



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Verbondenheid in grafen met lage boombreedte: Algoritmische berekening van de Shapleywaarde

Rijgersberg, A.A.

Citation

Rijgersberg, A. A. *Verbondenheid in grafen met lage boombreedte: Algoritmische berekening van de Shapleywaarde.*

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171141>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

A.A. Rijgersberg

Verbondenheid in grafen met lage
boombreedte

Algoritmische berekening van de Shapleywaarde

Bachelorscriptie

1 september 2022

Scriptiebegeleider: Prof. dr. F.M. Spieksma



Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

1 Introductie

Na de aanslagen op het World Trade Center in New York in 2001 rees de urgente vraag naar het brein achter de organisatie. Deze vraag werd na verloop van tijd beantwoord, maar wiskundigen vroegen zich af of dit probleem ook speltheoretisch aangepakt kon worden. Er is een netwerk gemaakt van de onderlinge relaties tussen alle betrokkenen. Al snel werd vermoed dat degene met de meeste verbindingen de belangrijkste was uit het terrorismenetwerk. Meer specifiek, als we het netwerk als graaf presenteren, dat de knoop met de hoogste Shapleywaarde ook de belangrijkste persoon representeert. Echter is de Shapleywaarde computationeel heel lastig. Om deze te berekenen moest het netwerk kleiner gemaakt worden, waardoor de gevonden waarde afwijkt van de werkelijke waarde.

In 2018 hebben T.C. Van der Zanden, H.L. Bodlaender en H.J.M. Hamers [9] een algoritme ontwikkeld, waarmee de Shapleywaarde van het totale netwerk berekend kan worden in een fractie van de tijd die nodig was om het gereduceerde probleem op te lossen. In deze scriptie wordt dit algoritme besproken en hoe dit algoritme de Shapleywaarde van een knoop kan berekenen. Hiervoor wordt eerst de benodigde achtergrond samengevat en doorgenomen en worden enkele stellingen bewezen.

De bedoeling was eerst om een code te schrijven aan de hand van het algoritme om het vervolgens toe te kunnen passen op metronetwerken. Echter bleek dit een onbegaanbaar pad te zijn. In het artikel dat besproken wordt in deze scriptie staat een aantal foutjes, die gedeeltelijk repareerbaar bleken. Ook zijn niet alle details volledig uitgewerkt in het artikel. Dit maakte het schrijven van een correcte code te tijdrovend, hetgeen ertoe leidde dat dit plan werd stilgelegd na een jaar. Besloten is toen om meer te richten op het toelichten van het algoritme en, waar mogelijk, de kleine foutjes te repareren.

Echter is dit ook maar gedeeltelijk gelukt. De achtergrondartikelen zijn vaak wat kort door de bocht. De stellingen zo helder mogelijk te formuleren en bewijzen was hierdoor wat lastig. Het kort door de bocht zijn, geldt in het bijzonder voor het artikel met het algoritme. Er is zeer veel tijd besteed aan het identificeren en repareren van fouten in het algoritme, en toch is het nog steeds niet gelukt om dit zodanig te interpreteren dat het goede uitkomsten geeft. Het is in dit licht dan ook opmerkelijk dat [9] in 2022 nog steeds niet gepubliceerd is. Wel is het gelukt te identificeren waar in het algoritme iets misloopt.

2 Graafeigenschappen

In dit hoofdstuk bespreken we een aantal eigenschappen van grafen die nodig zijn voor het algoritme in hoofdstuk 3. We gebruiken de volgende notatie.

Zij G een graaf. Dan noteren we met $V(G)$ de verzameling knopen van G en met $E(G)$ de verzameling takken.

Zij H een graaf. Dan noteren we met $H \preceq G$ ($G \succeq H$) dat H een deelgraaf is van G .

Verder geldt voor alle $W \subseteq V(G)$ dat $G[W]$ de deelgraaf van G is die wordt geïnduceerd door W . Er geldt dus $G[W] = (W, E')$ met $E' = \{xy \in E(G) : x, y \in W\}$.

Merk op, dat wij enkel samenhangende, enkelvoudige grafen beschouwen.

2.1 Boombreedte

De boombreedte is een maat voor de “bomigheid” van een graaf. Hoe hoger de boombreedte van een graaf, hoe minder de graaf overeenkomt met een boom.

Voordat we boombreedte kunnen definiëren, moeten we eerst het concept boomdecompositie introduceren.

Definitie 2.1. Zij $G = (V, E)$ een graaf. Een *boomdecompositie* is een paar (T, \mathcal{X}) , waar T een boom is en $\mathcal{X} = \{X_t \subseteq V(G) : t \in V(T)\}$ een collectie van deelverzamelingen van knopen van G zodanig dat

1. $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V(G)$;
2. voor alle $uv \in E(G)$ is er een $t \in V(T)$ zodanig dat $u, v \in X_t$;
3. voor alle $v \in V(G)$ induceert $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$ een deelboom van T .

De elementen van \mathcal{X} heten de *zakken* behorende bij de respectievelijke knopen van T .

Voorbeeld 2.1. Beschouw de graaf G uit Figuur 1a. Een boomdecompositie is (T, \mathcal{X}) , met T de graaf uit Figuur 1b, en $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_6\}$ met $X_1 = \{B, C, F\}$, $X_2 = \{B, D, E, F\}$, $X_3 = \{A, B, D\}$, $X_4 = \{H, D, E, F\}$, $X_5 = \{E, F, H, I\}$, $X_6 = \{G, D, H\}$.

We zien al snel dat alle knopen uit G in een zak zitten, dus (T, \mathcal{X}) voldoet aan voorwaarde 1. Nu kunnen we alle takken afgaan en controleren of de uiteinden in dezelfde zak voorkomen. Bijvoorbeeld de tak BD ; er geldt $B, D \in X_2$. Dit voor alle takken nagaan zien we dat (T, \mathcal{X}) voldoet aan voorwaarde 2.

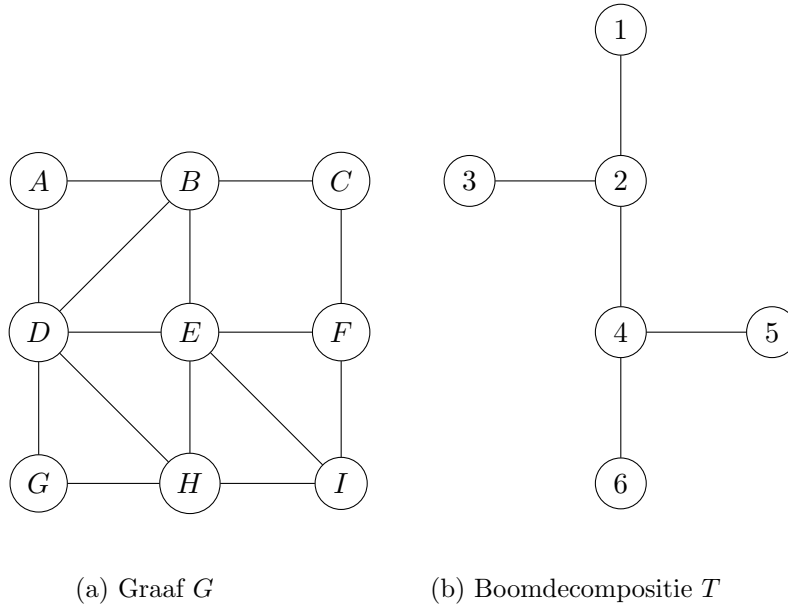
Vervolgens moeten we voor elke knoop $x \in V(G)$ nagaan, of $T' = (V', E')$ met $V' = \{t \in T : x \in X_t\}$ en $E' = E(G[V'])$ een samenhangende deelboom van T is. Een triviaal voorbeeld is alles in één zak stoppen. Neem dus bijvoorbeeld voor $x = F$: $V' = \{1, 2, 4, 5\}$. We zien dat dit een deelboom van T induceert. Door dit te doen voor alle $v \in V(G)$ vinden we dat (T, \mathcal{X}) voldoet aan voorwaarde 3. Dus (T, \mathcal{X}) is een boomdecompositie van G .

Nu we weten hoe een boomdecompositie wordt gemaakt, kunnen we praten over boombreedte.

Definitie 2.2. De *breedte* van een boomdecompositie is $\beta(T, \mathcal{X}) = \max_{t \in V(T)} |X_t| - 1$.

De breedte van een boomdecompositie is dus de grootte van de grootste zak min één.

Merk op dat voor alle decomposities (T, \mathcal{X}) van een graaf G met $E(G) \neq \emptyset$ geldt dat $\beta(T, \mathcal{X}) \geq 1$.



Figuur 1: Boomdecompositie van een graaf

Immers moet voor elke $uv \in E(G)$ gelden dat er een $t \in V(T)$ is zodat $u, v \in X_t$. Dus er is een zak die minstens twee elementen bevat.

De boombreedte is de kleinst mogelijke breedte van een boomdecompositie. Derhalve hebben we de volgende definitie.

Definitie 2.3. De *boombreedte* van een graaf is gegeven door $\text{tw}(G) = \min_{(T, \mathcal{X})} \beta(T, \mathcal{X})$

Voorbeeld 2.2. Zij \mathcal{T} een boom. Dan geldt $\text{tw}(\mathcal{T}) = 1$. Om dit te laten zien bouwen we een boomdecompositie. Aan alle $t = uv \in E(\mathcal{T})$ voegen we een $t \in V(T)$ toe met $X_t = \{u, v\}$. Laat $r \in V(T)$ een knooppunt van graad 1 zijn (in een boom met $|V(T)| > 1$ bestaat dit altijd). Dan kunnen we r opvatten als de wortel van de boom \mathcal{T} . Nu is er een unieke $t_0 \in V(T)$ zodat $r \in X_{t_0}$. Kies t_0 als wortel van T . Om de takken toe te voegen lopen we alle zakken langs. Zij $t \in V(t)$ willekeurig gegeven. Er geldt dat er een $u, v \in V(\mathcal{T})$ zijn met v het kind van u , gezien vanuit wortel r , zodanig dat $X_t = \{u, v\}$.

Voeg nu tak ts toe aan $E(T)$ dan en slechts dan als $v \in X_s, t \neq s$.

We vinden dus boomdecompositie (T, \mathcal{X}) voor \mathcal{T} . Dat dit een boomdecompositie is, is per constructie duidelijk.

Er geldt dus voor alle $t \in V(T)$ dat $|X_t| = 2$. Dus $\beta(T, \mathcal{X}) = 1$. Er geldt immers $\text{tw}(\mathcal{T}) \leq \beta(T, \mathcal{X}) = 1$, en $\text{tw}(G) \geq 1$ voor alle grafen G met $|E(G)| > 1$.

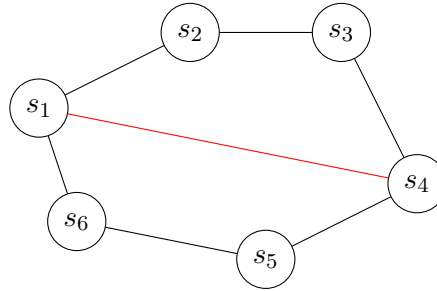
Voor een alternatief bewijs hiervan, zie Voorbeeld 2.4.

Voorbeeld 2.3. Beschouw G uit Voorbeeld 2.1. Hier hebben we een decompositie gevonden met breedte 3. Hieruit volgt dat geldt $1 \leq \text{tw}(G) \leq 3$.

2.2 Triangulaties

Voor de boombreedte is er nog een aantal equivalente definities. Een daarvan zullen wij later gebruiken om een mooie eigenschap van de boombreedte te laten zien. Deze definitie is gebaseerd op triangulaties. Hiervoor zullen wij eerst getrianguleerde grafen definiëren.

Definitie 2.4. Zij G een graaf en zij $\sigma = (s_1 \dots s_n)$ een enkelvoudige kring in G . Een *koorde* is een tak $e \in E(G)$ zodanig dat er een $j \neq i + 1 \pmod{n}$ met $e = s_i s_j$.



Figuur 2: Enkelvoudige kring met een koorde

Een koorde is dus een tak in een enkelvoudige kring tussen twee niet opeenvolgende knopen. We zien in Figuur 2 dat $s_1 s_4$ een koorde is van de enkelvoudige kring $(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6)$.

Definitie 2.5. Een graaf G heet *getrianguleerd* als iedere enkelvoudige kring van lengte minstens 4 een koorde heeft.

Definitie 2.6. Zij G een graaf. Een *triangulatie* van G is een getrianguleerde graaf H zodanig dat $G \preceq H$. We noteren dit met $H \triangleright G$.

Definitie 2.7. Zij G een graaf. Een deelverzameling knopen $K \subseteq V(G)$ heet een *kliëk* als voor alle $i, j \in K$ geldt $ij \in E(G)$.

Definitie 2.8. Zij G een graaf. Het *kliëkgetal* $\omega(G)$ is de grootte van de grootste kliëk in G ; dat wil zeggen $\omega(G) = \max\{|S| : S \subseteq V(G), \forall i, j \in S, ij \in E(G)\}$.

Een kliëk kunnen we dus opvatten als een volledige deelgraaf. We noteren met K_n een kliëk van n knopen. Hierdoor kunnen we het kliëkgetal interpreteren als de grootte van de grootste volledige deelgraaf van G .

Er geldt dat $\text{tw}(G) = \min_{H: H \triangleright G} \{\omega(H) - 1\}$. Dit is inzichtelijk voor de K_n ; immers is de K_n reeds getrianguleerd voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus er zou volgen dat $\text{tw}(K_n) = \omega(K_n) - 1 = n - 1$. Dit is ook het geval.

We zullen deze uitspraak verderop aantonen met behulp van een insluitingsargument. Voordat we dit kunnen doen, moeten we eerst een aantal eigenschappen laten zien.

Definitie 2.9. Laat Z een eindige verzameling zijn, en zij $\mathcal{Z} = \{Z_i \subseteq Z : i \in I\}$ een collectie deelverzamelingen van Z geïndiceerd door elementen uit een zekere indexverzameling I . Er geldt dat \mathcal{Z} de *Helly-eigenschap* heeft als voor alle $J \subseteq I$ met $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$ voor alle $i, j \in J$, geldt dat $\bigcap_{j \in J} Z_j \neq \emptyset$.

Lemma 2.1 ([6]). *Zij T een boom. Dan voldoet iedere familie $\{T_i : i \in I\}$ van deelbomen van T aan de Helly-eigenschap, waar de doorsnede van grafen als volgt wordt genomen:*

$G_1 \cap G_2 = (V(G_1) \cap V(G_2), E(G_1) \cap E(G_2))$. *De doorsnede is leeg als de knopenverzameling van de doorsnede leeg is.*

Bewijs. We werken met inductie naar $|J|$. Voor alle verzamelingen $J \subseteq I$ waarvoor

$T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i, j \in J$, met $|J| = 2$ is de stelling trivialeter waar.

Stel dat de stelling waar is voor alle $J \subseteq I$, $i, j \in J$ met $|J| \leq k$. Dan geldt $\bigcap_{j \in J} T_j \neq \emptyset$.

