = \sqcup_{i=1}^n g_i U$ . Wegens de baan stabilisator stelling zitten er  $|G|/|G_y|$  elementen in de baan van  $y$ , en voor ieder punt  $y'$  uit deze baan geldt dat de stabilisator  $G_{y'}$  evenveel elementen bevat als  $G_y$ . Voor  $i = 1, \dots, n$  is de beperking  $\pi|_{g_i U} : g_i U \rightarrow W$  daarom nu een standaard vertakte overdekkingsafbeelding van index  $|G_y|$ . Ieder punt  $w \in W \setminus \{\pi(y)\}$  heeft  $|G|$  inverse punten onder de afbeelding  $\pi$ , waardoor de triviale vertakte overdekkingsafbeelding  $\pi|_{\pi^{-1}W} : \pi^{-1}W \rightarrow W$  van graad  $|G|$  is. □

### 1.3 Homologiegroepen van torussen

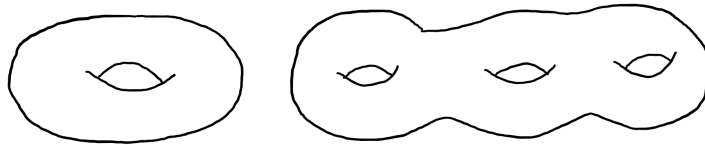
Het doel van deze paragraaf is om de homologiegroepen van een torus met een aantal gaten te berekenen. Deze homologiegroepen geven ons informatie over hoe de ruimtes zijn opgebouwd, waardoor we sommige eigenschappen van een dergelijke ruimte kunnen bepalen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de oriëntatie van een ruimte, waar we in hoofdstuk 2 verder op ingaan.

Als eerst beginnen we met een stelling die ons zal helpen met het bepalen van de homologiegroepen van onze oppervlakken, namelijk de homologiegroepen van het boeket met een aantal cirkels. Met een boeket van  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  cirkels bedoelen we  $n$  verschillende cirkels die we allemaal op 1 punt aan elkaar plakken. Met een boeket van 0 cirkels bedoelen we een eenpuntsruimte. De homologiegroepen van deze ruimtes zijn over het algemeen in de literatuur vrij bekend, dus we zullen daar geen bewijs voor geven.

**Stelling 1.32.** *Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  en bekijk het boeket  $X_n$  van  $n$  cirkels. Dan geldt:*

$$H_p(X_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{als } p = 0; \\ \mathbb{Z}^n & \text{als } p = 1; \\ 0 & \text{als } p > 1. \end{cases}$$

Met deze stelling is het nu wel mogelijk om de onderstaande stelling te bewijzen. In deze stelling zullen we het hebben over een zogenoemde torus met een aantal gaten erin. Met een torus met 0 gaten bedoelen we een boloppervlak, onder andere bekend als de  $S^2$ . Met een torus met 1 gat bedoelen we een oppervlak dat lijkt op de buitenkant van een donut. Dit oppervlak staat, na het kiezen van een geschikt homeomorfisme, ook wel bekend als  $S^1 \times S^1$  of  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . De overige torussen met  $g \in \mathbb{Z}_{>0}$  gaten zijn oppervlakken die op soortgelijke manier op donuts lijken, maar meerdere gaten hebben. Zie figuur 1 voor een voorbeeld van een torus met 1 gat en een torus met 3 gaten. In deze scriptie zullen we deze ruimtes beschouwen als deelruimte van  $\mathbb{R}^3$ , zodat we ze voor ons kunnen zien.



Figuur 1: Een torus met 1 gat en een torus met 3 gaten.

**Stelling 1.33.** *Zij  $S$  een torus met  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gaten. Dan hebben we:*

$$H_p(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{als } p = 0; \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{als } p = 1; \\ \mathbb{Z} & \text{als } p = 2; \\ 0 & \text{als } p > 2. \end{cases}$$

*Bewijs.* Merk op dat  $S$  wegsamenhangend is. Het isomorfisme  $H_0(S) \cong \mathbb{Z}$  volgt hierdoor uit propositie 1.10. De overige homologiegroepen zullen we berekenen met behulp van de Mayer-Vietoris rij. Hiervoor zullen we het oppervlak  $S$  voor ons moeten zien. Stel dat we het oppervlak met  $g$  gaten zoals in figuur 1 op een tafel leggen. Neem nu een vlak dat evenwijdig met de bovenkant van de tafel is, en zodat de doorsnede van dit vlak met  $S$  bestaat uit  $g + 1$  disjuncte vervormde cirkels. Snijdt het oppervlak doormidden door alle punten van dit vlak te verwijderen uit  $S$ . Zie ook figuur 2 voor het idee als  $g = 3$ .

We kiezen nu een samenhangende open deelverzameling  $U$  die de onderste helft in zijn geheel bevat. We zorgen er ook voor dat  $U$  alle punten van  $S$  die ook op het vlak liggen bevat, maar nog wel zodat  $U$  op natuurlijke wijze homeomorf is met de onderste helft. Zie ook figuur 3. Verder definiëren we de open deelverzameling  $V$  analoog met de bovenste helft.

We kunnen  $U$  en  $V$  van bovenaf bekijken, zie ook figuur 4. Op deze manier zien we dat  $U$  en  $V$  homeomorf zijn met een open bol in  $\mathbb{R}^2$  waar we  $g$  open schijven uit hebben gehaald, dus  $U$  en  $V$  zijn ook homotopie-equivalent met een boeket van  $g$  cirkels. Verder merken we op dat de doorsnede  $U \cap V$  bestaat uit  $g + 1$  stroken, waardoor  $U \cap V$  homotopie-equivalent is met de disjuncte vereniging van  $g + 1$  cirkels. Met behulp van proposities 1.9, 1.10 en stelling 1.32 krijgen we de volgende homologiegroepen.

$$H_p(U) \cong H_p(V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{als } p = 0; \\ \mathbb{Z}^g & \text{als } p = 1; \text{ en } H_p(U \cap V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{g+1} & \text{als } p \in \{0, 1\}; \\ 0 & \text{als } p > 1. \end{cases} \\ 0 & \text{als } p > 1; \end{cases}$$

Wegens stelling 1.12 vinden we voor alle  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  de exacte rij:

$$H_p(U \cap V) \longrightarrow H_p(U) \oplus H_p(V) \longrightarrow H_p(S) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V) .$$

Voor  $p \geq 3$  zit  $H_p(S)$  tussen triviale groepen, waaruit  $H_p(S) \cong 0$  volgt.

Wegens de homotopie-equivalentie van  $U$  met een boeket van  $g$  cirkels, hebben we een basis van  $H_1(U)$  die bestaat uit  $g$  elementen. Namelijk  $g$  lussen die ieder om een ander gat heen gaan. Deze lussen zijn allemaal weghomotoop met een lus die in de doorsnede bevat zit, we kunnen de lussen namelijk naar boven toe trekken. Dus de natuurlijke afbeelding  $H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U)$  geïnduceerd door de inbedding is surjectief. Analoog hebben we dat de afbeelding  $H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$  surjectief is.

Zij  $x \in U \cap V$  en definieer de 0-simplex  $c : \Delta_0 \rightarrow U \cap V$  door  $1 \mapsto x$ . Dan is de klasse  $[c] \in H_1(U)$  wegens propositie 1.10 een voortbrenger van  $H_1(U)$ . Aangezien  $x \in U \cap V$  volgt er dat de natuurlijke afbeelding  $H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U)$  surjectief is. Weer analoog zien we dat  $H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(V)$  ook surjectief is.

Zijn  $i : U \cap V \rightarrow U$  en  $j : U \cap V \rightarrow V$  de inclusieafbeeldingen. De deelruimtes  $U$  en  $V$  van  $S$  zijn op natuurlijke wijze homeomorf, dus er bestaat voor alle  $p \geq 0$  een isomorfisme  $\phi : H_p(U) \rightarrow H_p(V)$  zodat  $\phi \circ i_* = j_*$ . Laat  $i_* \oplus j_* : H_p(U \cap V) \rightarrow H_p(U) \oplus H_p(V)$  de afbeelding zijn gedefinieerd door  $(i_* \oplus j_*)(\alpha) = (i_*\alpha, j_*\alpha)$ . Dan geldt er dus dat  $\text{Im}(i_* \oplus j_*) \cong \text{Im}(i_*) \cong \text{Im}(j_*)$ .

Voor  $p = 2$  krijgen we met de exacte rij die we hadden de volgende exacte rij:

$$0 \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H_2(S) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z}^{g+1} \xrightarrow{i_* \oplus j_*} \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g .$$

Hierbij is  $\partial_* : H_2(S) \rightarrow H_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}^{g+1}$  het homomorfisme uit stelling 1.12. Wegens de exactheid van de rij is de kern van  $\partial_*$  triviaal. Verder zagen we dat  $\text{Im}(i_* \oplus j_*) \cong \mathbb{Z}^g$ , dus wegens de isomorfie hebben we een isomorfisme  $\mathbb{Z}^{g+1} / \ker(i_* \oplus j_*) \cong \mathbb{Z}^g$ . Als ondergroep van  $\mathbb{Z}^{g+1}$  is  $\ker(i_* \oplus j_*)$  ook een eindig voortgebrachte vrije en abelse groep. Wegens het isomorfisme moet nu  $\ker(i_* \oplus j_*) \cong \mathbb{Z}$  gelden, dus  $\text{Im}(\partial_*) = \ker(i_* \oplus j_*) \cong \mathbb{Z}$ . We reduceren ons rijtje hiermee tot het volgende korte exacte rijtje:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(S) \xrightarrow{\partial_*} \text{Im}(\partial_*) \longrightarrow 0 .$$

We concluderen dus dat  $H_2(S) \cong \text{Im}(\partial_*) \cong \mathbb{Z}$ .

Voor  $p = 1$  krijgen we met de exacte rij die we hadden de volgende exacte rij:

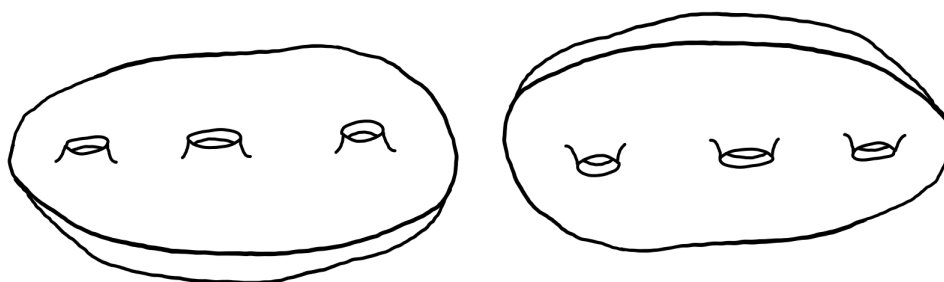
$$\mathbb{Z}^{g+1} \xrightarrow{(i_* \oplus j_*)_1} \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g \xrightarrow{k_* - l_*} H_1(S) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z}^{g+1} \xrightarrow{(i_* \oplus j_*)_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} .$$

Hierbij is  $k_* - l_* : H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(S)$  de afbeelding  $(\alpha, \beta) \mapsto k_*\alpha - l_*\beta$  geïnduceerd door de inclusieafbeeldingen  $k : U \rightarrow S$  en  $l : V \rightarrow S$ . Verder staat er bij de geïnduceerde afbeeldingen  $i_* \oplus j_*$  nog een 1 of 2 om onderscheid te maken tussen de afbeeldingen. We zagen dat  $\text{Im}((i_* \oplus j_*)_1) = \ker(k_* - l_*)$  op isomorfie na uit de elementen  $(\alpha, \alpha)$  bestaat voor  $\alpha \in H_1(U)$ , dus  $\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g / \ker(k_* - l_*) \cong \mathbb{Z}^g$ . Met behulp van de isomorfie hebben we een geïnduceerd homomorfisme  $\psi : \mathbb{Z}^g \rightarrow H_1(S)$ , waarmee we ons diagram kunnen vereenvoudigen tot het volgende korte exacte rijtje:

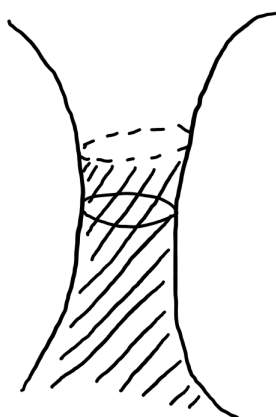
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^g \xrightarrow{\psi} H_1(S) \xrightarrow{\partial_*} \text{Im}(\partial_*) \longrightarrow 0 .$$

Kies voortbrengers  $b_1, \dots, b_g \in \text{Im}(\partial_*) \cong \mathbb{Z}^g$ . Het homomorfisme  $\partial_* : H_1(S) \rightarrow \text{Im}(\partial_*)$  is surjectief, dus er bestaan elementen  $e_1, \dots, e_g \in H_1(S)$  met  $\partial_*(e_i) = b_i$  voor  $i = 1, \dots, g$ . Het homomorfisme  $\phi : \text{Im}(\partial_*) \rightarrow H_1(S)$  gegeven door de voortbrenger  $b_i$  te sturen naar  $e_i$  geeft ons nu een sectie van de afbeelding  $\partial_*$ . We zien daarmee dat dit rijtje splitst, dus  $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g \cong \mathbb{Z}^{2g}$ .

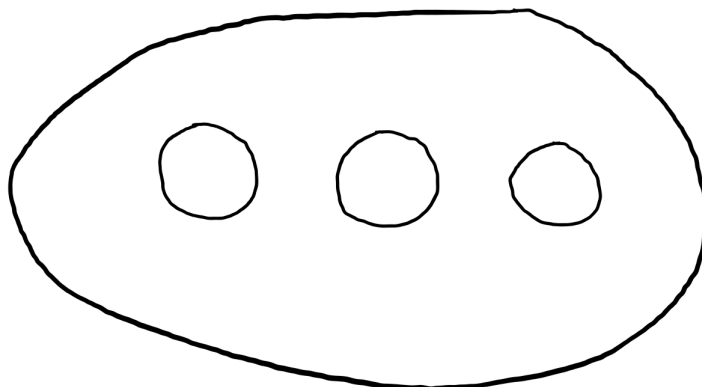
□



Figuur 2: De helften verkregen door een torus met 3 gaten op onze manier doormidden te snijden.



Figuur 3: De verzameling  $U$  dichtbij een gat. Op dit deel zal  $U$  ieder element tot de stippellijn bevatten. De zwarte ellips is de doorsnede van het vlak met  $S$ .



Figuur 4: De verzameling  $U$  of  $V$  van boven bekeken in het geval dat  $g = 3$ .

## 2 Eigenschappen van variëteiten

In dit hoofdstuk zullen we op een erg algebraïsche manier definiëren wat een oriëntatie van een topologische  $n$ -variëteit is. In tegenstelling tot in de differentiaalmeetkunde zullen we deze definitie geven door alleen maar gebruik te maken van de topologische eigenschappen van een dergelijke ruimte. Op deze manier zal het wellicht niet meteen intuïtief duidelijk zijn wat een oriëntatie is, maar zodra dit wel duidelijk is zal de definitie ontzettend fijn zijn om mee te werken. Alle definities en stellingen over oriëntaties komen uit het boek van Hatcher, zie [3], en zijn allemaal te vinden tussen pagina 233 en pagina 238.

Verder zullen we het ook hebben over de classificatiestelling voor compacte, samenhangende en oriënteerbare oppervlakken. Dit is een ontzettend belangrijke stelling die ons op homeomorfie na precies vertelt welke oppervlakken er zijn. Een mooi gevolg is dat we een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak kunnen classificeren aan de hand van haar eerste homologiegroep.

### 2.1 Oriëntatie van topologische variëteiten

Voordat we daadwerkelijk een oriëntatie kunnen definiëren zullen we eerst moeten bepalen welke eigenschappen we van een oriëntatie verwachten. Hierbij is het handig om te kijken naar een standaardruimte  $\mathbb{R}^n$  voor een  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ , zodat we alles een beetje voor ons kunnen zien. Wat een oriëntatie op deze ruimte ook mag voorstellen, intuïtief lijkt het fijn dat een oriëntatie behouden blijft onder rotaties van de ruimte, en omgedraaid wordt door reflecties. Als een rechtshandige astronaut door de ruimte zweeft, dan zal iedere rotatie van de ruimte niets veranderen. Als we de persoon echter spiegelen zodat de linkerhand naar de rechterhand afgebeeld wordt en andersom, dan is onze onfortuinlijke astronaut opeens linkshandig.

