



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Hilberts metriek in R^n

Lips, M.

Citation

Lips, M. *Hilberts metriek in R^n .*

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171173>

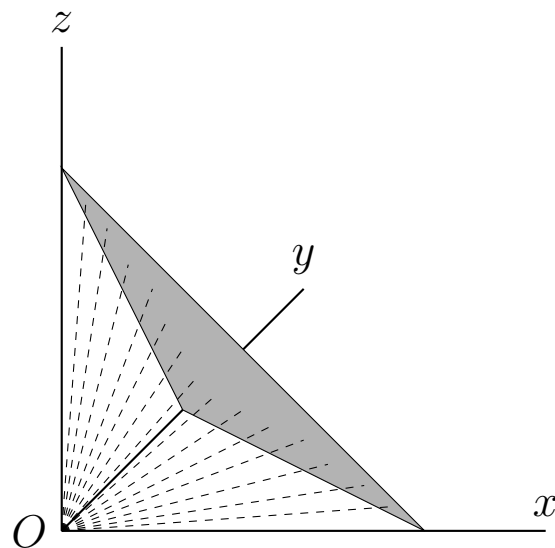
Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Hilberts metriek in \mathbb{R}^n

Bachelorscriptie

M. Lips

Begeleid door Dr. M. Roelands



Universiteit Leiden
Mathematisch instituut
Nederland
28 mei 2022



**Universiteit
Leiden**

Voorwoord

In deze scriptie wordt Hilberts metriek tot in detail bestudeerd, met als hoofdresultaten het karakteriseren van unieke geodeten en het karakteriseren van isometrieën voor Hilberts metriek gedefinieerd op specifieke domeinen.

Voor deze scriptie wil ik graag mijn begeleider Dr. M. Roelands bedanken van wie ik, dankzij de gesprekken die bijna wekelijks plaatsvonden, geleerd heb de wiskundige teksten uitgebreid en correct te formuleren. Een vaardigheid die niet zo goed tot uiting was gekomen zonder hem.

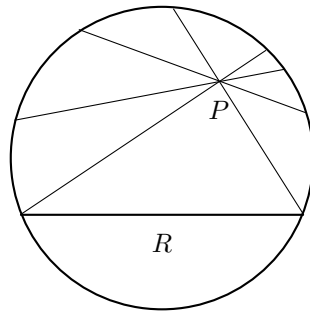
Inhoudsopgave

Voorwoord	1
Inleiding	3
Voorkennis	4
1 Hilberts metriek	6
1.1 Eigenschappen van de dubbelverhouding	6
1.2 Bewijs dat Hilberts metriek daadwerkelijk een metriek is	8
2 Geodeten in Hilbert metrische ruimten	10
2.1 Karakterisatie van unieke geodeten	10
3 Kegels en Hilberts metriek	14
3.1 Hilberts projectieve metriek	16
3.2 Hilberts projectieve metriek komt overeen met Hilberts metriek op n -simplices . . .	17
4 Van kegels naar genormeerde vectorruimten en isometrieën	21
4.1 Correspondentie tussen surjectieve isometrieën	22
4.2 Karakterisatie van surjectieve isometrieën	22
4.2.1 Surjectieve isometrieën voor $n \geq 2$ liggen vast door extreme punten van de eenheidsbal	22
4.2.2 Karakterisatie van surjectieve isometrieën voor $n \geq 2$	25

Inleiding

In deze scriptie wordt Hilberts metriek nader bekeken. Hilbert metrische ruimten zijn een generalisatie van het zogeheten Cayley-Klein model (ook wel het Beltrami-Klein model genoemd) bedacht door Arthur Cayley en Felix Klein [5]. Het Cayley-Klein model is een voorbeeld van een hyperbolisch vlak en wordt gegeven door het inwendige van de eenheidsbal in \mathbb{R}^2 . Een hyperbolisch vlak (of hyperbolische ruimte) is een vlak met de eigenschap dat voor een willekeurige lijn R en punt P , dat niet op de lijn R ligt, geldt dat er tenminste twee lijnen door P bestaan die R niet snijden (zie Figuur 1). Hilbert metrische ruimten zijn ook hyperbolische ruimten.

In een brief correspondentie tussen Felix Klein en David Hilbert [2], merkte Hilbert op dat de Cayley-Klein metriek niet alleen op een Cayley-Klein model gedefinieerd kan worden, maar op iedere niet-lege, open, begrensde en convexe deelverzameling van \mathbb{R}^n . Zo ontstond Hilberts metriek.



Figuur 1: Een Cayley-Klein model.

Met projectieve argumenten zullen we aantonen dat Hilberts metriek daadwerkelijk een metriek is. Verder zien we in deze scriptie dat een Hilbert metrische ruimte een geodetische ruimte is. Dit betekent dat er tussen ieder tweetal verschillende punten x, y , in een Hilbert metrische ruimte, altijd een geodeet bestaat. Deze geodeet is niet uniek als driehoeksgelijkheid gevormd kan worden met een punt dat niet op de geodeet tussen x en y ligt. Het blijkt dat driehoeksgelijkheid tussen 3 niet collineaire punten in een Hilbert metrische ruimten onder speciale condities geldt.

Een voorbeeld van een metrische ruimte waarin drie niet-collineaire punten bestaan waarvoor driehoeksgelijkheid geldt is het inwendige van de gelijkzijdige driehoek. De gelijkzijdige driehoek is een domein dat vaker voorkomt in de scriptie en is een voorbeeld van een collectie domeinen genaamd n -simplices. Een standaard n -simplex wordt gedefinieerd als de convexe hull van de standaard basisvectoren in \mathbb{R}^n . We zullen zien dat n -simplices met Hilberts metriek isometrisch isomorf zijn aan genormeerde reële vectorruimten met de zogeheten norm metriek. Via dit isometrisch isomorfisme kunnen we alle surjectieve isometrieën op n -simplices voor Hilberts metriek karakteriseren.

In hoofdstuk 1 definiëren we Hilberts metriek, behandelen we eigenschappen van de dubbelverhouding en gebruiken deze eigenschappen om aan te tonen dat Hilberts metriek daadwerkelijk een metriek is. In hoofdstuk 2 introduceren we geodeten, zien we dat Hilbert metrische ruimten geodetische ruimten zijn en bepalen we condities voor de uniciteit van deze geodeten. Hoofdstuk 3 bouwt op naar de relatie tussen n -simplices als Hilbert metrische ruimten en genormeerde reële vectorruimten. Dit wordt gedaan door n -simplices te zien als “plakken” uit de standaardkegel \mathbb{R}_+^n . Tenslotte ontstaat in hoofdstuk 4 een isometrisch isomorfisme van de standaardkegel \mathbb{R}_+^n naar een specifieke genormeerde quotiëntvectorruimte. Hierdoor kunnen we tot in detail iedere surjectieve isometrie op deze quotiëntvectorruimte karakteriseren en krijgen ook een karakterisatie van alle isometrieën op n -simplices als Hilbert metrische ruimten.

Voorkennis

In deze scriptie bekijken we reële vectorruimten.

Definitie 1. (Genormeerde vectorruimten) Zij V een vectorruimte. Een functie $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heet een *norm* als voor $v, w \in V$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt

- $\|v\| \geq 0$;
- $\|v\| = 0$ dan en slechts dan als $v = 0$;
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,

Het paar $(V, \|\cdot\|)$ wordt een genormeerde vectorruimte genoemd.

Als uit de context duidelijk is welke norm op een vectorruimte V van toepassing is, spreken we van V in plaats van $(V, \|\cdot\|)$.

Definitie 2. (Metriek) Een *metriek* op een verzameling X is een functie $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ zodanig dat voor $x, y, z \in X$ geldt

- $d(x, y) \geq 0$ en $d(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$ (niet-negativiteit en scheidings-eigenschap);
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie);
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (driehoeksongelijkheid).

Lemma 1. Iedere norm $\|\cdot\|$ op \mathbb{R}^n induceert een metriek op \mathbb{R}^n door de vorm $d(x, y) := \|x - y\|$ voor $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bewijs. Voor iedere $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ geldt $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ en $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ dan en slechts dan als $x - y = 0$ oftewel $x = y$. Tevens geldt $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ en

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Definitie 3. (Convexe verzameling) Zij V een vectorruimte. Een deelverzameling $C \subseteq V$ is *convex* als voor iedere $x, y \in C$ het lijnstuk tussen x en y , gegeven door $\{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$, bevat is in C .

De rand van C , t.o.v. een norm, noteren we met ∂C en het inwendige met C° . De afsluiting van C wordt genoteerd met \bar{C} .

Lemma 2. Zij V een genormeerde vectorruimte. De afsluiting van een convexe verzameling $C \subseteq V$, ten opzichte van een metriek topologie geïnduceerd door de norm van V , is een convexe verzameling.

Bewijs. Laat $x, y \in \bar{C}$. Dan bestaan er rijtjes $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ in C zodanig dat $x_n \rightarrow x$ en $y_n \rightarrow y$. Er geldt voor $0 \leq t \leq 1$ en iedere $n \geq 0$ dat

$$tx_n + (1-t)y_n \in C \quad \text{en} \quad tx_n + (1-t)y_n \rightarrow tx + (1-t)y,$$

waaruit volgt $tx + (1-t)y \in \bar{C}$. □

Lemma 3. Zij V een genormeerde vectorruimte. Zij $C \subseteq V$ een convexe verzameling. Dan geldt

- C° is convex;
- voor $y \in \partial C$ en $x \in C^\circ$ geldt $\{tx + (1-t)y : 0 < t < 1\} \subseteq C^\circ$.

Bewijs. i) Zij $v, w \in C^\circ$ en $0 < t < 1$. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor de open bal rond v en w geldt dat $B_\varepsilon(v) \subseteq C$ en $B_\varepsilon(w) \subseteq C$. Verder geldt voor $p, q \in B_\varepsilon(0)$ dat $q + v \in B_\varepsilon(v)$ en $p + w \in B_\varepsilon(w)$ en $t(q + v) + (1 - t)(p + w) = tq + (1 - t)p + tv + (1 - t)w \in C$. Er geldt dus

$$B_\varepsilon(tv + (1 - t)w) = tv + (1 - t)w + B_\varepsilon(0) = tv + (1 - t)w + tB_\varepsilon(0) + (1 - t)B_\varepsilon(0) \subseteq C.$$

Er volgt dat $tv + (1 - t)w \in C^\circ$.

ii) Zij $0 < t < 1$ en laat $z := tx + (1 - t)y$. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat

$$B_\varepsilon(x) = x + B_\varepsilon(0) \subseteq C.$$

Er volgt dat voor alle $v \in C$ dat

$$\begin{aligned} tB_\varepsilon(x) + (1 - t)v &= tB_\varepsilon(x) - (1 - t)y + (1 - t)y + (1 - t)v \\ &= t(x + B_\varepsilon(0)) + (1 - t)y + (1 - t)(v - y) = z + (1 - t)(v - y) + tB_\varepsilon(0) \subseteq C \end{aligned}$$

aangezien $tB_\varepsilon(x) + (1 - t)v \subseteq C$. Er bestaat een $v \in C$ zodanig dat geldt

$$v \in y - t(1 - t)^{-1}B_\varepsilon(0) = \frac{t}{(1 - t)}B_\varepsilon(y) = B_{\frac{t}{(1 - t)}\varepsilon}(y)$$

aangezien $y \in \partial C$. Er volgt dat $0 \in (1 - t)v - (1 - t)y + tB_\varepsilon(0)$. Laat $B_\delta(0)$ een open bal rondom 0 zijn zodanig dat $B_\delta(0) \subseteq (1 - t)(v - y) + tB_\varepsilon(0)$, dan geldt $z + B_\delta(0) \subseteq z + (1 - t)(v - y) + tB_\varepsilon(0) \subseteq C$. Er geldt dus dat $z \in C^\circ$. \square

Definitie 4. (Dubbelverhouding) Zij a, b, c en d vier collineaire punten in een genormeerde vectorruimte V waarbij b tussen a en c ligt en c tussen b en d . De *dubbelverhouding* tussen a, b, c en d is gegeven door

$$[a, b, c, d] := \frac{\|a - c\|}{\|a - b\|} \cdot \frac{\|d - b\|}{\|d - c\|}.$$

Zij a, b, c en d gegeven zoals hierboven en laat e een punt in V zijn zodanig dat e tussen b en c ligt. Voor de dubbelverhouding geldt dan het volgende

$$[a, b, e, d] \cdot [a, e, c, d] = \frac{\|a - e\|}{\|a - b\|} \frac{\|d - b\|}{\|d - e\|} \cdot \frac{\|a - c\|}{\|a - e\|} \frac{\|d - e\|}{\|d - c\|} = [a, b, c, d].$$

Deze eigenschap wordt de *cocykel* eigenschap genoemd.

Definitie 5. (Hypervlak) Zij V een vectorruimte van dimensie n . Een deelruimte van dimensie $n - 1$ wordt een *hypervlak* genoemd.

Definitie 6. (Affiene ruimte) Een affiene ruimte is een deelverzameling A van een vectorruimte V zodanig dat voor een zekere vector $v \in V$ geldt dat de verzameling $A - v := \{a - v : a \in A\}$ een deelruimte is van V .

Definitie 7. (Functionalen) Een *functionaal* op \mathbb{R}^n is een lineaire functie $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 4. Iedere functionaal $\phi \neq 0$ op \mathbb{R}^n is surjectief.