Zij $\{T_{i_1}, \dots, T_{i_{k+1}}\}$ een familie deelbomen van T met de eigenschap dat $T_{i_l} \cap T_{i_r} \neq \emptyset$ voor alle $1 \leq l < r \leq k + 1$.

Volgens de inductiehypothese zijn er $x, y, z \in V(T)$ zodat $x \in V\left(\bigcap_{j=1}^k T_{i_j}\right)$, $y \in V(T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}})$

en $z \in V\left(\bigcap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}\right)$.

Zij π_{ij} de graaf corresponderende met de unieke enkelvoudige keten in T tussen i en j . Wegens de enkelvoudigheid komt geen enkele knoop meer dan éénmaal voor. Wegens het feit dat T een boom is, is de keten uniek.

Er geldt $x, y \in V(T_{i_1})$, $y, z \in V(T_{i_{k+1}})$ en voor $l \in \{2, \dots, k\}$ geldt $x, z \in V(T_{i_l})$. Dus π_{xy} is bevat in T_{i_1} , π_{yz} is bevat in $T_{i_{k+1}}$ en π_{xz} is bevat in T_{i_j} voor alle $j \in \{2, \dots, k\}$. Merk op dat $\pi_{xy} \cap \pi_{yz} \supseteq \{y\} \neq \emptyset$.

Stel dat q het eerste knooppunt op de keten van x naar y is met q een knooppunt in π_{yz} . Dan is de keten die ontstaat door in π_{xy} van x naar q te lopen, en vervolgens in π_{yz} van q naar z precies π_{xz} wegens de uniciteit.

Dus $\bigcap_{j=1}^{k+1} T_{i_j} \supseteq \pi_{xy} \cap \pi_{yz} \cap \pi_{xz} \neq \emptyset$.

Dus, met inductie, voldoet $\{T_i : i \in I\}$ aan de Helly-eigenschap. □

Hiermee kunnen we het volgende lemma formuleren.

Lemma 2.2 ([3]). *Zij G een graaf met boomdecompositie (T, \mathcal{X}) . Zij $W \subseteq V(G)$ een klik in G , dan is er een $i \in V(T)$ zodanig dat $W \subseteq X_i$.*

Bewijs. Zij $T_x = \{j \in V(T) : x \in X_j\}$. Wegens eis 3 van Definitie 2.1 is $\{T_x : x \in V(G)\}$ een collectie deelbomen is van T . Dus met Lemma 2.1, met $I = V(G)$, volgt dat $\{T_x : x \in V(G)\}$ voldoet aan de Helly-eigenschap. Aangezien W een klik is, volgt dat voor alle $i, j \in W$ er een $t \in V(T)$ is zodat $i, j \in X_t$. Dus $\bigcap_{x \in W} T_x \neq \emptyset$, zeg er is een $t \in V(T_x)$ met $t \in \bigcap_{x \in W} V(T_x)$.

Dit impliceert dat $x \in X_t$ voor alle $x \in W$. Dus $X \subseteq X_t$. □

Gevolg 2.3. Zij G een graaf. Dan geldt $\text{tw}(G) \geq \omega(G) - 1$.

Dit volgt direct uit Lemma 2.2. Immers, hieruit volgt dat iedere boomdecompositie een zak heeft die de grootste klik bevat. Dus de grootte van de grootste zak is minstens $\omega(G)$. De definitie van de boombreedte impliceert dus de uitspraak.

Ons doel is de boombreedte echter nog beter af te schatten met behulp van een bovengrens. Hiervoor zijn nog twee definities nodig.

Definitie 2.10. Zij G een graaf. Een knoop $v \in V(G)$ heet *simpliciaal* als geldt dat v met zijn omgeving een klik vormt. Dus voor alle $x, y \in \{u : uv \in E(G)\}$ geldt dat $xy \in E(G)$.

Hiermee kunnen we de volgende definitie formuleren.

Definitie 2.11. Zij G een graaf. Een *perfecte eliminatieordering* is een ordening v_1, \dots, v_n van $V(G)$, $n = |V(G)|$ zodat voor alle $i \geq 1$ geldt, dat v_i simpliciaal is in de deelgraaf van G geïnduceerd door de knopenverzameling $V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

Een perfecte eliminatieordering bestaat niet altijd.

Stelling 2.4. *Een graaf G heeft een perfecte eliminatieordering dan en slechts dan als G getrianguleerd is.*

Voor het bewijs verwijzen wij de lezer naar [8]. Het betreft Stelling 1 gecombineerd met Lemma 1.

Met deze kennis kunnen wij het volgende lemma bewijzen.

Lemma 2.5 ([4]). *Zij G getrianguleerd. Dan geldt $\text{tw}(G) \leq \omega(G) - 1$.*

Bewijs. Zij v_1, \dots, v_n een perfecte eliminatieordering. Deze bestaat wegens Stelling 2.4.

Definieer de verzameling $\Phi(v_j) = \{v_i : v_i v_j \in E(G), i < j\}$. Dit is dus de verzameling van burens van v_j die eerder verwijderd worden. We zullen met behulp van inductie naar $i \geq \omega(G)$ boomdecomposities (T_i, \mathcal{X}_i) construeren van $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ zodat voor alle $j \leq i$ er een $t_i \in V(T_i)$ is met $\{v_j\} \cup \Phi(v_j) \subseteq X_{t_i}$ en breedtes $\omega(G) - 1$.

Omdat (T_n, \mathcal{X}_n) een boomdecompositie is van G met breedte $\omega(G) - 1$ is hiermee het lemma bewezen. Laat nu $i = \omega(G)$. Doe $v_1, \dots, v_{\omega(G)}$ in één zak, zeg $X_{\omega(G)}$. Dit geeft een boomdecompositie $(T_{\omega(G)}, \mathcal{X}_{\omega(G)})$ van $G[\{v_1, \dots, v_{\omega(G)}\}]$ met één knooppunt, en boombreedte $\omega(G) - 1$. Zij $i > \omega(G)$. Met de inductiehypothese hebben we een boomdecompositie $(T_{i-1}, \mathcal{X}_{i-1})$ van $G[\{v_1, \dots, v_{i-1}\}]$ die voldoet aan bovenstaande vereisten. Er zijn nu twee mogelijkheden.

Als $\Phi(v_i) \neq \emptyset$, laat $v_h = \text{argmax}_{v_j \in \Phi(v_i)}(j)$. Dan is v_h de laatste knoop uit $\Phi(v_i)$ die verwijderd is. Er is een $t \in V(T_{i-1})$ zodat $\{v_h\} \cup \Phi(v_h) \subseteq X_t$, volgens Lemma 2.2.

Bouw nu T_i als volgt op: $V(T_i) = V(T_{i-1}) \cup \{i\}$ met $E(T_i) = E(T_{i-1}) \cup \{ti\}$.

Laat $X_i = \{v_i\} \cup \Phi(v_i)$. Er geldt $|X_i| = 1 + |\Phi(v_i)| \leq \omega(G)$. Dus $\beta(T_i, \mathcal{X}_i) = |X_{\omega(G)}| - 1 = \omega(G) - 1$.

Bovendien voldoet deze boomdecompositie duidelijk aan de eerste twee eisen. Er geldt $\Phi(v_i) \subseteq \Phi(v_h) \cup \{v_h\}$. De verzameling X_i bevat enkel het nieuw toegevoegde element v_i , waarvoor dus geen verbondenheidseisen zijn, en de elementen van $\Phi(v_i) \subseteq \Phi(v_h) \cup \{v_h\} \subseteq X_t$. Dus deze leveren ook een samenhangende deelboom, aangezien $ti \in E(T_i)$.

Als $\Phi(v_i) = \emptyset$, kies $t \in V(T_{i-1})$ willekeurig en volg dezelfde constructie als hierboven. □

Gevolg 2.6. Zij G getrianguleerd. Dan geldt $\text{tw}(G) = \omega(G) - 1$.

Stelling 2.7. [[4]] *Zij G een graaf. Dan geldt $\text{tw}(G) = \min_{H: H \triangleright G} \{\omega(H) - 1\} = \min_{H: H \triangleright G} \text{tw}(H)$.*

Alvorens we bovenstaande stelling kunnen bewijzen, hebben we nog een aantal concepten en stellingen nodig.

Definitie 2.12. Een k -boom op k knopen is een klik op k knopen. Een k -boom op n knopen $n > k$ wordt als volgt opgebouwd. Zij T_n^k een k -boom op n knopen. T_{n+1}^k wordt opgebouwd door knoop v_{n+1} toe te voegen aan $V(T_n^k)$. We voegen takken e_1, \dots, e_k toe zodat $e_i = (v_{n+1}, x_i)$, waar $x_i \in V(T_n^k)$ knooppunten zijn van dezelfde K_k .

Merk op dat voor de eerste uitbreiding geldt $T_{k+1}^k = K_{k+1}$.

Definitie 2.13. Een graaf heet een *partiële k -boom* als deze een deelgraaf is van een k -boom.

Stelling 2.8. [[4]] *Zij G een graaf met $\text{tw}(G) = k$ voor zekere $k \in \mathbb{N}$. Dan is G een partiële k -boom.*

Bewijs. Aangezien $\text{tw}(G) = k$, is er een boomdecompositie (T, \mathcal{X}) met breedte k , dat wil zeggen voor alle $t \in V(T)$ geldt $|X_t| \leq k + 1$, en er is een t met $|X_t| = k + 1$. Dus $|V(G)| \geq k + 1$.

We zullen met inductie naar $n = |V(G)| \geq k + 1$ aantonen dat voor elke graaf met n knooppunten en boomdecompositie (T, \mathcal{X}) met $\beta(T, \mathcal{X}) = k$, er een k -boom H bestaat met $V(H) = V(G)$ zodanig dat $G \preceq H$ en $G[X_t]$ als deelgraaf van H bevat is in een $(k + 1)$ -klik voor alle $t \in T$.

Laat $n = k + 1$. Dan is $G \preceq K_{k+1}$. Omdat K_{k+1} een partiële k -boom is, is de bewering waar voor $n = k + 1$.

Zij nu $n > k + 1$, en stel dat de hypothese waar is voor grafen met boombreedte k en met hooguit

$n - 1$ knooppunten.

Merk op dat $|V(T)| > 1$. Stel namelijk $|V(T)| = 1$. Dan bevat de unieke zak $n > k + 1$ knooppunten. Tegenspraak met het feit dat $\beta(T, \mathcal{X}) = k$.

Dus bevat T een knooppunt van graad 1, zeg l , en zeg de tak $lj \in E(T)$.

Stel $X_l \subseteq X_j$, dan is $(T \setminus \{l\}, \mathcal{X} \setminus \{X_l\})$ ook een boomdecompositie van G met boombreedte k .

Stel $X_j \subseteq X_l$, laat $X'_j = X_j \cup (X_l \setminus X_j)$. Dan is $(T \setminus \{l\}, \mathcal{X} \cup \{X'_j\} \setminus \{X_l, X_j\})$ een boomdecompositie van G met boombreedte k .

Immers, voor alle $v \in X_l \setminus X_j$ geldt dat $v \notin X_i, i \neq l, j$. Anders zou een tegenspraak met eigenschap 3 van boomdecomposities ontstaan.

Zonder verlies van algemeenheid mogen we dus aannemen dat $X_l \setminus X_j, X_j \setminus X_l \neq \emptyset$ als l een knooppunt van graad 1 in T is, en lj de corresponderende tak.

Stel $|X_l \setminus X_j| = 1$, zeg $v \in X_l, v \notin X_j$. Omdat $v \notin X_i, i \neq l$, en $|X_l| \leq k + 1$, heeft v hooguit k burens, die alle ook bevat zijn in X_j .

Als $|X_l| = k + 1$ geldt dat $|X_j| = k + 1$. Dus is (T', \mathcal{X}') , met $T'(V) = T(V) \setminus \{l\}, \mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{X_l\}$ een boomdecompositie van $G[V(G) \setminus \{v\}]$ met $\beta(T', \mathcal{X}') = k$.

Volgens de inductiehypothese bestaat er een k -boom H' , met $V(H') = V(G) \setminus \{v\}$, zodanig dat $G[V(G) \setminus \{v\}] \preceq H'$, en $G(X_t)$ in H' in een $(k + 1)$ -klik bevat is voor $t \in T'$.

Dus is $G(X_j)$ bevat in een $(k + 1)$ -klik in H' .

Omdat v hooguit k burens heeft die alle in X_j bevat zijn, induceren deze burens een deelgraaf in H' die bevat is in een k -klik. Voeg nu aan H' v toe met takken naar al zijn burens uit G . De ontstane graaf is een k -boom met de gewenste eigenschappen.

Stel nu $|X_l \setminus X_j| \geq 2$. Dan kunnen we knopen tussenvoegen in T totdat het ontstane blad wel voldoet aan de voorgaande eis. Laat $X_l \setminus X_j = \{l, l_1, \dots, l_i\}$.

Voeg knooppunten x_1, \dots, x_i toe aan $V(T)$, en takken $lx_1, x_k x_{k+1}, x_i j$ voor $k \in \{1, \dots, i - 1\}$ aan $E(T)$. Laat $X_{x_k} = X_{x_k} \cup \{l_k\}, k \in \{2, \dots, i\}$ en $X_{x_1} = X_l \cup \{l_1\}$. Dan geeft dit een boomdecompositie waarop we het voorgaande van het bewijs kunnen toepassen. Voor zekere $i \in \mathbb{N}$ toe aan $V(T)$ en voeg takken $lx_1, jx_i, x_k x_{k+1}$ toe aan $E(T)$ voor alle $k \in \{1, \dots, i - 1\}$, zodanig dat alle zakken die aan elkaar grenzen precies één element verschillen. Nu kunnen we het voorgaande deel van het bewijs toepassen. \square

Stelling 2.9 ([4]). *Zij G een partiële k -boom met k minimaal. Dan geldt*

$$\min_{H:H \triangleright G} (\omega(H) - 1) = \min_{H:H \triangleright G} \text{tw}(H) = k.$$

Bewijs. Er is een $G' \triangleright G$ met $\omega(G') \leq k + 1$. Immers, G is een deelgraaf van een k -boom, die per definitie getrianguleerd is met klikgetal hoogstens $k + 1$. Stel nu dat er een $H \triangleright G$ is met $\omega(H) = k' < k + 1$. Aangezien H getrianguleerd is en klikgetal k' heeft kunnen we takken toevoegen zodanig dat we een $(k' - 1)$ -boom krijgen. Immers, een $(k' - 1)$ -boom is een graaf die bestaat uit een aantal $K_{k'}$ die onderling zijn verbonden met takken zonder een $K_{k'+1}$ te vormen. Dus we voegen takken toe tot elke knoop deel is van een $K_{k'}$, maar er geen $K_{k'+1}$ zijn. Dus G is een partiële $(k' - 1)$ -boom met $k' - 1 < k$. Dus k is niet minimaal. Dit is een tegenspraak, dus er is geen triangulatie van G met klikgetal kleiner dan $k + 1$. Dus $\min_{H:H \triangleright G} (\omega(H) - 1) = k$. \square

Nu kunnen we Stelling 2.7 bewijzen.

