Hexenkringen: Onderzoek naar winnende strategieën voor Cilindrisch Hex
Hees, M.L. van

Hexenkringen

Onderzoek naar winnende strategieën voor Cilindrisch Hex

Marit van Hees

Bachelorscriptie

27 juli 2022

Begeleider: Prof. Dr. F.M. Spieksma

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Het spel Hex **3**
2.1 Cilindrisch Hex 4

3 Altijd een Winnaar **7**
3.1 Het Knip- en Kleur Algoritme 8
3.2 Cilindrische Hexstelling 9

4 Bestaande Strategieën **11**
4.1 $2m \times n$ Strategie 11
4.2 $3 \times n$ Strategie 14

5 $5 \times n$ Strategie **17**
5.1 Strategie van $3 \times n$ Toepassen? 17
5.2 Bruggetjes Bouwen 19
5.3 Kleine n 20
5.4 Langste k-pad 21

6 Discussie **24**

A Voorbeeld Knip- en Kleur Algoritme **26**

B Toepassing strategie voor $3 \times n$ Cilindrisch Hex **27**

1 Inleiding

Het is weer tijd voor een spelletjesmiddag. De chips staat op tafel en de bier- of Cola flesjes worden open geploft. Nu de vraag: welk spel gaan we spelen? Helaas zijn niet veel van je vrienden op komen dagen en zijn jullie met zijn tweeën. `DOMINEERING`, `NIM` of `HACKENBUSH`? Of toch `MAZE`, `PUSH` of AMAZONS? Na wat discussie wordt besloten het spel `HEX` te spelen. Echter is dit spel al vaak genoeg gespeeld, dus de ducttape wordt gepakt en een andere versie ontstaat: `CILINDRISCH HEX`. Hier zijn de linker- en rechter randen van het speelbord aan elkaar geplakt, wat het speelbord niet vlak maar cilindrisch maakt. Jij en je vriend zijn echter zeer fanatiek, en gaan eerst goed nadenken wat de strategie moet zijn om dit spel te spelen. In deze scriptie wordt onderzocht wat de winnende strategieën zijn bij het spel Cilindrisch Hex, en of het mogelijk is een strategie voor een cilindrisch bord met omtrek 5 te construeren.

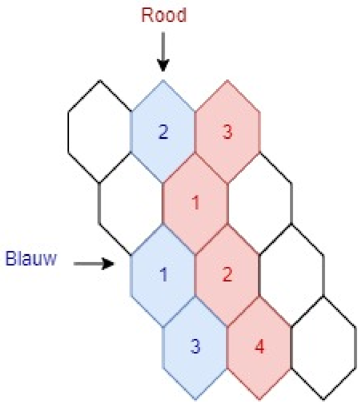
Hierbij wordt vanuit gegaan dat beide spelers optimaal spelen. Dit betekent dat een speler altijd een zet zal doen, die het meest gunstigst voor hem is. Dit doet hij wetend dat zijn tegenspeler dit ook zal doen. Neem bijvoorbeeld het spel `BOTER, KAAS EN EIEREN`. Als speler O drie-op-een-rij kan maken, zal die dit ook zeker doen. Maar als speler O twee-op-een-rij kan maken, maar daardoor speler X in de volgende zet drie-op-een-rij, moet speler O speler X blokkeren.

In het spel Cilindrisch Hex is al het een en ander bekend, maar ook nog veel onbekend. Het spel wordt gespeeld op een cilindrisch bord van n rijen en omtrek m door speler Blauw en speler Rood, die om en om een tegel kleuren in hun kleur. Rood probeert een pad van boven naar beneden te maken en Blauw een kring om de cilinder heen. In [4] is bewezen dat er altijd een winnaar is; in [1] is een winnende strategie voor Rood bepaald voor een bord met even omtrek, en in [3] is ook een winnende strategie gevonden voor Rood voor een bord met omtrek 3. Voor de andere borden wordt vermoed dat hiervoor ook Rood een winnende strategie heeft, maar dat is nog niet bewezen [3]. Wat de strategieën zijn voor omtrek m met $m \geq 5$ oneven, is dus nog onbekend, en in deze scriptie wordt een poging gedaan deze te vinden; in het bijzonder voor $m = 5$.

In Hoofdstuk 2 wordt het spel `HEX` en `CILINDRISCH HEX` uitgelegd. In Hoofdstuk 3 wordt een nieuw bewijs gegeven op de Cilindrische Hex-stelling. Deze stelling houdt in dat het spel niet in gelijkspel kan eindigen. Vervolgens worden in Hoofdstuk 4 de bestaande strategieën onderzocht en voor de even omtrek een nieuw bewijs gegeven. Als laatste wordt dan het spel met omtrek 5 onderzocht in Hoofdstuk 5.

2 Het spel Hex

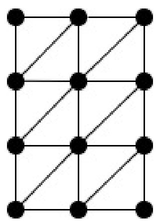
We bekijken een spel voor twee spelers, bestaande uit een veld van $m \times n$ hexagons. Speler 1 en Speler 2 (hierna Rood en Blauw) kleuren om de beurt een ongekleurd hexagon in zijn of haar kleur. Een speler kan winnen door een pad van zijn of haar kleur van de ene zijde naar de andere zijde te maken, waarbij Rood de boven- en onderzijde wil verbinden en Blauw de linker- en rechterzijde. In Figuur 1 zie je een voorbeeld van 3×4 Hex, waarbij Rood begint door een vakje in het midden gelabeld '1' te kleuren. Vervolgens is Blauw aan de beurt die het blauwe vakje gelabeld '1' kleurt, en op deze manier wordt het bord langzaam gekleurd. Rood heeft nu gewonnen, want er is een rood pad van de bovenzijde (vakje gelabeld '3') naar de onderzijde (vakje gelabeld '4').



Figuur 1: Voorbeeld van 3×4 Hex, Rood begint en wint.

Het standaard spel dat ook in de winkel verkrijgbaar is, is 11×11 Hex. Hiervoor zijn geen winnende strategieën voor bekend, wat dit ook zo'n interessant spel maakt. In [4] is wel bewezen dat er altijd een winnaar is (gelijkspel kan niet voorkomen), en zelfs dat de beginnende speler een winnende zet heeft. Welke zet dat is, is echter alleen bekend bij $n \times n$ Hexborden met $n \leq 9$.

Het spel is op verschillende manieren te representeren. Zo kunnen we aangrenzende hexagons tekenen en deze vervolgens inkleuren (zoals in Figuur 1), of een representatie door middel van een graaf. De knopen representeren de hexagons waarbij een knoop is verbonden met een andere knoop als ze aangrenzend zijn in de representatie zoals in Figuur 1 (zie Figuur 2). Het kleuren gaat dan met behulp van een afbeelding $L : V \to \{\text{Rood}, \text{Blauw}\}$, met $G = (V, E)$ de graaf.



Figuur 2: Representatie van 3×4 Hex in een graaf.

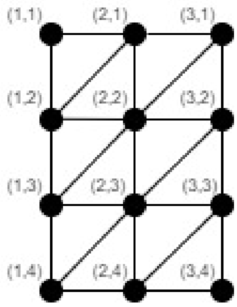
Definitie 2.1. *De graaf* $G_r(m, n) = \{V_r(m, n), E_r(m, n)\}$ *geassocieerd met normaal (rechthoekig)* $m \times n$ *Hex heeft knopenverzameling*

$$V_r(m, n) = \{(i, j) \ : \ i, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \tag{1}$$

en takkenverzameling

$$E_r(m, n) = \{(z, w) \ : \ z, w \in V_r(m, n), z \neq w, |z_1 - w_1| \leq 1, |z_2 - w_2| \leq 1 \text{ en } |(z_1 + z_2) - (w_1 + w_2)| \leq 1\} \tag{2}$$

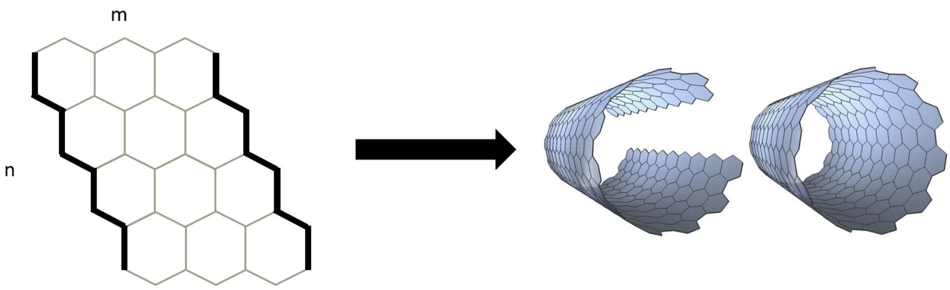
Bovenstaande definitie geeft een graaf weer, met m kolommen en n rijen. Figuur 3 illustreert hoe de knopen zo ook genummerd worden.



Figuur 3: Voorbeeld van 3×4 Hex als graaf met nummering.

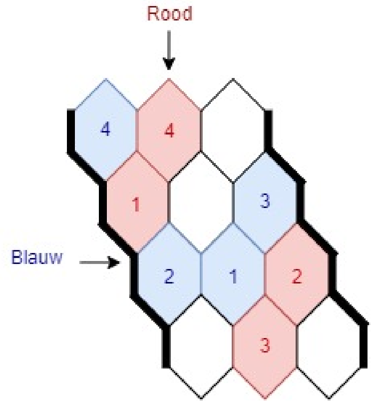
2.1 Cilindrisch Hex

Nu het spel voor Hex gedefiniëerd is (in het vervolg naar gerefereerd als 'normaal' of 'rechthoekig' Hex), kunnen we dit spel uitbreiden naar Cilindrisch Hex. Dit doen we door de linkerzijde aan de rechterzijde te 'plakken'. Dit kun je voor je zien zoals in Figuur 6.



Figuur 4: Het plakken van normaal Hex geeft een cilindrisch bord.

De regels van het spel blijven hetzelfde: de spelers kleuren om de beurt een hexagon, totdat één van beide spelers een winnend pad heeft. Rood wil nog steeds een pad maken van boven naar beneden, maar voor Blauw is het nu de bedoeling een kring te maken om de cilinder heen. Figuur 5 is een voorbeeld hoe Cilindrisch Hex gespeeld kan worden. In dit geval begint Blauw door het vakje gelabeld '1' blauw te kleuren, vervolgens kleurt Rood het rode vakje gelabeld '1', enzovoorts. Na de derde zet heeft Blauw een pad gemaakt van de linker rand naar de rechter rand, waardoor zij in normaal Hex gewonnen zou hebben. Maar dit is Cilindrisch Hex, en de blauwe hexagons '2' en '3' zijn niet verbonden waardoor ze geen kring om de cilinder vormen. Ze heeft dus nog niet gewonnen. Op deze manier wordt het spel nog verder doorgespeeld, en na de vierde zet heeft Rood een pad gemaakt van boven naar beneden.



Figuur 5: Voorbeeld van 3×4 Cilindrisch Hex. Blauw begint en Rood wint.