Bewijs. Er bestaat een $x \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $\phi(x) \neq 0$. Dan geldt voor iedere $\lambda \in \mathbb{R}$ dat

$$\phi\left(\frac{\lambda}{\phi(x)}x\right) = \frac{\lambda}{\phi(x)}\phi(x) = \lambda$$

wegens lineariteit. \square

Definitie 8. Een *isometrie* tussen metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) is een functie $f: X \rightarrow Y$ zodanig dat voor $x, y \in X$ geldt dat

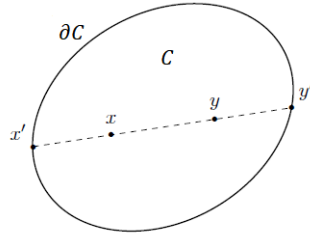
$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Lemma 5. Zij $f: X \rightarrow Y$ een isometrie tussen de metrische ruimten (X, d_X) en (Y, d_Y) . Dan is f injectief.

Bewijs. Stel dat voor $x, y \in X$ geldt $f(x) = f(y)$, dan geldt $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ en er geldt $x = y$ wegens de scheidings eigenschap van metrieken. \square

1 Hilberts metriek

Hilberts metriek wordt gedefinieerd op een niet-lege, open, begrensde, convexe deelverzameling C van \mathbb{R}^n . Voor $x, y \in C$ zodanig dat $x \neq y$, laat $\ell_{x,y}$ de lijn zijn door x en y en laat x' en y' punten op ∂C zijn zodanig dat x tussen x' en y ligt en y tussen x en y' ligt (zie Figuur 2).



Figuur 2

Merk op dat de dubbelverhouding tussen x', x, y, y' altijd strikt groter is dan 1 aangezien de afstand tussen x' en y altijd groter is dan de afstand x' en x . Dit geldt net zo voor de afstand tussen x en y' en y en y' . Hilbert definieerde een metriek op C aan de hand van de benoemde dubbelverhouding [2].

Definitie 1.0.1. (*Hilberts metriek*) Hilberts metriek $\kappa: C \times C \rightarrow [0, \infty)$ wordt gedefinieerd door

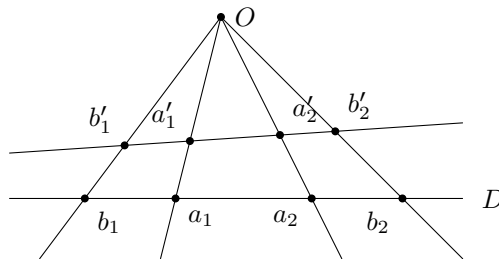
$$\kappa(x, y) := \log[x', x, y, y'] > 0,$$

met $\kappa(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$. Het paar (C, κ) wordt een *Hilbert metrische ruimte* genoemd.

Hilberts metriek κ is goed gedefinieerd aangezien de dubbelverhouding altijd strikt groter is dan 1. Op het eerste gezicht is niet direct duidelijk dat κ daadwerkelijk een metriek is. Om dit te bewijzen hebben we eigenschappen van de dubbelverhouding nodig die we eerst behandelen.

1.1 Eigenschappen van de dubbelverhouding

De dubbelverhouding is invariant onder perspectief vanuit een bepaalde oorsprong $O \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (zie Figuur 3 en 4). Invariantie onder perspectief houdt in dat de dubbelverhouding van punten b'_1, a'_1, a'_2 en b'_2 in Figuur 3 precies hetzelfde is als de dubbelverhouding van punten b_1, a_1, a_2 en b_2 . Als $O = \infty$ bekijken we de situatie waarbij de vier lijnen in Figuur 3 parallel zijn, zoals te zien in figuur 4. De volgende propositie is terug te vinden in [6, Propositie 5.6.5].



Figuur 3: Projectie van vier punten.

Propositie 1.1.1. (*Dubbelverhouding is invariant onder perspectief*) Laat $O \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ een oorsprong zijn en laat de vier punten b_1, a_1, a_2, b_2 en de vier punten b'_1, a'_1, a'_2, b'_2 onderling collineair zijn (zie Figuur 3 en 4). Dan geldt $[b_1, a_1, a_2, b_2] = [b'_1, a'_1, a'_2, b'_2]$.

Bewijs. We bekijken eerst het geval waarin $O \in \mathbb{R}^n$, zoals in Figuur 3. Merk op dat we driehoeken $Oa_2b_1, Oa_1b_2, Oa_1b_1$ en Oa_2b_2 kunnen maken waarbij L de lengte van O tot de lijn D is en waarvoor voor de volgende oppervlakten geldt

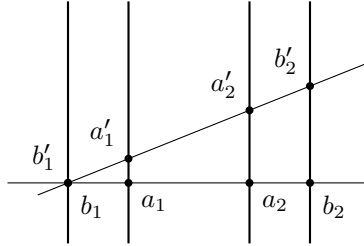
$$\begin{aligned} Opp(Oa_2b_1) &= \frac{1}{2}L\|a_2 - b_1\| = \frac{1}{2}\|O - a_2\| \cdot \|O - b_1\| \sin(\angle a_2Ob_1), \\ Opp(Oa_1b_2) &= \frac{1}{2}L\|a_1 - b_2\| = \frac{1}{2}\|O - a_1\| \cdot \|O - b_2\| \sin(\angle a_1Ob_2), \\ Opp(Oa_1b_1) &= \frac{1}{2}L\|a_1 - b_1\| = \frac{1}{2}\|O - a_1\| \cdot \|O - b_1\| \sin(\angle a_1Ob_1), \\ Opp(Oa_2b_2) &= \frac{1}{2}L\|a_2 - b_2\| = \frac{1}{2}\|O - a_2\| \cdot \|O - b_2\| \sin(\angle a_2Ob_2). \end{aligned}$$

Hieruit krijgen we

$$\begin{aligned} [b_1, a_1, a_2, b_2] &= \frac{\|a_2 - b_1\| \cdot \|a_1 - b_2\|}{\|a_1 - b_1\| \cdot \|a_2 - b_2\|} \\ &= \frac{(\|O - a_2\| \cdot \|O - b_1\| \sin(\angle a_2Ob_1)) (\|O - a_1\| \cdot \|O - b_2\| \sin(\angle a_1Ob_2))}{(\|O - a_1\| \cdot \|O - b_1\| \sin(\angle a_1Ob_1)) (\|O - a_2\| \cdot \|O - b_2\| \sin(\angle a_2Ob_2))} \\ &= \frac{\sin(\angle a_2Ob_1) \sin(\angle a_1Ob_2)}{\sin(\angle a_1Ob_1) \sin(\angle a_2Ob_2)}. \end{aligned}$$

De dubbelverhouding is dus alleen afhankelijk van de hoeken $\angle a_2Ob_1, \angle a_1Ob_2, \angle a_1Ob_1$ en $\angle a_2Ob_2$. Deze zijn hetzelfde voor b'_1, a'_1, a'_2 en b'_2 , dus $[b_1, a_1, a_2, b_2] = [b'_1, a'_1, a'_2, b'_2]$.

We bewijzen dat de dubbelverhouding van de snijpunten van een willekeurige lijn door deze parallelle lijnstukken gelijk is aan de dubbelverhouding van de snijpunten van een lijn die loodrecht staat op de parallelle lijnen. We bekijken dus de situatie in Figuur 4.



Figuur 4: Dubbelverhouding voor $O = \infty$.

Laat $\alpha := \angle b'_2b_1b_2 = \angle a'_2b_1a_2 = \angle a'_1b_1a_1$. Merk op dat $\|a'_1 - b'_2\| = \|b_1 - b'_2\| - \|b_1 - a'_1\|$ en $\|a'_2 - b'_2\| = \|b_1 - b'_2\| - \|b_1 - a'_2\|$. Er volgt dat

$$\begin{aligned} [b'_1, a'_1, a'_2, b'_2] &= \frac{\|b'_1 - a'_2\| \cdot \|a'_1 - b'_2\|}{\|b'_1 - a'_1\| \cdot \|a'_2 - b'_2\|} \\ &= \frac{\frac{\|a'_2 - a_2\|}{\sin(\alpha)} \cdot \left(\frac{\|b'_2 - b_2\|}{\sin(\alpha)} - \frac{\|a'_1 - a_1\|}{\sin(\alpha)} \right)}{\frac{\|a'_1 - a_1\|}{\sin(\alpha)} \cdot \left(\frac{\|b'_2 - b_2\|}{\sin(\alpha)} - \frac{\|a'_2 - a_2\|}{\sin(\alpha)} \right)}. \end{aligned}$$

Er geldt

$$\sin(\alpha) = \frac{\|b'_2 - b_2\|}{\|b'_1 - b'_2\|} = \frac{\|b_1 - b_2\|}{\|b'_1 - b'_2\|} \cdot \frac{\|b'_2 - b_2\|}{\|b_1 - b_2\|} = \cos(\alpha) \cdot \frac{\|b'_2 - b_2\|}{\|b_1 - b_2\|} = \cos(\alpha) \frac{\|a'_2 - a_2\|}{\|b_1 - a_2\|} = \cos(\alpha) \frac{\|a'_1 - a_1\|}{\|b_1 - a_1\|}.$$

We krijgen vervolgens

$$[b'_1, a'_1, a'_2, b'_2] = \frac{\frac{\|b_1 - a_2\|}{\cos(\alpha)} \cdot \left(\frac{\|b_1 - b_2\|}{\cos(\alpha)} - \frac{\|b_1 - a_1\|}{\cos(\alpha)} \right)}{\frac{\|b_1 - a_1\|}{\cos(\alpha)} \cdot \left(\frac{\|b_1 - b_2\|}{\cos(\alpha)} - \frac{\|b_1 - a_2\|}{\cos(\alpha)} \right)} = \frac{\|b_1 - a_2\| \cdot \|a_1 - b_2\|}{\|b_1 - a_1\| \cdot \|a_2 - b_2\|} = [b_1, a_1, a_2, b_2].$$

Hiermee hebben we ook invariantie onder perspectief aangetoond voor $O = \infty$. \square

De dubbelverhouding wordt groter als de afstand tussen het punt x (of y) en het randpunt x' (of y') kleiner wordt. Dit bewijzen we in het volgende lemma.

Lemma 1.1.1. *Laat C een niet-lege, open, begrensde, convexe verzameling in \mathbb{R}^n zijn en laat $x, y \in C$ gegeven zijn met x', y' en \bar{x}, \bar{y} zoals hieronder.*



Dan geldt $[x', x, y, y'] \leq [\bar{x}, x, y, \bar{y}]$ met gelijkheid dan en slechts dan als geldt $\bar{x} = x'$ en $\bar{y} = y'$.

Bewijs. Er geldt

$$\|x' - x\| = \|\bar{x} - x\| + \varepsilon \text{ en } \|x' - y\| = \|\bar{x} - y\| + \varepsilon$$

waarbij $\varepsilon = \|\bar{x} - x'\|$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} &= \frac{\|\bar{x} - y\| + \varepsilon}{\|\bar{x} - x\| + \varepsilon} \implies \|x' - y\| \cdot \|\bar{x} - x\| + \varepsilon \cdot \|x' - y\| = \|x' - x\| \cdot \|\bar{x} - y\| + \varepsilon \|x' - x\| \\ &\implies \|x' - y\| \cdot \|\bar{x} - x\| + \varepsilon (\|x' - y\| - \|x' - x\|) = \|x' - x\| \cdot \|\bar{x} - y\| \\ &\implies \frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} + \frac{\varepsilon \|x - y\|}{\|x' - x\| \cdot \|\bar{x} - x\|} = \frac{\|\bar{x} - y\|}{\|\bar{x} - x\|}. \end{aligned}$$

Aangezien $\frac{\varepsilon \cdot \|x - y\|}{\|x' - x\| \cdot \|\bar{x} - x\|} \geq 0$, geldt

$$\frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} \leq \frac{\|\bar{x} - y\|}{\|\bar{x} - x\|}.$$

Ditzelfde kan gedaan worden voor $\frac{\|y' - x\|}{\|y' - y\|}$ waaruit volgt

$$[x', x, y, y'] \leq [\bar{x}, x, y, \bar{y}].$$

Als $\|\bar{x} - x'\| = 0$ en $\|\bar{y} - y'\| = 0$, dan geldt $\|x' - x\| = \|\bar{x} - x\|$, $\|x' - y\| = \|\bar{x} - y\|$, $\|y' - y\| = \|\bar{y} - y\|$ en $\|y' - x\| = \|\bar{y} - x\|$. Hieruit volgt dat $[x', x, y, y'] = [\bar{x}, x, y, \bar{y}]$. Als geldt dat $[x', x, y, y'] = [\bar{x}, x, y, \bar{y}]$, dan geldt dat $\|\bar{x} - x'\| = 0$ en $\|\bar{y} - y'\| = 0$. \square

1.2 Bewijs dat Hilberts metriek daadwerkelijk een metriek is

We laten nu zien dat κ daadwerkelijk een metriek is. Per definitie van κ geldt al dat $\kappa(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$. Er geldt ook

$$[x', x, y, y'] = \frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} \cdot \frac{\|y' - x\|}{\|y' - y\|} = \frac{\|y' - x\|}{\|y' - y\|} \cdot \frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} = [y', y, x, x']$$

en dus $\kappa(x, y) = \log[x', x, y, y'] = \log[y', y, x, x'] = \kappa(y, x)$. Het volgende resultaat is te vinden in [3, Propositie 1].