Bewijs Stelling 2.7. Zij $H \triangleright G$ met $\omega(H) = k + 1$ met k minimaal. Dit kan omdat er minstens één $H \succeq G$ is met H getrianguleerd, namelijk $H = K_{|V(G)|}$. Aangezien H getrianguleerd is, impliceert Gevolg 2.6 dat $\text{tw}(H) = \omega(H) - 1 = k$. Aangezien $G \preceq H$, volgt uit Stelling 2.9 dat $\text{tw}(G) \leq \text{tw}(H) = k$.

Stel nu $\text{tw}(G) = k' < k$. Dan volgt met Stelling 2.8 dat G een partiële k' -boom is met k' minimaal. Dus $\min_{H:H \triangleright G} (\omega(H) - 1) = k' < k$. Dit is een tegenspraak. Dus $\text{tw}(G) = k$. \square

Voorbeeld 2.4. Zij T een boom. Dan bevat T geen enkelvoudige kringen, dus T is getrianguleerd. Hiermee vinden we dat $\text{tw}(T) = \omega(T) - 1 = 2 - 1 = 1$.

Dus een boom heeft boombreedte 1.

Voorbeeld 2.5. Stel G heeft minstens één enkelvoudige kring. Zij $H' \triangleright G$ met minimaal klikgetal. Er geldt $\omega(H') \geq 3$, aangezien H' getrianguleerd is en ongelijk aan een boom.

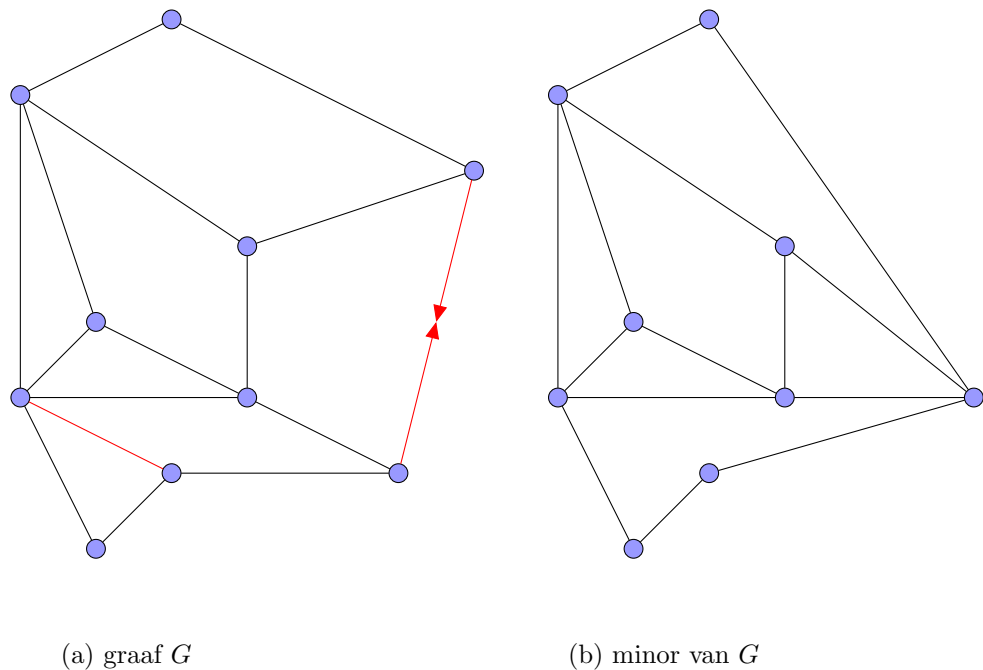
Dus $\text{tw}(G) = \min_{H:H \triangleright G} \{\omega(H) - 1\} = \omega(H') - 1 \geq 3 - 1 = 2$. Dus een graaf met een enkelvoudige kring heeft boombreedte minstens 2.

2.3 Minoren

Met behulp van het concept “minor” kunnen we een stelling formuleren waardoor het afschatten van de boombreedte van een graaf veel eenvoudiger wordt.

Definitie 2.14. Zij G een graaf. Een *minor* van G is een graaf H die uit G ontstaat door takken samen te trekken en/of takken en knopen te verwijderen.

Merk op dat een deelgraaf $H \preceq G$ per definitie een minor is van G .

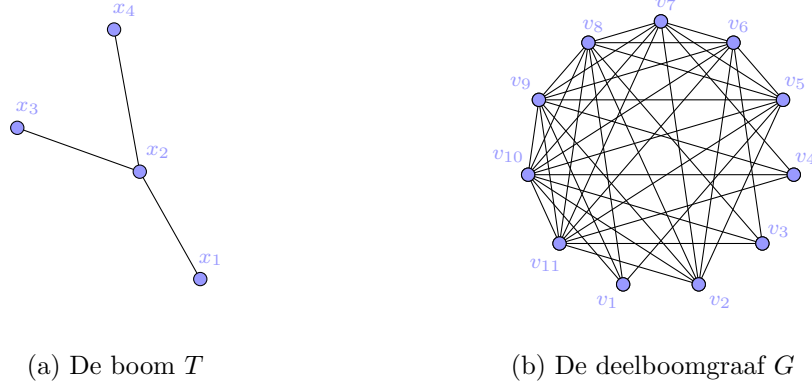


Figuur 3: Een graaf en een minor

In Figuur 3 zien we een voorbeeld van een minor. Deze is verkregen door een tak te verwijderen en een tak samen te trekken.

Definitie 2.15. Een graaf G heet een *deelboomgraaf* als er een ongerichte boom T bestaat met een collectie deelbomen $\{T_x : x \in V(G)\}$ zodanig dat voor alle $x, y \in V(G)$ geldt, dat $xy \in E(G)$ dan en slechts dan als $T_x \cap T_y \neq \emptyset$.

Voorbeeld 2.6. Zij T de ongerichte boom met $V(T) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ en $E(T) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4\}$. De collectie van deelbomen van T is $\{T_1, T_2, \dots, T_{11}\}$ met $T_1 = T[\{x_1\}]$, $T_2 = T[\{x_2\}]$, $T_3 = T[\{x_3\}]$, $T_4 = T[\{x_4\}]$, $T_5 = T[\{x_1, x_2\}]$, $T_6 = T[\{x_2, x_3\}]$, $T_7 = T[\{x_2, x_4\}]$, $T_8 = T[\{x_1, x_2, x_3\}]$, $T_9 = T[\{x_1, x_2, x_4\}]$, $T_{10} = T[\{x_2, x_3, x_4\}]$, $T_{11} = T[\{x_1, x_2, x_3, x_4\}]$. Deze collectie induceert de graaf G met $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{11}\}$ en $E(G) = \{v_i v_j : T_i \cap T_j \neq \emptyset\}$. In Figuur 4 is G te zien.



Figuur 4: Een boom en de bijbehorende deelboomgraaf

Stelling 2.10 ([5]). *Zij G een graaf. Er geldt dat G getrianguleerd is dan en slechts dan als G een deelboomgraaf is.*

Nu geldt de volgende stelling.

Stelling 2.11 ([7]). *De collectie van getrianguleerde grafen is gesloten onder het samentrekken van takken.*

Bewijs. Zij G een getrianguleerde graaf. Laat $e = (v_1, v_2) \in E(G)$ en laat G' de graaf zijn die ontstaat uit G door het samentrekken van e tot knoop ϕ .

Aangezien G getrianguleerd is, vinden we met Lemma 2.10 dat er een boom T en collectie deelbomen $\{T_x : x \in V(G)\}$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in V(G)$ geldt dat $xy \in E(G)$ dan en slechts dan als $T_x \cap T_y \neq \emptyset$.

Definieer $T_\phi = T_{v_1} \cup T_{v_2}$. Omdat $e \in E(G)$ impliceert dat $T_{v_1} \cap T_{v_2} \neq \emptyset$, geldt dat $T_{v_1} \cup T_{v_2}$ samenhangend is. Omdat $T_{v_1} \cup T_{v_2} \subseteq T$, bevat $T_{v_1} \cup T_{v_2}$ geen kringen. Ergo, $T_{v_1} \cup T_{v_2}$ is een boom. Beschouw de boom $T' = T_\phi$ met collectie deelbomen $\{T_x : x \in V(G'), x \neq \phi\} \cup \{T_\phi\}$.

Zij $x \in V(G')$ met $x\phi \in E(G')$. Er volgt dat $x \in V(G)$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $xv_1 \in E(G)$.

Nu volgt $T_x \cap T_\phi = (T_x \cap T_{v_1}) \cup (T_x \cap T_{v_2}) \neq \emptyset$.

Zij nu $x \in V(G')$ met $T_x \cap T_\phi \neq \emptyset$. Verder geldt $\emptyset \neq T_x \cap T_\phi = (T_x \cap T_{v_1}) \cup (T_x \cap T_{v_2})$. Dus $T_x \cap T_{v_1} \neq \emptyset$ of $T_x \cap T_{v_2} \neq \emptyset$. Dus $xv_1 \in E(G)$ of $xv_2 \in E(G)$. Dus $x\phi \in V(G')$.

Dus volgt $x\phi \in E(G')$ dan en slechts dan als $T_x \cap T_\phi \neq \emptyset$. Met Lemma 2.10 volgt dat G' getrianguleerd is. \square

Hiermee kunnen we de volgende stelling formuleren en bewijzen. Stelling 2.12 en Lemma 2.13 met hun bewijzen zijn zelf geconstrueerd. Echter zijn naderhand, gedurende literatuuronderzoek, bronnen gevonden waarin zij reeds gebruikt en bewezen zijn, grotendeels op gelijksoortige wijze. Beide zijn te vinden in [2].

Stelling 2.12 (Monotonie van de boombreedte). *Zij G een graaf en G' een minor van G . Dan geldt $\text{tw}(G') \leq \text{tw}(G)$.*

Bewijs. Het is voldoende om de stelling te bewijzen voor ofwel $G' \preceq G$ ofwel G' is ontstaan uit G door een tak zeg $xy \in E(G)$ samen te trekken tot knoop v_1 .

Stel eerst $G' \preceq G$. Dan impliceert $H \triangleright G$ dat $H \triangleright G'$. Dus $\text{tw}(G') = \min_{\tilde{H}: \tilde{H} \triangleright G'} \{\omega(\tilde{H}) - 1\} \leq \min_{H: H \triangleright G} \{\omega(H) - 1\} = \text{tw}(G)$.

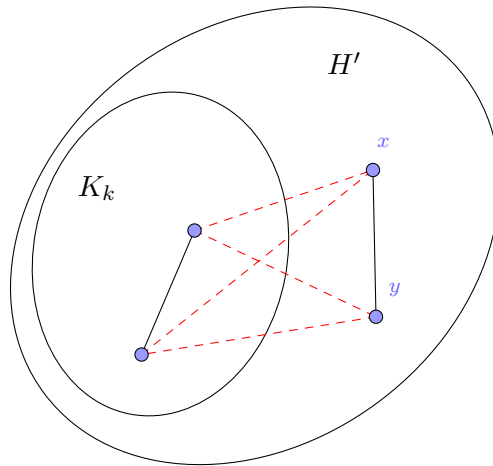
Stel nu dat G' een graaf is verkregen door een tak $xy \in E(G)$ samen te trekken. Laat $H \triangleright G$ met minimaal kliekgetal k . Noem de knoop die ontstaat door het samentrekken v . Zij H' de graaf die wordt verkregen door in H dezelfde tak xy samen te trekken als in H . Dan is H' getrianguleerd volgens Stelling 2.11.

Stel $\omega(H') > k$. Dan geldt $K_{k+1} \preceq H'$. Als $v \notin V(K_{k+1})$ dan geldt $K_{k+1} \preceq H$. Tegenspraak. Dus $v \in V(K_{k+1})$.

Beschouw de knopen in H uit $V(K_{k+1}) \setminus \{v\}$. Nu is dit een K_k waarvan er minstens één knoop verbonden is met x en niet met y , en minstens één knoop die verbonden is met y maar niet met x . Anders had H immers een K_{k+1} bevat. Deze vier knopen vormen samen dus een koordeloze enkelvoudige kring van lengte vier. Dus H is niet getrianguleerd. Dit is een tegenspraak. Dus H' bevat geen K_{k+1} , zodat $\omega(H') \leq \omega(H)$.

Hieruit volgt $\text{tw}(G') \leq \omega(H') - 1 \leq \omega(H) - 1 = \text{tw}(G)$. \square

Ter illustratie is de situatie uit het bewijs in Figuur 5 weergegeven.



Figuur 5: Schematische weergave bewijs Stelling 2.12

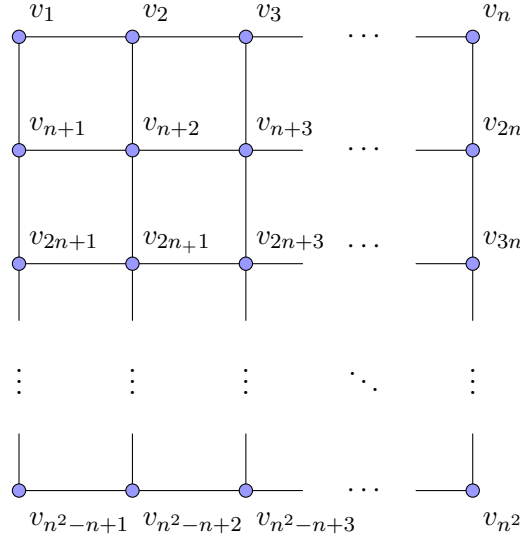
Deze stelling lijkt op het eerste ogenblik nog niet bijzonder handig. Het nut zal blijken uit de volgende lemma's.

Lemma 2.13. *Zij H_n een $n \times n$ grid. Dan geldt $\text{tw}(H_n) \leq n$.*

Bewijs. Nummer het grid als in Figuur 6.

Beschouw de boomdecompositie (T, \mathcal{X}) met $V(T) = \{1, \dots, n^2 - n\}$ en $E(T) = \{(k, k+1) : 1 \leq k \leq n^2 - n - 1\}$; en $\mathcal{X} = \{X_k = \{k, \dots, n+k\} \subseteq V(H_n) : 1 \leq k \leq n^2 - n\}$. Het is snel in te zien dat T een boom is, aangezien het een lijn betreft. Verder zien we dat voor alle $x \in V(H_n)$ er een $t \in V(T)$ is zodanig dat $x \in X_t$.

Als laatste zien we ook dat, aangezien elke zak voor een zekere k de elementen $\{k, \dots, n+k\}$



Figuur 6: Nummering van de H_n

heeft, de deelboom T_x geïnduceerd door $\{t \in V(T) : x \in X_t\}$ wel verbonden moet zijn. Dus (T, \mathcal{X}) is een boomdecompositie.

Dus $\text{tw}(H_n) \leq \beta(T, \mathcal{X}) = n$. □

Lemma 2.14 ([2]). *Zij H_n een $n \times n$ grid. Dan geldt $\text{tw}(H_n) = n$.*

Bewijs. Er geldt wegens Lemma 2.13 dat $\text{tw}(H_n) \leq n$, dus er rest ons enkel aan te tonen dat $\text{tw}(H_n) \geq n$.