Om een oriëntatie te definiëren blijft het belangrijk om eerst naar een enkel punt in onze ruimte te kijken. Hierbij kunnen we mooi gebruik maken van de homologiegroepen. Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en laat  $x \in \mathbb{R}^n$ . De lokale homologie van  $\mathbb{R}^n$  bij  $x$  ziet er dan als volgt uit.

$$H_n(\mathbb{R}^n | x) = H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

Hierbij volgt het isomorfisme  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  omdat  $\mathbb{R}^n$  samentrekbaar is, en het volgende isomorfisme volgt uit het feit dat  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$  homotopie-equivalent is met de  $S^{n-1}$ . Op deze manier zullen we een definitie geven voor een lokale oriëntatie op  $\mathbb{R}^n$  bij het punt  $x$ .

**Definitie 2.1.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $x \in \mathbb{R}^n$ . We definiëren een lokale oriëntatie van  $\mathbb{R}^n$  bij een punt  $x$  als een voortbrenger van de groep  $H_n(\mathbb{R}^n | x) \cong \mathbb{Z}$ .

Deze definitie heeft meteen een interessant gevolg. Een oriëntatie van  $\mathbb{R}^n$  bij een punt  $x$  geeft ons namelijk een keuze voor een oriëntatie op  $\mathbb{R}^n$  bij ieder willekeurig ander punt  $y \in \mathbb{R}^n$  via de kanonieke isomorfismen  $H_n(\mathbb{R}^n | x) \cong H_n(\mathbb{R}^n | B) \cong H_n(\mathbb{R}^n | y)$ , waarbij  $B$  een willekeurige open bal is die zowel  $x$  als  $y$  bevat. Dit betekent dat een lokale oriëntatie van een willekeurig punt ons meteen een natuurlijke oriëntatie geeft voor ieder ander punt.

Iets anders dat heel mooi is aan deze definitie is dat we dit kunnen voortzetten naar een  $n$ -variëteit  $M$ . Immers is een dergelijke ruimte lokaal gezien hetzelfde als  $\mathbb{R}^n$ . Wegens de uitsnijdingsstelling, zie stelling 1.8, hebben we namelijk een isomorfisme  $H_n(M | x) \cong H_n(\mathbb{R}^n | 0) \cong \mathbb{Z}$  voor ieder punt  $x \in M$ .

**Definitie 2.2** (Hatcher, [3], p234). Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een  $n$ -variëteit. We definiëren een **lokale oriëntatie** van  $M$  bij een punt  $x \in M$  als een keuze  $\mu_x$  van voortbrenger voor de groep  $H_n(M | x)$ .

Laten we nu onze kennis van lokale oriëntaties proberen voort te zetten om een oriëntatie van onze hele ruimte te definiëren. Hiervoor zullen we de volgende constructie uitvoeren. Definiër de verzameling:

$$\widetilde{M} := \{\mu_x | x \in M \text{ en } \mu_x \text{ is een lokale oriëntatie van } M \text{ bij het punt } x\}.$$

Hiermee kunnen we een verband leggen met het oriënteerbaar zijn van een  $n$ -variëteit met behulp van overdekkingsafbeeldingen. Bekijk namelijk de afbeelding  $\rho : \widetilde{M} \rightarrow M$  gedefinieerd door  $\mu_x \mapsto x$ . Dit geeft een surjectieve afbeelding, maar om hier een overdekkingsafbeelding van te maken hebben we ook een topologie op  $\widetilde{M}$  nodig. Deze construeren we als volgt.

Zij  $B \subset \mathbb{R}^n$  een begrensde open bal. Beschouw  $B$  als een open omgeving voor een willekeurig punt op  $M$ , en kies een voortbrenger  $\mu_B \in H_n(M | B)$ . Zij  $U(\mu_B) \subset \widetilde{M}$  de verzameling van alle  $\mu_x \in \widetilde{M}$  zodat  $x \in B$  en  $\mu_x$  in het beeld zit van  $\mu_B$  onder het isomorfisme  $H_n(M | B) \rightarrow H_n(M | x)$  geïnduceerd door de uitsnijdingsstelling. Definiër de topologie van  $\widetilde{M}$  als de topologie voortgebracht door de verzamelingen  $U(\mu_B)$  voor alle mogelijke open ballen  $B$ .

De afbeelding  $\rho$  wordt hiermee ook een overdekkingsafbeelding. Immers zijn er wegens het isomorfisme  $H_n(M | B) \cong \mathbb{Z}$  precies 2 keuzes voor een voortbrenger van  $H_n(M | B)$ . Schrijven we  $\mu_B$  en  $-\mu_B$  voor deze voortbrengers, dan krijgen we twee disjuncte open deelverzamelingen  $U(\mu_B)$  en  $U(-\mu_B)$  die onder  $\rho$  homeomorf zijn met  $B$ . Aangezien we  $M$  kunnen overdekken met de open deelverzamelingen  $B$ , concluderen we dat deze afbeelding daadwerkelijk een 2-bladige overdekkingsafbeelding definieert. Verder merken we hierbij op dat het homeomorf zijn van de ruimtes  $U(\mu_B), U(-\mu_B)$  en  $B$  impliceert dat  $\widetilde{M}$  ook een  $n$ -variëteit is.

**Definitie 2.3.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een  $n$ -variëteit. We definiëren de **oriëntatievariëteit** van  $M$  als de  $n$ -variëteit  $\widetilde{M}$  verkregen door de bovenstaande constructie.

Met deze definitie kunnen we ook een globale oriëntatie definiëren. We weten namelijk dat de oriëntatievariëteit een 2-bladige overdekkingsafbeelding is. Dat betekent dat deze variëteit uit één of twee samenhangscomponenten moet bestaan.

Stel dat onze oriëntatievariëteit samenhangend is, dan is  $\widetilde{M}$  ook meteen wegsamenhangend. In dit geval is het dus mogelijk om van ieder element  $\mu_x \in \widetilde{M}$  een pad te maken naar ieder ander element, dus in het bijzonder ook naar  $-\mu_x$ . Intuïtief zien we dat we onze oriëntatie nu hebben omgedraaid. Precies wat we willen vermijden als we het hebben over een oriënteerbare ruimte.

Als onze oriëntatievariëteit uit twee samenhangscomponenten bestaat, dan is het op soortgelijke wijze onmogelijk om een pad te maken tussen een voortbrenger  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ , gezien als element van  $\widetilde{M}$ , en zijn inverse.

We kunnen een oriëntatie hiermee definiëren aan de hand van het aantal samenhangscomponenten, maar we kunnen deze informatie ook gebruiken voor een andere prettige definitie. Merk namelijk op dat  $\widetilde{M}$  uit twee samenhangscomponenten bestaat dan en slechts dan als de overdekkingsafbeelding  $\widetilde{M} \rightarrow M$  een sectie toelaat.

Dit zien we als volgt. Als  $\widetilde{M}$  samenhangend is, dan impliceert het bestaan van een sectie dat de overdekkingsafbeelding een homeomorfisme moet zijn. Aangezien dit een 2-bladige overdekkingsafbeelding is geeft dit echter natuurlijk tegenspraak. Als  $\widetilde{M}$  uit twee samenhangscomponenten bestaat, dan kunnen we een sectie definiëren door één van de samenhangscomponenten uit te kiezen en  $x \in M$  te sturen naar zijn bijbehorende lokale oriëntatie op deze samenhangscomponent. We krijgen hiermee de volgende definitie voor een oriëntatie.

**Definitie 2.4.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ , zij  $M$  een samenhangende  $n$ -variëteit en zij  $\widetilde{M}$  de oriëntatievariëteit van  $M$ . We definiëren een **oriëntatie** van  $M$  als een sectie van de kanonieke overdekkingsafbeelding  $\widetilde{M} \rightarrow M$ . Als er een oriëntatie van  $M$  bestaat, dan noemen we  $M$  **oriënteerbaar**.

Als  $M$  niet samenhangend is, dan noemen we  $M$  oriënteerbaar dan en slechts dan als alle samenhangscomponenten van  $M$  oriënteerbaar zijn. We definiëren een oriëntatie op  $M$  in dit geval als een collectie van oriëntaties op de samenhangscomponenten.

We zien ook direct dat oriëntaties niet uniek zijn. Als we een oriënteerbare  $n$ -variëteit  $M$  hebben met  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  samenhangscomponenten, dan hebben we ook  $2^k$  mogelijke oriëntaties. Voor iedere samenhangscomponent van  $M$  hebben we voor de sectie namelijk de keuze uit twee samenhangscomponenten op de oriëntatievariëteit.

Met de vorige discussie over de samenhangscomponenten krijgen we ook direct de volgende propositie.

**Propositie 2.5.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een  $n$ -variëteit. Dan is  $M$  oriënteerbaar dan en slechts dan als de oriëntatievariëteit van  $M$  uit twee samenhangscomponenten bestaat.  $\square$



*Voorbeeld 2.6.* We hadden eerder al een oriëntatie gedefinieerd op  $\mathbb{R}^n$ , maar is deze ruimte dan ook wel oriënteerbaar met onze definitie? Bekijk hiervoor de oriëntatievariëteit  $\widetilde{M}$  van  $\mathbb{R}^n$  en stel dat deze ruimte uit één samenhangscomponent bestaat. Zij  $f : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gedefinieerd door  $\mu_x \mapsto x$  de bijbehorende overdekkingsafbeelding. We zien meteen dat  $\widetilde{M}$  een Hausdorffruimte is, aangezien  $\mathbb{R}^n$  dat is. Wegens het feit dat  $\mathbb{R}^n$  lokaal wegsamenhangend is volgt er dat  $\widetilde{M}$  dat ook is, waardoor uit de samenhang ook volgt dat  $\widetilde{M}$  wegsamenhangend is. Merk hiernaast ook op dat  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  even werkt op  $\widetilde{M}$ . Voor  $\mu_x \in \widetilde{M}$  definiëren we namelijk  $0 \cdot \mu_x := \mu_x$  en  $1 \cdot \mu_x := -\mu_x$  (waarbij  $-\mu_x \in \widetilde{M}$  de andere voortbrenger van  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  was). We zien hiermee dat  $f$  een  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -overdekking wordt. Voordat we verder gaan, brengen we de monodromiewerking in herinnering. Laat  $p : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  een gepunte  $G$ -overdekking zijn voor een zekere groep  $G$ . De monodromiewerking is de natuurlijke werking van de groep  $G$  op de verzameling  $p^{-1}\{x\}$ . Schrijf  $\star$  voor de natuurlijke rechtswerking van  $\pi_1(X, x)$  op  $p^{-1}\{x\}$ . Dan bestaat er voor  $\alpha \in \pi_1(X, x)$  nu een unieke  $g \in G$  met  $g(y) = y \star \alpha$ . Op deze manier krijgen we een geïnduceerde afbeelding  $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow G$  gedefinieerd door  $\alpha \mapsto g$ , de monodromierepresentatie. Zie pagina 287 van het boek [5] voor meer details. In ons geval is de monodromierepresentatie  $\rho : \pi_1(\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  met de bovenstaande voorwaarden surjectief. Echter is de fundamentealgroep van  $\mathbb{R}^n$  natuurlijk triviaal! We krijgen hier een tegenspraak waaruit moet volgen dat  $\widetilde{M}$  uit twee samenhangscomponenten moet bestaan.

Merk op dat we in het bovenstaande voorbeeld alleen gebruik hebben gemaakt van het feit dat  $\mathbb{R}^n$  een  $n$ -variëteit is en dat de fundamentealgroep  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x)$  voor een willekeurig punt  $x \in \mathbb{R}^n$  triviaal is. Dit geeft hiermee aanleiding tot de volgende stelling en het gevolg ervan.

**Stelling 2.7.** *Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een enkelvoudig samenhangende  $n$ -variëteit. Dan is  $M$  oriënteerbaar.*  $\square$

**Gevolg 2.8.** *Zij  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Dan zijn de  $n$ -dimensionale eenheidsbollen  $S^n$  oriënteerbaar.*  $\square$

Met de theorie die we tot dit punt hebben opgebouwd kunnen we van al redelijk veel  $n$ -variëteiten bepalen of ze oriënteerbaar zijn of niet. Onze overdekkingsruimte  $\widetilde{M} \rightarrow M$  heeft echter ook zijn beperkingen. Het is namelijk niet heel makkelijk om een sectie van de overdekkingsafbeelding te vinden, of om te bewijzen dat een dergelijke sectie niet bestaat. Ter ondersteuning hiervan zijn er twee resultaten uit het boek van Hatcher die ons genoeg informatie geven om aan de hand van de  $n$ -de of  $(n-1)$ -de homologiegroep te bepalen of een samenhangende en compacte  $n$ -variëteit oriënteerbaar is. Het bewijs van deze resultaten laten we achterwege, maar zal te lezen zijn op pagina's 235 tot en met 238 van het boek van Hatcher, zie [3].

**Stelling 2.9** (Hatcher, [3], p236). *Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ , zij  $M$  een compacte en samenhangende  $n$ -variëteit. Dan geldt er dat:*

- (i) *Als  $M$  oriënteerbaar is, dan is voor alle  $x \in M$  de afbeelding  $H_n(M) \rightarrow H_n(M \mid x) \cong \mathbb{Z}$  een isomorfisme.*
- (ii) *Als  $M$  niet oriënteerbaar is, dan is  $H_n(M)$  triviaal.*
- (iii) *Voor alle gehele getallen  $i > n$  is de groep  $H_i(M)$  triviaal.*

**Gevolg 2.10** (Hatcher, [3], p238). *Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een samenhangende en compacte  $n$ -variëteit. Dan is de groep  $H_{n-1}(M)$  torsie-vrij dan en slechts dan als  $M$  oriënteerbaar is.*

Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een  $n$ -variëteit. Dan kunnen we met de bovenstaande stellingen met relatief weinig informatie precies vertellen wanneer  $M$  oriënteerbaar is. We hoeven namelijk alleen te controleren of  $H_n(M)$  een niet-triviaal element bevat of dat  $H_{n-1}(M)$  torsie-vrij is.

Naast de oriëntaties van  $n$ -variëteiten hadden we het in het begin van dit hoofdstuk ook over symmetriën. We kunnen deze symmetriën zien als homeomorfismen van onze ruimte, waardoor we het probleem verschuiven naar de vraag of ons homeomorfisme de oriëntatie van de ruimte behoudt. Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een  $n$ -variëteit. Dan hebben we in stelling 2.9 gezien dat  $M$  oriënteerbaar is dan en slechts dan als  $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ . Echter geven homeomorfismen natuurlijk al een geïnduceerde afbeelding op deze groep. Deze afbeelding is een homomorfisme van  $\mathbb{Z}$  naar  $\mathbb{Z}$ , dus de afbeelding werkt als vermenigvuldiging met een geheel getal. Dit gehele getal geeft ons aanleiding om een belangrijk concept te definiëren, de graad van een afbeelding.

**Definitie 2.11.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ . Zij  $M$  een samenhangende, compacte en oriënteerbare  $n$ -variëteit en zij  $f : M \rightarrow M$  een continue afbeelding. We definiëren **de graad van  $f$** , geschreven als  $\deg f$ , als de vermenigvuldigingsfactor van de geïnduceerde afbeelding  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(M)$ .

Als  $f, g : M \rightarrow M$  continu zijn, dan weten we vanwege de functorialiteit van de geïnduceerde afbeeldingen al dat  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ . Hier volgt meteen uit dat  $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$ . In het bijzonder moet er nu gelden dat  $\deg \text{id}_M = 1$ . Als  $f$  nu ook een homeomorfisme is, dan geldt er dat  $\deg f \cdot \deg f^{-1} = \deg \text{id}_M = 1$ .

Aangezien  $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$  vinden we dat  $\deg f \in \{\pm 1\}$ . Aan de hand van deze opmerkingen zullen we het begrip oriëntatie-bewarende afbeelding definiëren.

**Definitie 2.12.** Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zij  $M$  een samenhangende en oriënteerbare  $n$ -variëteit. Zij  $f : M \rightarrow M$  een continue afbeelding. We noemen  $f$  **oriëntatie-bewarend** als  $\deg f > 0$ . In het bijzonder is een homeomorfisme oriëntatie-bewarend dan en slechts dan als de geïnduceerde afbeelding  $f_* : H_n(M) \rightarrow H_n(M)$  de identiteit is.

We zien hier ook mee dat we over het algemeen aan onze verwachtingen voor oriëntatie-bewarende homeomorfismen voldoen. Als voorbeeld kunnen we ons beperken tot de eenheidsbollen  $S^n$ . In dit geval geldt er dat rotaties van de bol inderdaad oriëntatie-bewarend zijn, aangezien ze homotoop zijn met de identiteit. Met behulp van propositie 13.27 uit [5] zien we ook dat reflecties van de  $S^2$  door een vlak van de omliggende ruimte  $\mathbb{R}^3$  door de oorsprong van graad  $-1$  zijn, waaruit volgt dat deze afbeeldingen niet oriëntatie-bewarend zijn.

Met de introductie van oriëntatie kunnen we propositie 1.31 aanpassen zodat we dit begrip meenemen. Hiervoor zullen we nog twee termen duidelijk maken.