Propositie 1.2.1. (Driehoeksongelijkheid) *Op een open, begrensde, convexe deelverzameling C van \mathbb{R}^n voldoet κ aan de driehoeksongelijkheid.*

Bewijs. Laat $x, y, z \in C$ en stel dat x, y en z collineair zijn en dat z tussen x en y ligt. Dan geldt de cocykel eigenschap

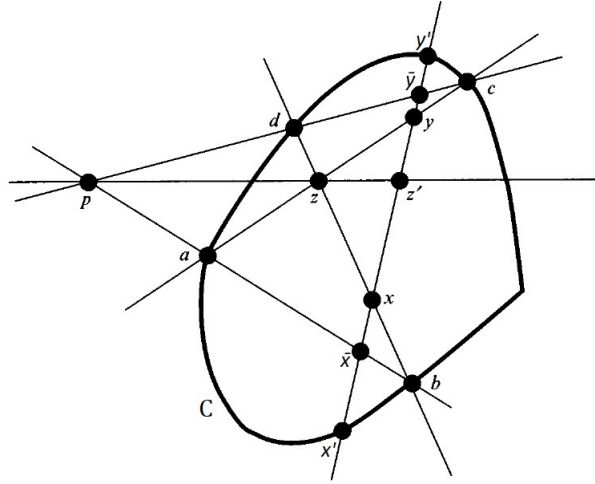
$$[x', x, z, y'] \cdot [x', z, y, y'] = [x', x, y, y'].$$

Er volgt

$$\kappa(x, y) = \log[x', x, y, y'] = \log([x', x, z, y'] \cdot [x', z, y, y']) = \kappa(x, z) + \kappa(z, y).$$

Merk op dat als z tussen x' en x ligt dan geldt volgens de cocykel eigenschap

$$[x', z, y, y'] = [x', z, x, y'] \cdot [x', x, y, y']$$



Figuur 5

waaruit volgt $[x', x, y, y'] = \frac{[x', z, y, y']}{[x', z, x, y']}$. Er geldt dan

$$\kappa(x, y) = \kappa(z, y) - \kappa(x, z) \leq \kappa(z, y) + \kappa(x, z). \quad (1)$$

Op een zelfde manier geldt deze ongelijkheid als z tussen y en y' ligt.

Neem nu aan dat $x, y, z \in C$ niet collineair zijn. We bekijken de volgende punten als in Figuur 5:

- a en c zijn de punten waar de lijn $\ell_{z,y}$ de rand van C snijdt,
- b en d zijn de punten waar de lijn $\ell_{x,z}$ de rand van C snijdt,
- p is de kruising tussen de lijnen $\ell_{a,b}$ en $\ell_{c,d}$ als deze bestaat,
- $\bar{x} := \ell_{a,b} \cap \ell_{x,y}$, $z' := \ell_{p,z} \cap \ell_{x,y}$, $\bar{y} := \ell_{d,c} \cap \ell_{x,y}$. Op het moment dat p niet bestaat geldt dat de lijnen $\ell_{a,b}$, $\ell_{d,c}$ en $\ell_{z,z'}$ parallel zijn.

Wegens Propositie 1.1.1 krijgen we

$$[b, x, z, d] = [\bar{x}, x, z', \bar{y}] \quad \text{en} \quad [a, z, y, c] = [\bar{x}, z', y, \bar{y}].$$

Merk op dat x, y en z' collineair zijn. Wegens de cocykel eigenschap krijgen we

$$[\bar{x}, x, y, \bar{y}] = [\bar{x}, x, z', \bar{y}] \cdot [\bar{x}, z', y, \bar{y}].$$

Uit Lemma 1.1.1 volgt nu

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \log[x', x, y, y'] \leq \log[\bar{x}, x, y, \bar{y}] = \log([\bar{x}, x, z', \bar{y}] \cdot [\bar{x}, z', y, \bar{y}]) \\ &= \log[b, x, z, d] + \log[a, z, y, c] = \kappa(x, z) + \kappa(z, y) \end{aligned}$$

waarmee we voor niet collineaire punten $x, y, z \in C$ de driehoeksongelijkheid hebben aangetoond. \square

2 Geodeten in Hilbert metrische ruimten

We beginnen deze sectie met een definitie van geodeten waarna we zien dat er tussen ieder tweetal verschillende punten in Hilbert metrische ruimten altijd een geodeet bestaat. Het blijkt dat er specifieke condities bestaan waarmee de uniciteit van geodeten in Hilbert metrische ruimten gegarandeerd kan worden.

Definitie 2.0.1. (Geodeet) Een *geodeet* tussen twee punten x en y in een metrische ruimte (X, d) is het beeld van een functie $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ waarvoor dat geldt

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| \quad \text{voor alle } s, t \in [a, b] \text{ met } \gamma(a) = x \text{ en } \gamma(b) = y.$$

Deze functie γ wordt een *geodetisch pad* genoemd.

Een geodeet is een isometrische inbedding van een interval in een metrische ruimte.

Definitie 2.0.2. Een metrische ruimte wordt een *geodetische ruimte* genoemd als er tussen ieder tweetal verschillende punten in de ruimte een geodeet bestaat.

Hilbert metrische ruimten zijn geodetische ruimten. Dit bewees Hilbert in [4, p. 91-96].

Propositie 2.0.1. Zij (C, κ) een Hilbert metrische ruimte. Rechte lijnstukken tussen twee verschillende punten x en y zijn geodeten voor Hilberts metriek.

Bewijs. We bekijken de functie $l: [0, 1] \rightarrow C$ gegeven door $l(t) = (1 - t)x + ty$. Merk op dat het beeld van l het rechte lijnstuk is tussen x en y . Wegens de cocykel eigenschap weten we dat $\kappa(x, l(t)) = \kappa(x, l(s)) + \kappa(l(s), l(t))$ geldt voor $0 \leq s \leq t \leq 1$. We kunnen echter het interval $[0, 1]$ transformeren naar een interval $[0, \kappa(x, y)]$ met de functie $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, \kappa(x, y)]$ gegeven door $\psi(t) = \kappa(x, l(t))$. Aangezien ψ strikt stijgend is, volgt dat ψ injectief is. Omdat ψ continu is op het interval $[0, 1]$ volgt uit de tussenwaardstelling dat ψ ook surjectief is. De functie ψ is dus bijjectief.

Door gebruik te maken van l en ψ definiëren $\gamma: [0, \kappa(x, y)] \rightarrow C$ gegeven door $\gamma(\mu) = l(\psi^{-1}(\mu))$. Merk nu op dat γ een geodeet is. Dankzij de cocykel eigenschap volgt voor $0 \leq \mu \leq \nu \leq \kappa(x, y)$ dat

$$\kappa(\gamma(\nu), \gamma(\mu)) = \kappa(l(\psi^{-1}(\nu)), l(\psi^{-1}(\mu))) = \kappa(l(\psi^{-1}(\nu)), x) - \kappa(l(\psi^{-1}(\mu)), x) = \nu - \mu.$$

De middelste gelijkheid krijgen we vanwege de gelijkheid in (1) aangezien de punten $l(\psi^{-1}(\nu))$ en $l(\psi^{-1}(\mu))$ tussen x en y op de lijn $\ell_{x,y}$ liggen. \square

We hebben nu bepaald dat ieder recht lijnstuk in een Hilbert metrische ruimte een geodeet is. Hilbert metrische ruimten zijn dus geodetische ruimten. In het vervolg van deze scriptie worden deze rechte lijnstukken tussen twee punten x en y ook wel de *rechte lijn geodeet* tussen x en y genoemd.

2.1 Karakterisatie van unieke geodeten

Nadat Hilbert bewees dat ieder recht lijnstuk tussen twee punten een geodeet is in een Hilbert metrische ruimte [4, p. 91-96], was hij vooral geïnteresseerd wanneer een rechte lijn geodeet uniek is.

Propositie 2.1.1. (Uniciteit van geodeten) Zij (X, d) een geodetische, metrische ruimte en laat $x, y \in X$ gegeven zijn zodanig dat $x \neq y$. Zij nu $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ een geodetisch pad tussen x en y . De geodeet tussen x en y is uniek dan en slechts dan als voor iedere $z \in X$ met $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ geldt dat $z = \gamma(t)$ voor een $t \in [a, b]$.

Bewijs. Merk op dat deze uitspraak equivalent is met de uitspraak: een geodeet tussen x en y is niet uniek dan en slechts dan als er een $z \in X$ bestaat zodanig dat er geen $t \in [a, b]$ bestaat met $z = \gamma(t)$ waarvoor de driehoeksgelijkheid geldt. We bewijzen deze laatste uitspraak.

Zij $z \in X$ zodanig dat driehoeksgelijkheid geldt voor x, y en z en waarvoor er geen $t \in [a, b]$ bestaat zodanig dat $z = \gamma(t)$. Laat $\gamma_1: [a_1, a_2] \rightarrow X$ en $\gamma_2: [b_1, b_2] \rightarrow X$ geodetische paden zijn tussen x en z en tussen z en y respectievelijk. Aangezien geodeten een isometrische inbedding

zijn van een interval volgt samen met de driehoeksgelijkheid dat geldt $(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) = b - a$. We kunnen het interval van de paden γ_1, γ_2 als volgt transleren $[a_1, a_2] \rightarrow [a, a + a_2 - a_1]$ en $[b_1, b_2] \rightarrow [b - (b_2 - b_1), b]$. De geodeten γ_1 en γ_2 zijn door deze translatie alsnog geodetische paden. Hierbij geldt voor $c = a + a_2 - a_1 = b - (b_2 - b_1)$ dat $\gamma_1(c) = \gamma_2(c) = z$. We kunnen de geodetische paden γ_1 en γ_2 als volgt aaneenschakelen

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma_1 * \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{als } a \leq t \leq c \\ \gamma_2(t) & \text{als } c < t \leq b. \end{cases}$$

We bewijzen nu dat de aaneenschakeling $\tilde{\gamma}$ een geodetisch pad is tussen x en y door gebruik te maken van de driehoeksgelijkheid tussen x, y en z . Merk op dat γ_1 en γ_2 al geodetische paden zijn tussen x en z en tussen z en y respectievelijk. We hoeven dus nog enkel het geval te bewijzen waarbij $a \leq s \leq c \leq t \leq b$. Voor het geval $a \leq s \leq c \leq t \leq b$ geldt

$$\begin{aligned} d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) &\leq d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(c)) + d(\tilde{\gamma}(c), \tilde{\gamma}(t)) \\ &= (c - s) + (t - c) = t - s, \end{aligned}$$

wegens de driehoeksongelijkheid. Tevens geldt

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \tilde{\gamma}(s)) + d(\tilde{\gamma}(s), y) \\ &\leq d(x, \tilde{\gamma}(s)) + d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) + d(\tilde{\gamma}(t), y) \\ &= (s - a) + d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) + (b - t) \\ &= (b - a) - (t - s) + d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) \\ &= d(x, y) - (t - s) + d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) \implies t - s \leq d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

Waarbij de eerste ongelijkheid volgt uit de driehoeksongelijkheid tussen $x, \tilde{\gamma}(s)$ en y en de tweede ongelijkheid volgt uit de driehoeksongelijkheid tussen $\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)$ en y . De tweede gelijkheid volgt uit het feit dat γ_1 en γ_2 geodetische paden zijn tussen x en z en tussen z en y , respectievelijk. Er gelden dus de volgende ongelijkheden $d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t)) \leq t - s$ en $t - s \leq d(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t))$. Hieruit volgt gelijkheid en we hebben aangetoond dat $\tilde{\gamma}$ een geodeet is.

Neem nu aan dat het geodetische pad tussen x en y niet uniek is. Dan bestaan er minstens twee verschillende geodetische paden $\gamma: [a_1, b_1] \rightarrow X$ en $\mu: [a_2, b_2] \rightarrow X$ tussen x en y . We kunnen deze geodetische paden transleren zodat we krijgen $\gamma: [0, d(x, y)] \rightarrow X$ en $\mu: [0, d(x, y)] \rightarrow X$. Aangezien γ en μ verschillend zijn, geldt dat er een $t_0 \in [0, d(x, y)]$ bestaat zodanig dat $\mu(t_0) \neq \gamma(t_0)$. Merk op dat het punt $\mu(t_0)$ niet bevat is in het beeld van γ . In andere woorden, er bestaat geen $t \in [0, d(x, y)]$ zodanig dat $\gamma(t) = \mu(t_0)$ aangezien geldt $t_0 = d(\mu(0), \mu(t_0)) = d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Er geldt nu

$$d(\mu(0), \mu(d(x, y))) = d(x, y) = t_0 + d(x, y) - t_0 = d(\mu(0), \mu(t_0)) + d(\mu(t_0), \mu(d(x, y))).$$

We krijgen dus driehoeksgelijkheid voor het punt $z = \mu(t_0)$ en er geldt dat er geen $t \in [0, d(x, y)]$ bestaat zodanig dat $\gamma(t) = z$. \square

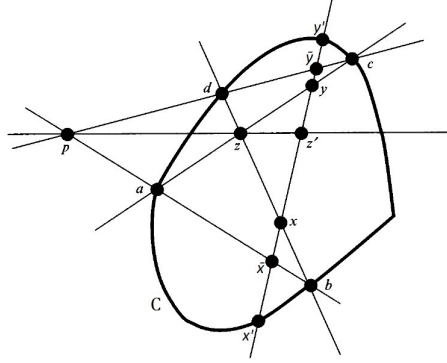
Een geodeet tussen x en y met $x \neq y$ is dus uniek dan en slechts dan als enkel driehoeksgelijkheid gemaakt kan worden met punten die op de geodeet tussen x en y liggen. We hebben nu een conditie voor uniciteit van geodeten in geodetische ruimten. Hilbert metrische ruimten zijn ook geodetische ruimten. In het volgende resultaat zien we hoe uniciteit van geodeten in Hilbert metrische ruimten gekarakteriseerd kan worden. Dit resultaat is te vinden in [1, Stelling 2.6.6].