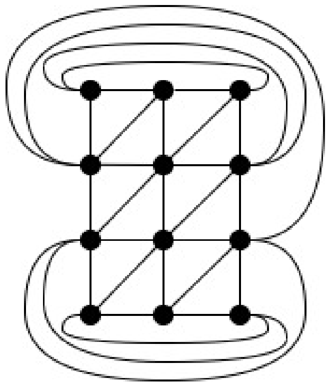
De graaf die dit bord representeert wordt nu ook wat uitgebreider. Het aantal hexagons blijft hetzelfde, dus deze graaf heeft dezelfde knopenverzameling als bij normaal Hex. De verzameling takken wordt echter wel groter, wat dan leidt tot de volgende definitie.

Definitie 2.2. *Voor de graaf $G_c(m,n) = \{V_c(m,n), E_c(m,n)\}$ geassocieerd met Cylindrisch Hex geldt dat de verzameling knopen gelijk is aan die van $G_r(m,n)$ (zie Definitie 2.1), dus $V_c(m,n) = V_r(m,n)$. De verzameling takken wordt gegeven door*

$$E_c(m,n) = E_r(m,n) \cup D(m,n) \cup F(m,n), \tag{3}$$

met

$$D(m,n) = \{(z,w) \ : \ z,w \in V_c(m,n), z_1 = m, w_1 = 1, z_2 = w_2\}; \tag{4}$$
$$F(m,n) = \{(z,w) \ : \ z,w \in V_c(m,n), z_1 = m, w_1 = 1, z_2 = w_2 + 1\}. \tag{5}$$



Figuur 6: Representatie van 3×4 Cilindrisch Hex in een graaf.

In deze scriptie zal vaak verwezen worden naar 'kolommen' en 'ringen'. Met een kolom i wordt de verzameling knopen $\{z \in V_c(m,n) \ : \ z_1 = i\}$ bedoeld, en met ring j wordt de verzameling knopen $\{z \in V_c(m,n) \ : \ z_2 = j\}$ bedoelt. De 'bovenste ring' is ring 1, en de 'onderste ring' is ring n.

Merk op, dat dit spel anders gedefiniëerd is dan andere combinatorische spellen. In een combinatorisch spel geldt namelijk het volgende:

- 2 spelers, die om en om een zet doen;
- eindig veel zetten;
- laatste speler die een zet kan doen wint.

Figuur 7: Illustratie ‘kolom’ en ‘ring’.

Er wordt gespeeld net zo lang tot de speler die aan de beurt is geen legale zetten meer kan doen, en zo verliest. Er is ook een versie waarbij deze speler dan juist wint, dat wordt ‘Misère play’ genoemd. Uit het tweede aspect volgt dat dezelfde bord-situatie niet twee keer in één spel kan voorkomen. Het spel `SCHAKEN` valt dus niet onder deze verzameling spellen: beide spelers kunnen bijvoorbeeld achter elkaar hun loper heen-en-weer zetten waardoor de situatie hetzelfde is als daarvoor. Voorbeelden van wat wel combinatorische spellen zijn, zijn `DOMINEERING`, `HACKENBUSH` en `NIM`. Voor uitleg over hoe deze spellen werken, zie [5]. Door middel van deze definitie van een combinatorisch spel volgt dat er dan ook geen gelijkspel kan voorkomen. Er wordt namelijk net zo lang gespeeld tot een speler verliest, en er worden ook geen punten bijgehouden.

Nu weer terug naar ons spel (Cilindrisch) Hex. Hiervoor geldt

- 2 spelers (Rood en Blauw), die om en om een zet doen;
- als een vakje gekleurd is kan deze niet weer ontkleurd worden, de huidige bord-situatie kan dus niet nogmaals in hetzelfde spel voorkomen. Hieruit volgt dat het spel eindig veel zetten bevat.
- Theoretisch gezien kan het bord vol raken na $m \cdot n$ zetten. Het is voor de speler die aan zet is niet mogelijk nu een tegel te kleuren; het spel eindigt gelijkspel.

De laatste eis zit hier wat anders in elkaar. De eis is namelijk dat er net zo lang gespeeld wordt tot een speler verliest, wat ook wel beschreven kan worden als net zo lang spelen tot een speler wint. Dit laatste is bij Hex het geval, maar dat moet nog wel bewezen worden. Er wordt immers gespeeld tot een speler een winnend pad gevormd heeft. Maar wat als dit nooit gebeurt? Wat als beide spelers om de beurt een vakje blijven kleuren, net zo lang tot het bord helemaal vol is, maar geen van beide spelers dan een winnend pad hebben gevormd? In het volgende hoofdstuk wordt bewezen dat dit niet voor kan komen. En als dan aangetoond is dat gelijkspel geen optie is, kunnen we concluderen dat ook Hex feitelijk tot de verzameling combinatorische spellen toebehoort.

3 Altijd een Winnaar

In deze sectie wordt een bewijs gegeven voor het feit dat er bij Cilindrisch Hex altijd een winnaar is (gelijkspel kan niet voorkomen). Er is een vergelijkbare stelling hiervoor bij rechthoekig Hex.

Stelling 3.1. ***(Hex-stelling)*** *Als het hele rechthoekige bord gekleurd is met rode of blauwe vakjes, dan is er ofwel een rood pad van Noord naar Zuid, ofwel een blauw pad van Oost naar West [4].*

Om de stelling ook op Cilindrisch Hex te formuleren, maken we gebruik van een aantal definities.

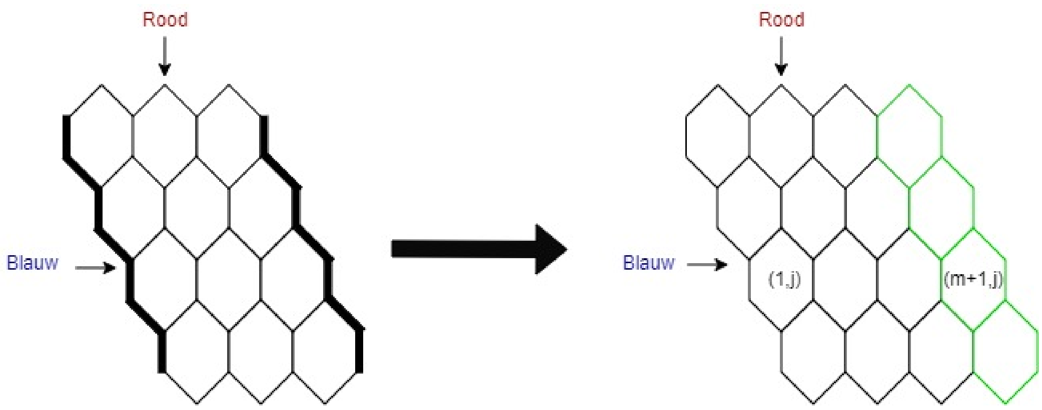
Definitie 3.1. $\mathcal{L} : V_c(m,n) \to \{Blauw, Rood\}$ *is een kleuring van de graaf* $G_c(m,n)$.

Definitie 3.2. *Een lifting* $\mathcal{L}'$ *van* $\mathcal{L}$ *op een graaf* $G_r(m+k,n)$, $k \in \mathbb{Z}$ *is een kleuring van de graaf* $G_r(m+k,n)$ *zodanig dat*

$$\mathcal{L}'(i,j) = \mathcal{L}(i \mod m, j). \tag{6}$$

Definitie 3.3. *Een pad heet een kring als er in de lifting* $\mathcal{L}'$ *van* $\mathcal{L}$ *op de graaf* $G_r(m+1,n)$ *een pad is van* $(1,j)$ *naar* $(m+1,j)$.

Bij een lifting wordt de gekleurde cilinder gekopiëerd op een rechthoekig bord. Hierdoor kunnen we een kring definiëren als een pad op een rechthoekig bord ($(m+1) \times n$) die een lifting is van het cilindrische bord ($m \times n$). Dit 'pad' moet dan een pad zijn van een vakje in de eerste kolom naar een vakje in de laatste kolom, maar in dezelfde rij. In Figuur 8 is te zien dat Blauw een kring gevormd heeft in het cilindrische bord (links) als zij een pad heeft gemaakt van $(1,j)$ naar $(m+1,j)$ in het rechthoekige bord (rechts), voor zekere $1 \leq j \leq n$. In het rechthoekige bord is de extra (groene) kolom precies een kopie van de eerste kolom.



Figuur 8: Lifting van een 3×4 Cilindrisch Hex. Blauw moet een pad maken van $(1,j)$ naar $(m+1,j)$.

Stelling 3.2. ***(Cilindrische Hex-stelling)*** *Voor elke kleuring van de cilindrische* $m \times n$*-graaf heeft ofwel Rood een winnend pad of Blauw een winnende kring [1].*

Hieronder zullen we echter een ander constructief bewijs geven dan in [1], wat ook wat intuïtiever is.

Het idee voor dit bewijs is als volgt. We nemen aan, dat er geen rood pad van boven naar beneden is, en er geen blauwe kring is om de cilinder heen. Alle hexagons in het cilindrische bord zijn dan rood of blauw gekleurd. In het bijzonder betekent dit dat de bovenste ring minstens één rood gekleurd vakje bevat. Als alle hexagons in de bovenste ring blauw waren zouden deze immers een blauwe kring vormen, wat per aanname niet het geval is.

We gaan nu alle rode vakjes die dit rode vakje raken (i.e. elk vakje te bereiken vanaf dit vakje door middel van een pad van rode hexagons) eruit knippen. We knippen nu niet de cilinder door, want er is geen rood pad van boven naar beneden. We herhalen deze stappen voor alle rode vakjes die in de bovenste ring zitten. Bekijk het resterende deel van de cilinder dat aan de onderrand vast zit. Dit is een stuk-geknipte cilinder, waar de bovenste overgebleven rand allemaal blauw is. Als zo een vakje namelijk niet blauw zou zijn, zou dit weggeknipt zijn. Hieruit volgt echter dat deze overgebleven rand een kring vormt.

3.1 Het Knip- en Kleur Algoritme

Voor het bewijs van Stelling 3.2 wordt gebruik gemaakt van een algoritme. Dit is gebaseerd op Depth-First-Search (DFS). Hiermee wordt de graaf zo geknipt dat we de eerder beschreven stuk-geknipte cilinder overhouden, waarbij de bovenrand een andere kleur gegeven is (oranje) om te markeren dat dit een winnende pad vormt ondanks de aanname dat dit niet bestaat.

Algoritme 3.1. ***(Knip- en Kleur Algoritme)***

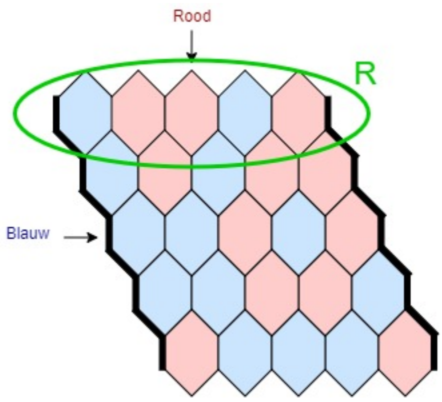
1. $\{V, E\} = H := G_c(m, n)$; $\mathcal{K} : H \to \{\text{Rood}, \text{Blauw}, \text{Oranje}\}$; $\forall w \in V : \mathcal{K}(w) = \mathcal{L}(w)$; $R = \{w \in V \ : \ w_2 = 1 \text{ en } \mathcal{L}(w) = \text{Rood}\}$; $D = \emptyset$.