*Terminologie.* Zij  $X$  een topologische ruimte en zij  $\text{Homeo}(X)$  de groep van zelf-homeomorfismen  $X \rightarrow X$  met als groepsbewerking de samenstelling van afbeeldingen. We zullen een zelf-homeomorfisme  $f \in \text{Homeo}(X)$  ook een automorfisme van  $X$  noemen. In het bijzonder noemen we  $f$  periodiek als  $f$  van eindige orde is in deze groep.

*Terminologie.* Zij  $X$  een topologische ruimte en zij  $f : X \rightarrow X$  een homeomorfisme. Voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  zeggen we dat  $f$  triviaal werkt op  $H_n(X)$  als de geïnduceerde afbeelding  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$  de identiteit is. Analoog zeggen we dat  $f$  triviaal werkt op een cohomologiegroep als de geïnduceerde afbeelding de identiteit is.

Met de bovenstaande theorie krijgen we het volgende gevolg.

**Gevolg 2.13.** *Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak. Zij  $G$  een eindige groep bestaande uit oriëntatie-bewarende automorfismen op  $S$  waarvan de werking een orbifold werking is. Dan is  $S/G$  ook een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak.*

*Bewijs.* Schrijf  $\pi : S \rightarrow S/G$  voor de quotiëntafbeelding. Deze afbeelding is wegens propositie 1.31 een vertakte overdekkingsafbeelding. Uit de continuïteit van  $\pi$  volgt dat  $S/G$  ook compact en samenhangend is. Wegens propositie 1.14 bestaat er een isomorfisme  $h : H^2(S; \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(S); \mathbb{Q})$ . Laat  $g \in G$  en  $\phi \in H^2(S; \mathbb{Q})$ , dan geldt er nu dat  $g^*\phi = h^{-1}(h(\phi) \circ g_*)$ . We weten dat  $g_* = \text{id}_{H_2(S)}$ , dus  $h^{-1}(h(\phi) \circ g_*) = h^{-1}(h(\phi)) = \phi$ . We zien dus dat  $g$  ook triviaal werkt op  $H^2(S; \mathbb{Q})$ .

Kies nu een triangulatie van  $S/G$  die alle kritieke punten van  $\pi$  als hoekpunten bevat. Het liften van deze triangulatie met behulp van  $\pi$  geeft een triangulatie van  $S$  zodat iedere  $g \in G$  een simpliciale afbeelding van deze triangulatie naar zichzelf is. We kunnen nu hierdoor propositie 1.13 toepassen, waardoor we zien dat  $H^2(S; \mathbb{Q}) \cong H^2(S/G; \mathbb{Q})$ . Vanwege stelling 2.9 geldt  $H_2(S) \cong \mathbb{Z}$ , waardoor uit propositie 1.14 volgt dat  $H^2(S; \mathbb{Q})$  dimensie 1 heeft. Hierdoor heeft  $H^2(S/G; \mathbb{Q})$  ook dimensie 1. Uit stelling 2.9 volgt echter dat  $H_2(S/G)$  triviaal of isomorf met  $\mathbb{Z}$  moet zijn, dus  $H_2(S/G) \cong \mathbb{Z}$ . We zien dat  $S/G$  oriënteerbaar is. □

## 2.2 De Euler-karakteristiek en de classificatie van oppervlakken

In deze paragraaf zullen we het als eerst hebben over de Euler-karakteristiek. Dit is een topologische invariant van eindige simpliciaal complexen die een grote rol zal spelen bij de Riemann-Hurwitz formule in hoofdstuk 3. We zullen dit als volgt definiëren.

**Definitie 2.14.** Zij  $X$  een eindig simpliciaal complex. Schrijf  $h_n$  voor het aantal singuliere  $n$ -simplices in de triangulatie van  $X$ . Dan definiëren we de **Euler-karakteristiek**  $\chi(X)$  van  $X$  als de waarde

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n h_n \in \mathbb{Z}.$$

We merken hierbij op dat de triangulatie eindig is, waardoor de som eindig is en daarmee ook altijd bestaat. Als we de onderliggende topologische ruimte bekijken, dan hadden we hiervoor echter ook een andere triangulatie kunnen kiezen. Het bijzondere aan de bovenstaande definitie is dat de Euler-karakteristiek juist niet af zal hangen van de gekozen triangulatie. We zien dit met behulp van de volgende stelling.

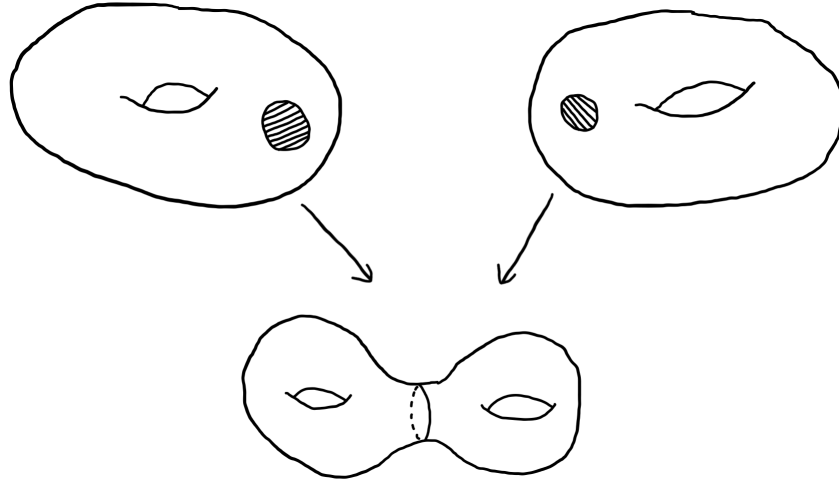
**Stelling 2.15** (Hatcher, [3], p146). *Zij  $X$  een eindig trianguleerbare topologische ruimte. Dan geldt:*

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \text{rank}(H_n(X)).$$

Merk op dat er voor ieder oppervlak een triangulatie bestaat wegens de triangulatiestelling voor oppervlakken, zie stelling 1.7. Vanwege de compactheid hebben we dan ook een eindige triangulatie, we zien dat ieder compact oppervlak een Euler-karakteristiek heeft.

De Euler-karakteristiek zal ons helpen om een compact en samenhangend oppervlak op homeomorfie na te classificeren. Om deze classificatie te formuleren zullen we gebruik maken van de verbonden som. We brengen het idee van de verbonden som in herinnering. Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  en zijn  $N, M$   $n$ -variëteiten. Kies open deelverzamelingen  $U \subset N$  en  $V \subset M$  zodat  $U$  en  $V$  beide homeomorf zijn met een gesloten eenheidsbol  $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ . Dan plakken we  $N$  en  $M$  aan elkaar door  $U$  met  $V$  te identificeren door middel van een homeomorfisme. Hierna verwijderen we het inwendige van  $U$  (of  $V$ ) om weer een  $n$ -variëteit te krijgen. We noemen dit de verbonden som van  $N$  en  $M$  en schrijven hiervoor  $N \# M$ . Voor meer details over de constructie van de verbonden som kan men kijken naar pagina 164 uit het boek van Lee [5].

Als voorbeeld kunnen we de verbonden som nemen van twee kopieën van een torus met één gat, zie voorbeeld 5.



Figuur 5: De verbonden som van twee kopieën van een torus met één gat geeft ons een torus met twee gaten.

We krijgen eerst de volgende stelling die ons de eerste homologiegroepen van dergelijke ruimtes geeft.

**Stelling 2.16** (Lee, [5], p355). *Zij  $T \cong S^1 \times S^1$  de torus en zij  $\mathbb{P}^2$  het projectieve vlak. Dan geldt voor iedere  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  en  $k$ -voudige verbonden sommen  $T \# T \# \dots \# T$  en  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  dat:*

$$\begin{aligned} H_1(T \# \dots \# T) &\cong \mathbb{Z}^{2k}; \\ H_1(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2) &\cong \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De classificatiestelling voor compacte en samenhangende oppervlakken luidt nu als volgt.

**Stelling 2.17** (Lee, [5], p267). *Zij  $T \cong S^1 \times S^1$  de torus en zij  $\mathbb{P}^2$  het projectieve vlak. Dan is ieder compact en samenhangend oppervlak homeomorf met de eenheidsbol  $S^2$ , of een  $k$ -voudige verbonden som  $T \# T \# \dots \# T$  of  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  voor een zekere  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ .*

De classificatiestelling heeft het volgende gevolg met de aanname dat de ruimte ook oriënteerbaar is aan de hand van onze definities.

**Gevolg 2.18. Classificatiestelling voor compacte, samenhangende en oriënteerbare oppervlakken.**

*Zij  $S$  een samenhangend, compact en oriënteerbaar oppervlak. Dan bestaat er een  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  zodat  $S$  homeomorf is met een torus met  $g$  gaten.*

*Bewijs.* Vanwege stelling 2.10 zal  $H_1(S)$  geen torsie bevatten, dus  $S$  zal vanwege stelling 2.16 niet homeomorf zijn met een verbonden som  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$ . Uit stelling 2.17 volgt dat  $S$  homeomorf is met de eenheidsbol of een verbonden som  $T \# T \# \dots \# T$ . Weer met stelling 2.16 zien we dat  $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  geldt voor een zekere  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Merk op dat ieder paar verschillende oppervlakken uit stelling 2.17 wegens stelling 2.16 ook verschillende eerste homologiegroepen heeft. Een torus met  $g$  gaten heeft wegens stelling 1.33 dezelfde eerste homologiegroep als  $S$ , dus dit oppervlak is homeomorf met  $S$ .

□

Voor een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak  $S$  kunnen we  $S$  op homeomorfie na dus beschouwen als een torus met  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gaten. Hiervoor zullen we de volgende definitie gebruiken.

**Definitie 2.19.** Zij  $S$  een compact, oriënteerbaar en samenhangend oppervlak. We definiëren het **geslacht** van  $S$  als het getal  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  zodat  $S$  homeomorf is met een torus met  $g$  gaten.

Op soortgelijke wijze is het ook mogelijk om het geslacht van een niet-oriënteerbaar oppervlak te definiëren aan de hand van het aantal projectieve vlakken in de verbonden som. Echter zullen we dit niet gebruiken in deze scriptie.

*Voorbeeld 2.20.* Zij  $S$  een compact en samenhangend oppervlak. Stel eerst dat  $S$  oriënteerbaar is en geslacht  $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  heeft. Met behulp van stelling 1.33 krijgen we de volgende Euler-karakteristiek van  $S$ :

$$\chi(S) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g.$$

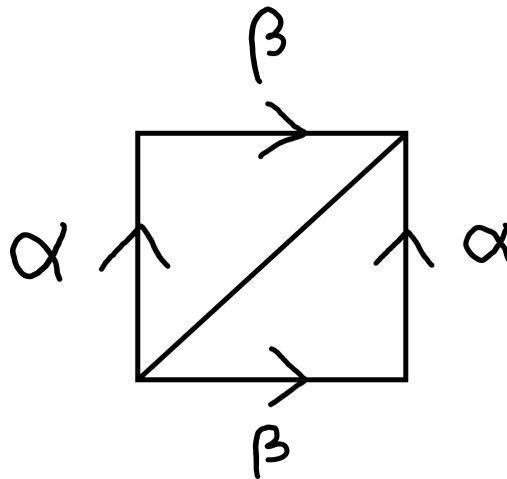
De bovenstaande vergelijking zal erg belangrijk zijn en zal ook gebruikt worden in onder andere het bewijs van de Hurwitz-grens in hoofdstuk 3.

Stel nu dat  $S$  niet oriënteerbaar is. Dan zal wegens stelling 2.17 gelden dat  $S$  homeomorf is met de  $k$ -voudige som  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2$  voor een zekere  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Wegens de wegsamenhang van  $S$  zal  $H_0(S) \cong \mathbb{Z}$  gelden. Verder geeft stelling 2.16 dat  $H_1(S) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Gevolg 2.9 geeft dat  $H_n(S)$  triviaal is voor alle  $n > 1$ , dus  $\chi(S) = 1 - (k - 1) = 2 - k$ .

Als er gegeven is dat  $S$  oriënteerbaar is of juist niet, dan zal het dus voldoende zijn om  $\chi(S)$  te weten om  $S$  op homeomorfie na te bepalen.

Naast het berekenen van een Euler-karakteristiek van een compact en samenhangend oppervlak is het in sommige gevallen erg fijn om een triangulatie te geven. Hiervoor zullen we gebruik maken van een zogenoemde veelhoek representatie van het oppervlak.

Bekijk hiervoor eerst het geval met de torus  $T$ . We kunnen dit oppervlak zien als de additieve groep  $\mathbb{R}^2$  uitgedeeld naar de ondergroep  $\mathbb{Z}^2$ . Dit kunnen we ons inbeelden als een vierkant met zijden geïdentificeerd. We kunnen de tegenovergestelde zijden van het vierkant namelijk langs dezelfde richting aan elkaar plakken. Als we het vierkant alvast in driehoeken indelen, dan krijgen we meteen een triangulatie van ons oppervlak. Zie figuur 6. De torus zal hiermee opgedeeld worden in 2 driehoeken, 3 kanten en 1 hoekpunt. Dus ook hier zien we weer dat de Euler-karakteristiek van een torus gelijk is aan  $1 - 3 + 2 = 0$ .



Figuur 6: We plakken de zijden met dezelfde toegewezen letter langs dezelfde richting aan elkaar om een triangulatie van een torus te krijgen.

Het blijkt dat ieder compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak van geslacht  $g > 0$  een dergelijke veelhoek representatie bezit. Dit zal een  $4g$ -hoek worden, die dan op soortgelijke wijze opgedeeld kan worden in driehoeken om een triangulatie van het oppervlak te krijgen. Ook ieder compact, samenhangend oppervlak dat niet oriënteerbaar is zal een veelhoek representatie bezitten, echter zal deze representatie complexer zijn. Zie hoofdstuk 17 van het boek van Fulton [2] voor de constructies.

### 3 Periodieke automorfismen van oppervlakken

In dit hoofdstuk zullen we voornamelijk kijken naar een paar grote resultaten in de algebraïsche topologie. We zullen zien dat deze resultaten een grote eis leggen op de structuur van een groep die orbifold werkt op een oppervlak. De meeste stellingen en bewijzen zijn gebaseerd op hoofdstuk 7 van het boek [1] en het artikel van Putman [7].

#### 3.1 De Riemann-Hurwitz formule

We kijken als eerst naar de Riemann-Hurwitz formule. Deze stelling stelt ons in staat om de Euler-karakteristieken van twee compacte oppervlakken te vergelijken in het geval dat hier een vertakte overdekkingsafbeelding tussen bestaat. Zoals verwacht geeft dit niet alleen een handig verband, maar dit stelt natuurlijk ook een eis aan de vertakte overdekkingsafbeelding. Door deze eis te manipuleren zien we dat het mogelijk wordt om een bovengrens te geven op de kardinaliteit van een eindige groep bestaande uit oriëntatie-bewarende automorfismen van een oppervlak  $S$  die orbifold op dit oppervlak werkt, de Hurwitz-grens.

Zij  $\pi : S \rightarrow S'$  een vertakte overdekkingsafbeelding tussen compacte en samenhangende oppervlakken  $S, S'$ . Dan brengen wij in herinnering dat  $\pi$  eindig veel vertakkingspunten heeft, immers liggen de vertakkingspunten van  $\pi$  discreet in  $S$ . Zie voorbeeld 1.28. Ook zal  $\pi$  wegens de samenhang van  $S'$  een graad  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$  hebben. Hiermee kunnen we de volgende stelling formuleren.

**Stelling 3.1** (Riemann-Hurwitz formule). *Zijn  $S, S'$  compacte en samenhangende oppervlakken. Zij  $\pi : S \rightarrow S'$  een vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $d$ . Definiëer  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  als het aantal vertakkingspunten en schrijf  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  voor de ordes van deze punten. Dan geldt er dat:*

$$\chi(S) = d\chi(S') - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1).$$

*Bewijs.* Wegens de triangulatiestelling voor oppervlakken, stelling 1.7, zien we dat  $S'$  trianguleerbaar is. Hierdoor kunnen we een eindige triangulatie van  $S'$  kiezen die alle kritieke punten van  $\pi$  als hoekpunten bevat. De takken van deze triangulatie zijn wegen op  $S'$ , waarvan alleen de hoekpunten als kritieke punten kunnen optreden. Zij  $F$  de verzameling kritieke punten, dan is  $\pi|_{\pi^{-1}(S' \setminus F)} : \pi^{-1}(S' \setminus F) \rightarrow S' \setminus F$  een overdekkingsafbeelding. Dit betekent dat er voor iedere kant  $\sigma : [0, 1] \rightarrow S$  wegen  $\gamma_1, \dots, \gamma_t : [0, 1] \rightarrow S$  bestaan zodat voor alle  $i = 1, \dots, t$  geldt dat  $\pi \circ \gamma_i = \sigma$ . We liften hier de triangulatie van  $S'$  via  $\pi$  naar een triangulatie van  $S$ , waardoor we  $\pi$  kunnen zien als een simpliciale afbeelding die de triangulatie van  $S$  overbrengt in de triangulatie van  $S'$ .