Stelling 2.1.1. *Laat C een open, begrensde, convexe deelverzamling van \mathbb{R}^n zijn. Dan is de geodeet tussen twee punten $x, y \in C$ zodanig dat $x \neq y$, voor Hilberts metriek κ , uniek dan en slechts dan als de punten x' en y' niet bevat zijn in het inwendige van twee rechte lijnstukken in ∂C die samen een tweedimensionaal affien vlak opspannen.*

Bewijs. Volgens Propositie 2.1.1 hang uniciteit van geodeten af van het feit of er punten buiten het beeld van een geodetisch pad zijn waarmee driehoeksgelijkheid gemaakt kan worden. Het is dus voldoende om de volgende uitspraak te bewijzen: *er bestaat een $z \in C$ die niet in het beeld van de*

rechte lijn geodeet tussen x en y ligt en waarvoor driehoeksgelijkheid geldt dan en slechts dan als x' en y' bevat zijn in het inwendige van twee rechte lijnstukken in ∂C die samen een tweedimensionaal affien vlak opspannen.

Stel nu dat er een $z \in C$ bestaat die niet in het beeld van de rechte lijn geodeet tussen x en y ligt waarvoor de driehoeksgelijkheid geldt. We gebruiken de notatie zoals in Figuur 5 en 6.



Figuur 6

Hierbij kan het punt p ook op oneindig liggen. In dit geval zijn de lijnen $\ell_{a,b}$ en $\ell_{c,d}$ parallel. We weten dat door Propositie 1.1.1 geldt

$$[\bar{x}, x, z', \bar{y}] = [b, x, z, d] \quad \text{en} \quad [\bar{x}, z', y, \bar{y}] = [a, z, y, c].$$

Merk op dat volgens Lemma 1.1.1 geldt

$$[\bar{x}, x, z', \bar{y}] \geq [x', x, z', y'],$$

met gelijkheid als $\bar{x} = x'$ en $\bar{y} = y'$. Net zo krijgen we

$$[\bar{x}, z', y, \bar{y}] \geq [x', z', y, y'],$$

met gelijkheid als $\bar{x} = x'$ en $\bar{y} = y'$. Wegens de cocykel eigenschap geldt

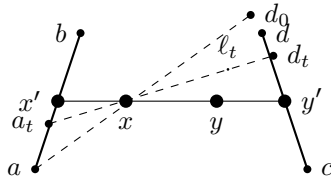
$$\kappa(x, y) = \kappa(x, z') + \kappa(z', y).$$

Er volgt nu wegens bovenstaande argumenten dat

$$\begin{aligned} \kappa(x, y) &= \log[x', x, y, y'] = \log[x', x, z', y'] + \log[x', z', y, y'] \\ &= \log[b, x, z, d] + \log[a, z, y, c] = \kappa(x, z) + \kappa(z, y) \end{aligned}$$

dan en slechts dan als $\bar{x} = x'$ en $\bar{y} = y'$. Enkel als $\bar{x} = x'$ en $\bar{y} = y'$, liggen x' en y' in het inwendige van de lijnstukken $\{(1-\alpha)d + \alpha c : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ en $\{(1-\beta)a + \beta b : 0 \leq \beta \leq 1\}$. Deze lijnstukken liggen volledig in ∂C (Lemma 3) en spannen samen een tweedimensionaal affien vlak op.

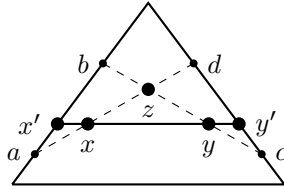
Stel nu dat x' en y' bevat zijn in het inwendige van twee rechte lijnstukken in ∂C die samen een tweedimensionaal affien vlak opspannen. Laat a, b de randpunten zijn van het lijnstuk waarin x' bevat is en laat c, d de randpunten zijn van het lijnstuk waarin y' bevat is zoals in Figuur 7 hieronder. We bekijken het lijnstuk tussen a en x' dat gegeven wordt door $\{(1-t)a + tx' : t \in [0, 1]\}$. Laat het punt a_t gegeven zijn op het lijnstuk tussen a en x' dat wordt gegeven door $(1-t)a + tx'$. We bekijken de lijn $\ell_t = \{(1-s)a_t + sx : s \in \mathbb{R}\}$. Merk op dat als $t \rightarrow 1$, dan convergeert het punt a_t naar x' en convergeert de lijn ℓ_t naar $\ell_{x,y}$. De lijn ℓ_t heeft twee snijpunten in ∂C waarvan a_t er een is, noem het andere punt d_t en we krijgen als $t \rightarrow 1$, dan $d_t \rightarrow y'$. Het punt d_t hoeft niet voor alle $t \in [0, 1]$ in het lijnstuk tussen d en y' te liggen (zie bijvoorbeeld het punt d_0 in Figuur 7), maar als $t \rightarrow 1$ volgt dat d_t op een zeker moment in het inwendige van het lijnstuk tussen d en y' terecht komt. Op dezelfde manier kunnen we een lijn construeren in het lijnstuk tussen y' en c en vinden een punt b_t tussen b en x' dat naar x' convergeert als $t \rightarrow 1$. Deze twee lijnen hebben altijd een snijpunt z . Dit snijpunt ligt in C aangezien z zich bevindt in het lijnstuk tussen x en d_t waarbij



Figuur 7

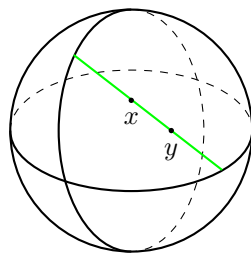
uit Lemma 3 volgt dat z bevat is in het inwendige van C . Door het snijpunt van de twee lijnen $\ell_{a,b}$ en $\ell_{c,d}$ te nemen als perspectief punt krijgen we, doormiddel van invariantie onder perspectief, driehoeksgelijkheid tussen x en y via het punt z en is de geodeet tussen x en y niet uniek. \square

Een voorbeeld van een open, begrensde, convexe Hilbert metrische ruimte waarin niet alle geodeten uniek zijn is het inwendige van een gelijkzijdige driehoek. In Figuur 8 is duidelijk te zien dat x' en y' bevat zijn in het inwendige van de lijnstukken tussen a en b , en tussen c en d , respectievelijk, en dat deze bevat zijn in de rand van de driehoek. Er geldt in dit geval dus dat de rechte lijn geodeet tussen x en y niet de enige geodeet is. Twee punten x en y in het tetraëder

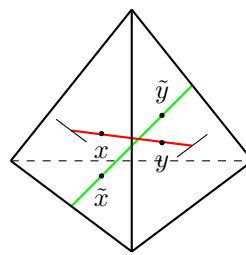


Figuur 8: Een voorbeeld waarin uniciteit niet geldt.

waarbij x en y op de rechte lijn tussen twee overstaande ribben liggen worden verbonden met een unieke geodeet. Merk namelijk op dat twee overstaande ribben samen geen tweedimensionaal affien vlak opspannen maar een driedimensionale affiene ruimte. Merk op dat de rand van de bol geen rechte lijnstukken bevat, hieruit volgt dat de rechte lijn geodeet tussen ieder tweetal punten uniek is. In Figuur 9 zijn unieke geodeten aangegeven met groen, niet unieke geodeten zijn aangegeven met rood.



Bal



Tetraëder

Figuur 9: Unieke en niet unieke geodeten.

3 Kegels en Hilberts metriek

De driehoek en het tetraëder uit de vorige paragraaf zijn voorbeelden van verzamelingen genaamd n -simplices. In dit hoofdstuk bekijken we de standaardkegel en definiëren we op de eendimensionale deelruimtes doorsneden met het inwendige van de standaardkegel een metriek genaamd Hilberts projectieve metriek. Het blijkt vervolgens dat Hilberts projectieve metriek op de eendimensionale deelruimtes doorsneden met het inwendige van de standaardkegel één op één overeenkomt met Hilberts metriek op n -simplices.

Definitie 3.0.1. (Kegel) Een convexe deelverzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ is een *kegel* als voor iedere $v \in K$ en $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt $\lambda v \in K$ en als $K \cap -K = \{0\}$.

Definitie 3.0.2. (Partieel geordende vectorruimte) Laat V een vectorruimte zijn en \leq een partiële ordening op de elementen van V . Het paar (V, \leq) is een *partieel geordende vectorruimte* als voor alle $x, y, z \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt

- als $x \leq y$, dan geldt ook $x + z \leq y + z$,
- als $x \leq y$, dan geldt ook $\lambda x \leq \lambda y$.

Lemma 3.0.1. Een kegel K in \mathbb{R}^n induceert een partieel geordende vectorruimte. Net zo induceert een partieel geordende vectorruimte een kegel in \mathbb{R}^n .

Bewijs. Laat een kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ gegeven zijn. De relatie $x \leq_K y \iff y - x \in K$ induceert een partieel geordende vectorruimte \mathbb{R}^n . De relatie is reflexief, er geldt namelijk $x - x = 0 \in K$ dus $x \leq_K x$. Stel dat geldt $x \leq_K y$ en $y \leq_K x$, dan volgt $x - y \in K$ en $y - x \in K$. Merk op dat geldt $x - y = -(y - x)$ waaruit volgt $x - y \in K$ en $x - y \in -K$, dan geldt $x - y = 0$ waaruit volgt $x = y$. De relatie is dus ook antisymmetrisch. Stel nu dat geldt $x \leq_K y$ en $y \leq_K z$, dan geldt $y - x \in K$ en $z - y \in K$. Voor optelling geldt $z - x = (y - x) + (z - y) \in K$, dus $x \leq_K z$ waarmee transitiviteit is aangetoond. Verder geldt als $x \leq y$ en gegeven een $v \in \mathbb{R}^n$ dan $x + v \leq y + v$, aangezien $y + v - x - v = y - x \in K$, en geldt voor $\lambda \geq 0$ dat als $x \leq_K y$ dan $\lambda x \leq_K \lambda y$, aangezien $\lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in K$. Hiermee wordt \mathbb{R}^n met \leq_K een partieel geordende vectorruimte.

Laat nu (\mathbb{R}^n, \leq) een partieel geordende vectorruimte zijn. De verzameling $\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$ vormt een kegel in de vectorruimte. Voor vectoren $v \geq 0$ geldt namelijk als $\lambda \geq 0$ dat $\lambda v \geq 0$. Verder geldt voor $v, w \geq 0$ dat als $0 \leq t \leq 1$ dan $(1 - t)v \geq 0$ en $tw \geq 0$. Door de tweede eigenschap uit Definitie 3.0.2 te gebruiken, vinden we $0 \geq -tw$ en we krijgen $(1 - t)v \geq -tw$ waaruit volgt $(1 - t)v + tw \geq 0$. De verzameling is dus convex. Tevens geldt voor alle $v \in \{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\} \cap -\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$ dat $v \geq 0$ en $-v \geq 0$. Waaruit volgt dat $v \geq 0$ en $0 \geq v$ dus $v = 0$, oftewel

$$\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\} \cap -\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\} = \{0\}.$$

De verzameling $\{v \in \mathbb{R}^n : v \geq 0\}$ vormt dus een kegel in \mathbb{R}^n . □

Voor het vervolg van deze scriptie wordt alleen gekeken naar de standaard kegel \mathbb{R}_+^n , oftewel de vectoren in \mathbb{R}^n met positieve coördinaten. In \mathbb{R}^2 is dit het eerste kwadrant en in \mathbb{R}^3 het eerste octant. De partiële ordening die wordt voortgebracht door de standaard kegel is

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \text{ voor } 1 \leq i \leq n.$$

De maximumnorm wordt gedefinieerd door

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Lemma 3.0.2. De standaardkegel \mathbb{R}_+^n heeft voor de maximum norm als inwendige en rand

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}_+^n)^\circ &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}, \\ \partial\mathbb{R}_+^n &= \{x \in \mathbb{R}_+^n : \text{waarvoor minstens één coördinaat } 0 \text{ is}\}. \end{aligned}$$

Bewijs. Laat x in de verzameling $\{x \in \mathbb{R}_+^n: \text{minstens één coördinaat } 0\}$. Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn en laat $y^- := x - \varepsilon/2 \cdot \mathbb{1}$ en $y^+ := x + \varepsilon/2 \cdot \mathbb{1}$ waarbij $\mathbb{1} := (1, \dots, 1)$. Dan geldt $y^- \notin \mathbb{R}_+^n$ aangezien minstens één coördinaat negatief is en er geldt $\|x - y^-\|_\infty = \varepsilon/2 < \varepsilon$. De vector y^+ heeft juist enkel positieve coördinaten en dus $y^+ \in \mathbb{R}_+^n$ met $\|x - y^+\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. We concluderen dat

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n: \text{minstens één coördinaat } 0\} \subseteq \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Laat nu $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ en stel $x \notin \{x \in \mathbb{R}_+^n: \text{minstens één coördinaat } 0\}$, definieër $\varepsilon := \min\{x_1, \dots, x_n\}$ en merk op dat $\varepsilon > 0$. Dan geldt voor iedere $y \in B_\varepsilon(x)$ dat

$$\|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} < \varepsilon.$$

Aangezien x_k de minimale waarde is van de coördinaten van x , volgt dat alle coördinaten van y groter of gelijk zijn aan 0 (stel namelijk dat een coördinaat van y negatief is, dan geldt $\|x - y\|_\infty > x_k$). De open bal $B_\varepsilon(x)$ is dus volledig bevat in \mathbb{R}_+^n maar dit geeft een tegenspraak met de notie dat $x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ en er moet gelden dat $\{x \in \mathbb{R}_+^n: \text{minstens één coördinaat } 0\} \subseteq \partial\mathbb{R}_+^n$. Er volgt dus

$$\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}_+^n: \text{minstens één coördinaat } 0\}.$$

Aangezien $\partial\mathbb{R}_+^n \subseteq \mathbb{R}_+^n$ volgt dat \mathbb{R}_+^n gesloten is. Voor het inwendige geldt dat $(\mathbb{R}_+^n)^\circ = \mathbb{R}_+^n \setminus \partial\mathbb{R}_+^n$, en er volgt dat

$$(\mathbb{R}_+^n)^\circ = \{x \in \mathbb{R}_+^n: x_1, x_2, \dots, x_n > 0\}.$$

□

We definiëren voor $x, y \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ$ de volgende functies

$$M(x/y) := \inf\{\beta > 0 : x \leq \beta y\} \quad \text{en} \quad m(x/y) := \sup\{\alpha > 0 : \alpha y \leq x\},$$

en merk als volgt op dat geldt

$$\inf\{\beta > 0 : x \leq \beta y\} = \inf\{\beta > 0 : x_i \leq \beta y_i, 1 \leq i \leq n\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}.$$

Net zo geldt voor $m(x/y)$ dat

$$\sup\{\alpha > 0 : \alpha y \leq x\} = \sup\{\alpha > 0 : \alpha y_i \leq x_i, 1 \leq i \leq n\} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}.$$

We noemen deze functies ook wel M -functies. Deze M -functies zijn goed gedefinieerd omdat $x_i, y_i > 0$ voor $1 \leq i \leq n$.