2. Voor alle $z \in R$ doe:
   . Als $z \notin D$: voer de recursieve procedure `VISIT`(z) uit.
   . Procedure `VISIT`(z)
   . $D := D \cup \{z\}$.
   . Voor alle w met $\mathcal{K}(w) = \text{Blauw}$ en $(w, z) \in E$:
   . $\mathcal{K}(w) := \text{Oranje}$.
   . $S_z := \{w \in V \ : \ \mathcal{L}(w) = \text{Rood}, (w, z) \in E\}$;
   . Voor alle $w \in S_z$ doe:
   . Als $w \notin D$, doe `VISIT`(w).
   . End `VISIT`(z)

3. $V := V \setminus D$.

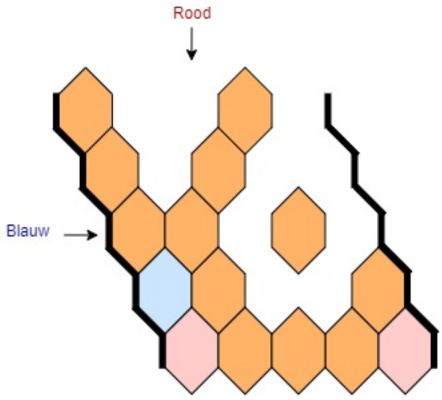
4. Voor alle $w \in V$ met $\mathcal{K}(w) = \text{Blauw}$ en $w_2 = 1$:
   . $\mathcal{K}(w) := \text{Oranje}$.

Om dit algoritme beter te begrijpen passen we het toe op een 5×5 cilindrisch bord gekleurd zoals in Figuur 9. Het is duidelijk dat Blauw hier de winnaar is. De rode tegels in de bovenste ring vormen de in stap 1 gedefiniëerde verzameling R, zie ook Figuur 9.



Figuur 9: 5×5 Cilindrisch Hex volledig gekleurd. De rode vakjes in de bovenste ring vormen de verzameling R bij initialisatie.

Nu gaan we door naar stap 2 van het algoritme. We nemen een $z \in R$ (Figuur 30a) en voeren de recursieve procedure `VISIT` uit. Voor de bijbehorende afbeeldingen zie Bijlage A. De knoop z wordt toegevoegd aan de verzameling D, die geel gekleurd is voor verduidelijking. De omliggende blauwe knopen worden nu oranje gekleurd door middel van het algoritme, zij gaan het winnende pad voor Blauw vormen. De knopen die nog afgelopen moeten worden vanaf dit punt, worden de verzameling S, die roze gekleurd is voor verduidelijking. Uit deze verzameling wordt nu een nieuwe z gekozen en zo wordt de procedure herhaald. De verzameling D bevat nu precies alle knooppunten die via een rood pad bereikbaar zijn vanaf de bovenste ring R. Deze knopen kunnen nu verwijderd worden in stap 3, waarna ons alleen nog resteert de knopen op de bovenste ring die nog niet oranje gekleurd waren door middel van het algoritme (zij hadden dus geen rode weggeknipte buur) ook oranje te kleuren. Ook deze knopen kunnen immers deel maken van een winnende blauwe kring. Wat we nu overhouden is de geknipte cilinder zoals in Figuur 10. Dit geeft nu een mooie basis om de stelling te bewijzen.



Figuur 10: Cilinder die overblijft na uitvoering van Algoritme 3.1.

3.2 Cilindrische Hexstelling

Stelling 3.2 kunnen we met behulp van bovenstaande definities als volgt algemener herformuleren.

Stelling 3.3. *Laat $\mathcal{L}$ een kleuring zijn van de cilindrische graaf $G_c(m,n)$. Dan is één van de volgende uitspraken waar:*

1. *er is een rood pad van $(i,1)$ naar (k,n), $i,k \in \{1,...,m\}$;*
2. *er is een blauwe kring.*

Bewijs. Neem aan dat geen van de uitspraken waar zijn. In het bijzonder geldt er dan dat er een $i' \in \{1,...,m\}$ is waarvoor geldt $\mathcal{L}(i',1) = \text{Rood}$. Als dit niet het geval was geweest dan zou er een blauwe kring zijn bestaande uit het pad

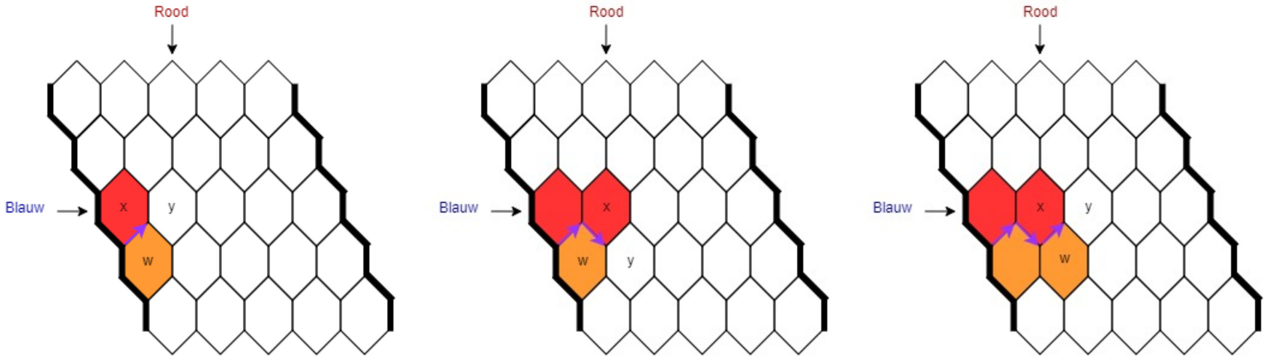
$$P = \{(1,1),(2,1),...,(m,1)\}. \tag{7}$$

Maar dit bestaat per aanname niet.
Voer nu Algoritme 3.1 uit. Bekijk de deelgraaf $G_O = \{V_O, E_O\} \subset G_c(m,n)$ met $V_O = \{z \in V_c \ : \mathcal{K}(z) = \text{Oranje}\}$ en E_O de corresponderende takken. Bewering: G_O bevat een samenhangende deelgraaf die een blauwe kring vormen in G_c.

We bekijken de deelgraaf $H = \{V, E\}$ zoals die geknipt is in Algoritme 3.1. Merk op

$$\forall v \in V,\ \mathcal{K}(v) = \text{Oranje} : \exists x \in D \text{ zodanig dat } (v,x) \in E.$$

Neem de samenhangende deelgraaf $H' = \{V', E'\} \subseteq H$ die de ring $\{z \in V_H \ : \ z_2 = n\}$ bevat. Deze bestaat, want als er een knoop van deze ring weggeknipt was, dan was deze rood geweest. Dit is in tegenspraak met de aanname.



(a) Stel y is rood. (b) Stel y is oranje. (c) enzovoorts.

Figuur 11: Illustratie die laat zien dat P aan de linkerrand begrensd is door rode weggeknipte knopen.

Bekijk nu de deelverzameling knopen $P = V' \cap V_{\text{O}}$ bestaande uit de oranje gekleurde knooppunten van H'. Deze verzameling P gaat een winnende kring voor Blauw vormen in de oorspronkelijke graaf. Er geldt $P \neq \emptyset$. Bekijk namelijk een kolom i, onder $\mathcal{L}$ zijn er dan drie mogelijke kleuringen:

- alle knopen zijn rood, dit kan per aanname niet;
- de kolom bestaat uit rode en blauwe knopen waar geen van de rode knopen weggeknipt is, uit stap 4 van Algoritme 3.1 volgt dan $\mathcal{K}(i, 1) =$ Oranje;
- de kolom bestaat uit rode en blauwe knopen, waar minstens één rode knoop weggeknipt is. De verzameling rode weggeknipte knopen is dan naar beneden begrensd door een blauwe knoop (en/of de bovenrand), welke onder $\mathcal{K}$ dan oranje zijn.

Neem $w' \in P$. Er geldt $\mathcal{K}(w') =$ Oranje, waaruit volgt dat $w = w'$ een buur x heeft die rood is en weggeknipt. De knopen w en x hebben minstens één gemeenschappelijke buur y, bekijk degene zodanig dat het gesloten pad w, x, y op deze volgorde kloksgewijs wordt afgelopen. Voor y geldt dat deze rood of oranje kan zijn (zie Figuur 11).

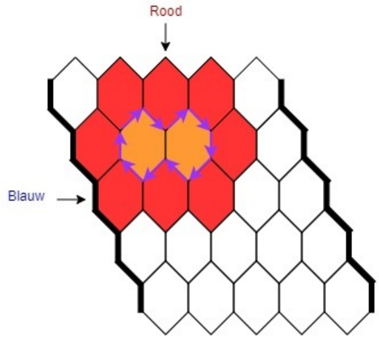
- Als $\mathcal{K}(y) =$ Rood, neem $x = y$ en y de nieuwe gemeenschappelijke buur van w en x.
- Als $\mathcal{K}(y) =$ Oranje, neem $w = y$ en y de nieuwe gemeenschappelijke buur van w en x.

Op deze manier wordt de 'boven'-rand van de verzameling P afgelopen. Na vaak genoeg herhalen van de stappen hierboven, komen we terug bij de situatie dat w de oorspronkelijke w' is. Dit kan op twee manieren.

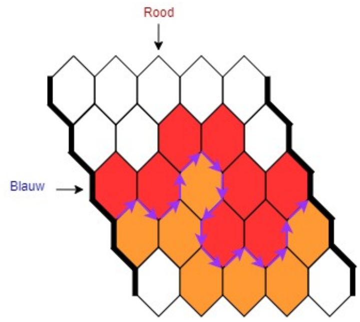
- P vormt een gesloten pad (maar geen kring om de cilinder heen).
- P vormt een kring om de cilinder heen.

In de eerste situatie geldt dat P aan de linkerrand begrensd is door rode weggeknipte knopen. Echter, per aanname is P samenhangend met de deelgraaf H' die de onderste ring bevat. Deze situatie kan niet voorkomen. P is dus een blauwe kring.

□



(a) P vormt een gesloten pad.



(b) P vormt een kring.

Figuur 12: Illustratie dat P een kring om de cilinder moet vormen.

4 Bestaande Strategieën

Een belangrijk onderdeel van het onderzoeken van een spel is natuurlijk het spelen van het spel, en dan vooral: hoe te winnen. Hierbij gaan we er vanuit dat beide spelers optimaal spelen. Dat wil zeggen, beide spelers spelen zodanig dat de zet die ze uitvoeren de beste is die ze kunnen doen, rekening houdend met het feit dat ook de tegenspeler de beste zet doet. Bij het spel Cilindrisch Hex zijn er al een aantal strategieën bekend. Alpern en Beck hebben in 1991 een strategie bewezen voor een bord met een even omtrek [1]. Zij geloven ook dat Rood altijd een winnende strategie heeft, maar hebben dat nog niet kunnen bewijzen. Intuïtief is dit wel aannemelijk, omdat Rood minder restricties heeft dan Blauw.