Schrijf  $v$  voor het aantal hoekpunten,  $e$  voor het aantal kanten en  $f$  voor het aantal driehoeken op de triangulatie van  $S'$ . Aangezien onze afbeelding een  $d$ -bladige vertakte overdekkingsafbeelding is zal er gelden dat de triangulatie van  $S$  precies  $de$  kanten en  $df$  driehoeken bevat.

Laat  $p \in S'$  een hoekpunt op de triangulatie zijn en stel dat het inverse beeld onder  $\pi$  een vertakkingspunt bevat. Bekijk nu alle vertakkingspunten  $p_1, \dots, p_s$  in dit inverse beeld, en neem aan dat de ordes respectievelijk gelijk zijn aan  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ . Bekijk voor het gemak alleen het vertakkingspunt  $p_i$  van orde  $\lambda_i$ . Wegens propositie 1.18 zal  $\pi$  lokaal bij het vertakkingspunt op een afbeelding  $z \mapsto z^{\lambda_i}$  lijken, dus we zien dat er  $\lambda_i - 1$  minder punten naar  $p$  gestuurd worden als in het geval dat het punt geen vertakkingspunt is.

Als we dat doen voor alle vertakkingspunten in het inverse beeld van  $p$ , dan zien we dat het inverse beeld van  $p$  bestaat uit  $d - \sum_{i=1}^s (\lambda_i - 1)$  punten. Als het inverse beeld van  $p$  onder  $\pi$  geen vertakkingspunt bevat, dan bevat dit inverse beeld per definitie van  $\pi$  precies  $d$  elementen.

Met de bovenstaande opmerking volgt dat het aantal hoekpunten op de triangulatie van  $S$  nu gelijk is aan  $dv - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1)$ . Door alles bij elkaar op te tellen vinden we het gewenste resultaat:

$$\chi(S) = dv - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1) - de + df = d(v - e + f) - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1) = d\chi(S') - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1).$$

□

*Opmerking 3.2.* Bij het formuleren van de Riemann-Hurwitz formule wordt in de literatuur vaak aangenomen dat de oppervlakken  $S$  en  $S'$  oriënteerbaar zijn. De bovenstaande stelling geeft ons nu een algemenere vorm van deze formule.

Voor de Hurwitz-grens hebben we wel de extra structuur van een oriënteerbaar oppervlak nodig. Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak en zij  $G$  een eindige groep van oriëntatie-bewarende automorfismen op  $S$  die orbifold werkt op  $S$ . We hebben in dit geval de structuur nodig dat  $S/G$  ook een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak is. Dit is precies wat we in gevolg 2.13 zagen. Het bewijs van de onderstaande stelling is op een kleine aanpassing na gebaseerd op het originele werk van Hurwitz uit 1892, zie hiervoor [4].

**Stelling 3.3** (Hurwitz-grens). *Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak van geslacht  $g > 1$ . Zij  $G$  een eindige groep van oriëntatie-bewarende automorfismen op  $S$  en stel dat de werking van  $G$  op  $S$  een orbifold werking is. Dan geldt  $|G| \leq 84(g-1)$ .*

*Bewijs.* Met behulp van gevolg 2.13 is  $S/G$  ook een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak. Hiernaast geeft propositie 1.31 ons dat  $\pi$  een vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $|G|$  is, dus wegens de compactheid van  $S/G$  heeft  $\pi$  ook eindig veel kritieke punten. Kies een triangulatie van  $S/G$  die deze kritieke punten als hoekpunten bevat. Het liften van deze triangulatie via de quotiëntafbeelding  $\pi$  geeft ons een triangulatie van  $S$ . Merk op dat  $\pi$  nu een simpliciale afbeelding is tussen  $S$  en  $S/G$ .

Schrijf  $g'$  voor het geslacht van  $S/G$  en zij  $k$  het aantal vertakkingspunten van  $\pi$  met ordes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Stel dat  $p$  een vertakkingspunt is van orde  $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ . Nu werkt  $G$  op de verzameling  $\pi^{-1}\{\pi(p)\}$ , en de stabilisatorgroep  $H := \{g \in G \mid g(p) = p\}$  bestaat uit  $\lambda$  elementen. Wegens de baan-stabilisator stelling zien we dat er exact  $|G|/|H|$  elementen in de baan van  $p$  zitten, en de stabilisatorgroep van alle punten in deze baan bestaat uit evenveel elementen als  $H$ . Hier volgt direct uit dat ieder element in de baan van  $p$  ook een vertakkingspunt van orde  $\lambda$  is. Schrijf  $f_i$  voor het aantal elementen in de baan van het  $i$ -de vertakkingspunt. Hieruit volgt dat  $|G| = \lambda_i f_i$  voor alle  $1 \leq i \leq k$ .

De Riemann-Hurwitz formule geeft ons nu de vergelijking

$$2 - 2g = |G| \cdot (2 - 2g') - \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1).$$

We kunnen deze vergelijking omschrijven naar de vergelijking

$$2g - 2 = |G| \cdot \left( 2g' - 2 + \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1) \right).$$

Merk op dat  $\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1)$  wegens de gelijkheid  $|G| = \lambda_i f_i$  omgeschreven kan worden naar  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} (1 - \frac{1}{\lambda_i})$ . Zij  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  het aantal kritieke punten van  $\pi$  en schrijf  $q_1, \dots, q_m \in S/G$  voor deze punten. Voor alle  $i = 1, \dots, m$  hebben we nu dat  $\pi^{-1}\{q_i\}$  alleen bestaat uit vertakkingspunten die allemaal dezelfde orde hebben. Als  $\pi^{-1}\{q_i\}$  in het bijzonder het  $j$ -de vertakkingspunt bevat, dan zal  $\pi^{-1}\{q_i\}$  ook  $f_j$  vertakkingspunten bevatten. Definieer  $\mu_i$  als de orde van een vertakkingspunt uit  $\pi^{-1}\{q_i\}$ . Dan volgt de vergelijking  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} (1 - \frac{1}{\lambda_i}) = \sum_{j=1}^m f_j \cdot \frac{1}{f_j} (1 - \frac{1}{\mu_i}) = \sum_{j=1}^m (1 - \frac{1}{\mu_j})$ . Als we dit substitueren in onze eerdere vergelijking, dan krijgen we de vergelijking

$$2g - 2 = |G| \cdot \left( 2g' - 2 + \sum_{j=1}^m \left( 1 - \frac{1}{\mu_j} \right) \right).$$

Om alles simpel te houden definiëren we  $r := 2g' - 2 + \sum_{j=1}^m (1 - \frac{1}{\mu_j})$ . De rest van het bewijs zal gebruik maken van gevalsonderscheiding. Merk eerst op dat  $g > 1$  ons de informatie geeft dat  $r > 0$  moet gelden.

Stel eerst dat  $g' \geq 2$ . We merken op dat  $1 - \frac{1}{\mu_j}$  voor alle  $j = 1, \dots, m$  een positieve term zal zijn, dus  $r \geq 2$  geldt nu. Dit geeft ons de ongelijkheid  $2g - 2 \geq 2|G|$ , of ook wel  $|G| \leq g - 1$ .

Neem nu aan dat  $g' = 1$ . In dit geval volgt uit  $r > 0$  dat  $k > 0$  ook moet gelden. De kleinste waarde die  $r$  nu kan aannemen is  $1 - \frac{1}{2}$ , waaruit de ongelijkheid  $2g - 2 \geq |G| \cdot \frac{1}{2}$  volgt. Als we dit omschrijven krijgen we de ongelijkheid  $|G| \leq 4(g - 1)$ .

Neem voor de rest van het bewijs aan dat  $g' = 0$ . We zullen verdergaan met gevalsonderscheiding voor  $m$ . Merk hierbij als eerst op dat  $m \geq 3$  moet gelden, omdat we anders  $r < 0$  zullen houden. Neem nu verder eerst aan dat  $m \geq 5$ . De minimale waarde van  $r$  is in dit geval  $-2 + \frac{m}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Als we dit als ongelijkheid weer omschrijven krijgen we de ongelijkheid  $|G| \leq 4(g - 1)$ .

In het geval dat  $m = 4$  geldt hebben we als minimale waarde voor  $r$  de waarde  $-2 + 3(1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ . Hierbij nemen we niet  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{2}$  aangezien dit in tegenspraak gaat met  $r > 0$ . De ongelijkheid die we krijgen wordt hiermee  $|G| \leq 12(g - 1)$ .

Neem voor de rest van het bewijs ook aan dat  $m = 3$ . Als laatst zullen we nog een gevalsonderscheiding moeten maken voor de  $\mu_i$ . Neem daarvoor zonder verlies van algemeenheid aan dat  $2 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$  en beschouw als eerst het geval dat  $\mu_1 \geq 3$ . De minimale waarde van  $r$  zal in dit geval worden bereikt met  $-2 + 2(1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$ , waarbij we  $\mu_3 = 4$  weer kiezen om  $r$  positief te houden. De ongelijkheid die hieruit volgt is  $|G| \leq 24(g-1)$ .

Neem nu aan dat  $\mu_1 = 2$  en  $\mu_2 \geq 4$ . Om  $r > 0$  te houden moet  $\mu_3 \geq 5$  gelden. Hiermee houden we over dat  $r \geq -2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{20}$  moet gelden. De ongelijkheid die hieruit volgt is daarmee  $|G| \leq 40(g-1)$ .

Als we aannemen dat  $\mu_1 = 2$  en  $\mu_2 = 3$ , dan hebben we  $\mu_3 \geq 7$  nodig zodat  $r > 0$  blijft gelden. Hiermee zien we dat  $r \geq -2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{1}{7}) = \frac{1}{42}$  moet gelden, waardoor we de ongelijkheid  $|G| \leq 84(g-1)$  terugvinden.

Merk op dat  $\mu_1 = \mu_2 = 2$  niet kan gelden, omdat we in dit geval  $r = -2 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{\mu_3}) = -\frac{1}{\mu_3} < 0$  krijgen. In ieder van de bovenstaande gevallen zien we dus dat  $|G| \leq 84(g-1)$  moet gelden, waardoor de bewering volgt. □

### 3.2 Homeomorfismen op homologie-niveau

De werking van een homeomorfisme op de (co)homologiegroepen is iets dat een beperking legt op de eigenschappen van ons homeomorfisme. Een simpel voorbeeld is hierbij een homeomorfisme dat niet triviaal werkt op een (co)homologiegroep, want een dergelijke afbeelding kan dan natuurlijk niet gelijk zijn aan de identiteit. Deze eigenschap sluit natuurlijk niet veel afbeeldingen uit, dus we zullen kijken naar eisen voor een homeomorfisme zodat we gegarandeerd wel de identiteit krijgen.

De eerste belangrijke stelling die we hiervoor nodig hebben is de universele coëfficiëntenstelling voor cohomologie. Deze stelling, die voor de volledigheid hieronder geformuleerd is, zal ons een relatief makkelijke methode geven om de cohomologiegroepen van bepaalde topologische ruimtes uit te rekenen.

**Stelling 3.4** (Hatcher, [3], 3.2). *Zij  $X$  een topologische ruimte waarvan alle homologiegroepen eindig voortgebracht worden, dan kunnen we de cohomologiegroepen van  $X$  berekenen aan de hand van de splijtende korte exacte rijen*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X)) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

waarbij  $\text{Ext}(H)$  voor een eindig voortgebrachte abelse groep  $H$  als volgt wordt berekend:

- $\text{Ext}(H \oplus H') \cong \text{Ext}(H) \oplus \text{Ext}(H')$ ;
- $\text{Ext}(H) \cong 0$ , als  $H$  een vrije abelse groep is;
- $\text{Ext}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ .

Zoals we in stelling 1.33 hebben gezien weten we dat de homologiegroepen van torussen met een aantal gaten erin eindig voortgebrachte vrije abelse groepen zijn, waaruit volgt dat we een isomorfisme hebben tussen de cohomologiegroepen en de groepen  $\text{Hom}(H_n(X), \mathbb{Z})$ . Wegens gevolg 2.18 weten we nu ook dat de cohomologiegroepen van ieder compact oriënteerbaar oppervlak aan deze voorwaarde voldoen, waar we in de rest van deze scriptie erg mooi gebruik van kunnen maken.

Een ander belangrijk wiskundig concept is het zogenoemde cup-product. Voor de lezer die hier wat minder mee bekend is zullen we kort bepaalde eigenschappen van dit product opnoemen. Voor meer details kan men kijken naar sectie 3.2 uit het boek van Hatcher, zie pagina 206 van [3].

Zijn  $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en zij  $X$  een topologische ruimte. Voor coketens  $\phi \in C^n(X)$  en  $\psi \in C^m(X)$  definiëren we het cup-product  $\phi \smile \psi \in C^{n+m}(X)$  als de coketen die de singuliere simplex  $\sigma : \Delta_{n+m} \rightarrow X$  stuurt naar het element

$$(\phi \smile \psi)(\sigma) = \phi(\sigma[[v_0, \dots, v_n]]) \cdot \psi(\sigma[[v_n, \dots, v_{n+m}]]) \in \mathbb{Z}.$$

Hierbij schrijven we  $v_0, \dots, v_{n+m}$  als de hoekpunten van  $\Delta_{n+m}$  en  $[v_0, \dots, v_n]$  als de kleinste convexe deelverzameling die de hoekpunten  $v_0, \dots, v_n$  bevat. Op deze manier krijgen we een geïnduceerde afbeelding

$$H^n(X) \times H^m(X) \rightarrow H^{n+m}(X)$$

die we voor het gemak ook het cup-product zullen noemen. Zoals in het boek van Hatcher beschreven staat krijgen we de volgende belangrijke propositie.

**Propositie 3.5** (Hatcher, [3], 3.10). *Zijn  $X, Y$  topologische ruimtes en zij  $f : X \rightarrow Y$  continu. Voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  schrijven we  $f^* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$  voor de geïnduceerde afbeeldingen op cohomologie. Voor ieder paar gehele getallen  $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en ieder paar elementen  $\alpha \in H^k(Y)$  en  $\beta \in H^l(Y)$  geldt:*

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$

Voordat we beginnen aan het bewijs van de belangrijke stelling van deze paragraaf, zullen we iets meer werk moeten doen betreffende het verband tussen homologie en cohomologie. Het volgende lemma geeft ons een interessant resultaat.

**Lemma 3.6.** *Zij  $X$  een topologische ruimte waarvan alle homologiegroepen vrij zijn en eindig voortgebracht worden. Zij  $f : X \rightarrow X$  een homeomorfisme. Laat  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , dan werkt  $f$  triviaal op  $H^p(X)$  dan en slechts dan als  $f$  triviaal op  $H_p(X)$  werkt.*

*Bewijs.* Zij  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  en zij  $f : X \rightarrow X$  een homeomorfisme. Aangezien alle homologiegroepen van  $X$  vrij zijn en eindig voortgebracht worden, hebben we wegens stelling 3.4 een isomorfisme  $h : H^p(X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_p(X), \mathbb{Z})$ . Merk verder op dat de geïnduceerde afbeelding  $f^\# : C^p(X) \rightarrow C^p(X)$  gedefinieerd wordt door  $\phi \mapsto \phi \circ f_\#$ . Met deze aanname krijgen we de eigenschap dat voor alle  $\phi \in H^p(X)$  geldt dat  $f^*\phi = h^{-1}(h(\phi) \circ f_*)$ .

Stel eerst dat  $f$  triviaal werkt op  $H_p(X)$ . Met de bovenstaande formule zien we dat  $f^*\phi = h^{-1}(h(\phi) \circ f_*) = h^{-1}(h(\phi)) = \phi$ , immers geldt  $f_* = \text{id}_{H_p(X)}$ . Hier volgt direct uit dat  $f$  ook triviaal werkt op  $H^p(X)$ .