Propositie 3.0.1. *Voor de M -functies gelden de volgende eigenschappen voor $x, y \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ$*

- i) $m(x/y) = \frac{1}{M(y/x)}$,
- ii) $x \leq M(x/y)y$ en $m(x/y)y \leq x$,
- iii) $M(\alpha x/\beta y) = \frac{\beta}{\alpha} M(x/y)$ voor alle $\alpha, \beta > 0$,
- iv) $M(x/y)M(y/x) > 1$.

Bewijs. i) We kunnen $m(x/y)$ als volgt herschrijven

$$\begin{aligned} m(x/y) &= \sup\{\alpha > 0 : \alpha y_i \leq x_i, 1 \leq i \leq n\} \\ &= \sup\left\{ \alpha > 0 : y_i \leq \frac{1}{\alpha} x_i, 1 \leq i \leq n \right\} = \frac{1}{\inf\{\beta > 0 : y_i \leq \beta x_i\}} = \frac{1}{M(y/x)}. \end{aligned}$$

ii) Merk op dat $\partial\mathbb{R}_+^n \subseteq \mathbb{R}_+^n$. Aangezien $M(x/y) = \inf\{\beta > 0 : x \leq \beta y\}$, volgt dat er een $1 \leq k \leq n$ bestaat zodanig dat

$$M(x/y)y_k - x_k = 0$$

en geldt $M(x/y)y_i - x_i \geq 0$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Uit lemma 3.0.2 volgt dan $M(x/y)y - x \in \partial\mathbb{R}_+^n$ en geldt $M(x/y)y - x \geq 0$. Er volgt $x \leq M(x/y)y$. Een soortgelijk argument geldt voor de ongelijkheid $m(x/y)y \leq x$.

iii) Er geldt

$$M(\alpha x/\beta y) = \inf\{\gamma > 0: \alpha x \leq \gamma\beta y\} = \inf\left\{\gamma > 0: x \leq \gamma\frac{\beta}{\alpha}y\right\} = \frac{\beta}{\alpha} \inf\{\gamma > 0: x \leq \gamma y\} = \frac{\beta}{\alpha} M(x/y).$$

iv) Wegens eigenschappen i) en ii) volgt

$$x \leq M(x/y)y \leq M(x/y)M(y/x)x,$$

en er geldt $M(x/y)M(y/x) \geq 1$. □

Met de M -functies kunnen we *Hilberts projectieve metriek* $d_H: (\mathbb{R}_+^n)^\circ \times (\mathbb{R}_+^n)^\circ \rightarrow [0, \infty)$ definiëren, gegeven door

$$d_H(x, y) := \log\left(\frac{M(x/y)}{m(x/y)}\right) = \log(M(x/y)M(y/x)).$$

De tweede gelijkheid geldt wegens Propositie 3.0.1 i). *Hilberts projectieve metriek* is goed gedefinieerd wegens Propositie 3.0.1 iv).

3.1 Hilberts projectieve metriek

In deze sectie zal blijken dat *Hilberts projectieve metriek* d_H een pseudo-metriek (een functie met de eigenschappen van een metriek behalve dat er mogelijk $x \neq y$ bestaan waarvoor geldt $d(x, y) = 0$) is op het inwendige van de standaardkegel. We introduceren een equivalentierelatie waardoor d_H een echte metriek op de bijbehorende quotiëntruimte wordt. Het volgende resultaat met gevolg is te vinden in [1, Propositie 2.1.1].

Propositie 3.1.1. *Voor d_H op $(\mathbb{R}_+^n)^\circ$ geldt voor $x, y, z \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ$ dat*

i) $d_H(x, y) \geq 0$ en $d_H(x, y) = d_H(y, x)$,

ii) $d_H(x, z) \leq d_H(x, y) + d_H(y, z)$,

iii) $d_H(\alpha x, \beta y) = d_H(x, y)$ voor alle $\alpha, \beta > 0$.

Bewijs. i) Uit Propositie 3.0.1 iv) volgt dat $d_H(x, y) \geq 0$. Omdat

$$M(x/y)M(y/x) = M(y/x)M(x/y)$$

geldt tevens $d_H(x, y) = d_H(y, x)$.

ii) Wegens propositie 3.0.1 ii) geldt dat $x \leq M(x/y)y$ en $y \leq M(y/z)z$ en dus geldt

$$x \leq M(x/y)M(y/z)z.$$

Aangezien $M(x/z)$ een infimum is volgt dat $M(x/z) \leq M(x/y)M(y/z)$. Ditzelfde geldt voor $M(z/x)$ waaruit volgt

$$d_H(x, z) = \log(M(x/z)M(z/x)) \leq \log(M(x/y)M(y/z)M(y/x)M(z/y)) = d_H(x, y) + d_H(y, z).$$

iii) Wegens Propositie 3.0.1 iii) volgt

$$d_H(\alpha x, \beta y) = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}M(x/y)\frac{\alpha}{\beta}M(y/x)\right) = \log(M(x/y)M(y/x)) = d_H(x, y).$$

□

Gevolg 3.1.1. *Voor d_H op $(\mathbb{R}_+^n)^\circ$ geldt $d_H(x, y) = 0$ dan en slechts dan als $x = \lambda y$ voor $\lambda > 0$.*

Bewijs. Stel $d_H(x, y) = 0$, dan geldt $M(x/y)M(y/x) = 1$. Wegens Propositie 3.0.1 *i*) en *ii*) geldt dat $y \leq M(y/x)x \leq M(x/y)M(y/x)y = y$, alle ongelijkheden worden gelijkheden en dus geldt $x = \frac{1}{M(y/x)}y$.

Stel nu dat $x = \lambda y$, voor zekere $\lambda > 0$, dan volgt wegens Propositie 3.1.1 *iii*) dat

$$d_H(x, y) = d_H(\lambda y, y) = d_H(y, y) = 0.$$

□

Gevolg 3.1.1 laat zien dat d_H gelijk is aan nul op de halflijnen in het inwendige van de standaard kegel die door de oorsprong gaan. Dit zijn ook wel alle eendimensionale deelruimten doorsneden met het inwendige van de standaard kegel. Door de volgende equivalentierelatie te introduceren op $(\mathbb{R}_+^n)^\circ$

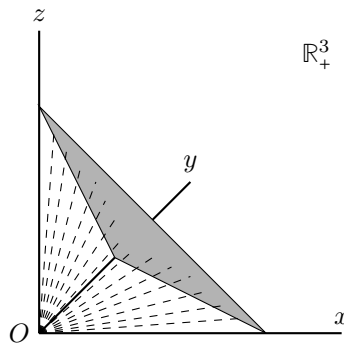
$$x \sim y : \iff x = \lambda y \text{ voor een } \lambda > 0$$

is d_H een echte metriek op de quotiëntruimte $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$. Tenslotte concluderen we het volgende resultaat.

Stelling 3.1.1. *Hilberts projectieve metriek d_H is een echte metriek op de quotiëntruimte $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$.*

3.2 Hilberts projectieve metriek komt overeen met Hilberts metriek op n -simplices

Het zal blijken dat representanten voor de equivalentieclassen van $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ een open, convexe en begrensde deelverzameling kunnen vormen (zie het grijze gebied in Figuur 10). Op deze deelverzameling is het mogelijk om Hilberts metriek te definiëren die precies overeenkomt met Hilberts projectieve metriek op deze verzameling representanten.



Figuur 10: Representanten (grijze driehoek).

Om de representanten te vinden die samen een open, convexe en begrensde deelverzameling vormen, maken we gebruik van functionalen op \mathbb{R}^n (Definitie 7).

Stelling 3.2.1. *Voor iedere functionaal $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat er een unieke $w \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat $\phi(x) = \langle x, w \rangle$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

We gebruiken hierbij het standaard inproduct $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Bewijs. Laat e_1, \dots, e_n de standaard basisvectoren zijn voor \mathbb{R}^n . Aangezien ϕ een lineaire functie is van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R} , kunnen we een unieke $1 \times n$ matrix A vinden voor ϕ zodat $\phi(x) = Ax$. Deze matrix A kunnen we zien als een vector w . Het beeld van een vector x onder ϕ wordt dan $\phi(x) = Ax = \langle w, x \rangle$. □

Definitie 3.2.1. (Positieve functionaal) Een functionaal ϕ op \mathbb{R}^n is *positief* als voor iedere $v \in \mathbb{R}_+^n$ geldt dat $\phi(v) \geq 0$.

Deze definitie impliceert dat de unieke vector w van een positieve functionaal ϕ enkel positieve coördinaten heeft aangezien voor de standaard vectoren e_1, \dots, e_n geldt $\langle w, e_i \rangle = w_i \geq 0$ voor $1 \leq i \leq n$.

Definitie 3.2.2. (Strikt positieve functionaal) Een functionaal ϕ op \mathbb{R}^n is *strikt positief* als voor iedere $v \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ geldt dat $\phi(v) > 0$.

Deze definitie impliceert dat de unieke vector w strikt positieve coördinaten heeft. De kern van een functionaal ϕ wordt gegeven door $\ker \phi = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w, x \rangle = 0\}$ oftewel de vectoren die loodrecht staan op w . De kern geeft ons een deelruimte van dimensie $n - 1$ als $\phi \neq 0$ en is dus een hypervlak in \mathbb{R}^n . Voor een strikt positieve functionaal ϕ geldt $\ker \phi \cap \mathbb{R}_+^n = \{0\}$. In \mathbb{R}^3 is de kern van een strikt positieve functionaal dus een vlak dat \mathbb{R}_+^3 enkel in de oorsprong snijdt.

Door de kern van een strikt positieve functionaal ϕ te translteren en te doorsnijden met $(\mathbb{R}_+^n)^\circ$ krijgen we een verzameling representanten, voor klassen in $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$, die samen een open, begrensde en convexe verzameling vormen (zie Figuur 10). We translteren de kern met een vector $x \in \mathbb{R}_+^n$ waarvoor bijvoorbeeld geldt $\phi(x) = 1$. Hierdoor krijgen we de verzameling

$$\Sigma_\phi := \{v \in \mathbb{R}_+^n : \phi(v) = 1\} = (\ker \phi + x) \cap \mathbb{R}_+^n.$$

Merk op dat het hierbij niet uitmaakt met welke vector $x \in \mathbb{R}_+^n$ we de kern translteren, zolang geldt $\phi(x) = 1$. We krijgen namelijk voor $y \in \mathbb{R}_+^n$ met $\phi(y) = 1$ dat er een vector $v \in \ker \phi$ bestaat zodanig dat $x = y + v$ (neem namelijk $v = x - y$, dan geldt $\phi(v) = 0$ en $x \in \ker \phi + y$).

Een standaard $(n - 1)$ -simplex wordt gegeven door de volgende verzameling

$$\Delta_{n-1} := \left\{ v \in \mathbb{R}_+^n : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ met } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ en } \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Enkele voorbeelden van standaard n -simplices hebben we gezien in Figuur 8 en Figuur 9 in de vorm van een gelijkzijdige driehoek Δ_2 en het tetraëder Δ_3 . De verzameling Σ_ϕ is een $(n - 1)$ -simplex in de standaardkegel. Als we Σ_ϕ bekijken waarbij $\phi(x) = \langle \mathbb{1}, x \rangle$, met $\mathbb{1} := (1, \dots, 1)$, krijgen we een standaard $(n - 1)$ -simplex.

Lemma 3.2.1. *Het relatief inwendige van Σ_ϕ ten opzichte van de geïnduceerde topologie van \mathbb{R}_+^n met de maximum norm $\|\cdot\|_\infty$ wordt gegeven door*

$$\Sigma_\phi^\circ = \{v \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ : \phi(v) = 1\}.$$

Bewijs. De verzameling Σ_ϕ° is open in Σ_ϕ . Wegens de geïnduceerde topologie van \mathbb{R}_+^n met $\|\cdot\|_\infty$ geldt dus dat er een open verzameling $O \subseteq \mathbb{R}_+^n$ bestaat zodanig dat geldt $\Sigma_\phi^\circ = \Sigma_\phi \cap O$. Aangezien $O \subseteq (\mathbb{R}_+^n)^\circ$, volgt $\Sigma_\phi^\circ \subseteq (\mathbb{R}_+^n)^\circ$. Hieruit volgt $\Sigma_\phi^\circ \subseteq \{v \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ : \phi(v) = 1\}$. Aangezien

$$\{v \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ : \phi(v) = 1\} = \Sigma_\phi \cap (\mathbb{R}_+^n)^\circ$$

open is in Σ_ϕ en Σ_ϕ° de grootste open deelverzameling van Σ_ϕ is, volgt dat

$$\{v \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ : \phi(v) = 1\} \subseteq \Sigma_\phi^\circ$$

en dus geldt $\Sigma_\phi^\circ = \{v \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ : \phi(v) = 1\}$. □

Lemma 3.2.2. (Σ_ϕ° is convex en begrensd) *Voor ϕ een strikt positieve functionaal geldt dat Σ_ϕ° convex en begrensd is.*

Bewijs. We weten dat $\ker \phi$ een $n - 1$ dimensionale lineaire deelruimte is. Lineaire deelruimten zijn gesloten onder scalaire vermenigvuldiging en optelling, dus $\ker \phi$ is convex. Zij $v, w \in \ker \phi$, dan ligt het lijnstuk $\{tv + (1 - t)w : 0 \leq t \leq 1\}$ in $\ker \phi$. Net zo geldt

$$t(v + x) + (1 - t)(w + x) = tv + (1 - t)w + x \in \ker \phi + x.$$

De verzameling $\ker \phi + x$ is dus convex. De standaardkegel \mathbb{R}_+^n is convex en de doorsnede van twee convexe verzamelingen is convex. Er geldt dus dat Σ_ϕ convex is, en volgens Lemma 3, is Σ_ϕ° dan ook convex.