Laten we het spel nu eens vergelijken met Rechthoekig Hex. Hiervoor geldt bij een $m \times n$ met $m < n$ of $m > n$ dat Blauw respectievelijk Rood een winnende strategie heeft (de speler die een kortere afstand hoeft te overbruggen, kan winnen). Bij $m = n$ kan de speler die begint winnen [4]. De restricties bij dit spel die bij Cilindrisch Hex niet voorkomen zijn de linker- en rechter rand van het bord. Dit betekent dat Rood hier niet meer door beperkt is en gewoon een pad kan maken 'dwars door de muur' heen. Er zijn voor Rood zo meer opties om een winnend pad te maken. Blauw heeft echter nog steeds 'last' van de boven- en onderrand van het bord, gezien die nog wel bestaan. Bovendien moet Blauw niet meer gewoon 'een pad naar de overkant' maken, maar een kring. Dit maakt het cilindrisch maken van het bord nadelig voor Blauw. Gecombineerd met het eerdere argument is dit een dubbel voordelige strategie voor Rood.

4.1 $2m \times n$ Strategie

Voor een bord met een even omtrek is de strategie vrij simpel: Rood kopiëert Blauw. Elke keer als Blauw een vakje gekleurd heeft, kleurt Rood het vakje op dezelfde ring, maar precies aan de andere kant van de cilinder. Als Blauw begint, is dit duidelijk altijd mogelijk. Elk paar vakjes die tegenovergesteld liggen, vormen namelijk een paar: als Blauw de ene kleurt, kleurt Rood de ander. Hierdoor is het voor Blauw niet mogelijk zo te kleuren dat het vakje waar Rood vervolgens wil kleuren aan de hand van de strategie al gekleurd is (waardoor Rood zijn strategie zou moeten aanpassen). Als Rood begint, kan hij natuurlijk niet Blauw kopiëren, want Blauw heeft nog niks gekleurd. In dat geval maakt het niet uit waar Rood kleurt. Als Blauw nu Rood zou kopiëren, waardoor Rood zijn strategie niet kan toepassen, dan krijgen we nog steeds hetzelfde resultaat. Dit komt doordat elk paar tegenoverstelde vakjes nog steeds op deze manier gevuld worden. Als Blauw ergens anders kleurt kan Rood weer zijn strategie toepassen. Op deze manier is er altijd maximaal één rood vakje dat na een gekopiëerde zet geen gekleurd vakje aan de overkant heeft.

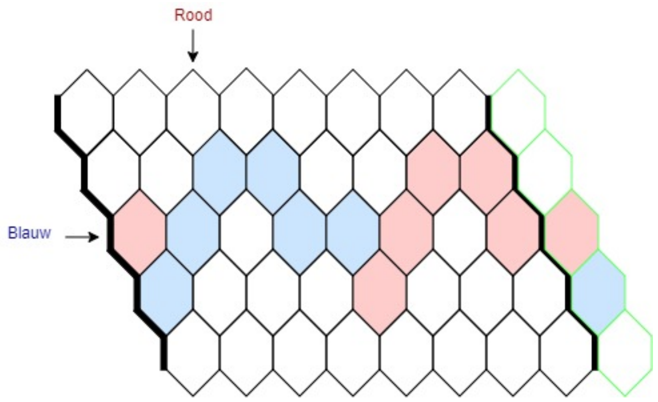
Dit stappenplan geeft dan de volgende strategie, geformuleerd en bewezen door Alpern en Beck [1].

Stelling 4.1. *Laat $G_c(2k, n)$ een $m \times n$ Cilindrisch Hex spel zijn met $m = 2k$. Rood heeft de volgende winnende strategie*

Optie 1 *(Blauw begint): Als de laatste zet van Blauw bestond uit het kleuren van knoop (i, j), dan kleurt Rood de knoop $(i + k \mod m, j)$.*

Optie 2 *(Rood begint): Rood speelt Optie 1 als mogelijk. Als dit niet mogelijk is, kleur een willekeurige tegel.*

Het bewijs van Alpern en Beck vereist een andere notatie en ook wat inzicht hiervoor. De stelling is echter ook op een andere manier te bewijzen. Het idee hiervan is als volgt. Stel dat het spel gespeeld is aan de hand van bovenstaande strategie en Blauw zou hebben gewonnen. Het doel is nu om te laten zien dat dit niet mogelijk is. Als Blauw een winnende kring gevormd heeft, dan heeft hij in elke kolom minstens een knoop blauw gekleurd (dit volgt uit de definitie van een kring). In het bijzonder dan ook een knoop in de eerste kolom $(1, j)$ en een knoop halverwege, zeg $(k + 1, j')$, die onderling verbonden zijn door middel van een blauw pad. Omdat Rood $(k + 1, j)$ heeft gekleurd, geldt $j' \neq j$, zeg $j' > j$. Verder weten we dat deze strategie ervoor zorgt dat ook de rest van het pad tussen $(1, j)$ en $(k + 1, j')$ rood gespiegeld is aan de andere kant van de cilinder. Om de kring van Blauw nog te voltooien moet zij nu nog een pad maken van $(k + 1, j')$ naar $(n + 1, j) = (1, j)$. Deze laatste knoop ligt in de lifting van de kleuring van het bord $G_c(2k, n)$. Dit kan zij echter alleen doen door een pad te maken door het eerder beschreven rode pad. Het is dus niet mogelijk voor Blauw een winnende kring te maken, waardoor deze strategie winnend voor Rood is. Er is namelijk altijd een winnaar.

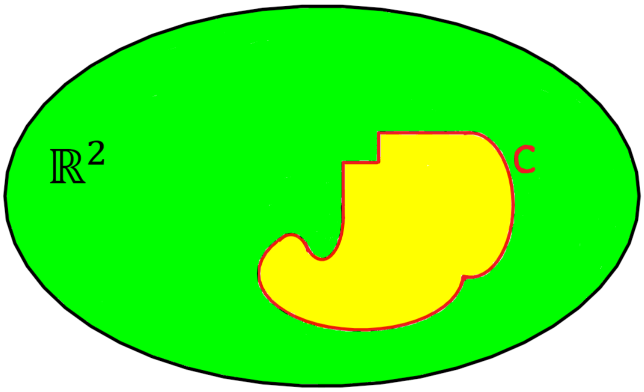


Figuur 13: Voorbeeld van 8×5 Cilindrisch Hex met lifting (groen) die laat zien dat Blauw niet kan winnen.

Om dit laatste argument hard te maken, wordt gebruik gemaakt van de stelling van Jordan. Deze is gegeven in Stelling 4.2.

Stelling 4.2. *(Jordan) Laat $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ een continue functie, zodat $C(0) = C(1)$ en de beperking van C tot $(0, 1]$ injectief is. Dan bestaat zijn complement $\mathbb{R}^2 \backslash C$ uit precies twee verbonden componenten, en de gesloten kromme C is de grens van elk component.*

De Jordan Stelling zegt dat een gesloten, continue lus het gebied in precies twee componenten verdeelt: de binnenkant en de buitenkant. De componenten zelf zijn onderling wel verbonden, maar de componenten niet met elkaar. In het bijzonder betekent dit, dat er geen continu pad mogelijk is van een punt in de binnenkant naar een punt in de buitenkant, zonder C te snijden. Deze laatste eigenschap wordt gebruikt in het bewijs van Stelling 4.1.

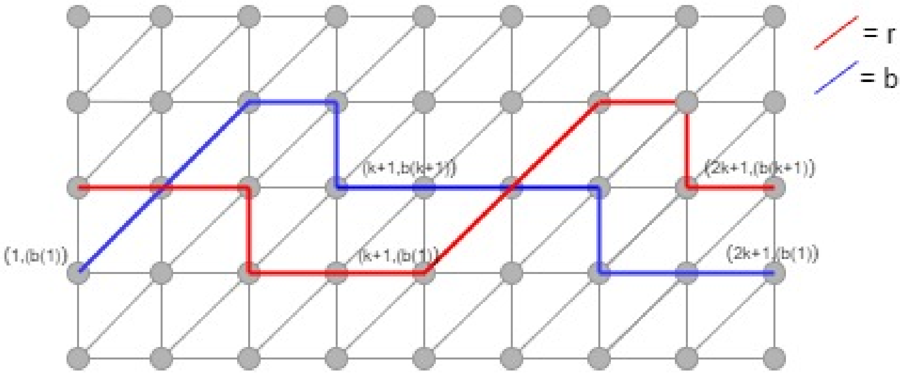


Figuur 14: Illustratie van de Stelling van Jordan.

Bewijs. (Stelling 4.1) Laat $G_c(2k, n)$ een $m \times n$ Cilindrisch Hex spel zijn met $m = 2k$. Laat $\mathcal{L}$ een kleuring van het spel zijn zodanig dat het gespeeld is met de beschreven strategie en Blauw een winnende kring gevormd heeft. Laat $\mathcal{L}'$ de lifting zijn van G_c op $G_r(2k+1, n)$. Laat B de verzameling knopen in $G_r(2k+1, n)$ zijn waarmee Blauw de winnende kring vormt, en laat R de verzameling knopen zijn die tegenovergesteld liggen:

$$R = \Big\{(i, j) \in V_r(2k+1, n) \mid 1 \leq i \leq k, (i+k, j) \in B\Big\} \\ \cup \Big\{(i, j) \in V_r(2k+1, n) \mid k+1 \leq i \leq 2k+1, (i-k, j) \in B\Big\}$$

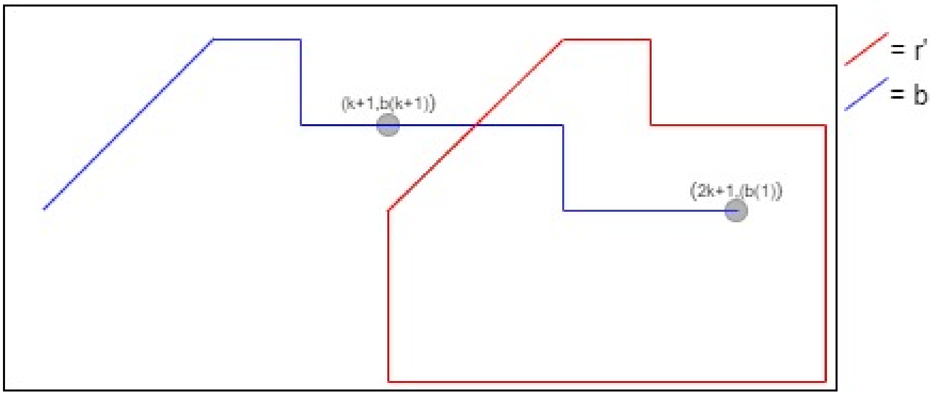
We kunnen nu de knopen in B lineair verbinden tot een continue kromme b, en hetzelfde doen voor R (kromme r). Het doel is nu om te laten zien dat deze krommes snijden. Merk op dat deze krommes precies over de takken van G_r lopen, en gezien G_r vlak is volgt dat de krommes elkaar alleen kunnen snijden in een knoop.