Laat (T, \mathcal{X}) een boomdecompositie van H_n . Eerst bewijzen we dat $\text{tw}(H_n) \geq n - 1$, door te laten zien uit het ongerijmde: er is een knoop $v \in V(H_n)$ zodanig dat X_v een knoop uit iedere rij van het grid bevat of uit iedere kolom van het grid.

Stel dus dat de uitspraak niet waar is. Dan geldt voor alle $i \in V(T)$ dat er een rij, zeg r_i , is zodanig dat X_i geen enkele knoop uit deze rij bevat.

Laat $i \in V(T)$. Dan is er een samenhangscomponent W_i van $G[V \setminus X_i]$ die alle knopen van rij r_i bevat. Er is dus een deelboom $T_i \preceq T[V(T) \setminus \{i\}]$ met $W_i \subseteq \bigcup_{j \in T_i} X_j$ en $W_i \cap \bigcup_{j \notin T_i} X_j = \emptyset$.

Immers, laat $v \in W_i$. Dan is de deelboom $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$ bevat in één van de samenhangscomponenten van $T[V(T) \setminus \{i\}]$. Laat $w \in W_i$ met $vw \in E(G)$. Dan is er een $s \in \{t \in V(T) : v \in X_t\}$ met $v, w \in X_s$. Maar dan is $\{t \in V(T) : w \in X_t\}$ in dezelfde samenhangscomponent van $T[V(T) \setminus \{i\}]$ als $\{t \in V(T) : v \in X_t\}$. Dit argument kun je herhalen tot je alle knooppunten van W_i hebt gehad.

Beschouw de geordende paren (i, j) met $j \in V(T_i)$ een buur van i in T . Dan zijn er $i_0, i_1 \in V$ zodanig dat (i_0, i_1) en (i_1, i_0) geordende paren zijn van dit type.

Stel immers het tegengestelde, dan krijg je een pad in T van de vorm $i = i^0, i^1, \dots, i^\ell$ met (i^s, i^{s+1}) verbonden, geordend en (i^{s+1}, i^s) niet geordend, zodanig dat i^ℓ een knooppunt van graad 1 in T is. Maar dan moet $(i^\ell, i^{\ell-1})$ ook een geordend paar zijn.

Verwijdering van de tak $i_0 i_1$ geeft twee deelbomen T_{i_0} met $i_1 \in V(T_{i_0})$, en T_{i_1} met $i_0 \in V(T_{i_1})$. Voor het gemak identificeren we (x, y) met de knoop $v_{n(x-1)+y}$, $x, y \in \{1, \dots, n\}$.

Op grond van onze veronderstelling zijn er rijen $r_{i_0} := \{(\alpha, \gamma), \gamma = 1, \dots, n\} \subseteq \bigcup_{j \in T_{i_0}} X_j$ en

$r_{i_1} := \{(\beta, \gamma), \gamma = 1, \dots, n\} \subseteq \bigcup_{j \in T_{i_1}} X_j$ voor zekere $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$.

Voor alle $\delta \in \{1, \dots, n\}$ geldt dat er $j_\delta \in V(T_{i_0})$ met $(\alpha, \delta) \in X_{j_\delta}$ en $j'_\delta \in V(T_{i_1})$ met $(\beta, \delta) \in X_{j'_\delta}$ zijn, zodat i_0 op het unieke pad van j_δ naar j'_δ in T ligt.

We gebruiken nu de volgende eigenschap van boomdecomposities.

Eigenschap. *Laat (T, \mathcal{X}) een boomdecompositie zijn van graaf G . Laat $i, j \in V(T)$ en k een knoop op het pad van i naar j in T .*

Voor alle $v \in X_i, w \in X_j$ bevat X_k minstens één knooppunt van elke keten in G van v naar w .

Bewijs. Laat P een keten van v naar w in G en laat $V(P)$ de knopen van P . Stel $V(P) \cap X_k = \emptyset$. Dan is er een deelboom T' van $T[V(T) \setminus \{k\}]$ zodat $V(P) \cap \bigcup_{s \in V(T')} X_s = \emptyset$. Maar $v, w \in V(P), v \in$

$X_i, w \in X_j$ en i, j liggen niet in dezelfde deelboom van $T[V(T) \setminus \{k\}]$. Tegenspraak. \square

Beschouw voor elke $\delta \in \{1, \dots, n\}$ de enkelvoudige keten van (α, δ) naar (β, δ) die geheel bevat is in de δ -kolom van H_n . Op grond van bovenstaande bevat X_{i_0} een knooppunt uit de δ -kolom van H_n voor alle $\delta \in \{1, \dots, n\}$. Tegenspraak.

We concluderen dat $\beta(T, \mathcal{X}) \geq n - 1$. Omdat (T, \mathcal{X}) een willekeurig gekozen boomdecompositie was, geldt $\text{tw}(H_n) \geq n - 1$.

We bewijzen nu, dat $\text{tw}(H_n) = n$.

Laat (T', \mathcal{X}') een willekeurige boomdecompositie zijn. Met behoud van breedte kunnen we deze transformeren tot een boomdecompositie (T, \mathcal{X}) met de eigenschap dat $ij \in E(T)$ impliceert dat $X_i \not\subseteq X_j, X_j \not\subseteq X_i$. Dit doen we als volgt.

Stel $X_i \subseteq X_j$ of $X_j \subseteq X_i$. Trek dan tak ij samen tot knoop i' . Neem $X_{i'} = X_i \cup X_j$ en voeg takken $i'v$ toe aan $E(T')$ voor alle $v \in V(T')$ met $iv \in E(T')$ of $jv \in E(T')$.

Stel $|X_i| < n + 1, X_j \not\subseteq X_i$. Kies dan $v \in X_j \setminus X_i$ en voeg die toe aan X_i .

Stel $|X_i| = |X_j| = n + 1, |X_i \cap X_j| < n$. Kies $v \in X_j \setminus X_i, w \in X_i \setminus X_j$. Voeg knoop i' toe aan T' . Laat $X_{i'} = (X_i \setminus \{w\}) \cup \{v\}$. Verwijder ij uit $E(T')$ en voeg $i'i', i'j$ toe.

Nu geldt voor alle $ij \in E(T)$ dat $X_i \not\subseteq X_j, X_j \not\subseteq X_i$.

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat er een knoop $i_0 \in V(T)$ bestaat zodanig dat X_{i_0} een knooppunt uit iedere rij bevat. Als $|X_{i_0}| > n$ dan is $\beta(T, \mathcal{X}) = \beta(T', \mathcal{X}') \geq n$, en omdat (T, \mathcal{X}) willekeurig was gekozen zijn we klaar. Immers, je kunt een minimale boomdecompositie kiezen.

Neem dus aan dat $|X_{i_0}| = n$, dat wil zeggen X_{i_0} bevat precies één knoop uit iedere rij.

Bewering. *Er is een samenhangscomponent $W \preceq G[V \setminus X_{i_0}]$ zodanig dat er voor alle $x \in X_{i_0}$ een $t \in V(W)$ is met $xt \in E(G)$.*

Bewijs. Het is gemakkelijk na te gaan dat het volgende geldt: als $|X_{i_0}| = n$, én X_{i_0} bevat precies één element uit elke rij, dan is er voor elke $v \in X_{i_0}$ een $w \in X_{i_1}$ met $vw \in E(G)$. Stel X_{i_0} is bevat in hooguit $n - 1$ kolommen van H_n . Kies als samenhangscomponent de component die een gegeven lege kolom bevat. Stel nu dat X_{i_0} precies één element uit elke rij en elke kolom bevat. De bewering kan alleen onjuist zijn als $G[V \setminus X_{i_0}]$ meerdere samenhangscomponenten bevat.

$G[V \setminus X_{i_0}]$ kan alleen meerdere samenhangscomponenten hebben als X_{i_0} uit één (anti-)diagonaal of twee parallelle (anti-)diagonalen bestaat, die één of twee 'hoekpunten' afsnijden. Kies als samenhangscomponent de grootste samenhangscomponent. \square

Er is een deelboom T_{i_0} van $T[V(T) \setminus \{i_0\}]$ zodanig dat $V(W) \subseteq \bigcup_{i \in T_{i_0}} X_i$.

Laat i_1 de buur van i_0 in T_{i_0} zijn. Stel er is een knooppunt v met $v \in X_{i_0}, v \notin X_{i_1}$. Laat $w \in W$ een buur van v in H_n zijn. Dan is er een $i \in V(T_{i_0}) \setminus \{i_1\}$ zodat $v, w \in X_i$.

Tegenspraak met eigenschap 3 van de boomdecompositie. Dus $X_{i_0} \subseteq X_{i_1}$. Tegenspraak. Dus

$|X_{i_0}| \neq n$. Dus $\text{tw}(H_n) \geq n$.
Nu volgt met Lemma 2.13 $\text{tw}(H_n) = n$.

□

Gevolg 2.15. Als een graaf een $n \times n$ grid als minor heeft, dan is de boombreedte minstens n .

3 Shapleywaarde

In dit hoofdstuk zullen we de Shapleywaarde introduceren als maat op de graaf. Daarnaast zullen wij het algoritme dat wij hebben bestudeerd geven en dit algoritme toelichten.

3.1 Coöperatieve spelen

Als we de Shapleywaarde op een graaf willen definiëren, moeten we eerst een geschikt coöperatief spel vinden.

Definitie 3.1. Een *coöperatief spel* is een paar (N, v) met een eindige verzameling N en een karakteristieke functie $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ zodat $v(\emptyset) = 0$.

We kunnen v zien als een functie die een waarde toekent aan iedere mogelijke coalitie; dat wil zeggen alle deelverzamelingen van N . Vaak wordt ervan uitgegaan dat een karakteristieke functie superadditief is. Dit is echter geen vereiste en ook niet het geval in het coöperatief spel uit Definitie 3.2.

Op een graaf kunnen we deze definitie als volgt toepassen.

Definitie 3.2. [1] Zij G een graaf en laat $S \subseteq V(G)$. Het *verbondenheidsspel* op G is het coöperatieve spel $(V(G), v^{conn})$ met $v^{conn}(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } G[S] \text{ samenhangend is en } |S| > 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$

Nu kunnen we de Shapleywaarde definiëren.

Definitie 3.3. Zij (N, v) een coöperatief spel. De Shapleywaarde van $i \in N$ is

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Als we nu de Shapleywaarde berekenen in het verbondenheidsspel, geeft dit ons een maat van verbondenheid. Dit zien we als volgt.

Merk eerst op dat $v^{conn}(S \cup \{i\}) - v^{conn}(S) = 1$ precies dan als $G[S]$ onsaamenhangend is, $G[S \cup \{i\}]$ samenhangend, en $|S| \geq 1$.

Merk ook op, dat $\frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} = \frac{1}{|N| \binom{|N|-1}{|S|}}$. Dit is dus een normeringsconstante. Immers, er

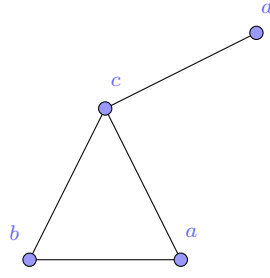
zijn $|N|$ mogelijkheden om $i \in N$ te kiezen en $\binom{|N|-1}{|S|}$ manieren om $S \subseteq N \setminus \{i\}$ te kiezen. Door dit te sommeren tellen we, met het oog op het verbondenheidsspel, de fractie van de deelverzamelingen van N die door toevoeging van i samenhangend gemaakt kunnen worden.

Voorbeeld 3.1. Beschouw de graaf G uit Figuur 7. We beschouwen het verbondenheidsspel op G . Nu kunnen we de Shapleywaarde van elke knoop berekenen door te kijken naar de opbrengst van het toevoegen van de knoop aan een coalitie. In de tabel in Figuur 8a zien we de mogelijke volgordes van toevoegen van spelers aan de coalitie en de marginale opbrengsten.

Door nu de kolomwaarden op te tellen en te normaliseren over alle permutaties vinden we de volgende Shapleywaarden.

$$\phi_a(v^{conn}) = \phi_b(v^{conn}) = \frac{1}{6}; \quad \phi_c(v^{conn}) = \frac{2}{3}; \quad \phi_d(v^{conn}) = 0.$$

Met het algoritme dat we in Paragraaf 3.2 introduceren, zouden we op efficiënte wijze de Shapleywaarde van een knoop moeten kunnen berekenen. In dit algoritme wordt gebruik gemaakt



Figuur 7: Graaf G

van een specifieke klasse boomdecomposities.

Definitie 3.4. Zij (T, \mathcal{X}) een boomdecompositie en kies een wortel $r \in V(T)$. Laat $t' \in V(T)$ een kind van $t \in V(T)$ zijn als $tt' \in E(T)$ en de boom afstand van r naar t' gelijk is aan de boom afstand van r naar t plus 1. Nu heet (T, \mathcal{X}) *fijn* als voor alle $t \in T$ geldt dat X_t één van de volgende eigenschappen heeft:

blad t is een blad van T en $|X_t| = 1$;

voorstel t heeft precies één kind t' waarvoor $X_{t'} \subseteq X_t$ en $|X_t \setminus X_{t'}| = 1$;

vergeet t heeft precies één kind t' waarvoor $X_t \subseteq X_{t'}$ en $|X_{t'} \setminus X_t| = 1$;

verbind t heeft twee kinderen k, ℓ en $X_t = X_k = X_\ell$.

Definitie 3.5. Zij T een boom met wortel r . Een *nakomeling* $x \in V(T)$ van een knoop $t \in V(T)$ is een knoop, zodanig dat het unieke pad van r naar x de knoop t bevat. Het is dus een kind van t of één van diens kinderen, enzovoorts.

Merk op dat, aangezien er gesproken wordt over nakomelingen van knopen, er dus een richting is. Deze wordt gegeven door de keuze van de wortel van de boom T .

Notatie 3.1. Zij G een graaf met boomdecompositie (T, \mathcal{X}) . Zij $r \in V(T)$ de wortel van T en zij $t \in V(T)$. Dan is $G[t]$ de deelgraaf van G geïnduceerd door X_t en $\bigcup_{i \in F} X_i$, waar F de verzameling nakomelingen van t is.

Voorbeeld 3.2. Beschouw de graaf G uit Figuur 7. Dan is (T, \mathcal{X}) met wortel $r = 1$ een fijne boomdecompositie, voor T de graaf uit Figuur 8b en $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_7\}$ met $X_1 = \{a\}$, $X_2 = \{a, b\}$, $X_3 = \{a, b, c\}$, $X_4 = \{b, c\}$, $X_5 = \{b, c, d\}$, $X_6 = \{c, d\}$, $X_7 = \{d\}$.