Als Σ_ϕ begrensd is, volgt dat Σ_ϕ° ook begrensd is. Er geldt voor $x \in \Sigma_\phi$ dat $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ waarbij e_i de standaard basisvectoren zijn voor \mathbb{R}^n . Laat $m := \min_i \phi(e_i)$ (merk op dat $m > 0$ aangezien ϕ een strikt positieve functionaal is), dan geldt

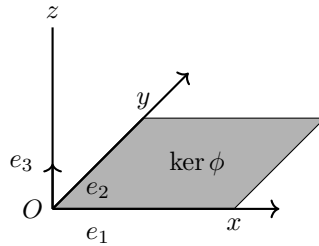
$$1 = \phi(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \phi(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) \geq \sum_{i=1}^n x_i m.$$

Hieruit volgt $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{m}$, dus $x_i \leq \frac{1}{m}$ voor alle $1 \leq i \leq n$ aangezien $x_i \geq 0$. Er geldt voor $x, y \in \Sigma_\phi$ dat

$$\|x - y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}.$$

Hieruit volgt dat Σ_ϕ begrensd is. □

Merk op dat als ϕ geen strikt positieve functionaal is, Σ_ϕ niet begrensd hoeft te zijn, zie Figuur 11. Als we de kern van de functionaal $\phi(x) = \langle e_3, x \rangle$ in Figuur 11 translateren levert dit een niet begrensde verzameling op.

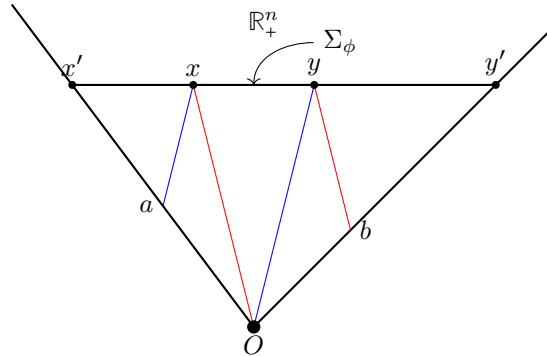


Figuur 11: Voorbeeld Σ_ϕ niet begrensd

Volgens Lemma 3.2.2 kunnen we dus κ definiëren op Σ_ϕ° .

Stelling 3.2.2. *Hilberts metriek κ en Hilberts projectieve metriek d_H komen overeen op Σ_ϕ° (dus in het bijzonder op Δ_{n-1}°).*

Bewijs. Laat $x, y \in \Sigma_\phi^\circ$ met $x \neq y$ gegeven zijn. Omdat Σ_ϕ° begrensd is (Lemma 3.2.2) bestaan er $x', y' \in \partial \Sigma_\phi$ zodanig dat x tussen x' en y ligt en y tussen x en y' . We definiëren de vectoren $a := x - M(y/x)^{-1}y$ en $b := y - M(x/y)^{-1}x$ en krijgen de situatie zoals hieronder.



Merk op dat de driehoeken $\Delta x'yO$ en $\Delta x'xa$ gelijkvormig zijn. Hieruit volgt dat de ratio $\frac{\|x'-y\|}{\|x'-x\|}$ hetzelfde is als de ratio $\frac{\|y\|}{\|x-a\|}$ (de ratio tussen de lengtes van de twee blauwe lijnen). Ditzelfde geldt voor de ratio $\frac{\|y'-x\|}{\|y'-y\|}$ en de ratio $\frac{\|x\|}{\|y-b\|}$ (de ratio tussen de lengtes van de rode lijnen). Hieruit volgt

$$\begin{aligned} [x', x, y, y'] &= \frac{\|x' - y\|}{\|x' - x\|} \cdot \frac{\|y' - x\|}{\|y' - y\|} = \frac{\|y\|}{\|x - a\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|y - b\|} \\ &= \frac{\|y\|}{\|x - (x - M(y/x)^{-1}y)\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|y - (y - M(x/y)^{-1}x)\|} = M(y/x)M(x/y). \end{aligned}$$

Door de logaritme te nemen volgt dat voor $x, y \in \Sigma_\phi^\circ$ geldt dat $\kappa(x, y) = d_H(\bar{x}, \bar{y})$. □

Gevolg 3.2.1. *De metrische ruimten $(\Sigma_\phi^\circ, \kappa)$ en $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ zijn isometrisch isomorf.*

Bewijs. We bekijken de functie

$$f: ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) \longrightarrow (\Sigma_\phi^\circ, \kappa)$$

$$\bar{x} \longmapsto \frac{1}{\phi(x)}x.$$

Deze afbeelding is goed gedefinieerd, laat namelijk x, y twee representanten zijn van een klasse $\bar{x} \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$, dan geldt $x = \lambda y$ en $y = \frac{1}{\lambda}x$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. We krijgen

$$\frac{1}{\phi(x)}x = \frac{1}{\phi(\lambda y)}x = \frac{1}{\lambda\phi(y)}x = \frac{1}{\phi(y)}y.$$

We weten door Stelling 3.2.2 dat d_H en κ overeenkomen op Σ_ϕ° , aangezien iedere klasse \bar{x} in $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ een representant y bevat waarvoor geldt $y \in \Sigma_\phi^\circ$ (namelijk $y = \frac{1}{\phi(x)}x$), hieruit volgt dat f een isometrie is. De functie f is ook een bijectie aangezien de functie $g(x) = \bar{x}$ de inverse is van f . Er geldt namelijk $(g \circ f)(\bar{x}) = \frac{1}{\phi(x)}x = \bar{x}$ en voor $x \in \Sigma_\phi^\circ$ geldt $(f \circ g)(x) = f(\bar{x}) = \frac{1}{\phi(x)}x = x$. Er geldt dus $g \circ f = id_{(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim}$ en $f \circ g = id_{\Sigma_\phi^\circ}$. Hieruit volgt dat $(\Sigma_\phi^\circ, \kappa)$ en $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ isometrisch isomorf zijn. □

4 Van kegels naar genormeerde vectorruimten en isometrieën

In deze sectie zullen we zien dat er een isometrisch isomorfisme bestaat van de metrische ruimte $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ naar een genormeerde quotiëntvectorruimte. Door dit isometrisch isomorfisme kunnen we ook een bijjectie maken tussen surjectieve isometrieën van de genormeerde quotiëntvectorruimte en surjectieve isometrieën van $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$. Tenslotte karakteriseren we deze isometrieën.

We bekijken de vectorruimte \mathbb{R}^n met

$$\|x\|_{var} := \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} - \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}.$$

Dit wordt de *variatiernorm* genoemd. Merk op dat voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\|\lambda \mathbb{1}\| = 0$. De variatiernorm is dus geen echte norm maar een seminorm (een functie met de eigenschappen van een norm maar waarvoor niet persé geldt $\|x\| = 0 \iff x = 0$). We introduceren de volgende equivalentierelatie voor $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \sim y \iff \text{er bestaat een } \lambda \in \mathbb{R} \text{ zodanig dat } x = y + \lambda \mathbb{1}.$$

Dit is equivalent aan de equivalentierelatie voor de deelruimte $N := \{\lambda \mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ waarbij

$$x \sim y \iff x - y \in N$$

en we definiëren de quotiëntvectorruimte \mathbb{R}^n / \sim . De variatiernorm $\|\cdot\|_{var}$ is een echte norm op \mathbb{R}^n / \sim . We krijgen dus een genormeerde quotiëntvectorruimte $(\mathbb{R}^n / \sim, \|\cdot\|_{var})$. We noteren \mathbb{R}^n / \sim vanaf nu als $\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$. Om onduidelijkheid te voorkomen benadrukken we de notatie \bar{x} voor de halflijnen in de quotiëntruimte $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ en worden klassen uit $\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$ met $[x]$ genoteerd. De variatiernorm induceert een metriek op $\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$ (zie Lemma 1). Dit geeft ons de metrische ruimte $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$.

De quotiëntvectorruimte $\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$ heeft dimensie $n - 1$. Bekijk namelijk de functie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$ gegeven door

$$x \mapsto [x].$$

Merk op dat f lineair en surjectief is en dat $\ker(f) = \{\lambda \mathbb{1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ met $\dim \ker(f) = 1$. Uit de rangstelling geldt $n = \dim \text{rang}(f) + \dim \ker(f) = \dim \text{rang}(f) + 1$. Hieruit volgt $\dim \text{rang}(f) = n - 1$.

Definitie 4.0.1. De functie $\log: (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}$ wordt gegeven door $\bar{x} \mapsto [(\log x_1, \dots, \log x_n)]$. Net zo definiëren we de functie $\exp: \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1} \rightarrow (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ door $[x] \mapsto \overline{(\exp x_1, \dots, \exp x_n)}$.

Bovenstaande functies zijn goed gedefinieerd. Merk namelijk op dat voor $\bar{x} \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ geldt dat voor alle $x \in \bar{x}$ geldt dat $x_i > 0$ voor alle $1 \leq i \leq n$, we kunnen dus de coördinaatsgewijze logaritme nemen. Verder geldt voor $x_1, x_2 \in \bar{x}$ en zekere $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ dat $x_1 = \lambda x_2$ en er volgt

$$\log(x_1) = \log(\lambda x_2) = \log(\lambda) \mathbb{1} + \log(x_2).$$

Er geldt dus $[\log(x_1)] = [\log(x_2)]$. Voor de exp functie geldt

$$\exp(x_1) = \exp(x_2 + \lambda \mathbb{1}) = \exp(\lambda \mathbb{1}) \cdot \exp(x_2).$$

Er geldt dus $\overline{\exp(x_1)} = \overline{\exp(x_2)}$ en de functies log en exp zijn goed gedefinieerd.

Stelling 4.0.1. De functie $\log: ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) \rightarrow (\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ is een isometrisch isomorfisme met als inverse de functie $\exp: (\mathbb{R}^n / \mathbb{R} \mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$.

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned} d_H(\bar{x}, \bar{y}) &= \log(M(x/y)M(y/x)) = \log\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{x_i}{y_i}\right\} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{y_i}{x_i}\right\}\right) \\ &= \log\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{x_i}{y_i}\right\}\right) + \log\left(\max_{1 \leq i \leq n} \left\{\frac{y_i}{x_i}\right\}\right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{\log(x_i) - \log(y_i)\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{\log(y_i) - \log(x_i)\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \{\log(x_i) - \log(y_i)\} - \min_{1 \leq i \leq n} \{\log(x_i) - \log(y_i)\} \\ &= \|\log(\bar{x}) - \log(\bar{y})\|_{var}. \end{aligned}$$

De functie \log is dus een isometrie. De functie \log is ook een bijectie. Merk namelijk op dat $\log \exp [x] = [x]$ en $\exp \log \bar{y} = \bar{y}$. \square

4.1 Correspondentie tussen surjectieve isometrieën

In deze sectie zullen we zien dat we surjectieve isometrieën van $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ bijectief kunnen relateren aan surjectieve isometrieën van $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$. Laat $g: (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim \rightarrow (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ een surjectieve isometrie zijn van d_H . Dan geldt voor $f := \log \circ g \circ \exp$ en $[x], [y] \in \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$ dat

$$\begin{aligned} \|f([x]) - f([y])\|_{var} &= \|\log(g(\exp([x]))) - \log(g(\exp([y])))\|_{var} \\ &= d_H(g(\exp[x]), g(\exp[y])) = d_H(\exp[x], \exp[y]) = \|[x] - [y]\|_{var}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $f: \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$ ook een surjectieve isometrie is van $\|\cdot\|_{var}$. Net zo geldt voor een surjectieve isometrie g van $\|\cdot\|_{var}$, dat $f = \exp \circ g \circ \log$ een surjectieve isometrie is van d_H . We vinden dus een bijectieve correspondentie tussen surjectieve isometrieën van $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ en surjectieve isometrieën van $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$. We vatten dit samen in het volgende commutatieve diagram in Figuur 12.

$$\begin{array}{ccc} ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) & \xrightarrow{g} & ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) \\ \uparrow \text{exp} & & \downarrow \text{log} \\ (\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \end{array}$$

Figuur 12: Diagram van isometrieën van $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ en $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$.

4.2 Karakterisatie van surjectieve isometrieën

Nu we hebben vastgesteld dat er een correspondentie is tussen isometrieën van $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ en $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$, willen we isometrieën van $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ karakteriseren.

Definitie 4.2.1. (Affiene isometrie) Een isometrie $f: V \rightarrow V$ van een genormeerde vectorruimte V wordt *affien* genoemd als de afbeelding $S(x) := f(x) - f(0)$ lineair is.

De Mazur-Ulam stelling zegt dat iedere surjectieve isometrie een translatie is van een surjectieve lineaire isometrie (translatie met $f(0)$).

