



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Open dynamische systemen met drie takken

Naaijer, M.K.

Citation

Naaijer, M. K. *Open dynamische systemen met drie takken*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171177>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Open dynamische systemen met drie takken

Mark Naaijer

begeleid door Dr. C.C.C.J. Kalle en Dr. N.D.S. Langeveld

Een scriptie gepresenteert voor de opleiding
Bachelor Wiskunde



Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Nederland
26 februari 2022

Inhoudsopgave

| | |
|---|-----------|
| Inleiding | 3 |
| 1 Voorkennis | 5 |
| 1.1 Dynamische systemen | 5 |
| 1.1.1 Betreft notatie | 6 |
| 1.2 β -ontwikkelingen | 6 |
| 1.3 β -ontwikkelingen vergelijken | 8 |
| 1.4 <i>Greedy</i> en <i>quasi-greedy</i> ontwikkelingen | 11 |
| 1.4.1 Welke rijtjes zijn mogelijk? | 13 |
| 1.4.2 Verdere observaties over β -ontwikkelingen | 14 |
| 2 De overlevingsverzameling en bifurcatieverzameling | 15 |
| 2.1 De Cantorverzameling | 15 |
| 2.2 Hausdorffdimensie | 17 |
| 2.3 De overlevingsverzameling $K_\beta(t)$ | 18 |
| 2.4 Bifurcatieverzameling E_β | 20 |
| 3 Hoofresultaten | 21 |
| 3.1 Geïsoleerde punten in $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$ | 21 |
| 3.2 Geïsoleerde punten voor $\beta_0 = 1 + \sqrt{3}$ | 23 |
| 3.3 E_β met $\beta \in (2, 3)$ | 26 |
| 3.4 Over de isolatie van \bar{I} | 27 |
| 4 De Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ | 30 |
| 4.1 Positieve Hausdorffdimensie | 30 |
| 4.2 Ondergrens voor $\dim_H(K_\beta(t))$ | 31 |
| 5 Verdere studie | 32 |
| Referenties | 33 |

Inleiding

Binnen de wiskunde wordt veel onderzoek gedaan naar dynamische systemen. Onderzoek naar dynamische systemen is ontwikkeld vanuit het belang om een situatie uit de werkelijkheid te modelleren. De term dynamisch systeem is breed en wordt grofweg onderverdeeld in twee categorieën: dynamische systemen waar de tijdsontwikkeling continu beschouwd wordt en systemen waar de tijdsontwikkeling in discrete tijdstappen bekeken wordt. Een voorbeeld van een dynamisch systeem waar wordt gekeken naar continue tijdsontwikkeling is een systeem van differentiaalvergelijkingen. In een dynamisch systeem waar de tijdsontwikkeling discreet is, bekijken we de tijdsontwikkeling in vaste stappen. Een voorbeeld hiervan is neerslag in Nederland, waar jaarlijks een meting van kan worden gedaan. Het dynamisch systeem kan aan de hand van de voorgaande jaren voorspellingen doen over de toekomstige neerslag.

Specifiek is er in de afgelopen tijd veel interesse geweest in open dynamische systemen. Er wordt hier gekeken naar een functie T en een verzameling X . Net zoals bij de studie van gesloten dynamische systemen wordt specifiek gekeken naar de *baan* van punten $x \in X$ onder T : de rij $(T^n(x))_{n \geq 0}$. Bij een open dynamisch systeem bepalen we een gat in de verzameling X waar bij elke iteratie van T punten in 'vallen'. Een toepassing hiervan is bijvoorbeeld een biljarttafel waar gaten in de hoeken zitten of een gasdeeltjes in een buis. Waar deze voorbeelden wiskundig erg snel erg ingewikkeld kunnen worden, kan het nuttig zijn ons te verdiepen in relatief simpelere, eendimensionale voorbeelden. In het artikel [Urb86] is onderzoek gedaan naar het specifieke dynamische systeem met parameter $\beta \in \mathbb{R}_{>1}$

$$T_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1), x \mapsto \beta x \pmod{1}.$$