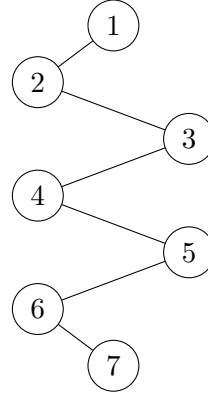
3.2 Het algoritme

Om de Shapleywaarde van een knoop efficiënt te berekenen kunnen we niet puur de definitie gebruiken. Dit heeft een te hoge complexiteit. Beschouw immers Voorbeeld 3.1. Hier zijn voor 4 knopen 24 berekeningen nodig. Op deze wijze zijn er dus voor n knopen $n!$ berekeningen nodig. Derhalve is er een manier nodig om eenvoudig de coalities die er niet toe doen voor het berekenen van de Shapleywaarde te elimineren. Hiervoor gebruiken we “goede” deelverzamelingen. Het blijkt dat alleen “goede” deelverzamelingen ertoe doen bij het berekenen van de Shapleywaarde. Dit gegeven wordt dus ook de basis van het algoritme dat we zullen gebruiken. Dit algoritme is geïntroduceerd in [9] door T.O. Van der Zande, H.L. Bodlaender en H.J.M. Hamers.

Wij zullen het algoritme bespreken in deze paragraaf.

	a	b	c	d
abcd	0	1	0	0
abdc	0	1	1	-1
acbd	0	0	1	0
acdb	0	0	1	0
adbc	0	0	1	0
adcb	0	0	1	0
bacd	1	0	0	0
badc	1	0	1	-1
bcad	0	0	1	0
bcda	0	0	1	0
bdac	0	0	1	0
bdca	0	0	1	0
cabd	1	0	0	0
cadb	1	0	0	0
cbad	0	1	0	0
cbda	0	1	0	0
cdab	0	0	0	1
cdba	0	0	0	1
dabc	0	0	1	0
dacb	0	0	1	0
dbac	0	0	1	0
dbca	0	0	1	0
dcab	0	0	1	0
dcba	0	0	1	0

(a) Opbrengst per mogelijke permutatie in G



(b) De graaf T

Figuur 8: Bijlagen bij Voorbeeld 3.1 en 3.2.

3.2.1 Initialisatie

Definitie 3.6. Zij $t \in V(T)$. Een deelverzameling $S \subseteq V(G[t])$ heet *goed* als $G[S]$ samenhangend is, of alle samenhangscomponenten van $G[S]$ een niet-lege doorsnede met X_t hebben.

Ons probleem kunnen we nu reduceren tot het tellen van het aantal goede deelverzamelingen. Dit volgt uit het volgende lemma.

Lemma 3.2 ([9]). *Zij $S \subseteq V(G)$ een verzameling knopen zodat $G[S]$ samenhangend is. Zij $t \in V(T)$. Stel $S \cap V(G[t]) \neq \emptyset$. Dan is $G[S \cap V(G[t])]$ samenhangend, of iedere samenhangscomponent van $G[S \cap V(G[t])]$ heeft een niet-lege doorsnede met X_t .*

Bewijs. Stel $|S \cap V(G[t])| \geq 2$ en $G[S \cap V(G[t])]$ is niet samenhangend. Er geldt per aanname dat $G[S]$ samenhangend is. Verder geldt er dat X_t fungeert als separator tussen $G[t]$ en de rest van de graaf. Dat wil zeggen dat voor elke tak $uv \in E(G)$ met $u \in V(G[t])$ en $v \notin V(G[t])$ er geldt dat $u \in X_t$.

Aangezien $G[S \cap V(G[t])]$ niet samenhangend is zijn er minstens twee samenhangscomponenten. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we stellen dat $G[S \cap V(G[t])]$ twee samenhangscomponenten heeft.

Er moeten dus $x_1, x_2 \in S \cap V(G[t])$ zijn die beide in verschillende samenhangscomponenten zitten. Zonder verlies van algemeenheid stellen we dat $x_1, x_2 \notin X_t$. Immers, als dit wel zo is versimpelt dit het argument.

Aangezien $G[S]$ samenhangend is, moet er een pad zijn van x_1 naar x_2 dat via knopen $y \in S$ gaat, zodanig dat $y \notin V(G[t])$. Dit impliceert door de separatorfunctie van X_t , dat er $z_1, z_2 \in X_t$ zijn, zodanig dat er een pad is binnen $G[S \cap V(G[t])]$ dat x_1 met z_1 verbindt, en x_2 met z_2 . Er volgt dus dat $z_1, z_2 \in S \cap V(G[t])$. Dus $S \cap V(G[t]) \cap X_t \neq \emptyset$. \square

Gevolg 3.3. Als $|X_t| = 1$, dan geldt voor een goede deelverzameling $S \subset V(G[t])$, dat $G[S]$ samenhangend is.

Dit gevolg is belangrijk, omdat het algoritme ervan afhankelijk is. Het wordt echter niet expliciet benoemd in [9].

Dan volgt nu de **uitleg van het algoritme**.

Dit algoritme wordt toegepast op een fijne boomdecompositie, dus deze moet eerst gevonden worden. Merk op dat een boomdecompositie in lineaire tijd kan worden omgevormd tot een fijne boomdecompositie.

Beschouw immers een boomdecompositie (T, \mathcal{X}) . Wij zullen deze ombouwen tot een fijne boomdecompositie, startend bij de wortel. Zij $t \in V(T)$ en neem aan dat t en zijn voorgangers in T aan de eisen voor een fijne boomdecompositie is voldoen.

Stel het aantal nakomelingen $k(t) = k' \geq 2$. Dan voegen we knopen toe van het type verbind. In het bijzonder, voeg knopen $t_1, \dots, t_i, i = 2(k' - 1)$ toe zódat $X_{t_n} = X_t$ voor alle $n \in \{1, \dots, i\}$ zoals geïllustreerd in Figuur 9.

Stel $k(t) = 1$, laat t' het unieke kind van t zijn. Nu “verlengen” we de tak tt' door knopen van het type vergeet en voorstel toe te voegen.

Stel $X_t \cap X_{t'} \neq \emptyset$. Voeg dan knopen $t_1, \dots, t_i, i = |X_t \setminus X_{t'}|$ toe zódat $tt_1, t_{k-1}t_k, k \in \{2, \dots, i\}, t_it' \in E(T)$, en zódat $X_{t_{k+1}} \subseteq X_{t_k}, |X_{t_k} \setminus X_{t_{k+1}}| = 1, X_{t_i} = X_t \cap X_{t'}$.

Voeg nu op analoge wijze knopen $s_1, \dots, s_j, j = |X_{t'} \setminus X_{t_i}|$ in tussen t_i en t' , die één knooppunt verschillen.

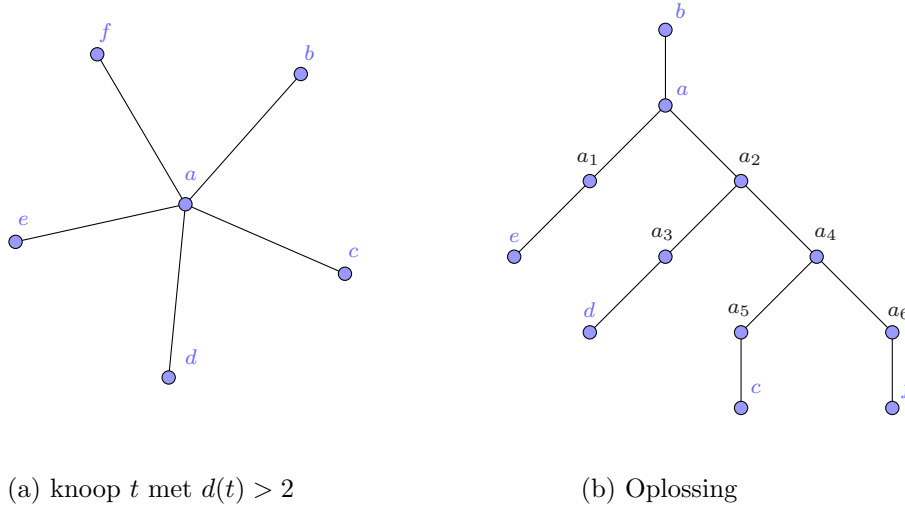
Stel nu $X_t \cap X_{t'} = \emptyset$. Laat $i = |X_t \setminus X_{t'}| - 1$. De constructie moet iets delicateser worden opgebouwd. Voeg tussen t_i en s_1 een knoop m toe zodanig dat $X_m = X_{t_i} \cup X_{s_1}$.

Stel tenslotte $k(t) = 0$. Dan moet een knoop van het type blad geconstrueerd worden. Voeg knooppunten $t_1, \dots, t_i, i = |X_t| - 1$, toe zódat $tt_1, t_{k-1}t_k, k \in \{2, \dots, i\} \in E(T)$ en zódat $X_{t_{k+1}} \subseteq X_{t_k}, |X_{t_k} \setminus X_{t_{k+1}}| = 1, |X_{t_i}| = 1$.

Zodoende voldoet de boomdecompositie aan de eisen van Definitie 3.4. Dus is het een fijne boomdecompositie.

Merk op dat dit inderdaad een boomdecompositie is mits het “uiteentrekken” consciëntieus gebeurt. Immers wordt automatisch aan de eerste twee eisen van Definitie 2.1 voldaan doordat de zakken die er waren, blijven bestaan. Bij het “uiteentrekken” van deze zakken wordt de deelboomstructuur van $T[\{t \in V(T) : v \in X_t\}]$ inderdaad behouden voor alle $v \in V(G)$ en is de laatste eis ook geen probleem.

Met behulp van het algoritme zullen we vanaf de bladeren richting de wortel alle zakken doorlopen en het aantal goede deelverzamelingen van een bepaalde grootte tellen die één van de knopen uit de zak bevat. Derhalve is het dus belangrijk, dat *de zak van de wortel één knoop bevat, namelijk de knoop waarvan we de Shapleywaarde willen berekenen*. Dit kan analoog aan de constructie van de fijne boomdecompositie gedaan worden. Immers wordt dan in de laatste stap het aantal goede deelverzamelingen geteld dat die knoop al dan niet bevat. Dit is precies wat we zoeken, aangezien dit de samenhangende deelverzamelingen zullen zijn die de knoop bevatten. We kunnen nu de definitie van de Shapleywaarde als volgt herschrijven.



(a) knoop t met $d(t) > 2$ (b) Oplossing

Figuur 9: Verlagen graad knopen voor fijne boomdecompositie

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|V(G)| - |S| - 1)!}{|V(G)|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\
&= \sum_{k=0}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)| - k - 1)!}{|V(G)|!} \sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{i\}, |S|=k} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)| - k - 1)!}{|V(G)|!} \left(\sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{i\}, |S|=k} v(S \cup \{i\}) - \sum_{S \subseteq V \setminus \{i\}, |S|=k} v(S) \right) \right).
\end{aligned}$$

Dus de Shapleywaarde van een knoop i kan worden gevonden door het aantal goede deelverzamelingen dat i bevat van grootte $k = 0, \dots, |V(G)| - 1$ te tellen.

Dit levert nog steeds een groot aantal mogelijke deelverzamelingen. Dit wordt verder vereenvoudigd. De crux van het algoritme is dat voor elke deelverzameling S alleen het gedrag binnen X_t belangrijk is. Deelverzamelingen die zich gelijk gedragen kunnen dus ook gelijk behandeld worden. Dit wordt concreet gemaakt door het introduceren van karakteristieken.

Definitie 3.7. Zij $S \subseteq V(G[t])$ een deelverzameling knopen. De *karakteristiek* van S is een tripel (R, \sim, k) . Hier is $R = S \cap X_t$, $k = |S|$, en \sim de equivalentierelatie op R die als volgt is gedefinieerd: $a \sim b$ dan en slechts dan als $a, b \in R$ in dezelfde samenhangscomponent van $G[S]$ zitten.

Verder definiëren we nog de volgende uitdrukking: $n_t(R, \sim, k)$ is het aantal goede deelverzamelingen $S \subseteq V(G[t])$ met karakteristiek (R, \sim, k) .

In [9] wordt opgemerkt dat er variaties van het verbondenheidsspel bestaan waarbij knopen en/of takken een bepaald gewicht hebben. Hiertoe wordt $w_t(R, \sim, k)$ gedefinieerd als het totale gewicht van de goede deelverzamelingen $S \subseteq V(G[t])$ met karakteristiek (R, \sim, k) .

In de rest van het artikel wordt voornamelijk verdergewerkt met de gewogen versie, maar in deze scriptie kennen we aan knopen geen gewicht toe. Het is niet duidelijk of dit consequenties heeft voor de toepasbaarheid van het algoritme op het ongewogen verbondenheidsspel. In de

uitleg van het algoritme, gebruiken we voor de volledigheid wel gewichten. Hierbij is $w(v)$ het gewicht van een knoop v en geldt dat het gewicht van een deelgraaf $S \subseteq V(G[t])$ gelijk is aan de som van de gewichten van diens knopen.

Merk op dat voor de wortel r met $X_r = \{v\}$ geldt, dat $n_r(\{v\}, \{(v, v)\}, k)$ het totale aantal deelverzamelingen $S \subseteq G[r]$ met $|S| = k$ en $v \in S$ is, zodat $G[S]$ samenhangend is. Verder is $n_r(\emptyset, \emptyset, k)$ het totale aantal deelverzamelingen van grootte k , die v niet bevatten, zodat $G[S]$ samenhangend is. (Dat zou althans de uitkomst moeten zijn, maar daarin blijkt iets mis te gaan) Omdat de karakteristieke functie 0 is op verzamelingen S met $|S| = 1$ of $S = \emptyset$, hoeven we deze niet te beschouwen. Dit zijn precies de waarden die we moeten uitrekenen voor het berekenen van de Shapleywaarde.

Dan krijgen we

$$\begin{aligned} \phi_i(v) &= \sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|V(G)| - |S| - 1)!}{|V(G)|!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \sum_{k=0}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)| - k - 1)!}{|V(G)|!} \left(\sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{i\}, |S|=k} v(S \cup \{i\}) - \sum_{S \subseteq V \setminus \{i\}, |S|=k} v(S) \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)| - k - 1)!}{|V(G)|!} \left(n_r(\{v\}, \{(v, v)\}, k+1) - n_r(\emptyset, \emptyset, k) \cdot \mathbb{1}_{\{k \geq 2\}} \right) \right). \end{aligned}$$

Merk op dat in [9] slechts wordt benoemd dat voor wortel r met $X_r = \{v\}$ geldt dat $w_r(\{v\}, \{(v, v)\}, k)$ het totale gewicht is van deelverzamelingen $S \subseteq G[r]$ met $|S| = k$ en $v \in S$ en $w_r(\emptyset, \emptyset, k)$ het totale gewicht van deelverzamelingen van grootte k die v niet bevatten; en dat deze gebruikt kunnen worden voor de Shapleywaarde. In [9] wordt dit zodanig geformuleerd, dat het niet duidelijk is, waarom hieruit inderdaad de Shapleywaarde zou volgen.

Nu zullen we per soort knoop als in Definitie 3.4 de methode uiteenzetten.