Stelling 4.2.1. (Mazur-Ulam) *Iedere surjectieve isometrie $f: V \rightarrow V$ op een genormeerde vectorruimte V over het lichaam \mathbb{R} is affien.*

Bewijs. Zie [7]. \square

Door de Mazur-Ulam stelling is het voldoende om enkel de surjectieve lineaire isometrieën te karakteriseren.

Voor dimensie $n = 1$ zijn de surjectieve isometrieën op $(\mathbb{R}^1 / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ triviaal. Merk namelijk op dat $(\mathbb{R}_+^1)^\circ / \sim$ en $\mathbb{R}^1 / \mathbb{R}\mathbb{1}$ beide uit één equivalentieklasse bestaan.

4.2.1 Surjectieve isometrieën voor $n \geq 2$ liggen vast door extreme punten van de eenheidsbal

In deze sectie zal blijken dat surjectieve isometrieën op $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ een unieke bijectie induceren op de extreme punten van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$. Dit zal ons helpen alle surjectieve lineaire isometrieën op $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ te karakteriseren.

Definitie 4.2.2. (*Extreem punt*) Laat C een convexe verzameling zijn. Een punt $x \in C$ is een *extreem punt* als er géén $y \neq z \in C$ en $0 < t < 1$ bestaan zodanig dat $x = ty + (1 - t)z$.

Lemma 4.2.1. *Laat C een convexe verzameling zijn. Een punt $x \in C$ is een extreem punt dan en slechts dan als er géén $y \neq z \in C$ bestaan zodanig dat $x = \frac{1}{2}(y + z)$.*

Bewijs. We bewijzen de equivalente uitspraak: *Een punt $x \in C$ is geen extreem punt dan en slechts dan als er $y \neq \tilde{z} \in C$ bestaan zodanig dat $x = \frac{1}{2}(y + \tilde{z})$.* Laat $x \in C$ geen extreem punt zijn. Dan zijn er dus $y, z \in C$ met $y \neq z$ en $0 < t < 1$ zodanig dat $x = ty + (1-t)z$. Neem zonder de algemeenheid te schaden aan dat $\frac{1}{2} \leq t < 1$. Als $t = \frac{1}{2}$, dan geldt de uitspraak direct. Voor $\frac{1}{2} < t < 1$ definiëren we $\tilde{z} := (2t-1)y + (2-2t)z$. Dan geldt $\tilde{z} \in C$ en $z = \frac{1-2t}{2-2t}\tilde{z} - \frac{2t-1}{2-2t}y = \frac{1-2t}{2-2t}y + \frac{1}{2-2t}\tilde{z}$. Hieruit volgt

$$x = ty + (1-t)z = ty + (1-t)\left(\frac{1-2t}{2-2t}y + \frac{1}{2-2t}\tilde{z}\right) = \left(t + \frac{1}{2} - t\right)y + \frac{1}{2}\tilde{z} = \frac{1}{2}(y + \tilde{z}).$$

Neem voor de andere implicatie aan dat $y, z \in C$ met $y \neq z$ bestaan zodanig dat $x = \frac{1}{2}(y + z)$, dan volgt per definitie dat x geen extreem punt is. \square

Merk op dat extreme punten van de eenheidsbal in een genormeerde vectorruimte altijd norm 1 hebben. Laat namelijk x zodanig dat $\|x\| < 1$. Als $x = 0$ dan is x een convexe combinatie van een punt p en $-p$ in de eenheidsbal. Als $x \neq 0$, dan bestaat er een punt p met $\|p\| = 1$ in de eenheidsbal zodanig dat $x = tp$ voor $0 < t < 1$.

Om de extreme punten van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ te bepalen definiëren we eerst de volgende verzamelingen.

Definitie 4.2.3. Laat $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de standaardbasis zijn voor \mathbb{R}^n . We definiëren

$$\mathcal{P} := \left\{ \sum_{i \in I} e_i : I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\},$$

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P} \setminus \{\mathbb{1}, 0\}.$$

We gebruiken hierbij de conventie dat $I = \emptyset$ de vector 0 geeft.

Propositie 4.2.1. *De extreme punten van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ zijn precies de equivalentieklassen $[p]$ met $p \in \mathcal{P}_0$.*

Bewijs. We bewijzen allereerst dat $[p]$ voor alle $p \in \mathcal{P}_0$ extreme punten zijn. Laat $p \in \mathcal{P}_0$ gegeven zijn. Dan volgt dat $\|[p]\|_{var} = 1$. Stel nu dat $[p] = \frac{1}{2}([y] + [z])$ voor $[y], [z] \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}$ zodanig dat $\|[y]\|_{var}, \|[z]\|_{var} \leq 1$. We kunnen representanten $\tilde{y} \in [y]$ en $\tilde{z} \in [z]$ kiezen zodanig dat $0 \leq \tilde{y}_i, \tilde{z}_i \leq 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$. We doen dit door $\tilde{y} = y - (\min_{1 \leq i \leq n} y_i)\mathbb{1}$ te nemen en uit het feit dat $\|[y]\|_{var} \leq 1$ volgt dat $0 \leq \tilde{y}_i \leq 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$. We doen dit net zo voor \tilde{z} .

Merk nu op dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $p = \frac{1}{2}(\tilde{y} + \tilde{z}) + \lambda\mathbb{1}$. Er volgt $p - \lambda\mathbb{1} = \frac{1}{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}$ wat impliceert dat $0 \leq (p - \lambda\mathbb{1})_i \leq 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Omdat p enkel uit 0 en 1 bestaat, volgt $0 \leq -\lambda \leq 1$, maar ook $0 \leq 1 - \lambda \leq 1$. Hieruit volgt dat $\lambda = 0$ en dus $p = \frac{1}{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}$. Er volgt dat $\frac{1}{2}\tilde{y}_i + \frac{1}{2}\tilde{z}_i = 0$ óf $\frac{1}{2}\tilde{y}_i + \frac{1}{2}\tilde{z}_i = 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$, maar omdat $0 \leq \tilde{y}_i, \tilde{z}_i \leq 1$, moet gelden $p_i = \tilde{y}_i = \tilde{z}_i$ voor alle $1 \leq i \leq n$, dus $[p] = [y] = [z]$ en uit Lemma 4.2.1 volgt dat $[p]$ een extreem punt is van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$.

Merk op dat \mathcal{P}_0 voor dimensie $n = 2$ enkel uit de standaard basisvectoren bestaat en dat enkel de standaard basisvectoren variatienorm 1 hebben. Hieruit volgt dat \mathcal{P}_0 alle extreme punten van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^2/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ bevat.

Laat nu $n > 2$ en stel dat $[x]$ een extreem punt is en $p \notin [x]$ voor alle $p \in \mathcal{P}_0$. Omdat $\|[x]\|_{var} = 1$ kunnen we $\tilde{x} \in [x]$ bekijken waarvoor $0 \leq x_i \leq 1$. Aangezien $p \notin [x]$ voor alle $p \in \mathcal{P}_0$, volgt dat voor \tilde{x} geldt dat $0 < \tilde{x}_i < 1$ voor minstens één i met $1 \leq i \leq n$. Stel dat $0 < \tilde{x}_i \leq \frac{1}{2}$, we definiëren dan $\tilde{y} := \tilde{x} - \tilde{x}_i e_i$ en $\tilde{z} := \tilde{x} + \tilde{x}_i e_i$. Stel nu dat $\frac{1}{2} < \tilde{x}_i < 1$, we definiëren dan $\tilde{y} := \tilde{x} - (1 - \tilde{x}_i)e_i$ en $\tilde{z} := \tilde{x} + (1 - \tilde{x}_i)e_i$. In beide gevallen geldt dat $\|[\tilde{y}]\|_{var}, \|[\tilde{z}]\|_{var} \leq 1$ en $\tilde{x} = \frac{1}{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}$. Uit Lemma 4.2.1 volgt dan dat $[x]$ geen extreem punt kan zijn van de eenheidsbal in $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}$ wat een tegenspraak geeft met de aanname. \square

Surjectieve lineaire isometrieën van $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ induceren een bijectie op de extreme punten van de eenheidsbal in $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$. Dit blijkt in het algemeen voor surjectieve lineaire isometrieën te gelden.

Lemma 4.2.2. *Iedere surjectieve lineaire isometrie T van een genormeerde vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$ naar zichzelf induceert een bijectie op de extreme punten van de eenheidsbal.*

Bewijs. Laat p een extreem punt zijn van de eenheidsbal in $(V, \|\cdot\|)$ en stel dat $T(p)$ geen extreem punt is. Dan bestaan er $y \neq z$ in de eenheidsbal zodanig dat $T(p) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ (Lemma 4.2.1). Wegens surjectiviteit geldt dat er y_0 en z_0 bestaan zodanig dat geldt $y_0 \neq z_0, T(y_0) = y$ en $T(z_0) = z$. Aangezien T een isometrie is en y, z in de eenheidsbal liggen, volgt dat y_0 en z_0 in de eenheidsbal liggen. Wegens lineariteit geldt $T(p) = \frac{1}{2}T(y_0) + \frac{1}{2}T(z_0) = T(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}z_0)$. Aangezien T injectief is geldt dan $p = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}z_0$ wat in tegenspraak is met het feit dat p een extreem punt is. Hieruit volgt dat extreme punten naar extreme punten gestuurd worden onder T .

Stel nu dat $T(x)$ een extreem punt is van de eenheidsbal in $(V, \|\cdot\|)$ en neem aan dat x geen extreem punt is in de eenheidsbal. Dan geldt volgens Lemma 4.2.1 dat er $y, z \in V$ bestaan met $y \neq z$ en zodanig dat geldt dat $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Wegens injectiviteit van T geldt dan $T(y) \neq T(z)$ en aangezien T een surjectieve isometrie is volgt dat $T(y)$ en $T(z)$ een element zijn van de eenheidsbal in $(V, \|\cdot\|)$. Aangezien T linear is volgt dat $T(x) = T(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) = \frac{1}{2}T(y) + \frac{1}{2}T(z)$ wat in tegenspraak is met het feit dat $T(x)$ een extreem punt is. Hieruit volgt dat x een extreem punt moet zijn en er geldt dat extreme punten enkel van extreme punten af kunnen komen onder T . \square

Uit het voorgaande resultaat weten we dus dat een surjectieve lineaire isometrie

$$T: (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$$

een bijectie induceert op de equivalentieclassen $[p]$ waarbij $p \in \mathcal{P}_0$. We definiëren deze bijectie als volgt.

Definitie 4.2.4. Voor een surjectieve lineaire isometrie $T: (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ definiëren we de bijectie $\theta_T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ waarbij $\theta_T(p)$ de unieke representant in \mathcal{P}_0 is van de equivalentieklasse $T[p]$ voor $p \in \mathcal{P}_0$. Verder definiëren we $\theta_T(0) := 0$ en $\theta_T(\mathbb{1}) := \mathbb{1}$.

Propositie 4.2.2. *Zij $T: (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ een surjectieve lineaire isometrie. Dan volgt voor iedere $1 \leq i \leq n$ dat $\theta_T(e_i) = e_k$ of $\theta_T(e_i) = \mathbb{1} - e_k$ voor zekere $1 \leq k \leq n$.*

Bewijs. Voor dimensie $n = 2$ zijn de elementen in \mathcal{P}_0 gelijk aan de standaard basisvectoren. Voor dimensie $n = 2$ is de propositie dus al waar. Laat nu $n > 2$ en laat $p \in \mathcal{P}_0$ gegeven zijn. Dan is er een $\emptyset \neq I \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$ zodanig dat $p = \sum_{i \in I} e_i$. Beschouw de verzameling

$$\{q \in \mathcal{P}_0: \|[p] - [q]\|_{var} = 1\}.$$

Er geldt

$$\#\{q \in \mathcal{P}_0: \|[p] - [q]\|_{var} = 1\} = 2^{\#I} + 2^{n-\#I} - 4.$$

Merk namelijk op dat als $\|[p] - [q]\|_{var} = 1$, dan heeft $p - q$ nooit coördinaten $1 \leq i \neq j \leq n$ met $p_i - q_i = 1$ én $p_j - q_j = -1$. In p zijn $\#I$ coördinaten gelijk aan 1 en $n - \#I$ coördinaten gelijk aan 0. Om te voorkomen dat we zowel -1 en 1 als coördinaten voor $p - q$ krijgen bekijken we twee situaties. De situatie dat $p - q$ uit 1 en 0 bestaat en de situatie dat $p - q$ uit 0 en -1 bestaat. Merk in de eerste situatie op dat we voor q precies $2^{\#I}$ keuzes hebben voor de $\#I$ coördinaten gelijk aan 1 in p (waarbij we de $n - \#I$ coördinaten gelijk aan 0 precies 0 houden). We tellen hierbij echter de vector p mee waarbij $p - p$ niet variatienorm 1 heeft en de 0-vector die niet bevat is in \mathcal{P}_0 . We krijgen dus $2^{\#I} - 2$ verschillende vectoren voor de eerste situatie.

Voor de tweede situatie merken we op dat we precies $2^{n-\#I}$ keuzes hebben voor de $n - \#I$ coördinaten in p gelijk aan 0 (hierbij houden we de $\#I$ coördinaten gelijk aan 1 precies 1). Merk op dat we de vector p weer meegeteld hebben bij dit aantal en de vector $\mathbb{1}$ die niet bevat is in \mathcal{P}_0 . In dit geval krijgen we dus $2^{n-\#I} - 2$ en we hebben dus $2^{\#I} + 2^{n-\#I} - 4$ verschillende vectoren q waarvoor geldt $\|p - q\|_{var} = 1$.