Stel nu dat  $f$  triviaal werkt op  $H^p(X)$ . Zij  $\alpha \in C_p(X)$  een singuliere  $p$ -keten. Laat  $\phi \in C^p(X)$  de coketen zijn gedefinieerd door  $\phi(n \cdot \alpha) = n$  voor  $n \in \mathbb{Z}$  en  $\phi(\beta) = 0$  voor alle overige  $\beta \in C_p(X)$ . Laat  $\psi = [\phi] \in H^p(X)$  de bijbehorende klasse zijn. Dan geldt er dat:

$$1 = h(\psi)([\alpha]) = h(f^*\psi)([\alpha]) = h(h^{-1}(h(\psi) \circ f_*))([\alpha]) = (h(\psi) \circ f_*)([\alpha]) = h(\psi)(f_*[\alpha]).$$

Echter geldt er per constructie dat  $h(\psi)$  alleen de waarde 1 aanneemt op  $[\alpha]$ . Oftewel  $f_*[\alpha] = [\alpha]$  moet gelden. Dit geldt voor alle singuliere  $p$ -ketens en door lineaire combinaties in gedachten te nemen geldt het daarmee ook voor alle  $p$ -ketens. Met andere woorden,  $f$  werkt triviaal op  $H_p(X)$ . □

Naast dit bijzondere verband tussen cohomologie en homologie kunnen we nu ook in bepaalde gevallen zien wat de invloed van de eerste homologiegroep is op de overige homologiegroepen. De volgende propositie geeft ons de laatste informatie die we nodig hebben om de hoofdstelling van deze paragraaf te bewijzen.

**Propositie 3.7.** *Zij  $S$  een samenhangend, compact en oriënteerbaar oppervlak van geslacht  $g > 0$  en zij  $f : S \rightarrow S$  een homeomorfisme. Als  $f$  triviaal op  $H_1(S)$  werkt, dan werkt  $f$  triviaal op  $H_p(S)$  voor alle  $p \geq 0$ .*

*Bewijs.* Wegens stelling 2.9 zien we dat  $H_p(S) \cong 0$  voor alle  $p > 2$ . Verder is  $S$  wegsamenhangend, dus  $f$  werkt vanwege gevolg 1.11 triviaal op  $H_0(S)$ . We hoeven de bewering nu nog alleen voor  $H_2(S)$  te controleren. Merk op dat uit lemma 3.6 volgt dat  $f$  ook triviaal op  $H^1(S)$  werkt.

Met behulp van stelling 3.4 zien we dat  $H^2(S) \cong \text{Hom}(H_2(S), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Dus de coketen  $\phi \in H^2(S)$  die de waarde 1 aanneemt op alle singuliere 2-ketens zal een voortbrenger zijn voor de groep. Definieer  $\psi \in H^1(S)$  als de coketen die de waarde 1 aanneemt op iedere singuliere 1-keten. Deze keten bestaat aangezien  $H_1(S)$  wegens stelling 1.33 niet-triviaal is. Merk op dat voor een willekeurige singuliere 2-keten  $\sigma$  nu geldt dat  $(\psi \smile \psi)(\sigma) = 1 \cdot 1 = 1$ . Aangezien  $\phi$  en  $\psi \smile \psi$  overeenkomen op alle singuliere 2-ketens zullen ze ook overeenkomen op alle lineaire combinaties van 2-ketens, waardoor  $\phi = \psi \smile \psi$  moet gelden. Met behulp van propositie 3.5 zien we nu dat:

$$f^*\phi = f^*(\psi \smile \psi) = f^*(\psi) \smile f^*(\psi) = \psi \smile \psi = \phi.$$

We zien dat  $f$  triviaal werkt op de voortbrenger van  $H^2(S)$ . Samen met lemma 3.6 zien we dat  $f$  triviaal werkt op  $H_2(S)$ . □

Met behulp van alle proposities en stellingen uit deze paragraaf is het nu mogelijk om de volgende belangrijke stelling te bewijzen. Deze stelling zal ons in hoofdstuk 5 helpen om een vergelijkbare stelling te bewijzen betreffende een zogeheten oppervlakkencomplex.

**Stelling 3.8.** *Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak van geslacht  $g > 1$  en zij  $f \in \text{Aut}(S)$  een periodiek automorfisme dat triviaal op  $H_1(S)$  werkt. Stel dat de standaardwerking  $G = \langle f \rangle \curvearrowright S$  een orbifold werking is. Dan geldt  $f = \text{id}$ .*



*Bewijs.* Met behulp van lemma 3.6 en propositie 3.7 zien we dat  $f$  triviaal werkt op alle homologiegroepen en alle cohomologiegroepen. In het bijzonder werkt  $f$  triviaal op de  $H_2(S)$ , dus  $f$  is een oriëntatie-bewarend homeomorfisme.

Zij  $G := \langle f \rangle \subset \text{Aut}(S)$  de ondergroep bestaande uit alle oriëntatie-behoudende functies voortgebracht door  $f$  en zij  $\pi : S \rightarrow S/G$  de projectieafbeelding. Wegens propositie 1.31 en gevolg 2.13 is deze afbeelding een vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $|G|$  tussen de compacte en oriënteerbare oppervlakken  $S$  en  $S/G$ .

We kunnen een triangulatie van  $S/G$  kiezen zodat de kritieke punten van  $\pi$  als hoekpunten op deze triangulatie liggen. Als we deze triangulatie liften met behulp van  $\pi$  naar een triangulatie van  $S$ , dan is ieder element  $g \in G$  een simpliciale afbeelding van deze triangulatie naar zichzelf. We voldoen hiermee aan de eisen van propositie 1.13, dus voor iedere  $p \geq 0$  geldt  $H^p(S; \mathbb{Q}) \cong H^p(S/G; \mathbb{Q})$ . Uit propositie 1.14 volgt dat  $H_p(S)$  en  $H_p(S/G)$  dezelfde rank hebben. Echter is  $S/G$  ook een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak. Uit gevolg 2.18 en stelling 1.33 volgt dat  $H_p(S) \cong H_p(S/G)$  moet gelden. Met behulp van stelling 2.15 krijgen we de volgende vergelijking.

$$\chi(S/G) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \text{rank}(H_n(S/G)) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \text{rank}(H_n(S)) = \chi(S).$$

Laat  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  het aantal vertakkingspunten van  $\pi$  zijn en schrijf  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  voor de ordes van deze vertakkingspunten. Uit stelling 3.1 volgt de vergelijking:

$$\chi(S) = |G| \cdot \chi(S/G) - \sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1).$$

Substitueren we deze vergelijking in de vergelijking die we al hadden, dan krijgen we:

$$\sum_{n=1}^k (\lambda_n - 1) = \chi(S) \cdot (|G| - 1).$$

Schrijven we  $\chi(S) = 2 - 2g$ , dan zien we dat  $\chi(S) < 0$  geldt. De linkerkant van de bovenstaande vergelijking zal nooit negatief zijn, terwijl de rechterkant van de vergelijking nu nooit positief zal zijn. We concluderen dat de vergelijking alleen kan gelden als  $|G| - 1 = 0$ . Echter zien we nu dat  $|G| = 1$ , waardoor  $f$  orde 1 heeft. Dit impliceert dat  $f = \text{id}$ .

□

De bovenstaande stelling geeft ons al een sterk gevolg, maar met vergelijkbare aannames zal het zelfs mogelijk zijn om een uitspraak te doen over het aantal vaste punten van het homeomorfisme.

**Propositie 3.9.** *Zij  $S$  een samenhangend, compact en oriënteerbaar oppervlak. Zij  $f : S \rightarrow S$  een periodiek automorfisme zodat de standaardwerking  $G := \langle f \rangle \curvearrowright S$  een orbifold werking is. Veronderstel dat  $f$  triviaal werkt op alle homologiegroepen van  $S$ . Als  $f \neq \text{id}$ , dan is het aantal vaste punten van  $f$  hoogstens  $\chi(S)$ .*

*Bewijs.* Zij  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  de orde van  $f$ , en zij  $p$  een priemdelers van  $n$ . Laat  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$  zodat  $n = p \cdot m$  en merk op dat de standaardwerking van  $H := \langle f^m \rangle$  wegens gevolg 1.30 ook een orbifold werking is. Hiermee zal  $f^m$  voldoen aan alle eisen van de propositie. Verder zal ieder vast punt van  $f$  ook een vast punt van  $f^m$  zijn, dus het zal voldoende zijn om de propositie te laten zien voor  $f^m$ .

Schrijf  $\pi : S \rightarrow S/H$  voor de quotiëntafbeelding. Merk op dat dit wegens lemma 1.31 en gevolg 2.13 een vertakte overdekkingsafbeelding van graad  $|H|$  is tussen compacte, samenhangende en oriënteerbare oppervlakken. De groep  $H$  is van priemorde, dus  $H$  heeft alleen de triviale groep en  $H$  als ondergroepen. Voor ieder punt  $x \in S$  zal de stabilisatorgroep  $H_x$  nu ook triviaal of gelijk aan  $H$  zijn. In het geval dat de stabilisatorgroep triviaal is, dan is  $x$  geen vast punt van  $f^m$  en daarmee ook geen vertakkingspunt van  $\pi$ . Als de stabilisatorgroep gelijk is aan  $H$ , dan is  $x$  wel een vast punt en zal  $x$  daarmee ook een vertakkingspunt zijn. De vaste punten zijn dus precies de vertakkingspunten van  $\pi$ .

Zij  $x \in S$  een vertakkingspunt van  $\pi$ . Dan heeft  $x$  wegens de bovenstaande redenatie orde  $|H|$ , en is  $x$  ook een vast punt. Zij  $d$  het aantal vaste punten. Analoog aan het bewijs van stelling 3.8 krijgen we de vergelijking

$$\chi(S) \cdot (|H| - 1) = \sum_{n=1}^d (|H| - 1) = d \cdot (|H| - 1).$$

Uit de aanname volgt  $f^m \neq \text{id}$ , dus  $|H| \neq 1$ . We zien dat  $d = \chi(S)$  moet gelden. Het aantal vaste punten van  $f^m$  is hiermee precies  $\chi(S)$ , dus  $f$  heeft maximaal  $\chi(S)$  vaste punten.

□

*Opmerking 3.10.* Als  $S$  van geslacht  $g > 1$  is, dan merken we op dat we ook aan de eisen voldoen van stelling 3.8. Wegens stelling 3.8 krijgen we hierdoor direct dat  $f = \text{id}_S$  geldt. De bovenstaande propositie is daardoor eigenlijk alleen relevant voor oppervlakken van geslacht 0 of 1. We zullen ook in het bewijs van stelling 5.5 zien dat we deze propositie alleen voor dergelijke oppervlakken hoeven te gebruiken.

## 4 Periodieke automorfismen van grafen

Het doel van dit hoofdstuk zal zijn om een stelling vergelijkbaar met stelling 3.8 te bewijzen voor zogenoemde grafen. In dit hoofdstuk zullen we daarvoor kijken naar topologische grafen. Intuïtief zijn dit de topologische ruimtes die lijken op een graaf, zoals we vanuit de grafentheorie kennen. We definiëren deze ruimtes ook met behulp van een verzameling knopen en een collectie takken.

**Definitie 4.1.** Definieer voor alle  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  de verzameling

$$S(n) := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{er bestaan } 0 \leq t < 1 \text{ en } k \in \mathbb{Z} \text{ zodat } z = te^{2\pi ik/n}\}.$$

We definiëren een **topologische graaf** als een tupel  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  waarbij  $\Gamma$  een niet-lege topologische ruimte is,  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  een afbeelding,  $V \subseteq \Gamma$  een deelverzameling en  $E$  een collectie deelruimtes van  $\Gamma$  die aan de volgende eisen voldoen:

- Voor alle  $x \in \Gamma$  bestaat er een open omgeving  $U_x \subset \Gamma$  en een homeomorfisme  $\phi_x : (U_x, x) \rightarrow (S(\varepsilon(x)), 0)$  van gepunte topologische ruimtes. We noemen  $\varepsilon(x)$  de **graad van  $x$** .
- Als  $x \in \Gamma$  van graad ongelijk aan 2 is, dan geldt  $x \in V$ . Verder ligt de verzameling  $V$  discreet in  $\Gamma$ .
- Voor alle  $e \in E$  bestaat er een homeomorfisme  $\phi : e \rightarrow [0, 1]$  óf een homeomorfisme  $\phi : e \rightarrow S^1$ . In beide gevallen eisen we dat  $V \cap e = \{\phi^{-1}(0), \phi^{-1}(1)\}$ .
- Voor alle  $x \in \Gamma \setminus V$  bestaat er een unieke  $e \in E$  met  $x \in e$ .

We zullen  $V$  de verzameling knooppunten en  $E$  de collectie takken van  $\Gamma$  noemen. In het bijzonder noemen we  $e \in E$  een lus als  $e \cong S^1$ .

We merken hierbij op dat het getal  $\varepsilon(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$  voor een zeker punt  $x \in \Gamma$  ook daadwerkelijk uniek moet zijn. Immers is  $\varepsilon(x)$  gelijk aan het aantal takken die in  $x$  samenkomen en zal iedere open omgeving van  $x$  de uiteinden van al deze takken bevatten.

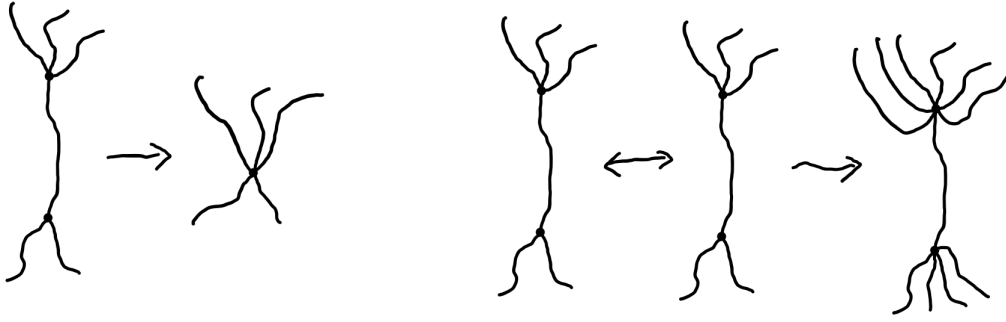
*Voorbeeld 4.2.* Zij  $\Gamma := [0, 2] \subset \mathbb{R}$ . Laat  $V := \{0, 1, 2\}$  en  $E := \{[0, 1], [1, 2]\}$ . Definieer  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  door  $\varepsilon(0) = \varepsilon(2) = 1$  en  $\varepsilon(x) = 2$  voor  $x \in (0, 2)$ . We krijgen hierdoor een samenhangende topologische graaf met drie hoekpunten en twee kanten.

*Voorbeeld 4.3.* Zij  $\Gamma := S^1 \subset \mathbb{C}$  de eenheidscirkel en zij  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  uw favoriete positieve en gehele getal. Laat  $V := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \subset S^1$  alle  $n$ -de machts eenheidswortels zijn. Definieer voor  $k = 0, \dots, n-1$  de tak  $e_k := \{e^{(2\pi it)/n} \mid t \in [k, k+1]\}$ . Laat  $E := \{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  en definieer  $\varepsilon : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  als de constante functie  $z \mapsto 2$ . Dan krijgen we een samenhangende topologische graaf waarvan de hoekpunten bestaan uit alle  $n$ -de machts eenheidswortels.

We kunnen een topologische graaf  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  op drie belangrijke manieren aanpassen om een andere topologische graaf te krijgen.

- We kunnen een tak  $e \in E$  met verschillende hoekpunten samentrekken. Dat wil zeggen dat we uitdelen naar een equivalentierelatie  $\sim$  op  $\Gamma$  gedefinieerd door  $x \sim y$  dan en slechts dan  $x = y$  of  $x, y \in e$ . Zie figuur 7. De topologische ruimte  $\Gamma$  wordt nu vervangen door  $\Gamma / \sim$ . Verder vervangen we de twee hoekpunten  $a, b \in V$  van  $e$  door een enkel punt  $c$ , en wordt de graad van  $c$  gelijk aan  $\varepsilon(a) + \varepsilon(b)$ . Uit  $E$  halen we als laatst ook nog de tak  $e$ .
- We kunnen een punt op een tak toevoegen en de tak daarmee in twee takken opdelen. In dit proces voegen we een punt  $v \in \Gamma$  toe aan  $V$ , en verdelen we een tak  $e \in E$  in twee verschillende takken  $e_1$  en  $e_2$ . We noemen dit een verfijning van de topologische graaf.
- Als er voor verschillende takken  $e_1, e_2 \in E$  een homeomorfisme  $\phi : e_1 \rightarrow e_2$  bestaat, dan kunnen we de takken tegen elkaar aan lijmen. Hiervoor delen we  $\Gamma$  uit naar de relatie die een punt  $x \in e_1$  met  $\phi(x) \in e_2$  identificeert. Zie hiervoor ook figuur 7.