3.2.2 Type blad

Zij $t \in V(T)$ van het type blad. Dan is er een $v \in V(G)$ zodat $X_t = \{v\}$. Deze knoop heeft dus precies twee karakteristieken, namelijk $(\emptyset, \emptyset, 0)$ en $(\{v\}, \{(v, v)\}, 1)$. Deze representeren $\emptyset \subseteq V(G[t])$ respectievelijk $\{v\} \subseteq V(G[t])$. We vinden dus ook $n_t(\emptyset, \emptyset, 0) = 1$, $w_t(\emptyset, \emptyset, 0) = 0$ en $n_t(\{v\}, \{(v, v)\}, 1) = 1$, $w_t(\{v\}, \{(v, v)\}, 1) = w(v)$.

3.2.3 Type voorstel

Zij $t \in V(T)$ van het type *voorstel*. Zij s de nakomeling van t . Laat $X_t \setminus X_s = \{v\}$. We kunnen nu de goede deelverzamelingen gedefinieerd op $G[s]$ uitbouwen naar deelverzamelingen op $G[t]$. Dit kan door ofwel v toe te voegen aan de bestaande verzameling, ofwel door dat niet te doen. Beschouw een karakteristiek (R, \sim, k) met betrekking tot $G[S]$.

In ieder geval kunnen we ervoor kiezen v niet toe te voegen. Dit geeft ons verzamelingen met karakteristiek $(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k)$. Er geldt dus ook $n_t(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k) = n_s(R, \sim, k)$ en $w_t(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k) = w_s(R, \sim, k)$.

Als $k = 0$ of $R \neq \emptyset$ kunnen we v toevoegen. Dus dit geeft ons de karakteristiek

$(R \cup \{v\}, \sim', k+1)$, waar \sim' de transitieve afsluiting is van

$\sim \cup \{(v, v)\} \cup \{(v, x), (x, v) \mid x \in R, vx \in E(G)\}$. Dit betekent dus dat we starten met

$\sim = \sim \cup \{(v, v)\} \cup \{(v, x), (x, v) \mid x \in R, vx \in E(G)\}$ en we elementen toevoegen totdat de equivalentierelatie weer transitief is. Dus zij $(a, b), (b, c) \in \sim'$, dan moet $(a, c) \in \sim'$.

Nu volgt $n_t(R \cup \{v\}, \sim', k+1) = n_s(R, \sim, k)$, en
 $w_t(R \cup \{v\}, \sim', k+1) = w_s(R, \sim, k) + n_s(R, \sim, k) \cdot w(v)$.

Merk op dat het mogelijk is dat verschillende karakteristieken voor $G[s]$ bij toevoeging van v dezelfde karakteristiek teweeg kunnen brengen voor $G[t]$. In dat geval is er een $m \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle karakteristieken $(R_i, \sim_i, k_i), i \in \{1, \dots, m\}$ geldt dat ze dezelfde karakteristiek teweeg brengen. Voor alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ geldt $R_i = R_j = R, k_i = k_j = k$. Deze leiden vervolgens tot karakteristiek $(R \cup \{v\}, \sim'', k+1)$. Er geldt $n_t(R \cup \{v\}, \sim'', k+1) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} n_s(R, \sim_i, k)$ en

$$w_t(R \cup \{v\}, \sim'', k+1) = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} w_s(R, \sim_i, k) + n_s(R, \sim_1, k) \cdot w(v).$$

3.2.4 Type vergeet

Zij $t \in V(G[t])$ van het type *vergeet*. Zij s de nakomeling en laat $X_s \setminus X_t = \{v\}$. We kunnen nu wederom de goede deelverzamelingen gedefinieerd op $G[s]$ uitbouwen naar deelverzamelingen op $G[t]$ door ofwel v te verwijderen, ofwel v zit er niet in.

Beschouw een karakteristiek (R, \sim, k) van s .

Nu zijn er 4 mogelijkheden.

1. Als $v \notin R$, dan is (R, \sim, k) ook een karakteristiek voor $G[t]$. Dus $n_t(R, \sim, k) = n_s(R, \sim, k)$ en $w_t(R, \sim, k) = w_s(R, \sim, k)$.
2. Als $S \cap X_s = \{v\}$, dan krijgen we deelverzamelingen met karakteristiek $(\emptyset, \emptyset, k)$. Dit geeft dus $n_t(\emptyset, \emptyset, k) = n_s(R, \sim, k)$ en $w_t(\emptyset, \emptyset, k) = w_s(R, \sim, k)$.
3. Als $v \in R, R \neq \{v\}$ en $\{(v, x) \in \sim\} = \{(v, v)\}$, dan geven deze geen goede deelverzamelingen, aangezien de samenhangscomponent die v bevat lege doorsnede heeft met X_t , en er een ander samenhangscomponent is met niet-lege doorsnede met X_t .
4. Anders is $(R \cap X_t, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_t\}, k)$ een karakteristiek voor $G[t]$. Dus $n_t(R \cap X_t, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_t\}, k) = n_s(R, \sim, k)$.

Net als bij het type Voorstel is het hier mogelijk dat verschillende karakteristieken voor $G[s]$ dezelfde karakteristiek voor $G[t]$ induceren. In dit geval sommeren we op analoge wijze over al zulke karakteristieken.

Hier vinden we een aantal onduidelijkheden. In geval $v \notin R$ wordt immers in het artikel niet aangegeven wat het gewicht is. Echter kunnen we redelijkerwijs aannemen dat het totale gewicht gelijk blijft, aangezien de verzamelingen niet veranderen.

In geval $R = \{v\}$ staat dat het totale gewicht $w_t(R, \sim, k)$ is, hetgeen ons niets vertelt. We gaan er dan ook vanuit dat dit een schrijffout is en $w_s(R, \sim, k)$ dient te zijn.

In het laatste geval wordt er zelfs geen gewicht gegeven. Nu kan het zijn dat het gewicht gelijk blijft, maar, aangezien we telkens een element van de verzamelingen afhalen, is een logische conclusie dat hier het omgekeerde geldt als bij de voorstelknoop: namelijk

$$w_t(R \cap X_t, \sim', k) = w_s(R, \sim, k) - n_s(R, \sim, k) \cdot w(v).$$

Bovendien is het derde geval heel anders vormgegeven in het artikel. Er staat dat de karakteristiek moet voldoen aan $R \neq \{v\}$ en $(r, r) \in \sim$. Dit is echter niet een eis die de verklaring die volgt behoeft. Immers kan dit perfect gelden terwijl S slechts één samenhangscomponent heeft. Derhalve hebben wij de eis geformuleerd als hierboven, hetgeen wel de bedoelde deelverzamelingen

beschrijft.

3.2.5 Type verbind

Zij $t \in V(G[t])$ van het type *verbind*. Laat s_1, s_2 de nakomelingen zijn. We kunnen nu wederom de goede deelverzamelingen gedefinieerd op $G[s]$ en $G[u]$ uitbouwen naar deelverzamelingen op $G[t]$ door combinaties te maken van de twee verzamelingen.

Beschouw een karakteristiek (R_1, \sim_1, k_1) van s_1 en (R_2, \sim_2, k_2) van s_2 . Neem aan $R_1 = R_2$.

Nu is $(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|)$ een karakteristiek voor $G[t]$. Hier is \sim' de transitieve afsluiting van $\sim_1 \cup \sim_2$. Dit geeft ons $n_t(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|) = n_{s_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{s_2}(R_2, \sim_2, k_2)$ en $w_t(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|) = n_{s_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot w_{s_2}(R_2, \sim_2, k_2) + n_{s_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot w_{s_1}(R_1, \sim_1, k_1) - n_{s_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{s_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot |R_1|$.

Weer kunnen verschillende karakteristieken op $G[s]$ dezelfde induceren op $G[t]$. Ook in dit geval sommeren we over al deze karakteristieken.

Een belangrijk aspect om op te merken is dat in de bovenstaande uitleg van het algoritme een aantal zaken aangepast is. In het originele artikel was een aantal zaken niet volledig duidelijk weergegeven. Kleine foutjes moesten verbeterd worden, informatie moest aangevuld en op enkele plaatsen moesten zaken compleet veranderd worden. Er kan niet met volledige zekerheid gezegd worden of deze veranderingen conform de interpretatie van de schrijvers zijn.

3.2.6 Algoritmische weergave

Om meer overzicht te scheppen volgt hieronder het algoritme in zijn volledigheid.

Algoritme 3.4 (Berekenen van de Shapleywaarde van $v \in V(G)$).

$$D = \emptyset; \forall s \in V(T) : C_s = \emptyset, t_s = \text{NULL}; L = \{s \in V(T) : |X_s| = 1, d(s) = 1\}$$

while $L \neq \emptyset$ **do**

Kies $s \in L$;

if $s=r$ **then**

$t_s = r$;

$L := L \setminus \{s\}$;

else

$t_s = l$;

$C_s := \{(\{v\}, \{(v, v)\}, 1), (\emptyset, \emptyset, 0)\}$;

$n_s(\{v\}, \{(v, v)\}, 1) = 1$;

$w_s(\{v\}, \{(v, v)\}, 1) = w(v)$;

$n_s(\emptyset, \emptyset, 0) = 1$;

$w_s(\emptyset, \emptyset, 0) = 0$;

$L := L \setminus \{s\}$;

$D := D \cup \{s\}$;

end if

end while

while $V(T) \setminus D = \emptyset$ **do**

Kies $s \in V(T) \setminus D$ zodat $K = \{t \in D : ts \in E(T)\} \neq \emptyset$

if $|K| = 2$ **then**

$t_s = j$;


```

else if  $|K| = 1$  then
  Kies  $k \in K$ ;
  if  $X_s \subseteq X_k$  then
     $t_s = f$ ;
  else if  $X_k \subseteq X_s$  then
     $t_s = i$ ;
  end if
end if

if  $t_s = i$  then
   $W = \emptyset$ ;
  Kies  $t \in K$ ;
  Neem  $v$  het unieke element van  $X_s \setminus X_t$ ;
  while  $C_t \setminus W \neq \emptyset$  do
    Kies  $(R, \sim, k) \in C_t \setminus W$ ;
     $W := W \cup \{(R, \sim, k)\}$ ;
     $\sim' = \sim \cup \{(v, v)\} \cup \{(v, x), (x, v) \mid x \in R, vx \in E(G)\}$ ;
     $D := \emptyset$ ;
    while  $\sim' \setminus D \neq \emptyset$  do
      Kies  $(a, b) \in \sim' \setminus D$ ;
       $D := D \cup \{(a, b)\}$ ;
       $P := \emptyset$ ;
      while  $\sim' \setminus P \neq \emptyset$  do
        Kies  $(c, d) \in \sim' \setminus P$ ;
         $P := P \cup \{(c, d)\}$ ;
        if  $b = c$  then
           $P := P \cup \{(a, d)\}$ ;
           $\sim' := \sim' \cup \{(a, d)\}$ ;
        end if
      end while
    end while
  end while
  if  $k = 0$  of  $R \neq \emptyset$  then
    if  $(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) \in C_s$  then
       $n_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) = n_t(R, \sim, k)$ ;
       $w_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) = w_t(R, \sim, k) + n_t(R, \sim, k) \cdot w(v)$ ;
    else
       $C_s := C_s \cup \{(R \cup \{v\}, \sim', k + 1)\}$ ;
       $n_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) := n_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) + n_t(R, \sim, k)$ ;
       $w_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) := w_s(R \cup \{v\}, \sim', k + 1) + w_t(R, \sim, k) + n_t(R, \sim, k) \cdot w(v)$ ;
    end if
  end if
end if
 $C_s := C_s \cup \{(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k)\}$ ;
 $n_s(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k) = n_t(R, \sim, k)$ ;
 $w_s(R, \sim \cup \{(v, v)\}, k) = w_t(R, \sim, k)$ ;
end while
 $D := D \cup \{s\}$ ;
end if

if  $t_s = f$  then
   $W = \emptyset$ ;
  Kies  $t \in K$ ;

```

Neem v het unieke element van $X_t \setminus X_s$;
while $C_t \setminus W \neq \emptyset$ **do**
 Kies $(R, \sim, k) \in C_t \setminus W$;
 $W := W \cup \{(R, \sim, k)\}$;
 if $v \notin R$ **then**
 $C_s := C_s \cup \{(R, \sim, k)\}$;
 $n_s(R, \sim, k) = n_t(R, \sim, k)$;
 $w_s(R, \sim, k) = w_t(R, \sim, k)$;
 else if $v = \{R\}$ **then**
 $C_s := C_s \cup \{(\emptyset, \emptyset, k)\}$;
 $n_s(\emptyset, \emptyset, k) = n_t(R, \sim, k)$;
 $w_s(\emptyset, \emptyset, k) = w_t(R, \sim, k)$;
 else if $\{(v, x) \in \sim\} = \{(v, v)\}$ **then**
 else
 if $(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) \in C_s$ **then**
 $n_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) :=$
 $n_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) + n_t(R, \sim, k)$;
 $w_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) :=$
 $w_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) + w_t(R, \sim, k)$
 $- n_t(R, \sim, k) \cdot w(v)$;
 else
 $C_s := C_s \cup \{(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k)\}$;
 $n_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) = n_t(R, \sim, k)$;
 $w_s(R \cap X_s, \sim \cap \{(u, v) \mid u, v \in X_s\}, k) = w_t(R, \sim, k) - n_t(R, \sim, k) \cdot w(v)$;
 end if
 end if
 end while
 $D := D \cup \{s\}$;
end if

if $t_s = j$ **then**
 while $C_{x_1} \setminus W_1 \neq \emptyset$ **do**
 Kies $(R_1, \sim_1, k_1) \in C_{x_1} \setminus W_1$;
 while $C_{x_2} \setminus W_2 \neq \emptyset$ **do**
 Kies $(R_2, \sim_2, k_2) \in C_{x_2} \setminus W_2$;
 $D := \emptyset$;
 $\sim' = \sim_1 \cup \sim_2$;
 while $\sim' \setminus D \neq \emptyset$ **do**
 Kies $(a, b) \in \sim' \setminus D$;
 $D := D \cup \{(a, b)\}$;
 $P := \emptyset$;
 while $\sim' \setminus P \neq \emptyset$ **do**
 Kies $(c, d) \in \sim' \setminus P$;
 $P := P \cup \{(c, d)\}$;
 if $b = c$ **then**
 $P := P \cup \{(a, d)\}$;
 $\sim' := \sim' \cup \{(a, d)\}$;
 end if
 end while
 end while
 end while

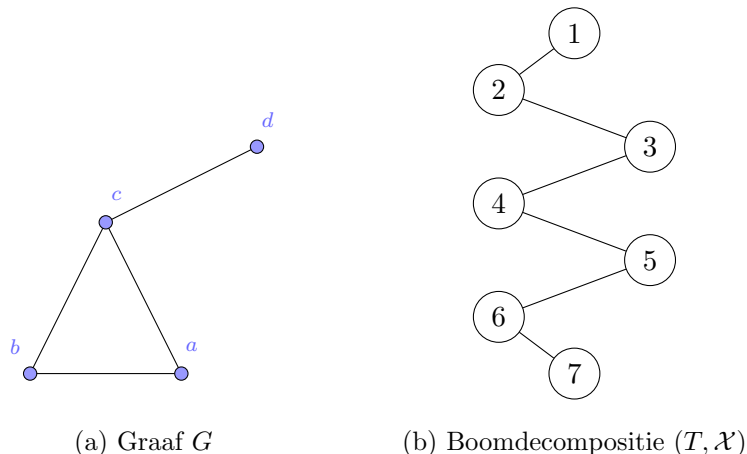
if $(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|) \in C_s$ **then**
 $n_s(R_1, \sim', v \in R_2, k_1 + k_2 - |R_1|) := n_s(R_1, \sim', v \in R_2, k_1 + k_2 - |R_1|)$
 $+ n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2);$
 $w_s(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|) := w_s(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|)$
 $+ n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot w_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2) + n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot w_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1)$
 $- n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot \sum_{v \in R_{x_1}} w(v);$

else
 $C_s := C_s \cup \{(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|)\};$
 $n_s(R_1, \sim', v \in R_2, k_1 + k_2 - |R_1|) = n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2);$
 $w_s(R_1, \sim', k_1 + k_2 - |R_1|) = n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot w_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2)$
 $+ n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot w_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1)$
 $- n_{x_1}(R_1, \sim_1, k_1) \cdot n_{x_2}(R_2, \sim_2, k_2) \cdot \sum_{v \in R_{x_1}} w(v);$

end if
end while
end while
 $D := D \cup \{s\};$
end if
end while
return $w_r(\{v\}, \{(v, v)\}, i), w_r(\emptyset, \emptyset, i) \quad \forall i \in \{0, \dots, |V(G)|\};$

4 Toepassing van het algoritme

In dit hoofdstuk zullen wij het algoritme toepassen op Voorbeeld 3.1. Hierbij maken we gebruik van de boomdecompositie die is gevonden in Voorbeeld 3.2.