Merk op dat $\#\{q \in \mathcal{P}_0: \|[p] - [q]\|_{var} = 1\}$ gelijk moet blijven onder T , aangezien T een isometrie is. Er geldt dus voor e_i met $1 \leq i \leq n$ dat

$$\#\{q \in \mathcal{P}_0: \|[e_i] - [q]\|_{var} = 1\} = \#\{q \in \mathcal{P}_0: \|[T(e_i)] - [T(q)]\|_{var} = 1\} = 2^{n-1} - 2.$$

Er geldt dat $\#I = 1$ óf $\#I = n - 1$ dan en slechts dan als $2^{\#I} + 2^{n-\#I} - 4 = 2^{n-1} - 2$. Er geldt namelijk voor $1 < \#I < n - 1$ dat $2 < 2^{\#I} < 2^{n-1}$ en in het bijzonder dat $2 < 2^{\#I} \leq 2^{n-2}$. Tevens geldt voor $1 < n - \#I < n - 1$ dat $2 < 2^{n-\#I} < 2^{n-1}$ en dus $2 < 2^{n-\#I} \leq 2^{n-2}$. Er geldt dat

$$-2 < 2^{n-\#I} - 4 \leq 2^{n-2} - 4 < 2^{n-2} - 2$$

en er geldt $0 < 2^{\#I} + 2^{n-\#I} - 4 < 2^{n-2} + 2^{n-2} - 2 = 2^{n-1} - 2$. Voor de verzameling

$$\{q \in \mathcal{P}_0 : \|[T(e_i)] - [T(q)]\|_{var} = 1\}$$

geldt dus dat $\#I = 1$ óf $\#I = n - 1$. Er moet dus gelden dat $T[e_i] = [e_k]$ of $T[e_i] = [\mathbb{1} - e_k]$ voor zekere $1 \leq k \leq n$. \square

We weten nu dus dat θ_T slechts twee mogelijke beelden heeft voor iedere standaard basisvector. Uit het volgende resultaat blijkt zelfs dat θ_T slechts een van de twee mogelijke beelden heeft voor alle standaard basisvectoren.

Lemma 4.2.3. *Zij $T: (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ een surjectieve lineaire isometrie. Dan volgt voor alle $1 \leq i \leq n$ dat $\theta_T(e_i) = e_k$ voor zekere $1 \leq k \leq n$, óf voor alle $1 \leq i \leq n$ geldt $\theta_T(e_i) = \mathbb{1} - e_k$ voor zekere $1 \leq k \leq n$.*

Bewijs. Voor dimensie $n = 2$ volgt het resultaat direct. De vector $\mathbb{1} - e_k$ is namelijk al een standaard basisvector.

Laat nu $n > 2$ en stel $\theta_T(e_i) = e_k$ en $\theta_T(e_j) = \mathbb{1} - e_l$ voor $1 \leq k, l \leq n$ met $i \neq j$. Stel $k = l$ dan geldt $\theta_T(e_i) + \theta_T(e_j) = \mathbb{1}$, maar dan $T[e_i] + T[e_j] = [0]$ en geldt $T[e_i + e_j] = [0]$. Hieruit zou volgen wegens injectiviteit van T dat $e_i + e_j = \lambda\mathbb{1}$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$. Dit geeft een tegenspraak.

Stel nu $k \neq l$, dan volgt

$$2 = \|[e_i] - [e_j]\|_{var} = \|T[e_i] - T[e_j]\|_{var} = \|[e_k] - [\mathbb{1} - e_l]\|_{var} = 1.$$

Dit geeft ook een tegenspraak. \square

4.2.2 Karakterisatie van surjectieve isometrieën voor $n \geq 2$

Door een surjectieve lineaire isometrie T van $(\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ te vermenigvuldigen met $\varepsilon = -1$ als $\theta_T(e_i) = \mathbb{1} - e_k$ en met $\varepsilon = 1$ als $\theta_T(e_i) = e_k$ voor zekere $1 \leq i, k \leq n$, kunnen we ervoor zorgen dat εT de klasse van een basisvector altijd op de klasse van een andere basisvector afbeeldt. De bijjectie $\theta_{\varepsilon T}$ permuteert dus de standaard basisvectoren en we vinden de unieke permutatie matrix

$$M := [\theta_{\varepsilon T}(e_1), \dots, \theta_{\varepsilon T}(e_n)].$$

Merk op dat de vector $\mathbb{1}$ invariant is onder M , de matrix M induceert dus een lineaire afbeelding

$$\bar{M}: (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$$

gegeven door

$$\bar{M}[x] := [Mx].$$

Dit is goed gedefinieerd, laat namelijk x_1 en x_2 twee representanten zijn van $[x]$. Dan is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodanig dat $x_1 = x_2 + \lambda\mathbb{1}$. Er geldt $Mx_1 = M(x_2 + \lambda\mathbb{1}) = Mx_2 + \lambda M\mathbb{1} = Mx_2 + \lambda\mathbb{1}$ en dus $\bar{M}[x_1] = \bar{M}[x_2]$.

Lemma 4.2.4. *Er geldt $\bar{M} = \varepsilon T$.*

Bewijs. Laat $\{e_1, \dots, e_n\}$ de standaard basis van \mathbb{R}^n . Voor alle $1 \leq i \leq n$ geldt

$$\bar{M}[e_i] = [Me_i] = [\theta_{\varepsilon T}(e_i)] = \varepsilon T[e_i].$$

Op de klassen van de standaard basisvectoren komen \bar{M} en εT dus overeen en voor een willekeurige vector $v \in \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\mathbb{1}$ geldt wegens lineairiteit van \bar{M} en εT dat

$$\bar{M}[v] = \bar{M}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [Me_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\theta_{\varepsilon T}(e_i)] = \varepsilon T\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right] = \varepsilon T[v].$$

\square

Merk op dat als geldt dat $f(\bar{\mathbb{1}}) = \bar{\mathbb{1}}$ voor een surjectieve isometrie f van $((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ dan is de corresponderende isometrie T van $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$ lineair. Er geldt namelijk voor $T = \log \circ f \circ \exp$ dat $T[0] = [0]$ en uit Stelling 4.2.1 volgt dat T dan lineair is. Om iedere surjectieve isometrie $f: (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim \rightarrow (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ waarvoor geldt $f(\bar{\mathbb{1}}) = \bar{\mathbb{1}}$ te karakteriseren gebruiken we de lineariteit van de corresponderende isometrie T van $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$.

Propositie 4.2.3. *Zij $f: ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) \rightarrow ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ een surjectieve afbeelding zodanig dat $f(\bar{\mathbb{1}}) = \bar{\mathbb{1}}$. Dan is f een isometrie dan en slechts dan als er een $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ en een permutatie $\sigma \in S_n$ bestaan zodanig dat*

$$f(\bar{x}) = f\left(\overline{\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k}\right) = \overline{\sum_{k=1}^n \lambda_k^\varepsilon e_{\sigma(k)}}.$$

Bewijs. Voor f kunnen we, met behulp van het diagram uit Figuur 13, een corresponderende isometrie $T = \log \circ f \circ \exp$ vinden. Voor T geldt voor zekere $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ dat $\varepsilon T = \bar{M}$ (zie Lemma

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim \\ \uparrow \text{exp} & & \downarrow \text{log} \\ \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1} \end{array}$$

Figuur 13: Diagram van isometrieën van $(\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ en $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$.

4.2.4), maar ook $T = \varepsilon \bar{M}$. Er geldt dus $\log \circ f \circ \exp = \varepsilon \bar{M}$, hieruit volgt $f \circ \exp = \exp(\varepsilon \bar{M})$. Voor \bar{M} bestaat dan een permutatie $\sigma \in S_n$ zodanig dat \bar{M} de klassen van de standaard basisvectoren net zo permuteert als σ en we krijgen

$$\begin{aligned} f\left(\overline{\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k}\right) &= f\left(\exp\left[\sum_{k=1}^n (\log \lambda_k) e_k\right]\right) \\ &= \exp\left(\varepsilon \bar{M}\left[\sum_{k=1}^n (\log \lambda_k) e_k\right]\right) \\ &= \exp\left(\left[\sum_{k=1}^n \varepsilon (\log \lambda_k) e_{\sigma(k)}\right]\right) = \overline{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^\varepsilon e_{\sigma(k)}\right)}. \end{aligned}$$

We bewijzen nu dat deze karakterisatie enkel isometrieën oplevert. Laat namelijk

$$g: (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim \rightarrow (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$$

een functie zijn die beschreven wordt door

$$g(\bar{x}) = \overline{\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^\varepsilon e_{\sigma(k)}\right)}$$

voor een zekere $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ en $\sigma \in S_n$. We laten zien dat g een isometrie moet zijn. Net zoals hierboven bestaat er een corresponderende functie $T: (\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var}) \rightarrow (\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$ voor g zodanig dat $T[x] = \exp \circ g \circ \log[x]$. Deze functie T heeft de vorm

$$T[x] = \log(g(\exp[x])) = \log\left(\overline{\sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k)^\varepsilon e_{\sigma(k)}}\right) = \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon \lambda_k e_{\sigma(k)}\right].$$

Merk op dat de functie T een isometrie is voor de variatienorm aangezien de coördinaten van $[x]$ enkel gepermuteerd worden en allemaal vermenigvuldigd worden met ± 1 . Aangezien \log en \exp isometrische isomorfismen zijn zoals we hebben gezien in Stelling 4.0.1, volgt dat g ook een isometrie moet zijn. \square

We hebben nu een karakterisatie van f als geldt $f(\overline{\mathbb{1}}) = \overline{\mathbb{1}}$. Er zijn echter isometrieën waarvoor geldt $f(\overline{\mathbb{1}}) \neq \overline{\mathbb{1}}$. Om die te karakteriseren definiëren we eerst extra structuur.

Definitie 4.2.5. Voor equivalentieklassen $\overline{x}, \overline{y} \in (\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim$ definiëren we vermenigvuldiging door

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \{x \cdot y : x \in \overline{x}, y \in \overline{y}\}.$$

Hierbij is $x \cdot y$ de coördinaatsgewijze vermenigvuldiging van de vectoren x, y .

Deze vermenigvuldiging is goed gedefinieerd. Laat namelijk $x_0 \in \overline{x}$ en $y_0 \in \overline{y}$, dan geldt $x_0 = \lambda x$ en $y_0 = \mu y$ voor zekere $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$. Hieruit volgt $x_0 \cdot y_0 = \lambda \mu x y \in \overline{x y}$. Er geldt dus

$$\{x \cdot y : x \in \overline{x}, y \in \overline{y}\} \subseteq \overline{x y}.$$

Voor $z \in \overline{x y}$ geldt

$$z = \lambda(xy) = (\lambda x) \cdot (y) \in \{x \cdot y : x \in \overline{x}, y \in \overline{y}\}.$$

Hieruit volgt dat $\{x \cdot y : x \in \overline{x}, y \in \overline{y}\} = \overline{x y}$ en er geldt dat $\overline{x} \cdot \overline{y}$ goed gedefinieerd is.

Zij f een surjectieve isometrie van $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}$. We bekijken nu de functie

$$g(\overline{x}) := f^{-1}(\overline{\mathbb{1}}) \cdot f(\overline{x}).$$

Merk op dat voor g geldt

$$g(\overline{\mathbb{1}}) = f^{-1}(\overline{\mathbb{1}}) \cdot f(\overline{\mathbb{1}}) = \overline{\mathbb{1}}.$$

We kunnen nu g karakteriseren volgens Propositie 4.2.3. Voor f geldt dan dat $f(x) = f(\overline{\mathbb{1}}) \cdot g(x)$. Hierdoor kunnen we een karakterisatie van f vinden via de karakterisatie van g .

Stelling 4.2.2. *Zij $f: ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H) \rightarrow ((\mathbb{R}_+^n)^\circ / \sim, d_H)$ een surjectieve afbeelding. Dan is f een isometrie dan en slechts dan als er een $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ en een permutatie $\sigma \in S_n$ bestaan zodanig dat f te schrijven is als*

$$f(\overline{x}) = f(\overline{\mathbb{1}}) \cdot \overline{\sum_{k=1}^n \lambda_k^\varepsilon e_{\sigma(k)}}.$$

Merk op dat vermenigvuldigen met $f(\overline{\mathbb{1}})$ een isometrie is. Het bewijs voor Stelling 4.2.2 laten we dus achterwege. Deze karakterisatie van f levert met behulp van de log functie een getransleerde isometrie op van $(\mathbb{R}^n / \mathbb{R}\mathbb{1}, \|\cdot\|_{var})$.

We hebben gezien dat de d_H metriek één op één overeen komt met Hilberts metriek κ op Σ_ϕ° . Door de karakterisatie uit Stelling 4.2.2 vinden we dus met behulp van Gevolg 3.2.1 een karakterisatie van alle surjectieve isometrieën voor Hilberts metriek op verzamelingen van de vorm Σ_ϕ° .

Referenties

- [1] Roger Nussbaum Bas Lemmens (2012). *Nonlinear Perron-Frobenius theory*. Cambridge University Press.
- [2] Gunther Frei (1985). Der Briefwechsel David Hilbert, Felix Klein (1886-1918).
- [3] Pierre de la Harpe (1993). On Hilbert's Metric for Simplices. *Geometric Group Theory*. Red. door Graham A. Niblo. Cambridge University Press. Hfdstk. 8, p. 97–119.
- [4] David Hilbert (1895). Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. *Math. Ann.* 46, p. 91–96.
- [5] Felix Klein (1871). Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Math. Ann* 4, p. 573–625.
- [6] Athanese Papadopoulos (2004). *Metric spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society.
- [7] Jussi Väisälä (2003). A Proof of the Mazur-Ulam Theorem. *Am. Math. Mon.* 110, p. 633–635.