Zij  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  een topologische graaf, en zij  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  een periodiek automorfisme. Merk op dat voor  $x \in \Gamma$  geldt dat  $\varepsilon(x) = \varepsilon(f(x))$ . Als  $\varepsilon(x) \neq 2$ , dan zien we dat  $x$  en  $f(x)$  beide hoekpunten zijn. Als  $\varepsilon(x) = 2$ , dan kan het echter wel nog voorkomen dat  $x$  een hoekpunt is maar  $f(x)$  er geen is. Om dit op te lossen zullen we voor alle  $v \in V$  en alle  $n \geq 1$  de topologische graaf verfijnen door het punt  $f^n(v)$  toe te voegen. Wegens de



Figuur 7: Het samentrekken van een tak (links) en het identificeren van twee takken met elkaar (rechts).

periodiciteit van  $f$  zal dit voor iedere  $v \in V$  maximaal eindig veel punten toevoegen, en aangezien  $V$  discreet ligt zal de nieuwe verzameling hoekpunten ook discreet liggen in  $\Gamma$ .

We kunnen hetzelfde toepassen bij de takken. Een tak  $e \in E$  verbindt hoekpunten  $v, w \in V$ , dus  $f(e)$  zal een tak zijn die  $f(v)$  en  $f(w)$  verbindt. We zien dat  $f$  de verzameling hoekpunten en de collectie takken permuteert. Verder is het ook mogelijk om  $\Gamma$  nog meer te verfijnen zodat  $f$  een tak  $e \in E$  invariant laat dan en slechts dan als  $f|_e = \text{id}_e$ . Om dit te laten zien zal het voldoende zijn dat  $f$  eindig veel vaste punten op  $e$  heeft als  $f$  niet al de identiteit op  $e$  is. Immers kunnen we deze vaste punten in dat geval toevoegen als hoekpunten. We hebben hiervoor de volgende proposities nodig.

**Propositie 4.4.** *Zij  $Y$  een topologische ruimte homeomorf met  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  en zij  $f : Y \rightarrow Y$  een periodiek automorfisme. Dan geldt  $f = \text{id}_Y$ , of  $f$  heeft precies 1 vast punt.*

*Bewijs.* Bekijk eerst de ruimte  $X := [0, 1]$ . Zij  $g : X \rightarrow X$  een periodiek automorfisme en veronderstel dat  $g(0) = 0$  en  $g(1) = 1$  gelden. Stel dat  $g$  niet de identiteit is op  $X$  en laat  $x \in (0, 1)$  zodat  $g(x) \neq x$ . Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $g(x) < x$  en laat  $y \in (g(x), x)$ . Het interval  $[0, x)$  wordt via  $g$  gestuurd naar een samenhangend interval dat 0 wel bevat, maar  $g(x)$  niet bevat. We zien dat  $g([0, x)) \subseteq [0, g(x))$ . Hieruit volgt dat  $g(y) \in [0, g(x))$  geldt, maar dan geldt ook weer  $g(y) \in [0, x)$ . We zien hierdoor dat  $g(g(y)) \in [0, g(x))$ , dus het herhaaldelijk toepassen van  $g$  op  $y$  geeft ons telkens alleen een element van  $[0, g(x))$ . We concluderen dat  $g$  niet periodiek kan zijn, omdat we op deze manier nooit  $y$  zullen terugkrijgen. Tegenspraak, dus  $g = \text{id}$ .

Stel nu dat  $g : X \rightarrow X$  een willekeurig periodiek automorfisme is. De punten  $0, 1 \in X$  zijn de enige twee punten van  $X$  die geen open omgeving hebben die homeomorf is met  $S(2)$ , dus  $g$  permuteert 0 en 1. Als  $g(0) = 0$  dan geldt  $g = \text{id}_X$ , dus neem aan dat  $g(0) = 1$ .

Stel eerst dat  $g$  geen vast punt heeft. Definieer de verzamelingen  $F_1 := \{x \in X \mid x > f(x)\}$  en  $F_2 := \{x \in X \mid x < f(x)\}$ . Zij  $(y_n)_{n \geq 0}$  een rij in  $F_1$  die binnen  $X$  convergeert naar  $y \in X$ . Wegens de continuïteit van  $g$  convergeert de rij  $(g(y_n))_{n \geq 0}$  naar  $g(y)$ . Echter geldt er voor alle  $n \geq 0$  dat  $y_n > g(y_n)$ , dus  $y \geq g(y)$ . Wegens de aanname  $y \neq g(y)$  geldt er dat  $y \in F_1$ . We zien dat  $F_1 \subseteq X$  gesloten is. Geheel analoog kunnen we ook zien dat  $F_2$  gesloten is, dus  $F_1, F_2$  zijn beide open en gesloten deelverzamelingen van  $X$ . Wegens de samenhang van  $X$  moet  $F_1$  of  $F_2$  leeg zijn, dus vanwege  $0 \in F_2$  en  $1 \in F_1$  volgt hierdoor de tegenspraak.

Stel dat  $g$  minstens twee verschillende vaste punten  $a, b \in X$  heeft. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $a < b$ . Merk op dat  $g([0, a])$  gelijk is aan een samenhangende deelverzameling van  $X$  die  $g(0) = 1$  en  $g(a) = a$  bevat, maar  $b$  niet bevat. Echter is  $X \setminus \{b\} = [0, b) \cup (b, 1]$  niet samenhangend, terwijl  $a \in [0, b)$  en  $g(0) = 1 \in (b, 1]$ . Tegenspraak.

We gaan nu terug naar het geval met  $Y$  van de propositie. Zij  $\phi : Y \rightarrow X$  een homeomorfisme. Definieer het homeomorfisme  $\psi = \phi \circ f \circ \phi^{-1} : X \rightarrow X$  en merk op dat  $\psi$  van eindige orde is. We zien dat voor  $x \in X$  geldt dat  $\psi(x) = \phi(f(\phi^{-1}(x))) = x$  dan en slechts dan als  $f(\phi^{-1}(x)) = \phi^{-1}(x)$ . In het bijzonder geldt  $f = \text{id}_Y \iff \psi = \text{id}_X$ , en heeft  $\psi$  precies 1 vast punt dan en slechts dan als  $f$  precies 1 vast punt heeft. □

**Propositie 4.5.** *Zij  $Y$  een topologische ruimte homeomorf met  $S^1$  en zij  $f : Y \rightarrow Y$  een periodiek automorfisme met minstens 3 vaste punten. Dan geldt  $f = \text{id}_Y$ .*

*Bewijs.* We beginnen weer eerst door te kijken naar een periodiek automorfisme  $g : S^1 \rightarrow S^1$  met minstens 3 vaste punten. Laat  $x_1, x_2, x_3 \in S^1$  drie verschillende vaste punten van  $g$  zijn en laat  $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1)$  zodat  $x_i = e^{2\pi i t_i}$  voor  $i = 1, 2, 3$ . Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $t_1 < t_2 < t_3$ . Definieer de gesloten

deelverzameling  $X_1 := \{e^{2\pi it} \mid t \in [t_1, t_2]\} \subset S^1$ . We merken op dat  $g(X_1)$  weer een samenhangende gesloten deelverzameling van  $S^1$  is die  $x_1$  en  $x_2$  wel bevat, maar  $x_3$  niet bevat. Hieruit volgt direct dat  $X_1 \subseteq g(X_1)$  moet gelden.

Definieer  $A_1 := \{e^{2\pi it} \mid t \in [t_1, t_2]\}$  en  $A_2 := \{e^{2\pi it} \mid t \in (t_1, t_2]\}$ . Dan wordt  $A_1$  onder  $g$  naar een samenhangende deelverzameling van  $S^1$  gestuurd die  $x_1$  bevat, maar  $x_2$  en  $x_3$  niet bevat. Oftewel  $g(A_1) \subseteq B_1 := \{e^{2\pi it} \mid t \in (t_3 - 1, t_2)\}$ . Analoog krijgen we  $g(A_2) \subseteq B_2 := \{e^{2\pi it} \mid t \in (t_2, t_3)\}$ . Vanwege  $B_1 \cap B_2 = X_1 \setminus \{x_1, x_2\}$  zien we dat  $g(X_1 \setminus \{x_1, x_2\}) \subseteq X_1 \setminus \{x_1, x_2\}$ , oftewel  $g(X_1) = X_1$ . Nu is  $g|_{X_1}$  een periodiek automorfisme van  $X_1 \cong [0, 1]$  met 2 vaste punten, dus wegens propositie 4.4 volgt  $g|_{X_1} = \text{id}_{X_1}$ . We kunnen hetzelfde trucje toepassen op  $X_2 := \{e^{2\pi it} \mid t \in [t_2, t_3]\}$  en  $X_3 := \{e^{2\pi it} \mid t \in [t_1, t_2]\}$ , waardoor uit  $S^1 = X_1 \cup X_2 \cup X_3$  volgt dat  $g = \text{id}_{S^1}$ .

We gaan nu weer terug naar de topologische ruimte  $Y$  en het homeomorfisme  $f$ . Kies een homeomorfisme  $\phi : Y \rightarrow S^1$  en definieer  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  door  $\psi = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Dan is  $\psi$  een periodiek automorfisme van  $S^1$  met minstens 3 vaste punten. Oftewel,  $\psi = \text{id}_{S^1}$ . We concluderen dat  $f = \text{id}_Y$  ook moet gelden. □

Zij  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  een topologische graaf en zij  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  een periodiek homeomorfisme. Zij  $e \in E$  een tak en stel dat  $f(e) = e$ . Stel verder eerst dat  $e \cong [0, 1]$ . Als  $f$  op  $e$  niet de identiteit is, dan zal  $f$  nu precies 1 vast punt hebben. Het toevoegen van dit vaste punt aan  $V$  geeft ons een onderverdeling in twee takken, die  $f$  met elkaar verwisselt.

Stel dat  $e \cong S^1$ . Dan heeft  $f$  al een vast punt op  $e$ , namelijk het verbindingspunt van  $e$  met de rest van  $\Gamma$ . De afbeelding  $f$  zal ook minstens 2 vaste punten hebben. Immers kunnen we  $e$  zien als het quotiënt van  $[0, 1]$  waarbij we 0 en 1 aan elkaar plakken, en het hoekpunt  $d$  van  $e$  te zien als de klasse van 0 (of van 1) in het quotiënt. Omdat  $f(d) = d$  zal  $f|_e : e \rightarrow e$  liften tot een periodiek homeomorfisme  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Als  $d$  het enige vaste punt van  $f$  is, dan heeft  $h$  nu precies 0 of 2 vaste punten. Een tegenspraak met propositie 4.4. Als  $f$  precies 2 vaste punten heeft op  $e$ , dan kunnen we het punt dat geen hoekpunt is toevoegen aan  $V$ . Dit geeft een onderverdeling van  $e$  in twee takken homeomorf met  $[0, 1]$ , die  $f$  met elkaar verwisselt.

Er bestaat hiermee nu altijd een verfijning van de topologische graaf zodat  $f$  ieder hoekpunt weer naar een hoekpunt stuurt, iedere tak naar een tak stuurt, en zodat  $f$  een tak invariant laat dan en slechts dan als  $f$  de identiteit op deze tak is. Merk op dat een topologische graaf ons ook precies een triangulatie geeft. Immers kunnen we de hoekpunten definiëren als de beelden van singuliere 0-simplices en de takken als de beelden van singuliere 1-simplices.

Naast het gedrag van een periodiek automorfisme op een topologische graaf weten we ook direct de homologiegroepen van een topologische graaf. We kunnen hiervoor namelijk kijken naar de cyclen die de topologische graaf bevat. We brengen hiervoor in herinnering dat we een boeket van 0 cirkels definiëren als een eenpuntruimte.

**Lemma 4.6.** *Zij  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  een compacte en samenhangende topologische graaf. Zij  $X_k$  voor alle  $k \geq 0$  het boeket van  $k$  cirkels. Dan bestaat er een  $n \in \mathbb{Z}$  zodat  $\Gamma$  en  $X_n$  homotopie-equivalent zijn.*

*Bewijs.* Voor iedere tak  $e \in E$  met twee verschillende hoekpunten kunnen we  $e$  samentrekken tot een enkel punt. Na dit proces zal  $V$  precies 1 knoop minder bevatten, en de resulterende ruimte is homotopie-equivalent met  $\Gamma$ . Als we dit herhaaldelijk toepassen zullen we uiteindelijk een ruimte krijgen met een enkel hoekpunt. De enige kanten zullen nu lussen zijn en wegens de compactheid van  $\Gamma$  zullen dit er ook eindig veel zijn. □

We merken op dat er niet precies een stelling bestaat voor topologische grafen die vergelijkbaar is met stelling 3.8. We zullen namelijk twee uitzonderingen krijgen.

*Voorbeeld 4.7.* Bekijk de topologische graaf  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  met  $\Gamma = [0, 2]$  zoals in voorbeeld 4.2. Definieer  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  door  $x \mapsto 2 - x$ . We merken op dat  $\Gamma$  een periodiek automorfisme van  $\Gamma$  is dat triviaal werkt op  $H_1(\Gamma)$ . Immers is  $\Gamma$  samentrekbaar, dus  $H_1(\Gamma) \cong 0$ . De afbeelding  $f$  permuteert de knopen van graad 1 hiermee, maar is zelf uiteraard niet de identiteit.

*Voorbeeld 4.8.* Bekijk de topologische graaf  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  met  $\Gamma = S^1$  zoals in voorbeeld 4.3. Laat  $\zeta_n := e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$  en definieer  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  door  $z \mapsto \zeta_n \cdot z$ . We draaien onze cirkel hiermee eenmalig tegen de klok in zodat ieder hoekpunt naar zijn buurman afgebeeld wordt. Merk op dat  $f$  homotoop is met de identiteit op  $S^1$  via de homotopie  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$  gedefinieerd door  $(z, t) \mapsto e^{2\pi it/n} \cdot z$ . We zien dat  $f$  triviaal werkt op  $H_1(S^1)$ . Echter is  $f$  ook periodiek, dus ook hier vinden we een uitzondering.

De volgende stelling vertelt ons dat de bovenstaande uitzonderingen eigenlijk ook de enige uitzonderingen zijn.

**Stelling 4.9.** *Zij  $(\Gamma, \varepsilon, V, E)$  een compacte en samenhangende topologische graaf, en zij  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  een periodiek automorfisme dat aan de volgende eisen voldoet.*

- *De afbeelding  $f$  werkt triviaal op  $H_1(\Gamma)$ ;*
- *Alle knopen in  $\Gamma$  van graad 1 worden onder  $f$  invariant gelaten;*
- *Als  $H_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$  ook geldt, dan heeft  $f$  een vast punt.*

*Dan moet  $f$  de identiteit zijn.*

*Bewijs.* We zullen dit uit het ongerijmde bewijzen, stel daarom dat  $f \neq \text{id}_\Gamma$ . We kunnen onze topologische graaf eerst verfijnen zodat  $f$  de identiteit is op een kant  $e \in E$  dan en slechts dan als  $f(e) = e$ . We krijgen hiermee een triangulatie van  $\Gamma$ , waarbij  $f$  een simpliciale afbeelding wordt die de triangulatie in zichzelf over laat gaan.

Stel verder dat de orde van  $f$  gelijk is aan  $p \cdot m$ , voor een zeker priemgetal  $p$  en positief geheel getal  $m$ . In dit geval zal  $f^m$  een periodiek homeomorfisme van  $\Gamma$  zijn van orde  $p$  dat nog steeds aan de bovenstaande eigenschappen voldoet. Stel dat de stelling geldt voor  $f^m$ , dan hebben we dat  $f^m = \text{id}_\Gamma$ . Maar dan moet de orde van  $f$  kleiner dan of gelijk zijn aan  $m < m \cdot p$ . Tegenspraak, waaruit volgt dat  $f = \text{id}$  moet gelden. Het zal dus voldoende zijn om de stelling te bewijzen als  $f$  een priemorde  $p$  heeft. Zij  $G = \langle f \rangle \subseteq \text{Aut}(\Gamma)$  de groep voortgebracht door  $f$  van orde  $|G| = p$ .

Stel eerst dat  $f$  geen kanten van  $\Gamma$  invariant laat. Merk op dat  $f$  vanwege gevolg 1.11 ook triviaal werkt op  $H_0(\Gamma)$ . We zien dat  $f$  triviaal moet werken op alle homologiegroepen van  $\Gamma$ . Wegens stelling 1.14 zien we dat de rank van  $H_1(\Gamma)$  gelijk is aan de dimensie van  $H^1(\Gamma; \mathbb{Q})$ . Uit propositie 1.13 volgt nu dat deze dimensie gelijk is aan de dimensie van  $H^1(\Gamma/G; \mathbb{Q})$ , die weer wegens stelling 1.14 gelijk is aan de rank van  $H_1(\Gamma/G)$ . Beide  $\Gamma$  en  $\Gamma/G$  zijn grafen, dus wegens lemma 4.6 en stelling 1.32 volgt voor alle  $n \geq 0$  dat  $H_n(\Gamma) \cong H_n(\Gamma/G)$ . Oftewel uit stelling 2.15 volgt dat  $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma/G)$ .