Figuur 15: Voorbeeld van een $G_r(2k+1, 5)$, $k = 4$, graaf waarbij knopen in B en R lineair verbonden kunnen worden tot een continue kromme (blauw respectievelijk rood).

Er geldt dat Blauw een kring heeft. Uit het bewijs van Stelling 3.3 volgt dat Blauw dan in elke kolom minstens één knoop blauw gekleurd heeft die onderdeel uitmaakt van deze winnende kring. Bekijk de kromme b op het interval $[1, k+1]$. De rode kromme r bevat precies dezelfde kromme, maar dan verschoven tot het interval $[k+1, 2k+1]$. Uit de strategie volgt dat $b(k+1) \neq b(1)$, zonder verlies van algemeenheid neem aan $b(k+1) > b(1)$. Ten slotte geldt dat $(k+1, b(1))$ tot de rode kromme toebehoort (en per aanname snijden ze niet).

Er geldt dan ook $r(2k+1) > r(k+1) = b(1)$. Plak nu een extra kolom rechts en extra rij onder aan het bord. Deze rij en kolom maken geen onderdeel uit van het spel, en kunnen we dus ook zo kleuren als we willen. Verbindt het punt halverwege de rode kromme nu met het eindpunt van de



Figuur 16: De Jordan Stelling geeft dat kromme b en kromme r' elkaar moeten snijden.

kromme via deze extra rand. Deze nieuwe kromme r' is nu gesloten en continu, en met de stelling van Jordan volgt dan dat er geen continu pad van de binnenkant naar de buitenkant is zonder deze kromme r' te kruisen.

Echter, het punt halverwege van b, $(k+1, b(k+1))$, ligt in de buitenkant en het eindpunt van b, $(2k+1, b(1))$, ligt in de binnenkant. Hieruit volgt dat de krommes b en r' elkaar moeten kruisen. Dit kan alleen binnen een knoop, en komt dan overeen met een vakje die zowel rood als blauw gekleurd is. Dit is niet volgens de regels van het spel, waaruit volgt dat het niet mogelijk is voor Blauw te winnen als Rood de genoemde strategie toepast. $\square$

4.2 $3 \times n$ Strategie

De strategie voor een bord met even omtrek bleek niet zo moeilijk te construeren. Echter, voor een oneven omtrek blijkt het niet zo simpel te zijn. Sterker nog, het is alleen bekend hóe Rood moet winnen bij een bord met omtrek 3. Bij grotere borden wordt alleen vermoed dat Rood een winnende strategie heeft. De strategie voor het Cilindrische Spel $3 \times n$ is bedacht en bewezen door Huneke, Hayward en Toft [3]. Net als de strategie voor een Cilindrisch Hex spel met even omtrek gaat Rood 'reageren' op de zetten van Blauw. Dat wil zeggen, aan de hand van de ring waar Blauw een tegel kleurt en de situatie op dat moment, besluit Rood welk vakje nu gekleurd moet worden. Het volgende algoritme specificeert Rood's strategie.

Algoritme 4.1. ***(Strategie voor Rood door Huneke, Hayward en Toft)***

Voeg ringen 0 en $n+1$ toe aan het bord, en kleur ze beide volledig rood.
Rood voert de eerste regel uit die toepasbaar is:

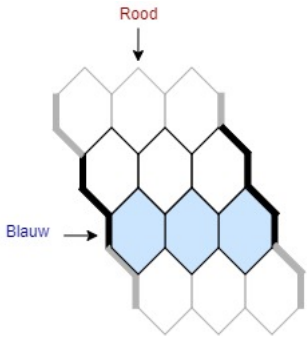
I. Als Blauw nog niet gespeeld heeft, kleur een willekeurige tegel.

II. Als Blauw zojuist (i, j) gekleurd heeft, speel als volgt:

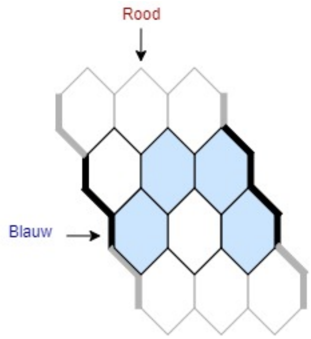
1. *in één van de ringen $j-1$, j of $j+1$ zodanig dat er een rode tegel in ring j grenst aan een rode tegel in ring $j-1$ en in ring $j+1$,*
2. *in ring j of $j+1$ zodanig dat er een rode tegel in ring j grenst aan een rode tegel in ring $j+1$,*
3. *in ring j of $j-1$ zodanig dat er een rode tegel in ring j grenst aan een rode tegel in ring $j-1$,*
4. *in ring j,*
5. *een willekeurige tegel.*

Aan de hand van de ring waar Blauw in kleurt, gaat Rood kijken of hij lokaal een winnend pad kan maken. Door op deze manier het spel te spelen heeft Rood aan het eind op elke ring een 'lokaal winnend pad', en daarmee ook een globaal winnend pad. Een voorbeeld van een Cilindrisch Hex spel met Algoritme 4.1 toegepast is te vinden in Bijlage B. Het volledige bewijs is te vinden in Huneke, Hayward en Toft [3]. Voor dit onderzoek is het idee achter het bewijs wel belangrijk. Daarom volgt nu een informele uitleg van hoe dit bewijs te werk gaat.

Net als in het bewijs voor de even-omtrek-strategie, wordt hier niet bewezen dat Rood een winnend pad heeft, maar dat Blauw geen winnende kring kán maken. Daarmee wordt ook hier gebruik gemaakt van de Cilindrische Hexstelling, die geeft dat er een winnaar moet zijn. Als Blauw niet kan winnen, moet Rood dus wel winnen.
Op een $3 \times n$ Cilindrisch bord zijn er voor Blauw, onder spiegelingen en draaiïngen na, twee mogelijkheden om een winnend pad te maken. Deze zijn gegeven in Figuur 18.



(a) Kring van drie vakjes.

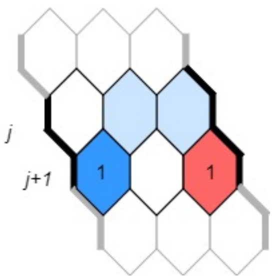


(b) Kring van vier vakjes.

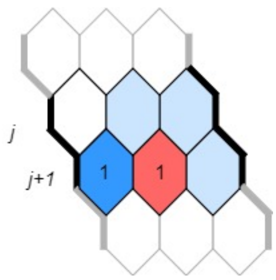
Figuur 17: Mogelijke winnende kringen voor Blauw.

Blauw zal moeten proberen één van deze twee kringen te maken, wil ze het spel winnen. Een kring van drie vakjes (Figuur 17a) zal met de beschreven strategie voor Rood echter niet mogelijk zijn. Zodra Blauw een vakje in een ring i kleurt, zal Rood na zijn volgende beurt sowieso ook een vakje in die ring hebben gekleurd. Er zit dus nog maar één optie op voor Blauw: de kring van Figuur 17b maken. Laat C de verzameling knopen zijn, die deze kring representeren.

Nu is het een kwestie van alle mogelijke opties afgaan. Er wordt aangenomen dat C de kring is die Blauw wil maken. Wat als Rood als eerste één van deze vier vakjes kleurt? Dan kan Blauw dus niet meer een kring in C vormen en zijn we klaar. Stel dan dat Blauw als eerste één van de beschreven vakjes kleurt, laat dat het vakje $(1, j+1)$ zijn. Nu is het de beurt van Rood om een vakje te kleuren. Zoals eerder beschreven, zal na zijn beurt minstens één van de andere twee vakjes in ring $j+1$ rood gekleurd zijn. Als $(3, j+1)$ rood wordt zijn we klaar, want dan kan Blauw niet meer een kring maken in C. We nemen dan aan, dat na de beurt van Rood in ring $j+1$ alleen het vakje $(2, j+1)$ rood gekleurd is.



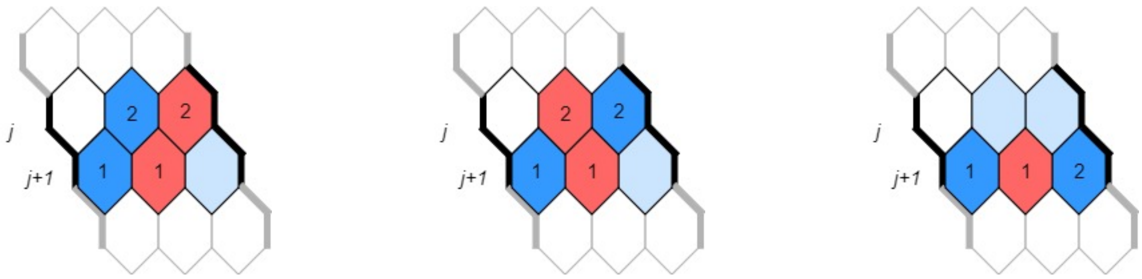
(a) Rood heeft binnen C gekleurd, en we zijn klaar.



(b) Rood kleurt buiten C, Blauw heeft nog een kans.

Figuur 18: Antwoorden van Rood, nadat Blauw $(1, j+1)$ gekleurd heeft.

De volgende keer, dat Blauw binnen C kleurt, kan dit op één van de drie overige plekken. Stel dat zij in $(2, j)$ kleurt, dan is $(3, j)$ het enige overgebleven vakje in ring j dat ring $j + 1$ raakt. In de beurt van Rood zal hij dan ofwel regel 1, of regel 2 toepassen, waardoor dit vakje rood wordt en er geen hoop meer is voor Blauw (Zie Figuur 19a).
Wat dan als Blauw als tweede in $(3, j)$ had gekleurd? Hier volgt dezelfde redenatie als hiervoor, want ook hier is dan alleen $(2, j)$ de enige optie voor Rood om ring j en ring $j + 1$ met elkaar te verbinden (zie Figuur 19b).
De laatste mogelijkheid voor Blauw is om als tweede in ringen j en $j+1$ vakje $(3, j+1)$ te kleuren. Ook nu zijn de enige vakjes die het mogelijk maken voor Rood om ringen j en $j + 1$ met elkaar te verbinden, bevat in C ($(2, j)$ en $(3, j)$). Als Rood na deze zet van Blauw nu regel 1 of 3 moet toepassen, zijn we klaar en is deze kring niet meer mogelijk voor Blauw. Neem dan aan dat hij regel 2 toepast, dat wil zeggen: Rood verbindt ringen $j + 1$ en $j + 2$ (zie Figuur 19c).



(a) Rood heeft binnen C gekleurd, en we zijn klaar.

(b) Rood heeft binnen C gekleurd, en we zijn klaar.