Figuur 10: Graaf met boomdecompositie.

In figuur 10b zien we de boom waarvoor geldt $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_7\}$ zodanig dat

$$X_1 = \{a\}, X_2 = \{a, b\}, X_3 = \{a, b, c\}, X_4 = \{b, c\}, X_5 = \{b, c, d\}, X_6 = \{c, d\}, X_7 = \{d\}$$

4.1 Initialisatie en knoop 7

Zij $D = \emptyset$. Voor alle $s \in V(T) = \{1, \dots, 7\}$ stellen we $C_s = \emptyset$ en $t_s = 0$.

Laat $L = \{s \in V(T) : |X_s| = 1, d(s) = 1\} = \{1, 7\}$.

Er geldt $L \neq \emptyset$.

Kies $s = 1 \in L$. Er geldt $1 = r$, dus $t_1 = r$. Dus $L := \{7\}$.

Er geldt nog $L \neq \emptyset$. Kies $s = 7 \in L$. Er geldt $t_7 = l, v = d$.

Dus $C_7 = \{(\{d\}, \{(d, d)\}, 1), (\emptyset, \emptyset, 0)\}$

$n_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 1$;

$n_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) = 1$;

$L := \emptyset; D := \{7\}$.

4.2 Knoop 6

Er geldt $V(T) \setminus D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq \emptyset$.

Kies $s = 6 \in V(T)$. Er geldt $|K| = 1$.

Kies $k = 7 \in K$. Er geldt $X_7 \subseteq X_6$, dus $t_6 = i$.

Laat $W = \emptyset$. Kies $t = 7 \in K$. $v = c \in X_6 \setminus X_7$.

$C_7 \setminus W = C_7 \neq \emptyset$

Kies $(\emptyset, \emptyset, 0) \in C_7 \setminus W$. $W := \{(\emptyset, \emptyset, 0)\}$.

Er geldt $k = 0$, dus $C_6 := \{(\{c\}, \{(c, c)\}, 1)\}$;

$n_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) = n_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 1$;

$C_6 := \{(\{c\}, \{(c, c)\}, 1), (\emptyset, \{(c, c)\}, 0)\}$;

$n_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) = n_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 1$;

Er geldt $C_t \setminus W = \{(\{d\}, \{(d, d)\}, 1)\} \neq \emptyset$. Kies $(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) \in C_t \setminus W$.

$W := \{(\emptyset, \emptyset, 0), (\{d\}, \{(d, d)\}, 1)\} = C_7$.

Er geldt $R \neq \emptyset$, dus $C_6 := \{(\{c\}, \{(c, c)\}, 1), (\emptyset, \{(c, c)\}, 0), (\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2)\}$;
 $n_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = n_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) = 1$;

$C_6 := \{(\{c\}, \{(c, c)\}, 1), (\emptyset, \{(c, c)\}, 0), (\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2), (\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1)\}$;
 $n_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) = n_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) = 1$;

Dus $C_6 = \{(\emptyset, \{(c, c)\}, 0), (\{c\}, \{(c, c)\}, 1), (\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1), (\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2)\}$;

$n_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) = 1$;

$n_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) = 1$;

$n_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) = 1$;

$n_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = 1$;

$D := \{6, 7\}$

4.3 Knoop 5

Aangezien de berekening op volstrekt analoge wijze wordt verricht als bij knoop 6, het is immers ook een voorstelknoop, volgen enkel de resultaten.

$V(T) \setminus D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kies $s = 5$. Er geldt $|K| = 1$. Kies $k = 6$, dan volgt $X_6 \subseteq X_5$, dus $t_5 = i$.

Laat $W = \emptyset$, kies $t = 6$, $v = b$.

$C_5 = \{(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0), (\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1),$
 $(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2), (\{b, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 2),$
 $(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2),$
 $(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3)\}$

$n_5(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) = 1$;

$n_5(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1$;

$n_5(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1$;

$n_5(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) = 1$;

$n_5(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) = 1$;

$n_5(\{b, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 2) = 1$;

$n_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = 1$;

$n_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) = 1$;

$D := \{5, 6, 7\}$

4.4 Knoop 4

Dit is de eerste vergeetknoop die we tegenkomen, dus bespreken we elk van de gevallen die we tegenkomen eenmaal en geven we de eindresultaten.

$V(T) \setminus D = \{1, 2, 3, 4\}$, kies $s = 4$. Er geldt $|K| = 1$. Kies $k = 5$, dan volgt $X_4 \subseteq X_5$, dus $t_4 = f$.

Laat $W = \emptyset$, kies $t = 5$, $v = d$.

Kies $(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \in C_5$. Er geldt $v \notin R$, dus dit geeft

$C_4 := \{(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1)\}$ en

$n_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = n_5(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1$;

Kies $(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) \in C_5$. Er geldt hier $R = \{v\}$, dus dit geeft

$C_4 := \{(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\emptyset, \emptyset, 1)\}$

$n_4(\emptyset, \emptyset, 1) = n_5(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) = 1$;

Kies $(\{b, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 2) \in C_5$. Er geldt $v \in R, R \neq \{v\}$ en $\{(v, x) \in \sim\} = \{(v, v)\}$, dus induceren de goede deelverzamelingen op $G[5]$ met dit karakteristiek geen goede deelverzamelingen op $G[4]$

Kies $(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 1) \in C_5$. Er geldt hier $v \in R, R \neq \{v\}$ en $\{(v, x) \in \sim\} \neq \{(v, v)\}$, dus dit geeft

$$C_4 := \{(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\emptyset, \emptyset, 1), (\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2)\} \text{ en}$$

$$n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) = n_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = 1;$$

Dit geeft ons de eindresultaten

$$C_4 = \{(\emptyset, \emptyset, 1), (\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0), (\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1), (\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2), (\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2), (\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3)\}$$

$$\begin{aligned} n_4(\emptyset, \emptyset, 1) &= 1; \\ n_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) &= 1; \\ n_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= 1; \\ n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= 1; \\ n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) &= 1; \\ n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= 1; \\ n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= 1; \end{aligned}$$

$$D := \{4, 5, 6, 7\}$$

4.5 Knoop 3

Bij deze knoop werken we grotendeels op analoge wijze als bij knoop 5 en 6, op één knoop na. Deze werken we volledig uit.

$V(T) \setminus D = \{1, 2, 3\}$, kies $s = 3$. Er geldt $|K| = 1$. Kies $k = 4$, dan volgt $X_4 \subseteq X_3$, dus $t_3 = i$. Laat $W = \emptyset$, kies $t = 4$, $v = a$.

Kies $(\emptyset, \emptyset, 1) \in C_4$. Er geldt $k \neq 0$ en $R = \emptyset$. Dus volgt $C_3 := \{(\emptyset, \{(a, a)\}, 1)\}$ en $n_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) = n_4(\emptyset, \emptyset, 1) = 1$;

Deze karakteristiek induceert dus slechts één karakteristiek op $G[3]$.

Nu volgen de overige resultaten.

$$\begin{aligned} C_3 = & \{(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0), (\emptyset, \{(a, a)\}, 1), (\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), \\ & (\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), (\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), (\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2), \\ & (\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2), (\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2), \\ & (\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3), (\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2), \\ & (\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3), \\ & (\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3), \\ & (\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_3(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) &= 1; \\ n_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) &= 1; \\ n_3(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= 1; \\ n_3(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= 1; \\ n_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= 1; \\ n_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2) &= 1; \\ n_3(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) &= 1; \\ n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= 1; \\ n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= 1; \\ n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) &= 1; \\ n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) &= 1; \end{aligned}$$

$$n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) = 1;$$

$$n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) = 1;$$

$$D := \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

4.6 Knoop 2

Bij deze knoop werken we op analoge wijze als bij knoop 4. We geven dus enkel de resultaten.

$V(T) \setminus D = \{1, 2\}$, kies $s = 2$. Er geldt $|K| = 1$. Kies $k = 3$, dan volgt $X_2 \subseteq X_3$, dus $t_2 = f$.

Laat $W = \emptyset$, kies $t = 3$, $v = c$.

$$C_2 = \{(\emptyset, \emptyset, 1), (\emptyset, \emptyset, 2), (\emptyset, \{(a, a)\}, 1), (\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2), (\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), (\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2), (\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3), (\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), (\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2), (\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3), (\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2), (\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3), (\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4)\}$$

$$n_2(\emptyset, \emptyset, 1) = 1;$$

$$n_2(\emptyset, \emptyset, 2) = 1;$$

$$n_2(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) = 1;$$

$$n_2(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) = 1;$$

$$n_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1;$$

$$n_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) = 1;$$

$$n_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) = 1;$$

$$n_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1;$$

$$n_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) = 1;$$

$$n_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) = 1;$$

$$n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) = 1;$$

$$n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) = 1;$$

$$n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) = 1;$$

$$D := \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

4.7 Knoop 1

Nu zijn we voor het berekenen van de Shapleywaarde enkel geïnteresseerd in de gewichten van knopen met karakteristieken van de vorm $(\{a\}, \{(a, a)\}, k)$ en $(\emptyset, \emptyset, k)$ voor $k \in \{0, \dots, |V(G)|\}$. Wel komt het voor het eerst voor dat verschillende karakteristieken dezelfde karakteristiek induceren. Deze zullen expliciet benoemd worden.

$V(T) \setminus D = \{1\}$, kies $s = 1$. Er geldt $|K| = 1$. Kies $k = 2$, dan volgt $X_1 \subseteq X_2$, dus $t_1 = f$.

Laat $W = \emptyset$, kies $t = 2$, $v = b$.

Op analoge wijze vinden we het volgende.

$$C_1 = \{(\emptyset, \emptyset, 1), (\emptyset, \emptyset, 2), (\emptyset, \emptyset, 3), (\emptyset, \{(a, a)\}, 1), (\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2), (\{a\}, \{(a, a)\}, 2), (\{a\}, \{(a, a)\}, 3), (\{a\}, \{(a, a)\}, 4), (\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1), (\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2), (\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3)\}$$

Merk op dat karakteristiek $(\emptyset, \emptyset, 1)$ resp. $(\emptyset, \emptyset, 2)$ voor $G[1]$ geïnduceerd worden door karakteristieken $\emptyset, \emptyset, 1$ en $(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1)$ resp. $(\emptyset, \emptyset, 2)$ en $(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2)$ voor $G[2]$.

Aangezien we enkel geïnteresseerd zijn in karakteristieken van de vorm $(\{a\}, \{(a, a)\}, k)$ en $(\emptyset, \emptyset, k)$ voor $k \in \{0, \dots, |V(G)|\}$, zullen we enkel het aantal goede deelverzamelingen met dergelijke karakteristieken weergeven.

$$\begin{aligned}
n_1(\emptyset, \emptyset, 1) &= 2; \\
n_1(\emptyset, \emptyset, 2) &= 2; \\
n_1(\emptyset, \emptyset, 3) &= 1; \\
n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2) &= 1; \\
n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) &= 1; \\
n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) &= 1;
\end{aligned}$$

Nu vinden we de Shapleywaarde als volgt:

$$\begin{aligned}
\phi_a(v) &= \sum_{k=1}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)|-k-1)!}{|V(G)|!} \left(\sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{a\}, |S|=k} v(S \cup \{a\}) - \sum_{S \subseteq V \setminus \{a\}, |S|=k} v(S) \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{k!(3-k)!}{4!} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, k+1) - n_1(\emptyset, \emptyset, k) \cdot \mathbb{1}_{\{k \geq 2\}}) \right) \\
&= \frac{1}{12} n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2) + \frac{1}{12} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) - n_1(\emptyset, \emptyset, 2)) \\
&\quad + \frac{1}{4} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) - n_1(\emptyset, \emptyset, 3)) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} (1-2) + \frac{1}{4} (1-1) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{-1}{12} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

We vinden hier dus dat $\phi_a(v) = 0$. Ten eerste, dit is niet correct, omdat we in Voorbeeld 3.1 de echte Shapleywaarde hadden berekend. Ten tweede kan de Shapleywaarde niet nul zijn, aangezien a een buur heeft en derhalve een onafhankelijke deelgraaf samenhangend kan maken door zijn toevoeging. Het feit dat dit niet klopt is niet geheel onverwacht, aangezien het algoritme slechts gedeeltelijk reparabel is gebleken.

Om te zien waar het stukloopt kunnen we de goede deelverzamelingen met de hand nagaan. Voor elke karakteristiek die van belang is voor de berekening van de Shapleywaarde geven we de corresponderende goede deelverzamelingen van $V(G)$.

Voor $(\emptyset, \emptyset, 1)$ vinden we geen goede deelverzamelingen.

Voor $(\emptyset, \emptyset, 2)$ vinden we goede deelverzamelingen $\{b, d\}$ en $\{c, d\}$.

Voor $(\emptyset, \emptyset, 3)$ vinden we de goede deelverzameling $\{b, c, d\}$.

Voor $(\{a\}, \{(a, a)\}, 2)$ vinden we goede deelverzamelingen $\{a, b\}$ en $\{a, c\}$.

Voor $(\{a\}, \{(a, a)\}, 3)$ vinden we goede deelverzamelingen $\{a, b, c\}$ en $\{a, c, d\}$.

Voor $(\{a\}, \{(a, a)\}, 4)$ vinden we de goede deelverzameling $\{a, b, c, d\}$.