Zij  $v$  het aantal hoekpunten en  $e$  het aantal kanten van  $\Gamma/G$ . Laat  $v^f$  het aantal vaste punten van  $f$  zijn. Aangezien  $|G| = p$  priem is, volgt er dat de baan van een hoekpunt onder  $G$  bestaat uit 1 of  $p$  elementen. De kanten werden allemaal niet invariant gelaten door  $f$ , waaruit volgt dat de baan van de kanten bestaat uit  $p$  elementen. Hiermee zien we dat  $\Gamma$  precies  $pe$  kanten moet hebben en  $p(v - v^f) + v^f$  hoekpunten. Met behulp van de vergelijking uit de vorige alinea krijgen we de volgende vergelijking.

$$v - e = \chi(\Gamma/G) = \chi(\Gamma) = p(v - v^f) + v^f - pe = (v - e)p - (p - 1)v^f.$$

Oftewel, we krijgen hiermee de vergelijking  $(v - e)(p - 1) = v^f(p - 1)$ , waaruit volgt dat  $v - e = v^f$ .

Als de rank van  $H_1(\Gamma)$  minstens 2 is, dan zullen er minstens 2 verschillende cykels in onze graaf voorkomen. De ruimte  $\Gamma$  is homotopie-equivalent met het boeket van  $c > 1$  cirkels, dus wegens stelling 1.32 en stelling 2.15 geldt  $0 \leq v^f = v - e = 1 - c < 0$ . Tegenspraak.

Als de rank van  $H_1(\Gamma)$  gelijk is aan 1, dan zal er precies 1 cykel in onze graaf zitten. Hierdoor is  $\Gamma$  homotopie-equivalent met een cirkel, dus  $H_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$ . Hieruit volgt nu dat  $v^f = v - e = 1 - 1 = 0$ . Echter namen we aan dat  $f$  in dit geval een vast punt moet hebben. We zien daarmee ook hier weer tegenspraak.

Als  $H_1(\Gamma)$  triviaal is, dan zal  $\Gamma$  samentrekbaar zijn. Hiermee zien we dat  $f$  precies  $v^f = v - e = 1$  vast punt heeft. Aangezien  $f$  triviaal moet werken op iedere knoop van graad 1 kan dit alleen voorkomen als  $\Gamma = \{\star\}$  een eenpuntruimte is, maar dan moet  $f$  de identiteit zijn. We vinden weer tegenspraak.

Neem nu aan dat  $f$  minstens 1 kant invariant laat en definieer de verzameling  $\Gamma^f := \{x \in \Gamma \mid f(x) = x\}$ . Merk op dat dit een strikte deelgraaf van  $\Gamma$  zal zijn, aangezien we anders  $f = \text{id}$  moeten hebben.

We zullen nu herhaaldelijk iedere tak  $e \in E$  met twee verschillende hoekpunten die invariant wordt gelaten door  $f$  samentrekken. De afbeelding  $f$  induceert nu een afbeelding  $g$  op de resulterende ruimte. Nadat dit proces voldoende is herhaald zal deze afbeelding  $g$  alleen een kant invariant laten als de hoekpunten van deze kant gelijk

zijn. Met andere woorden,  $g$  zal alleen lussen en hoekpunten invariant laten. Zij  $\Gamma_1$  de graaf verkregen na dit proces en zij  $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$  het geïnduceerde homeomorfisme.

Zij  $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$  de deelgraaf door het inwendige van alle lussen  $e \in E$  te verwijderen die  $f_1$  invariant laat. Zij  $f_2 = f_1|_{\Gamma_2} : \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2$  het geïnduceerde homeomorfisme. Merk op dat  $\Gamma_2$  kanten moet bevatten, want  $\Gamma^f$  is een strikte deelgraaf van  $\Gamma$ . Verder hebben we alleen het inwendige van lussen verwijderd, dus  $\Gamma_2$  is nog steeds compact en samenhangend. De afbeelding  $f_2$  zal ook triviaal werken op  $H_1(\Gamma_2)$  en alle knopen van graad 1 invariant laten, dus we hoeven alleen nog een enkele voorwaarde te controleren.

Stel dat  $H_1(\Gamma_2) \cong \mathbb{Z}$ . Dan zijn er twee mogelijkheden. Als  $H_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$ , dan hebben we geen lus verwijderd voor het construeren van  $\Gamma_2$  uit  $\Gamma_1$ . Dat  $f$  een vast punt heeft geeft ons nu dat  $f_2$  ook een vast punt moet hebben. Als  $H_1(\Gamma) \not\cong \mathbb{Z}$ , dan hebben we minstens 1 lus uit  $\Gamma_1$  verwijderd om  $\Gamma_2$  te construeren. Het hoekpunt van deze lus werd door  $f_1$  per definitie invariant gelaten, en dit hoekpunt zit ook in  $\Gamma_2$ . Oftewel,  $f_2$  heeft weer een vast punt. We concluderen dat  $f_2$  aan alle voorwaarden van de stelling voldoet, en dat  $f_2$  geen kanten van  $\Gamma_2$  invariant laat. We zagen eerder dat dan  $f_2 = \text{id}$  moet gelden. Hier volgt nu tegenspraak uit, omdat  $\Gamma_2$  een kant bevat. Dit impliceert dat  $f = \text{id}$ .

□

## 5 Homeomorfismen van oppervlakkencomplexen

In dit hoofdstuk zullen we de theorie van alle voorgaande hoofdstukken gebruiken om een uitspraak te doen over periodieke homeomorfismen van oppervlakkencomplexen. We zullen hiervoor uiteraard eerst definiëren wat een oppervlakkencomplex inhoudt.

**Definitie 5.1.** We definiëren een **oppervlakkencomplex** als een tupel  $(S, \mathcal{T}, X, \sim)$  met:

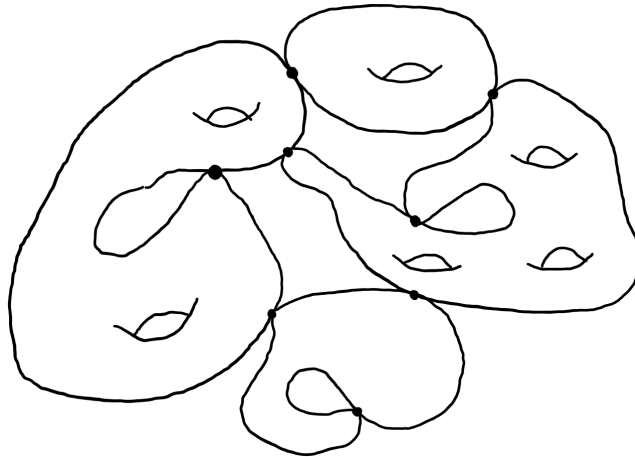
- (1)  $S$  een samenhangende topologische ruimte;
- (2)  $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_{|\mathcal{T}|}\}$  een eindige verzameling topologische ruimtes;
- (3)  $X = \{p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_m, q_m\} \subset \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{T}|} S_k$  een eindige deelverzameling;
- (4)  $\sim$  een equivalentierelatie op  $\bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{T}|} S_k$ ;

zodat geldt:

- Voor alle  $k = 1, \dots, |\mathcal{T}|$  is  $S_k$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak.
- Voor alle  $i = 1, \dots, m$  en  $y \in \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{T}|} S_k$  geldt  $y \sim p_i$  dan en slechts dan als  $y = p_i$  of  $y = q_i$ .
- Voor alle  $x, y \in \bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{T}|} S_k \setminus X$  geldt  $x \sim y$  dan en slechts dan als  $x = y$ .
- Er geldt dat  $S = \left(\bigsqcup_{k=1}^{|\mathcal{T}|} S_k\right) / \sim$ .

We noemen  $X$  de verzameling **verbindingspunten** van  $S$ .

Het idee van een oppervlakkencomplex is hiermee dat we een eindig aantal compacte, samenhangende en oriënteerbare oppervlakken op een "nette" manier aan elkaar lijmen. Zie figuur 8 als voorbeeld.



Figuur 8: Een oppervlakkencomplex met oppervlakken van geslacht 0,1,2 en 3.

Zij  $Y$  een samenhangend, compact en oriënteerbaar oppervlak. Zij  $V \subset Y$  een eindige deelverzameling en zij  $y \in Y \setminus V$ . Merk op dat er wegen  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow Y$  bestaan geparametriseerd door  $v \in V$  met  $\gamma_v(0) = v$  en  $\gamma_v(1) = y$  zodat de beelden van al deze wegen alleen elkaar snijden in  $y$ . Immers kunnen we een homeomorfisme  $\phi : Y \rightarrow Y$  nemen die ieder punt  $v \in V$  op een rijtje zet en  $y$  ernaast zet. We kunnen dan voor  $v \in V$  een rechte lijn tekenen van  $\phi(v)$  naar  $\phi(y)$ , deze lijnen zullen elkaar alleen snijden in  $\phi(y)$ . Het toepassen van  $\phi^{-1}$  op deze lijnstukken geeft ons de gewenste wegen. Dit proces kunnen we gebruiken om een oppervlakkengraaf te definiëren.

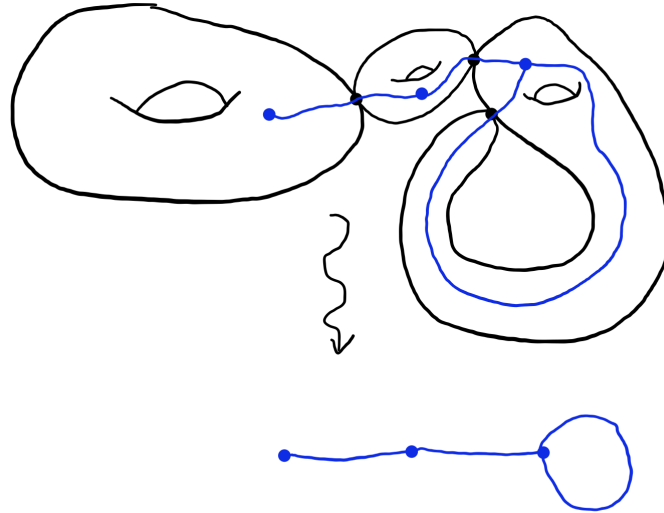
**Definitie 5.2.** Zij  $(S, \mathcal{T}, X, \sim)$  een oppervlakkencomplex en schrijf  $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_n\}$ . Kies voor alle  $k = 1, \dots, n$  een punt  $y_k \in S_k$  met  $y_k \notin X$  en bekijk voor  $k \in \{1, \dots, n\}$  eerst het oppervlak  $S_k$ . Teken lijnstukken op  $S_k$  die ieder verbindingspunt dat op  $S_k$  ligt verbindt met  $y_k$ , zodat al deze lijnstukken alleen snijden in  $y_k$ . We doen dit voor alle oppervlakken in het oppervlakkencomplex. Na dit proces zullen kanten met elkaar verbonden worden via de verbindingspunten om zo een langere tak tussen punten  $y_k$  en  $y_l$  voor zekere  $k, l \in \{1, \dots, n\}$  te creëren. We krijgen hiermee een ingebedde topologische graaf in  $S$ . De hoekpunten zijn hier namelijk de punten  $y_1, \dots, y_n$ , en de kanten zijn de kanten die we hiertussen krijgen. We noemen deze graaf een **oppervlakkengraaf** van  $S$ .

Zie ook figuur 9 voor een voorbeeld van een oppervlakkengraaf getekend op een oppervlakkencomplex en figuur 10 voor een oppervlakkengraaf van het oppervlakkencomplex uit het vorige voorbeeld.

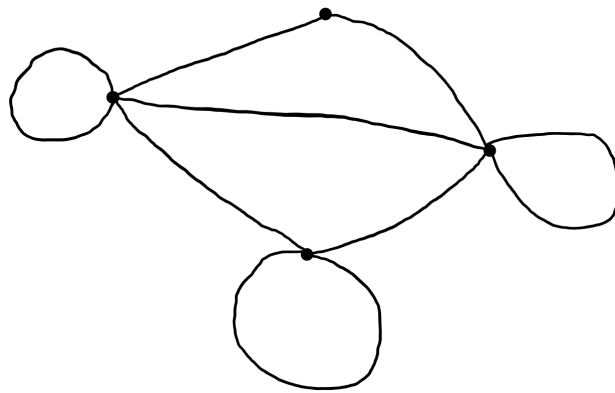


*Opmerking 5.3.* We merken hierbij op dat twee oppervlakkengrafen van een oppervlakkencomplex altijd homeomorf zijn. We kunnen het dus hebben over de oppervlakkengraaf van een oppervlakkencomplex.

De oppervlakkengraaf van een oppervlakkencomplex kunnen we zien als de plattegrond van het oppervlakkencomplex. We zien alle oppervlakken als hoekpunten op deze graaf en iedere tak tussen de hoekpunten zal aangeven wanneer twee oppervlakken elkaar raken. De volgende stelling zal ons een belangrijk verband geven tussen de eerste homologiegroep van een oppervlakkencomplex, de eerste homologiegroep van een oppervlakkengraaf en de eerste homologiegroepen van de oppervlakken op het complex.



Figuur 9: Een oppervlakkengraaf in blauw getekend op een oppervlakkencomplex.



Figuur 10: De oppervlakkengraaf van het oppervlakkencomplex uit het vorige voorbeeld.

**Stelling 5.4.** Zij  $(S, \mathcal{T}, X, \sim)$  een oppervlakkencomplex met  $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_n\}$  en zij  $\Gamma_S$  de bijbehorende oppervlakken graaf. Dan hebben we een kanoniek isomorfisme

$$H_1(S) \cong \bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k) \oplus H_1(\Gamma_S)$$

van groepen.

*Bewijs.* We construeren eerst een topologische ruimte  $S'$  vanuit  $S$  als volgt. Voor ieder punt  $x \in S$  waarin twee oppervlakken elkaar raken zullen we de oppervlakken uit elkaar trekken en een lijnstuk trekken tussen de punten die elkaar raakten. Als we dit hebben gedaan zullen we voor ieder oppervlak  $S_k$  de raakpunten die op  $S_k$  liggen naar een enkel punt op  $S_k$  toetrekken. Als we een tak hebben gecreëerd die van  $S_k$  weer naar  $S_k$  gaat, dan zal dit een lus worden die het uiteindelijke raakpunt met zichzelf verbindt. Zie ook figuur 11. We schrijven  $y_k \in S_k$  voor het overgebleven raakpunt op  $S_k$ . Laat  $S'$  de resulterende ruimte zijn en merk op dat  $S'$  homotopie-equivalent is met  $S$ .

Een voordeel van  $S'$  is dat ieder oppervlak  $S_k$  als retract van  $S'$  optreedt. Immers is de afbeelding  $r_k : S' \rightarrow S_k$  gedefinieerd door  $r_k|_{S_k} = \text{id}_{S_k}$  en  $r_k(x) = y_k$  voor  $x \notin S_k$  continu. Zijn  $\iota_k : S_k \rightarrow S'$  de inbeddingsafbeeldingen

en zij  $f_* : \bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k) \rightarrow H_1(S')$  de afbeelding  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (\iota_1)_*(\alpha_1) + \dots + (\iota_n)_*(\alpha_n)$ . De afbeelding  $g_* : H_1(S') \rightarrow \bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k)$  gedefinieerd door  $\alpha \mapsto (r_*^1(\alpha), r_*^2(\alpha), \dots, r_*^n(\alpha))$  voldoet aan  $g_* \circ f_* = \text{id}_{\bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k)}$ , dus  $f_*$  is injectief.

Merk verder op dat we  $\Gamma_S$  kunnen inbedden in  $S'$  door ieder hoekpunt van  $\Gamma_S$  dat hoort bij een oppervlak  $S_k$  te sturen naar het punt  $y_k \in S_k$ , en ieder lijnstuk dat twee hoekpunten verbindt te sturen naar het lijnstuk op  $S'$  dat de bijbehorende oppervlakken verbindt. Zij  $\mu : \Gamma_S \rightarrow S'$  de inbeddingsafbeelding.

Zij  $\pi : S' \rightarrow \Gamma_S$  de afbeelding die ieder punt op een oppervlak  $S_k$  stuurt naar het hoekpunt op  $\Gamma_S$  dat bij dit oppervlak hoort en iedere kant die oppervlakken  $S_k, S_l$  verbindt te sturen naar de bijbehorende tak op  $\Gamma_S$  die de hoekpunten verbindt die bij  $S_k$  en  $S_l$  horen. Zij  $\sigma \in C_1(\Gamma_S)$  een singuliere 1-simplex. Merk nu op dat  $\mu \circ \sigma$  een singuliere 1-simplex is die onder  $\pi$  weer naar  $\sigma$  wordt gestuurd. Dus iedere keten in  $C_1(\Gamma_S)$  heeft op soortgelijke wijze een keten in  $C_1(S')$  die onder  $\pi$  naar ons keten wordt gestuurd, waardoor we zien dat de afbeelding  $\pi_* : H_1(S') \rightarrow H_1(\Gamma_S)$  surjectief is.