(c) Rood kleurt buiten C in ring $j + 2$, Blauw heeft nog een kans.

Figuur 19: Antwoorden van Rood nadat Blauw als tweede in C gekleurd heeft.

Om als derde binnen C te bewegen, zal Blauw $(2, j)$ of $(3, j)$ kleuren. Maar welke zij ook kleurt, Rood zal de andere kleuren doordat hij ofwel regel 1 of regel 2 moet toepassen (zie Figuur 20). Hieruit volgt dat het niet mogelijk is voor Blauw een kring te vormen, mocht zij als eerste $(1, j+1)$ van C te kleuren. Het bewijs van Huneke, Hayward en Toft laat zien dat de kring ook geen optie is als Blauw ergens anders als eerste in de kring kleurt.

(a) Rood heeft binnen C gekleurd, en we zijn klaar.

(b) Rood heeft binnen C gekleurd, en we zijn klaar.

Figuur 20: Antwoorden van Rood nadat Blauw als derde in C gekleurd heeft.

5 $5 \times n$ Strategie

De winnende strategie voor Rood op een Cilindrisch bord met omtrek 5 is nog onbekend, net als op borden met grotere oneven omtrek. In dit hoofdstuk wordt gekeken, of we zo 'n strategie toch kunnen vinden. Eerst beargumenteren we waarom de strategieën voor $2m \times n$ en $3 \times n$ niet werken.

Het is vrij logisch dat de strategie voor $2m \times n$ niet werkt voor een oneven omtrek. Er is ten slotte helemaal geen vakje precies aan de andere kant waarmee Rood de zet van Blauw kan spiegelen. Maar wat als we dan zeggen dat Rood Blauw niet spiegelt, maar kopiëert door in dezelfde ring en een aantal tegels x verschoven te kleuren? Deze strategie beschrijven we in Algoritme 5.1.

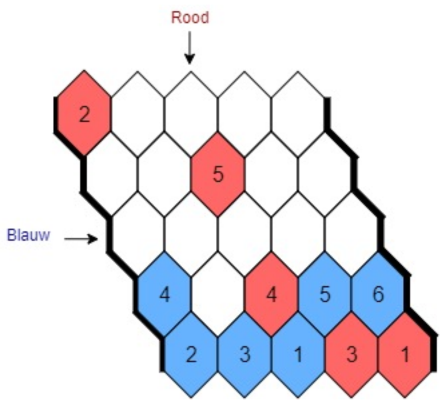
Algoritme 5.1. *Laat $G_c(2k+1, n)$ een $m \times n$ Cilindrisch Hex spel zijn met $m = 2k+1$ oneven. Laat Rood dan de volgende strategie volgen:*

Optie 1 (Blauw begint): Als Blauw knoop (i, j) kleurt, dan kleurt Rood knoop $(i + x \mod m, j)$.

Optie 2 (Rood begint): Rood speelt Optie 1 als mogelijk. Als dit niet mogelijk is, kleur ergens.

Stelling 5.1. *De strategie voor Rood zoals beschreven in Algoritme 5.1 is niet altijd winnend voor Rood.*

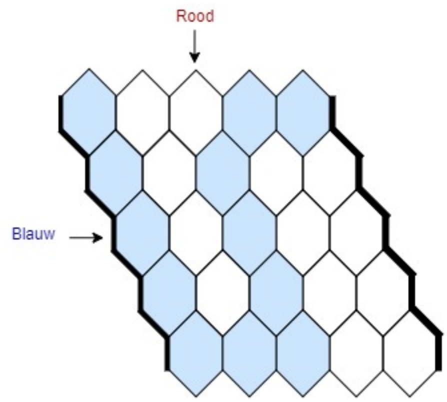
Bewijs. Om dit te bewijzen gaan we op zoek naar een tegenvoorbeeld. Neem bijvoorbeeld het bord $5 \times n$ met $x = 2$ (voor andere x is een tegenvoorbeeld vergelijkbaar te construeren). Het idee voor een strategie voor Blauw om dit te verslaan is door altijd een vakje (i, j) te kleuren zodanig dat het vakje $(i + x \mod m, j)$ al gekleurd is. Deze regel wordt echter niet altijd toegepast: als Blauw de kans heeft haar kring te verbinden, of zelfs helemaal af te maken moet zij dat zeker doen. Dit levert het spel op zoals in Figuur 21. Hier is te zien dat in de tweede en vijfde beurt Rood niet Optie 1 kan toepassen, en dus moet gaan voor Optie 2. Dit geeft Blauw de ruimte haar kring af te maken. □



Figuur 21: Tegenvoorbeeld dat Algoritme 5.1 geen winnende strategie van Rood is. Blauw begint in $(3, 5)$ en wint na zes beurten.

5.1 Strategie van $3 \times n$ Toepassen?

Op het eerste gezicht lijkt het alsof de strategie van Huneke, Hayward en Toft ([3]) geen gebruik maakt van het feit dat de omtrek maar 3 is. Wat zou er dan gebeuren als we deze strategie toepassen op een bord met omtrek 5? Het bewijs zal in ieder geval niet op dezelfde manier kunnen. Waar Blauw op een $3 \times n$ bord maar twee manieren heeft om een winnende kring te vormen, heeft zij er op een $5 \times n$ al veel meer. Dit aantal hangt af van n. Een winnend pad van Blauw kan namelijk bijvoorbeeld zijn: $(1, 1) \rightarrow (1, n) \rightarrow (3, n) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (5, 1)$. Zo zijn er nog veel meer variaties hierop.



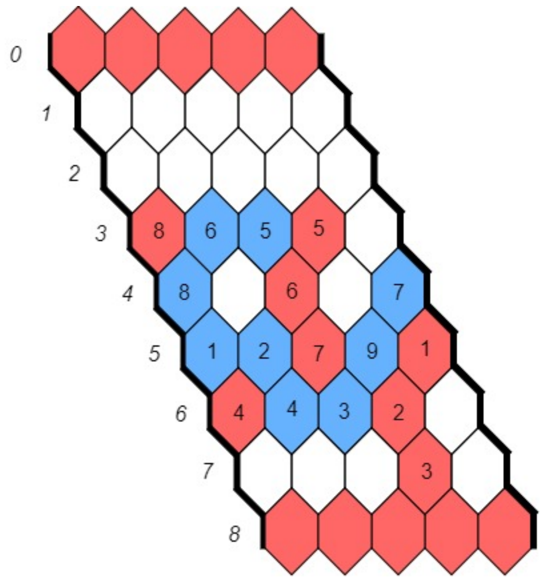
Figuur 22: Één van de vele potentiële winnende kringen voor Blauw op een $5 \times n$ Cilindrisch bord.

Echter, dat deze strategie moeilijk te bewijzen is, hoeft nog niet te betekenen dat deze strategie niet werkt.

Stelling 5.2. *De strategie voor Rood zoals beschreven in Algoritme 4.1 toegepast op een* $5 \times n$ *Cilindrisch bord is niet altijd winnend voor Rood.*

Bewijs. Om dit te bewijzen gaan we op zoek naar een tegenvoorbeeld. In Figuur 23 is zo 'n tegenvoorbeeld gegeven. De beurten gaan als volgt:

1. Blauw kleurt $(1, 5)$. Rood reageert volgens regel 4 in $(5, 5)$.
2. Blauw wil haar kring verder maken. Door in dezelfde ring als net te kleuren moet Rood in een andere ring kleuren. Blauw kleurt dus $(2, 5)$. Rood reageert volgens regel 2 in $(4, 6)$.
3. Als Blauw nog eens in ring 5 kleurt, zal Rood $(1, 4)$ of $(5, 4)$ kleuren volgens regel 1, maar deze heeft Blauw beide nodig voor haar kring. Om Rood te forceren ergens anders te kleuren, kleurt Blauw $(3, 6)$. Rood reageert volgens regel 1 in $(4, 7)$.
4. Blauw kan nu haar pad verbinden door $(2, 6)$ te kleuren. Doordat dit in ring 6 is moet Rood weer regel 1 toepassen. Echter zijn de drie betreffende ringen al verbonden, en zal Rood dus random een van de overgebleven vakjes in deze drie ringen kleuren. Stel dat dat $(1, 6)$ is.
5. Blauw heeft nog drie vakjes te gaan voor een winnende kring. Echter, door nu een van deze te kleuren zal Rood een van de andere twee kleuren. Door Rood af te leiden kleurt Blauw $(3, 3)$. Rood reageert volgens regel 4 in $(4, 3)$.
6. Blauw kan nog steeds niet haar kring verder maken, en om Rood dan verder af te leiden kleurt zij $(2, 3)$. Rood reageert volgens regel 2 in $(3, 4)$.
7. Nu kan Blauw $(5, 4)$ kleuren. Rood reageert met regel 1, dit kan alleen in $(3, 5)$.
8. Als Blauw $(4, 5)$ kleurt, dan kleurt Rood $(1, 4)$ dus dit kan nog niet. Blauw kan wel $(1, 4)$ kleuren. Rood reageert volgens regel 1. Echter zijn de drie betreffende ringen al verbonden, en zal Rood dus random een van de overgebleven vakjes in deze drie ringen kleuren. Stel dat dat $(1, 3)$ is.
9. Blauw kan de winnende zet maken in $(5, 5)$.

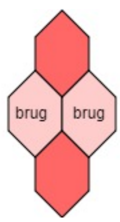


Figuur 23: Tegenvoorbeeld dat Algoritme 4.1 geen winnende strategie voor Rood is op een 7×5 bord. Blauw begint in $(1, 5)$ en wint na negen beurten.

□

5.2 Bruggetjes Bouwen

Een strategie die nog niet is besproken, maar wel veel gebruikt wordt in rechthoekig Hex is het zogenaamde bruggen bouwen [2]. Dit is geen principe van Blauw blokkeren, maar zelf een pad maken. Een speler heeft een brug gebouwd van het ene vakje naar het andere als het verbinden van deze vakjes niet kan worden voorkomen door de tegenspeler. Een voorbeeld van een brug is te vinden in Figuur 24. Als Blauw deze connectie probeert te blokkeren door één van deze vakjes die de brug vormen te kleuren, dan kan Rood de andere kleuren en zijn de vakjes alsnog verbonden.



Figuur 24: Voorbeeld van een brug voor Rood.

Er is nog een manier om drie ringen met behulp van bruggen te verbinden. Als Blauw slim speelt en voorkomt dat Rood een brug kan maken, zijn er meer opties voor Rood.

Definitie 5.1. *Een lange brug is een brug bestaande uit potentiële bruggen die de tegenspeler onmogelijk allemaal in één zet kan blokkeren.*

Voorbeelden van lange bruggen zijn te vinden in Figuur 25. In de figuur is te zien dat Rood geen directe brug kan maken van ring j naar ring $j + 2$. Wel kan hij $(5, j + 2)$ kleuren, waardoor het onmogelijk is voor Blauw een brug tussen deze ringen te voorkomen.

(a) Rood kan een lange brug maken van (i, j) naar $(i + 1 \mod 5, j + 2)$.