Als we deze waarden invullen in onze formule voor de Shapleywaarde krijgen we het volgende:

$$\begin{aligned}
\phi_a(v) &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{k!(3-k)!}{4!} (n_1(\{a\}, \{(a,a)\}, k+1) - n_1(\emptyset, \emptyset, k) \cdot \mathbb{1}_{\{k \geq 2\}}) \right) \\
&= \frac{1}{12} n_1(\{a\}, \{(a,a)\}, 2) + \frac{1}{12} (n_1(\{a\}, \{(a,a)\}, 3) - n_1(\emptyset, \emptyset, 2)) \\
&\quad + \frac{1}{4} (n_1(\{a\}, \{(a,a)\}, 4) - n_1(\emptyset, \emptyset, 3)) \\
&= \frac{2}{12} + \frac{1}{12} (2 - 2) + \frac{1}{4} (1 - 1) \\
&= \frac{2}{12} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Hiermee vinden we wel de Shapleywaarde zoals eerder berekend in 3.1. We kunnen hiermee concluderen dat er nog een fout zit in de manier waarop goede deelverzamelingen door het algoritme worden geteld.

4.8 Andere interpretaties

Een andere interpretatie voor het probleem met de gewichten in het ongewogen verbondenheids-spel geeft ons een enigszins andere uitkomst.

Het is mogelijk te stellen dat $w(v) = 0$ voor de lege verzameling en $w(v) = 1$ anders. Dit verandert niet welke karakteristieken ons algoritme vindt; noch het aantal daarvan. Wel vinden we nu gewichten in elke stap, die we vervolgens kunnen gebruiken om de Shapleywaarde te berekenen. Nu brengt deze interpretatie twee mogelijke opties met zich mee. Voor het geval vergeet kan een niet-lege karakteristiek een lege karakteristiek induceren. Laat $s \in V(T)$ een knoop zijn van het type vergeet, en s kind van t . Laat v het element zijn dat “vergeten” wordt. Beschouw nu karakteristieken (R, \sim, k) voor $G[s]$ zódat $v \in R, R = \{v\}$. Nu induceert (R, \sim, k) de karakteristiek $(\emptyset, \emptyset, k)$ voor $G[t]$. Volgens het algoritme zoals het reeds geïnterpreteerd is, geldt $w_t(\emptyset, \emptyset, k) = w_s(R, \sim, k)$. Deze stap kunnen we zo houden, maar we kunnen met onze keuze voor de gewichtsfunctie ook zeggen $w_t(\emptyset, \emptyset, k) = 0$. De gewichten en Shapleywaarden voor deze twee versies van de alternatieve interpretatie zullen we hieronder weergeven.

4.8.1 Gelijk gewicht

$$w_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 0;$$

$$w_7(\{d\}, \{(d,d)\}, 1) = 1;$$

$$w_6(\emptyset, \{(c,c)\}, 0) = w_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 0;$$

$$w_6(\{c\}, \{(c,c)\}, 1) = w_7(\emptyset, \emptyset, 0) + n_7(\emptyset, \emptyset, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_6(\{d\}, \{(c,c), (d,d)\}, 1) = w_7(\{d\}, \{(d,d)\}, 1) = 1;$$

$$w_6(\{c,d\}, \{(c,c), (d,d), (c,d), (d,c)\}, 2) = w_7(\{d\}, \{(d,d)\}, 1) + n_7(\{d\}, \{(d,d)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$w_5(\emptyset, \{(b,b), (c,c)\}, 0) = w_6(\emptyset, \{(c,c)\}, 0) = 0;$$

$$w_5(\{b\}, \{(b,b), (c,c)\}, 1) = w_6(\emptyset, \{(c,c)\}, 0) + n_6(\emptyset, \{(c,c)\}, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1;$$

$$w_5(\{c\}, \{(b,b), (c,c)\}, 1) = w_6(\{c\}, \{(c,c)\}, 1) = 1;$$

$$w_5(\{d\}, \{(b,b), (c,c), (d,d)\}, 1) = w_6(\{d\}, \{(c,c), (d,d)\}, 1) = 1;$$

$$w_5(\{b,c\}, \{(b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}, 2) = w_6(\{c\}, \{(c,c)\}, 1) + n_6(\{c\}, \{(c,c)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\begin{aligned}
w_5(\{b,d\}, \{(b,b), (c,c), (d,d)\}, 2) &= w_6(\{d\}, \{(c,c), (d,d)\}, 1) + n_6(\{d\}, \{(c,c), (d,d)\}, 1) \cdot 1 \\
&= 1 + 1 = 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) &= w_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = 2; \\
w_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) &= w_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \\
+ n_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \cdot 1 &= 2 + 1 = 3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_5(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) = 1; \\
w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) &= w_5(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_5(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_5(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) &= w_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \\
- n_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \cdot 1 &= 2 - 1 = 1; \\
w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= w_5(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) = 2; \\
w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= w_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) \\
- n_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) &= 3 - 1 = 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) &= w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) &= w_4(\emptyset, \emptyset, 1) = 1; \\
w_3(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) + n_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1; \\
w_3(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) = 1; \\
w_3(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) &= w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \\
+ n_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \cdot 1 &= 1 + 1 = 2; \\
w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) = 2; \\
w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) = 2; \\
w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \\
+ n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \cdot 1 &= 1 + 1 = 2; \\
w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) + n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) \cdot 1 \\
= 1 + 1 &= 2; \\
w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) + n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \cdot 1 = 2 + 1 = 3; \\
w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) + n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \cdot 1 = 2 + 1 = 3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_2(\emptyset, \emptyset, 2) &= w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2) = 1; \\
w_2(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) &= w_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) = 1; \\
w_2(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) &= w_3(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_3(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) &= w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) \\
- n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) \cdot 1 &= 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) &= w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) \\
- n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) \cdot 1 &= 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_3(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) &= w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \\
- n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \cdot 1 &= 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) &= w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \\
- n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \cdot 1 &= 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) &= w_3(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \\
= 2; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) &= w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) \\
- n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) \cdot 1 &= 3 - 1 = 2; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) &= w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \\
- n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \cdot 1 &= 3 - 1 = 2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \\
&- n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \cdot 1 = 3 - 1 = 2; \\
w_1(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_2(\emptyset, \emptyset, 1) + w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1 + 1 = 2; \\
w_1(\emptyset, \emptyset, 2) &= w_2(\emptyset, \emptyset, 2) + w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) = 1 + 1 = 2; \\
w_1(\emptyset, \emptyset, 3) &= w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) = 1; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \\
&- n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) \\
&- n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) \\
&- n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) \cdot 1 = 2 - 1 = 1;
\end{aligned}$$

Dus we vinden de Shapleywaarde:

$$\begin{aligned}
\phi_a(v) &= \sum_{k=0}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)|-k-1)!}{|V(G)|!} \left(\sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{a\}, |S|=k} v(S \cup \{a\}) - \sum_{S \subseteq V \setminus \{a\}, |S|=k} v(S) \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{k!(3-k)!}{4!} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, k+1) - n_1(\emptyset, \emptyset, k) \cdot \mathbb{1}_{\{k \geq 2\}}) \right) \\
&= \frac{1}{12} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2)) + \frac{1}{12} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) - n_1(\emptyset, \emptyset, 2)) \\
&+ \frac{1}{4} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) - n_1(\emptyset, \emptyset, 3)) \\
&= \frac{1}{12} (1) + \frac{1}{12} (1 - 2) + \frac{1}{4} (1 - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dit is dezelfde waarde als hiervoor, en nog steeds niet de waarde die we gevonden hebben in Voorbeeld 3.1.

4.8.2 Gewicht wordt 0

$$\begin{aligned}
w_7(\emptyset, \emptyset, 0) &= 0; \\
w_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) &= 1; \\
w_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) &= w_7(\emptyset, \emptyset, 0) = 0; \\
w_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) &= w_7(\emptyset, \emptyset, 0) + n_7(\emptyset, \emptyset, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1; \\
w_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) &= w_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) = 1; \\
w_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) &= w_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) + n_7(\{d\}, \{(d, d)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2; \\
w_5(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) &= w_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) = 0; \\
w_5(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) + n_6(\emptyset, \{(c, c)\}, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1; \\
w_5(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) = 1; \\
w_5(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) &= w_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) = 1; \\
w_5(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= w_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) + n_6(\{c\}, \{(c, c)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2; \\
w_5(\{b, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 2) &= w_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) + n_6(\{d\}, \{(c, c), (d, d)\}, 1) \cdot 1 \\
&= 1 + 1 = 2; \\
w_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) &= w_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) = 2; \\
w_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) &= w_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \\
&+ n_6(\{c, d\}, \{(c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \cdot 1 = 2 + 1 = 3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_4(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_5(\{d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d)\}, 1) = 0; \\
w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) &= w_5(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_5(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) &= w_5(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) &= w_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \\
&\quad - n_5(\{c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}, 2) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= w_5(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) = 2; \\
w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= w_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) \\
&\quad - n_5(\{b, c, d\}, \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\}, 3) = 3 - 1 = 2; \\
\\
w_3(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) &= w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) &= w_4(\emptyset, \emptyset, 1) = 0; \\
w_3(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) + n_4(\emptyset, \{(b, b), (c, c)\}, 0) \cdot 1 = 0 + 1 = 1; \\
w_3(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) = 1; \\
w_3(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) &= w_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \\
&\quad + n_4(\{b\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2; \\
w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) = 2; \\
w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) &= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) = 2; \\
w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \\
&\quad + n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2; \\
w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) &= w_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) + n_4(\{c\}, \{(b, b), (c, c)\}, 2) \cdot 1 \\
&= 1 + 1 = 2; \\
w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) \\
&= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) + n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \cdot 1 = 2 + 1 = 3; \\
w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \\
&= w_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) + n_4(\{b, c\}, \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \cdot 1 = 2 + 1 = 3; \\
\\
w_2(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 0; \\
w_2(\emptyset, \emptyset, 2) &= w_3(\{c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 2) = 0; \\
w_2(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) &= w_3(\emptyset, \{(a, a)\}, 1) = 0; \\
w_2(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) &= w_3(\emptyset, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 0) = 0; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_3(\{a\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) &= w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) \\
&\quad - n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 2) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{a\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) &= w_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) \\
&\quad - n_3(\{a, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}, 3) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) &= w_3(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) &= w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \\
&\quad - n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 2) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) &= w_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \\
&\quad - n_3(\{b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, 3) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) &= w_3(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \\
&= 2; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) \\
&= w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) \\
&\quad - n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 3) \cdot 1 = 3 - 1 = 2; \\
w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) \\
&= w_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \\
&\quad - n_3(\{a, b, c\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}, 4) \cdot 1 = 3 - 1 = 2; \\
w_1(\emptyset, \emptyset, 1) &= w_2(\emptyset, \emptyset, 1) + w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, 1) = 0 + 0 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1(\emptyset, \emptyset, 2) &= w_2(\emptyset, \emptyset, 2) + w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 2) = 0 + 0 = 0; \\
w_1(\emptyset, \emptyset, 3) &= w_2(\{b\}, \{(a, a), (b, b)\}, 3) = 0; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \\
&\quad - n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}, 2) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) \\
&\quad - n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 3) \cdot 1 = 2 - 1 = 1; \\
w_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) &= w_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) \\
&\quad - n_2(\{a, b\}, \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}, 4) \cdot 1 = 2 - 1 = 1;
\end{aligned}$$

Dus we vinden de Shapleywaarde:

$$\begin{aligned}
\phi_a(v) &= \sum_{k=0}^{|V(G)|-1} \left(\frac{k!(|V(G)|-k-1)!}{|V(G)|!} \left(\sum_{S \subseteq V(G) \setminus \{a\}, |S|=k} v(S \cup \{a\}) - \sum_{S \subseteq V \setminus \{a\}, |S|=k} v(S) \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{k!(3-k)!}{4!} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, k+1) - n_1(\emptyset, \emptyset, k) \cdot \mathbb{1}_{\{k \geq 2\}}) \right) \\
&= \frac{1}{12} n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 2) + \frac{1}{12} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 3) - n_1(\emptyset, \emptyset, 2)) \\
&\quad + \frac{1}{4} (n_1(\{a\}, \{(a, a)\}, 4) - n_1(\emptyset, \emptyset, 3)) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} (1 - 0) + \frac{1}{4} (1 - 0) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Dit is ook niet de waarde die we gevonden hebben in Voorbeeld 3.1.

5 Conclusie

In deze scriptie is een aantal belangrijke theoretische fenomenen besproken die de achtergrondinformatie vormen voor het artikel van T.O. Van der Zande, H.L. Bodlaender en H.J.M. Hamers [9]. Bovendien zijn de foutjes, dan wel incomplete informatie, aangekaart en voor zover mogelijk gecorrigeerd.

Hoewel het oorspronkelijke plan was het algoritme toe te passen op andere netwerken, is het veel vruchtbaarder gebleken meer theoretisch onderzoek te doen en het algoritme te illustreren met een simpel voorbeeld. Enerzijds om een completer beeld te geven van hoe het algoritme past binnen de grafentheorie, anderzijds door te laten zien hoe complex het is om het algoritme te corrigeren en hoe belangrijk het is dit volledig te beschrijven om het als buitenstaander te kunnen implementeren.

Referenties

- [1] Rafael Amer and José Miguel Giménez. A connectivity game for graphs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 60(3):453–470, Dec 2004. ISSN 1432-5217. doi: 10.1007/s001860400356. URL <https://doi.org/10.1007/s001860400356>.
- [2] Hans L. Bodlaender. A partial k -arboretum of graphs with bounded treewidth. *Theoretical Computer Science*, 209(1):1 – 45, 1998. ISSN 0304-3975. doi: 10.1016/S0304-3975(97)00228-4. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397597002284>.
- [3] Hans L Bodlaender and Rolf H Möhring. The pathwidth and treewidth of cographs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 6(2):181–188, 1993.
- [4] Daniela Bronner and Bernard Ries. An introduction to treewidth. Mar 2006. URL <https://infoscience.epfl.ch/record/89584>.
- [5] Fănică Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(1):47–56, February 1974. doi: 10.1016/0095-8956(74)90094-x. URL [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90094-x](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90094-x).
- [6] Martin Charles Golumbic. *Annals of Discrete Mathematics*, Volume 57. Elsevier, 2004. doi: 10.1016/S0167-5060(04)80050-5. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167506004800505>.
- [7] IIfen (<https://math.stackexchange.com/users/503902/ilefen>). Class of chordal graphs is closed under edge-contraction. Mathematics Stack Exchange, 2017. URL <https://math.stackexchange.com/q/2575172>. Geraadpleegd op 21-12-2021.
- [8] Donald J Rose. Triangulated graphs and the elimination process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 32(3):597–609, 1970. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/0022-247X(70)90282-9. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X70902829>.
- [9] Tom C. Van der Zanden, Hans L. Bodlaender, and Herbert J.M. Hamers. Efficiently computing the shapley value of connectivity games in low-treewidth graphs. Onuitgegeven manuscript, 2018.