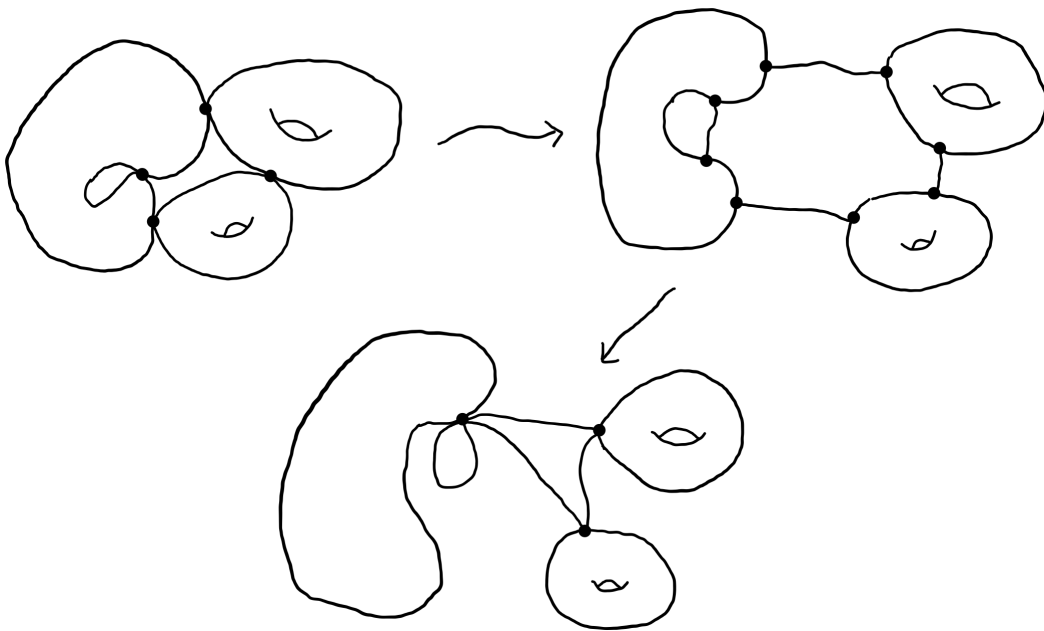
Zij  $\alpha = [c] \in \text{im}(f_*) \subset H_1(S')$ . De keten  $c$  bevat alleen 1-simplices die in hun geheel bevat zijn op een oppervlak  $S_k$ . Hieruit volgt dat deze simplices onder  $\pi$  naar de punten op  $\Gamma_S$  worden gestuurd. Dus  $f_*(\alpha) = [d]$  met  $d \in C_1(\Gamma_S)$  zal de klasse zijn van een 1-keten bestaande uit constante 1-simplices. Constante 1-simplices zijn randen, dus  $f_*(\alpha) = 0$ . We zien dat  $\text{Im}(f_*) \subseteq \ker(\pi_*)$ .

We zien ook dat  $H_2(\Gamma_S)$  triviaal is, immers is  $\Gamma_S$  een graaf. Dit betekent dat iedere 2-cykel van  $\Gamma_S$  ook een 2-rand is. We weten dat de randafbeelding tussen homologiegroepen randen naar het triviale element stuurt, dus  $B_1(\Gamma_S) = \text{Im}(\partial : C_2(\Gamma_S) \rightarrow C_1(\Gamma_S)) = 0$ . We zien dat er een kanoniek isomorfisme  $Z_1(\Gamma_S) \cong H_1(\Gamma_S)$  bestaat. Zij  $c \in Z_1(S')$  en stel dat  $[c] \in \ker(\pi_*)$ . Schrijf  $\pi_{\#}$  voor de geïnduceerde afbeelding  $Z_1(S') \rightarrow Z_1(\Gamma_S)$ . We merken op dat  $\pi_{\#}(c) = 0$  wegens het isomorfisme nu ook moet gelden, waaruit volgt dat  $\pi_{\#}(c)$  bestaat uit de formele som van constante paden. Als er een constant pad op het inwendige van een tak zit, dan was dit pad voor het toepassen van  $\pi_{\#}$  op  $c$  ook al een constant pad op dezelfde tak. Hierdoor is dit pad een 1-rand op  $S'$  en daarmee triviaal in  $H_1(S')$ . Als er een constant pad op een knoop zit, dan was dit pad voor het toepassen van  $\pi_{\#}$  op  $c$  een pad dat geheel bevat zat op een oppervlak. Deze paden zitten hiermee in het beeld van  $f_*$ . Dus  $\ker(\pi_*) \subseteq \text{Im}(f_*)$ .

We krijgen met de vorige opmerkingen de volgende korte exacte rij.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k) \xrightarrow{f_*} H_1(S') \xrightarrow{\pi_*} H_1(\Gamma_S) \longrightarrow 0$$

Als we teruggaan naar de afbeelding  $g_*$  of de geïnduceerde afbeelding  $\mu_*$  van  $\mu$ , dan zien we hiermee dat onze rij ook daadwerkelijk splitst. We krijgen dus een isomorfisme  $H_1(S') \cong \bigoplus_{k=1}^n H_1(S_k) \oplus H_1(\Gamma_S)$ . De ruimtes  $S$  en  $S'$  waren homotopie-equivalent, waardoor het gewenste isomorfisme volgt. □



Figuur 11: Het construeren van een homotopie-equivalente ruimte  $S'$  vanuit  $S$ .

Zij  $(S, \mathcal{T}, X, \sim)$  een oppervlakkencomplex met  $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_{|\mathcal{T}|}\}$  en zij  $f : S \rightarrow S$  een homeomorfisme. Merk eerst op dat een oppervlak  $S_k$  op dit oppervlakkencomplex weer naar een oppervlak  $S_l$  gestuurd wordt onder de afbeelding  $f$ . Immers zullen  $S_k$  en  $f(S_k)$  onder  $f|_{S_k}$  homeomorf zijn met elkaar. Een verbindingspunt van  $S$  die oppervlakken  $S_k$  en  $S_l$  verbindt zal op soortgelijke wijze gestuurd worden naar een verbindingspunt van de oppervlakken  $f(S_k)$  en  $f(S_l)$ . We krijgen hierdoor een geïnduceerde afbeelding  $f' : \Gamma_S \rightarrow \Gamma_S$  tussen topologische grafen.

De laatste stelling van deze scriptie zal ons nu een stelling geven voor oppervlakkencomplexen vergelijkbaar met stellingen 3.8 en 4.9.

**Stelling 5.5.** *Zij  $(S, \mathcal{T}, X, \sim)$  een oppervlakkencomplex met  $\mathcal{T} = \{S_1, \dots, S_{|\mathcal{T}|}\}$  zodat ieder boloppervlak in het complex aan minstens 3 oppervlakken grenst en zodat  $S$  niet homeomorf is met een torus. Zij  $f : S \rightarrow S$  een periodiek automorfisme dat aan de volgende eisen voldoet.*

- *De afbeelding  $f$  werkt triviaal op  $H_1(S)$ .*
- *Ieder oppervlak in het oppervlakkencomplex dat aan precies 1 ander oppervlak grenst wordt naar zichzelf gestuurd onder  $f$ .*
- *Als  $H_1(\Gamma_S) \cong \mathbb{Z}$ , dan stuurt  $f$  een oppervlak naar zichzelf.*
- *Als  $f$  een oppervlak van geslacht 0 op het oppervlakkencomplex naar zichzelf stuurt, dan is  $f$  beperkt tot dit oppervlak een oriëntatie-bewarend automorfisme.*
- *Als  $f$  een oppervlak uit het oppervlakkencomplex naar zichzelf stuurt, dan werkt de groep  $G = \langle f \rangle$  orbifold op dit oppervlak.*

*Dan geldt er dat  $f = id$ .*

*Bewijs.* Zij  $f' : \Gamma_S \rightarrow \Gamma_S$  het geïnduceerde homeomorfisme van de oppervlakkengraaf. Met behulp van stelling 5.4 zien we dat  $f'$  triviaal werkt op  $H_1(\Gamma_S)$ . Vanwege de tweede en derde eis van de huidige stelling voldoet  $f'$  nu ook aan de eisen van stelling 4.9. Dus  $f' = id$ . In het bijzonder houdt dit in dat ieder oppervlak op  $S$  onder onze afbeelding  $f$  naar zichzelf wordt gestuurd.

Zij  $Y$  een samenhangend, compact en oriënteerbaar oppervlak van geslacht  $g$  op het oppervlakkencomplex. Als  $g > 0$ , dan volgt uit propositie 3.7 dat  $f$  triviaal werkt op alle homologiegroepen van  $Y$ . Als  $g = 0$ , dan werkt  $f$  triviaal op  $H_2(Y)$  vanwege onze vierde eis. Uit gevolg 1.11 volgt dat  $f$  ook triviaal werkt op  $H_0(Y)$ . Alle overige homologiegroepen zijn vanwege stelling 2.9 triviaal, dus  $f$  werkt ook in dit geval triviaal op alle homologiegroepen van  $Y$ . Uit propositie 3.9 volgt dat  $f|_Y = id_Y$  of  $f$  heeft hoogstens  $\chi(Y) = 2 - 2g$  vaste punten op  $Y$ .

Als  $g > 1$ , dan impliceert dit dat  $f$  de identiteit is op  $Y$ . De geïnduceerde afbeelding  $f' : \Gamma_S \rightarrow \Gamma_S$  was de identiteit, dus alle verbindingspunten van  $S$  zijn vaste punten van  $f$ .  $S$  is niet homeomorf met een oppervlak van geslacht 1, dus als  $g = 1$  dan zal  $Y$  een verbindingspunt bevatten en zal  $f$  daarmee een vast punt hebben op  $Y$ . Uit de eerdere opmerking volgt nu dat  $f|_Y = id_Y$  moet gelden. Voor  $g = 0$  is de aanname dat  $Y$  minstens 3 verbindingspunten bevat, dus  $f$  heeft minstens 3 vaste punten op  $Y$ . We zien dat  $f|_Y = id_Y$  weer moet gelden.

We zien dat  $f$  de identiteit is op ieder oppervlak in het oppervlakkencomplex, dus  $f = id_S$ .

□

## 6 Discussie

We zullen nu bespreken wat een interessant vervolgonderzoek zal zijn. In hoofdstuk 1 introduceerden we een zogeheten orbifold werking. De structuur die de werking geeft biedt ons voldoende informatie om een paar grote stellingen te bewijzen. Onze vraag zal nu zijn in hoeverre we de structuur echt nodig hebben.

Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak en zij  $f : S \rightarrow S$  een periodiek homeomorfe zodat de standaardwerking  $G := \langle f \rangle \curvearrowright S$  een orbifold werking is. Veronderstel dat  $f \neq \text{id}$  geldt en laat  $m \in \mathbb{Z}_{>1}$  de orde van  $f$  zijn. Zij  $p \in \mathbb{Z}_{>1}$  een priemdelers van  $m$  en schrijf  $m = n \cdot p$  voor  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Schrijf  $H := \langle f^n \rangle$  voor de groep voortgebracht door  $f^n$ . We merkten al eerder op dat de standaardwerking  $H \curvearrowright S$  een orbifold werking is en dat de vertakkingspunten van de quotiëntafbeelding  $\pi : S \rightarrow S/H$  discreet verdeeld liggen over  $S$ . Wegens de compactheid zullen dit dan ook eindig veel punten zijn.

Voor  $x \in S$  zal de lengte van de baan van  $x$  onder de werking van  $H$  bestaan uit precies 1 of  $p$  elementen, omdat de lengte van de baan de orde van  $H$  moet delen. We merken op dat de vertakkingspunten van  $\pi$  nu precies overeenkomen met de elementen  $x \in S$  waarvan de baan uit 1 element bestaat, oftewel de vaste punten van  $f^n$ . We zien hiermee dat  $f^n$  eindig veel vaste punten heeft. Ieder vast punt van  $f$  is een vast punt van  $f^n$ , dus daarmee volgt dat  $f$  ook eindig veel vaste punten heeft. Ons eerste vermoeden is dat we deze eigenschap altijd krijgen als we een periodiek en oriëntatie-bewarend homeomorfe nemen.

**Vermoeden 1.** *Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak. Zij  $f : S \rightarrow S$  een periodiek en oriëntatie-behoudend homeomorfe. Als  $f \neq \text{id}_S$ , dan heeft  $f$  eindig veel vaste punten.*

We merken hierbij op dat dit vermoeden onwaar is als we de eis weghalen dat  $f$  oriëntatie-bewarend moet zijn. Immers kunnen we de eenheidsbol  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  spiegelen door het  $xy$ -vlak. Dit geeft ons een periodiek homeomorfe ongelijk aan de identiteit met oneindig veel vaste punten.

Het is niet meteen duidelijk of de periodiciteit een nodige eis zal zijn voor dit vermoeden. Wel zal het intuïtief nodig zijn om 'kleine verstoringen' van het oppervlak te vermijden. Bekijk hierbij als voorbeeld de afbeelding  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  gedefinieerd door  $z \mapsto e^{2\pi i|z|} \cdot z$ . Iedere element  $z \in \mathbb{D}$  met  $|z| \in \{0, 1\}$  is een vast punt van  $g$ , terwijl  $g \neq \text{id}_{\mathbb{D}}$ . Stel dat we een open omgeving  $U$  op  $S$  nemen dat homeomorf is met  $\mathbb{D}$  en kies een homeomorfe  $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ . Definieer  $h : S \rightarrow S$  door  $h(z) = (\phi^{-1} \circ g \circ \phi)(z)$  als  $z \in U$  en  $h(z) = z$  als  $z \notin U$ . Dan lijkt het hiermee dat we een homeomorfe hebben gevonden dat oneindig veel vaste punten heeft maar ongelijk is aan de identiteit.

Een logische vervolgvraag zal nu zijn of we daadwerkelijk alle structuur hebben gekregen waar we mee werkten.

**Vermoeden 2.** *Zij  $S$  een compact, samenhangend en oriënteerbaar oppervlak. Zij  $f : S \rightarrow S$  een periodiek en oriëntatie-behoudend homeomorfe. Dan is de natuurlijke werking van  $G := \langle f \rangle$  op  $S$  een orbifold werking.*

We merken op dat het tweede vermoeden sterker is dan het eerste vermoeden, immers volgt het eerste vermoeden direct uit het tweede vermoeden. We zien hierdoor dat de eisen voor het vermoeden dan ook cruciaal blijven.

Als het tweede vermoeden toch blijkt te kloppen, dan hebben we met de resultaten uit deze scriptie relatief veel structuur op een dergelijk automorfe  $f$ . Zelfs als alleen het eerste vermoeden zou kloppen, dan hebben we ook zonder de resultaten uit deze scriptie nog erg veel structuur. In dit geval zal het interessant zijn om te kijken of het mogelijk is om een lichte eis aan  $f$  toe te voegen zodat de natuurlijke werking van  $G := \langle f \rangle$  op een oppervlak altijd een orbifold werking geeft. Men kan ook kijken naar het effect als we aannemen dat ieder homeomorfe ook een diffeomorfe is, al zullen we dan hoogstwaarschijnlijk richting de structuur van een Riemann-oppervlak gaan.

Het zal ook interessant zijn om te onderzoeken of een stelling vergelijkbaar met stelling 3.8 mogelijk is voor 3-variëteiten. In dit geval zullen we waarschijnlijk wel een nieuwe structuur moeten leggen op deze variëteiten zoals we hadden met een orbifold werking op een oppervlak. Met 3-variëteiten hebben we nog wel het geluk dat ze altijd trianguleerbaar zijn, zoals in het boek van Moise [6] besproken wordt. Echter zal het waarschijnlijk een erg ingewikkeld onderzoek blijken. Al met al blijft het erg interessant om in een vervolgonderzoek dit soort aanpassingen te analyseren.

## Referenties

- [1] Benson Farb en Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton University Press, Princeton, 2012.
- [2] William Fulton. *Algebraic Topology: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics 153. Springer, New York, 1995.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge university press, Cambridge, 2019.
- [4] Adolf Hurwitz. *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*. *Mathematische Annalen*, 41(3):421–424, 1892. <https://doi.org/10.1007/BF01443420>, site bezocht op: 24 april 2021.
- [5] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate texts in mathematics 202. Springer, New York, 2011.
- [6] Edwin E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Graduate texts in mathematics 47. Springer-Verlag New York, New York, 2013.
- [7] Andrew Putman. *The action on Homology of Finite Groups of Automorphisms of Surfaces and Graphs*. <https://www3.nd.edu/~andyp/notes/FiniteOrderHomology.pdf>, site bezocht op: 2 februari 2021.