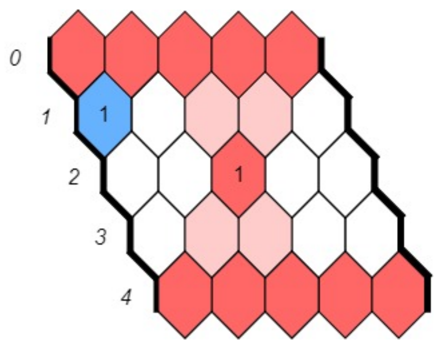
(b) Rood kan een lange brug maken van (i, j) naar $(i + 1 \mod 5, j + 2)$.

Figuur 25: Met behulp van potentiële bruggen kan Rood drie ringen verbinden.

5.3 Kleine n

Om een strategie te construeren, gaan we eerst kijken wat er gebeurt bij kleine n. Dat wil zeggen, $n \leq 5$. Net als bij de $3 \times n$-strategie voegen we ringen 0 en $n + 1$ toe die volledig rood gekleurd zijn. Neem $n = 1$, we hebben dan een 5×1 bord. Elke zet die Rood doet is nu gelijk winnend, dit maakt dit bord triviaal en dus niet interessant. Neem $n = 2$, als Rood begint kan hij met elke zet gelijk een brug bouwen naar de overkant en zo winnen. Als Blauw begint, dan kan Rood nog steeds een winnende brug bouwen door in dezelfde ring als Blauw een vakje te kleuren.

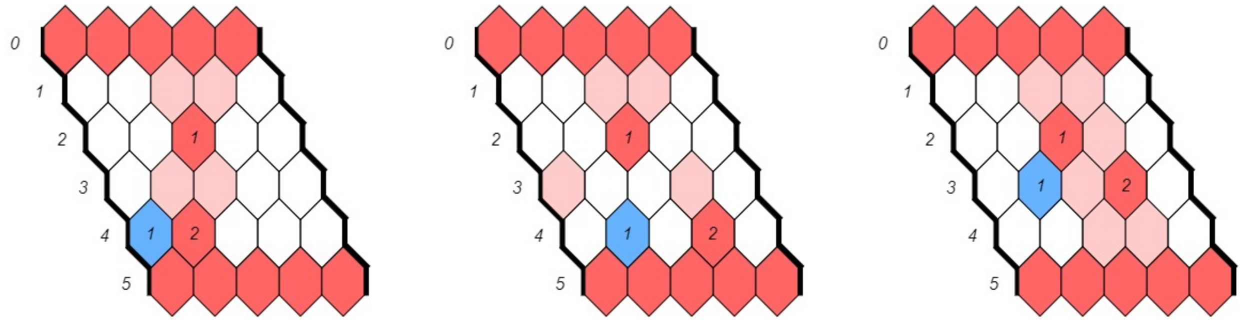
Bij $n = 3$ wordt het spel al interessanter. Als Rood begint kan hij in de middelste ring (ring 2) een vakje kleuren, en daarmee gelijk twee bruggen bouwen naar ring 0 en ring 4. Als Blauw begint en in ring 2 kleurt, dan volgt voor Rood nog steeds hetzelfde stappenplan als wanneer hij begonnen was. Als Blauw in ring 1 of 3 gekleurd had, stel $(i, 1)$, dan kan Rood nog steeds in ring 2 een vakje kleuren zodanig dat er twee bruggen ontstaan die zijn pad compleet maken (zie Figuur 26). Neem namelijk $(i + 2, 2)$.



Figuur 26: Winnende strategie voor Rood bij een 5×3 cilindrisch bord met toegevoegde ringen 0 en $n + 1$. Blauw begint in $(1, 1)$.

Bekijk nu $n = 4$. Mocht Rood beginnen, dan kan hij in ring 2 kleuren, zij $(i, 2)$. Er is dan een brug tussen ring 0 en 2. Blauw is nu aan de beurt, maar wat zij ook doet, Rood kan ofwel direct een brug maken die ringen 2 en 4 verbindt, ofwel hij een lange brug die deze ringen verbindt. Als Blauw begint volgt dezelfde redenering. Rood heeft ook op dit bord dus een winnende strategie.

Neem nu $n = 5$. Hier kan weer dezelfde strategie toegepast worden als bij het 5×4 bord, maar hier zal Rood starten in ring 3. Deze kan hij nu verbinden met ring 0 en ring 6 op dezelfde manier als hij ring 2 met ring 5 heeft verbonden in Figuur 27.



(a) Rood kan een brug maken die ringen 2 en 4 verbindt.

(b) Rood kan een lange brug maken die ringen 2 en 4 verbindt.

(c) Rood kan een brug maken die ringen 2 en 3 verbindt.

Figuur 27: Winnende strategie voor Rood bij een 5×4 cilindrisch bord. Rood begint in $(3, 2)$.

5.4 Langste k-pad

Op basis van bovenstaande strategieën kan een algemene heuristiek voor het $5 \times n$ bord geconstrueerd worden. Dit gaan we doen met behulp van k-paden en deel-borden.

Definitie 5.2. *Een k-pad is een rood pad met eventueel behulp van (lange) bruggen die k ringen verbindt.*

Definitie 5.3. *Een deel-bord is een Cilindrisch Hex bord beperkt tot ringen j tot en met $j + k$, $0 \leq k \leq n - j$.*

Het is voor Rood een kwestie van het verbinden van de rode tegels die al op het bord liggen.
Laat Blauw beginnen en in (i, j) kleuren. Rood zal nu ook in ring j kleuren. Het is voor Rood gunstiger om in kolom $i \pm 2 \mod 5$ te kleuren dan in $i \pm 1 \mod 5$. Dit zorgt ervoor dat in latere spelsituaties er meer opties zijn om de tegels te verbinden met behulp van bruggen. Voor de volgende deel-borden, neem aan dat Blauw start in $(2, j)$ en Rood kleurt in $(4, j)$. Onder spiegeling en draaiïng zijn dan alle sitaties behandeld.

Bekijk het deel-bord van j tot $j+1$, waarbij Blauw in ring $j+1$ kleurt. Rood kan makkelijk ringen j en $j + 1$ verbinden.

Bekijk het deel-bord van j tot $j+2$, waarbij Blauw in ring $j+2$ kleurt. Rood kan met behulp van een (lange) brug ringen j en $j + 2$ verbinden.

Bekijk het deel-bord van j tot $j + 3$, waarbij Blauw in ring $j + 3$ kleurt. Rood moet nu reageren aan de hand van de kolom waarin Blauw speelt.

- Als Blauw $(1, j + 3)$ of $(5, j + 3)$ kleurt, kan Rood $(3, j + 3)$ kleuren. Er zijn dan nog twee opties voor Blauw om een brug tussen ringen j en $j+3$ te voorkomen: $(4, j+1)$ en $(3, j+2)$. In beide gevallen kan Rood alsnog een lange brug maken (zie Figuur 28).
- Als Blauw in $(4, j + 3)$ kleurt, kan Rood in $(2, j + 3)$ kleuren en dezelfde strategie toepassen, maar dan gespiegeld.
- Als Blauw in $(2, j + 3)$ kleurt, kan Rood in $(4, j + 3)$ kleuren. Er zijn weer maar twee opties voor Blauw om een 4-pad te voorkomen, wat resulteert in de strategie als in Figuur 29.
- Als Blauw in $(3, j + 3)$ kleurt, kan Rood in $(1, j + 3)$ kleuren en de strategie van Figuur 29 gespiegeld toepassen.

Ook als Rood in de tweede beurt in $(5, j + 3)$ kleurt heeft hij nog een winnende strategie. Waar in ringen $j + 1$ of $j + 2$ Blauw ook kleurt, Rood kan een lange brug-brug combinatie maken om ringen j en $j + 3$ te verbinden.

Figuur 28: Rood kan ringen j en $j+3$ verbinden door $(3, j+3)$ te kleuren in zet 2.

Figuur 29: Rood kan ringen j en $j+3$ verbinden door $(4, j+3)$ te kleuren in zet 2.

Bekijk het deel-bord van j tot $j+4$, waarbij Blauw in ring $j+4$ kleurt. Het maakt niet meer uit waar in ring $j+4$ Rood reageert, al heeft verder weg van Blauw wel de voorkeur (dit geeft voordeel voor Rood in latere spelsituaties). Als Blauw na deze zet in ringen $j+1$ of $j+3$ kleurt, kan Rood een situatie creëren waar hij bovenstaande strategie kan toepassen. Als Blauw in ring $j+2$ kleurt, kan Rood ringen j en $j+4$ verbinden met behulp van (lange) bruggen.

Voor grotere deel-borden maakt het ook niet meer uit waar Rood speelt, als het maar een tegel in dezelfde ring is als waar Blauw net gespeeld heeft. Het is soms nog wel even opletten voor Rood waar hij speelt, als Blauw zó speelt, dat er twee kleine deel-borden tegelijk ontstaan. De ene zet kan dan tot een winst voor Rood voltooien, waar een andere zet ervoor zorgt dat Blauw dit kan voorkomen.

Hieruit volgt dat een winnende heuristiek voor Rood zou moeten zijn:

Algoritme 5.2. *Laat $G_c(5, n)$ een $5 \times n$ Cilindrisch Hex spel zijn. Voeg ringen 0 en $n+1$ toe aan het bord en kleur ze beide volledig rood. Rood voert de eerste regel uit die toepasbaar is:*

I. Als Blauw nog niet gespeeld heeft, kleur een willekeurige tegel.

II. Als Blauw in een deel-bord speelt, reageer in dit deel-bord.

III. Als Blauw zojuist (i, j) gekleurd heeft, speel als volgt:

1. *Neem een rode tegel (i', j') waarvoor geldt $|j' - j| = \min_{z \in V_c(5,n)}\{|z_2 - j| \;:\; |z_2 - j| \leq 4\}$. Verbind (i', j') en ring j met behulp van de gegeven strategieën op het deel-bord van j tot en met j';*

2. *kleur zodanig dat er een k-pad ontstaat die ring j bevat met k zo groot mogelijk.*

Deze heuristiek zou winnend moeten zijn voor Rood, gezien wat Blauw ook doet, Rood kan een winnend pad maken. Als Blauw in de buurt van een al bestaand rode tegel kleurt, creëert Rood een deel-bord waarvan hij een winnende strategie heeft. Als Blauw op de rand van een deel-bord speelt (neem bijvoorbeeld $(5, j+3)$ in Figuur 28 in beurt ≥ 3), dan zal Rood een langer k-pad maken. En in andere gevallen speelt Blauw zo ver van de al gespeelde tegels dat het geen invloed heeft op de huidige rode k-paden.
Let op dat dit nog wel een heuristiek is, en geen strategie. In sommige gevallen kan het bijvoorbeeld

juist gunstiger zijn voor Rood, om bepaalde lange bruggen in te kleuren, in plaats van een langer k-pad te maken.

6 Discussie

Het spel Cilindrisch Hex lijkt een simpel spel, maar blijkt nog best ingewikkeld te zijn als het gaat om het bepalen wat nu de winnende strategie is. We kunnen in ieder geval zeggen dat gelijkspel onmogelijk is: er is altijd een winnaar. Bovendien vermoeden we dat Rood deze winnaar bij elke bord-grootte zal zijn. Voor een even omtrek is de strategie vrij simpel: Rood gaat Blauw spiegelen. Voor omtrek 3 is de strategie ingewikkelder, hier is een heel stappenplan voor nodig (zie Algoritme 4.1). Voor de rest van de borden zijn de strategieën nog onbekend. In deze scriptie is een heuristiek van Rood voor omtrek 5 geconstrueerd, maar bewezen is deze niet. Ook kan onderzocht worden of een dergelijke strategie ook toepasbaar is op een Cilindrisch Hex spel met grotere oneven omtrek.

Referenties

[1] Steve Alpern en Anatole Beck. “Hex Games and Twist Maps on the Annulus”. In: *The American Mathematical Monthly* 98.9 (1991), p. 803–811.

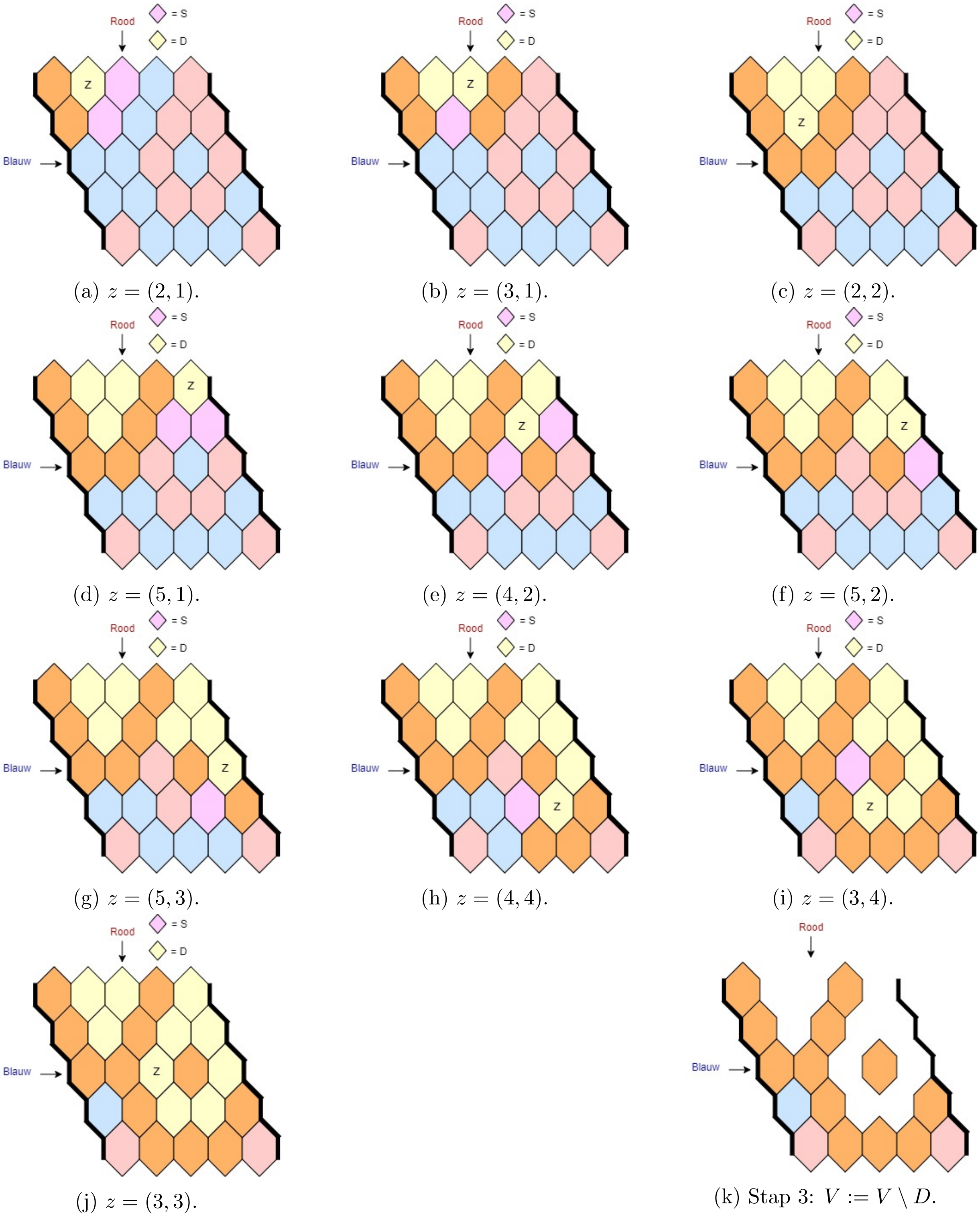
[2] Ryan B. Hayward en Jack van Rijswijck. “Hex and Combinatorics”. In: *Discrete Math* 306 (2006), p. 2515–2528.

[3] Samuel Clowes Huneke, Ryan Hayward en Bjarne Toft. “A Winning Strategy for $3 \times n$ Cylindrical Hex”. In: *Discrete Math* 331 (2014), p. 93–97.

[4] Asmi Kumar. “What Does It Take to Win Hex?” In: *towardsdatascience.com* (2020). DOI: `https://towardsdatascience.com/what-does-it-take-to-win-hex-79fafcf43c55`.

[5] David Wolfe Michael H. Albert Richard J. Nowakowski. *Lessons In Play. An Introduction to Combinatorial Game Theory.* A. K. Peters, 2016.

A Voorbeeld Knip- en Kleur Algoritme

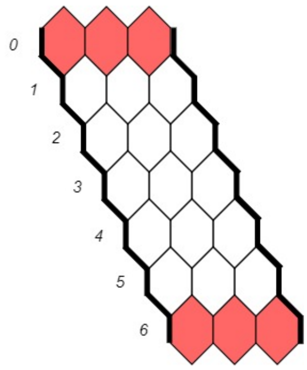


(a) $z = (2, 1)$.
(b) $z = (3, 1)$.
(c) $z = (2, 2)$.
(d) $z = (5, 1)$.
(e) $z = (4, 2)$.
(f) $z = (5, 2)$.
(g) $z = (5, 3)$.
(h) $z = (4, 4)$.
(i) $z = (3, 4)$.
(j) $z = (3, 3)$.
(k) Stap 3: $V := V \setminus D$.

Figuur 30: Uitvoering van het Knip- en Kleur Algoritme op een 5×5 Cilindrisch Hex bord.

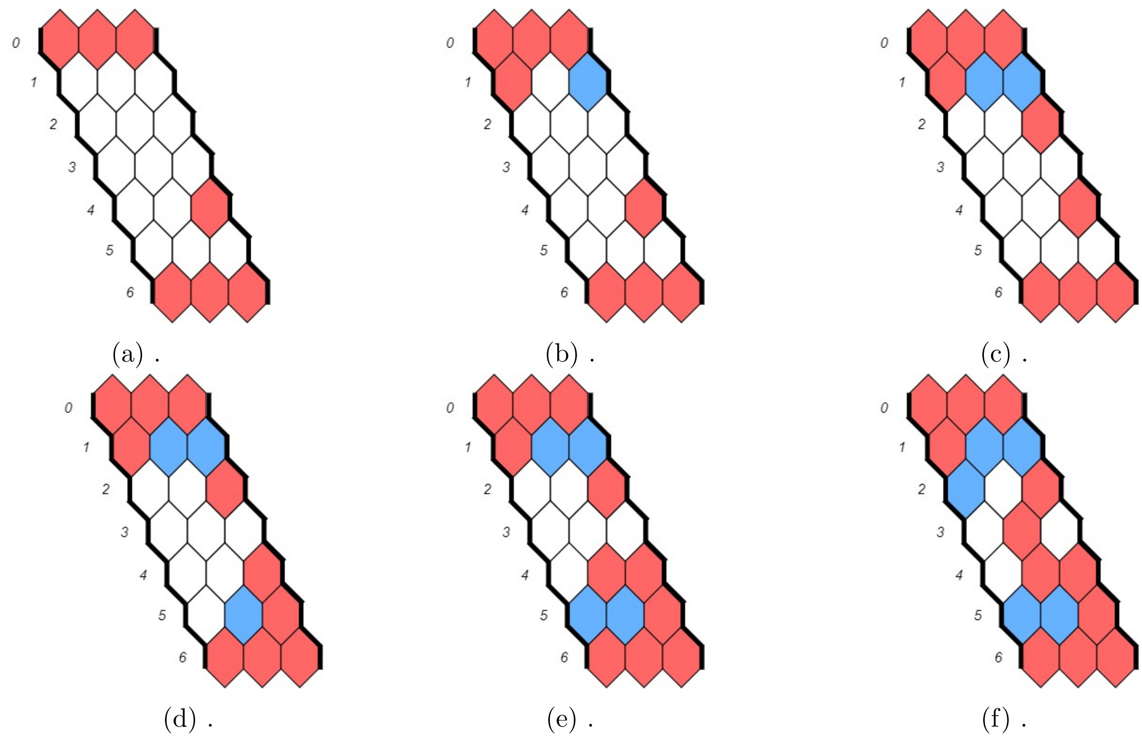
B Toepassing strategie voor $3 \times n$ Cilindrisch Hex

In dit hoofdstuk wordt een voorbeeld gegeven van een toepassing van Algoritme 4.1. Dit voorbeeld gaat op een Cilindrisch Hex spel van 3×5, waarbij in de figuren de aangenomen ringen 0 en $n+1$ ook getekend zijn.



Figuur 31: Leeg 3×5 Cilindrisch Hex bord met rode ringen 0 en 6.

Stel dat Rood begint. In dat geval zal hij regel I toepassen, en dus een random vakje kleuren (zie Figuur 32a). Vervolgens reageert Blauw door een vakje in ring 1 te kleuren. Regel 1 en 2 zijn nu niet toepasbaar voor Rood, en hij zal dan ook regel 3 toepassen door ring 1 en 0 te verbinden. Dit kan op twee manieren: vakje $(1,1)$ of $(2,1)$ (zie Figuur 32b). Weer kleurt Blauw een vakje in ring 1, waardoor Rood nu wel regel 1 toe kan passen. Dit kan hij doen door vakje $(1,2)$ of $(3,2)$ te kleuren (zie Figuur 32c).
Op deze manier wordt het spel verder gespeeld. In Figuur 32d zie je dat Rood weer regel 1 toepast nadat Blauw in ring 5 heeft gespeeld. Als Blauw dan nu weer in ring 5 speelt, moet Rood weer regel 1 toepassen. Er is echter al een rood pad van ring 4 naar 6, maar de regel zegt nog steeds te kleuren in ring 4, 5 of 6, dit geeft dan nog twee opties voor Rood: $(1,4)$ of $(2,4)$. Het spel is nu bijna klaar, na de volgende zet past Rood regel 1 weer toe en heeft zo gewonnen.



Figuur 32: Agoritme 4.1 toegepast.