In 2020 is het artikel [Kal+20] gepubliceerd waarin het onderzoek naar dynamische systemen met een gat verder uiteengezet is. Hier is hetzelfde dynamische systeem T_β bekeken met $\beta \in (1, 2)$. Het gat in de verzameling $X = [0, 1)$ is hier van de vorm $(0, t)$, met $t \in (0, 1)$. De verzameling punten die onder iteraties van T_β nooit in dit gat vallen, noemen we de *overlevingsverzameling* $K_\beta(t)$. Uit de resultaten van het eerdere artikel [Rén57] volgt dat voor alle $\beta > 1$ de overlevingsverzameling voor alle $t \in (0, 1)$ Lebesguemaat 0 heeft. In het artikel [Kal+20] is vervolgens onderzoek gedaan naar de *bifurcatieverzameling* van $K_\beta(t)$. Deze is gedefinieerd als de verzameling

$$E_\beta := \{t \in (0, 1) : K_\beta(t) \neq K_\beta(\varepsilon) \text{ voor alle } \varepsilon > t\}.$$

Onder andere is in [Kal+20] bewezen dat deze verzameling voor alle $\beta \in (1, 2)$ Lebesguemaat 0 heeft en Hausdorffdimensie 1. De Hausdorffdimensie is een getal toegekend aan deelverzamelingen van \mathbb{R}^n en geeft informatie over de mate van 'detail' in deze deelverzameling. Een precieze definitie wordt gegeven in Sectie 2.2. Verder is bewezen dat de verzameling van $\beta \in (1, 2)$ waarvoor E_β geen geïsoleerde punten bevat Hausdorffdimensie 0 heeft. Met deze kennis is de vraag opgekomen om te kijken of deze stellingen uitgebreid kunnen worden naar een groter domein van β . In deze scriptie is gekeken naar gevallen $\beta \in (2, 3)$ en zijn dergelijke resultaten gevonden.

Een belangrijk onderdeel bij het bestuderen van de overlevingsverzameling en bifurcatieverzameling is de connectie met β -ontwikkelingen. Als $\beta \in (2, 3)$ kunnen we het domein van T_β partitioneren in de deelverzamelingen $[0, \frac{1}{\beta})$, $[\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta})$, $[\frac{2}{\beta}, 1)$, we nummeren de elementen van de partitie respectievelijk 0, 1 en 2 en houden vervolgens voor een $x \in [0, 1)$ bij in welk element van de partitie x valt onder iteraties van T_β . Dit geeft een rijtje, waarvan we zullen zien dat voor dit rijtje $d_n(x, \beta)_{n \geq 1}$ geldt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x, \beta)}{\beta^n}.$$

Deze rijtjes noemen we β -ontwikkelingen. Aan de hand van deze β -ontwikkelingen zal het ons lukken om de verzamelingen $K_\beta(t)$ en E_β te karakteriseren.

Bij het onderzoeken van β -ontwikkelingen met $\beta \in (1, 2)$ in [Kal+20] was de verzameling β -ontwikkelingen een deelverzameling van $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. In deze scriptie bekijken we het domein van β gelijk aan $(2, 3)$. Dit betekent dat de verzameling β -ontwikkelingen een deelverzameling is van $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Een reden om de bevindingen uit [Kal+20] uit te breiden naar een groter domein is

dan ook de volgende vraag: Als β -ontwikkelingen meer verschillende symbolen kunnen bevatten, verandert dat dan de structuur van $K_\beta(t)$ en E_β ?

In Hoofdstuk 1 van de scriptie is een uitgebreide introductie gegeven over dynamische systemen en ergodentheorie. We passen deze kennis toe op T_β en definiëren β -ontwikkelingen. Vervolgens definiëren we in Hoofdstuk 2 de verzamelingen $K_\beta(t)$ en E_β rigoreus en bekijken deze verzamelingen aan de hand van β -ontwikkelingen.

De theorie over β -ontwikkelingen die wordt gebruikt in [Kal+20] is ook terug te vinden in de artikelen [Par60] en [Rén57]. Deze theorie wordt in de eerste twee hoofdstukken uitgebreid naar $\beta \in (2, 3)$. Dit vormt de basis voor de stellingen die bewezen worden in deze scriptie. In [Kal+20] is de verzameling \tilde{V} van $\beta \in (1, 2)$ waarvoor E_β geen geïsoleerde punten bevat gegeven. In Hoofdstuk 3 bewijzen presenteren we de resultaten gevonden in de scriptie. In Stelling 3.1 identificeren we een deelverzameling $V \subset (2, 3)$ zodanig dat voor alle $\beta \in V$ de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1)$ geen geïsoleerde punten bevat. In het bewijs gebruiken we resultaten uit [Kal+20]. Vervolgens bewijzen we in Stelling 3.4 dat de verzameling $E_{1+\sqrt{3}}$ geen geïsoleerde punten bevat. Hier gebruiken we verder geen resultaten uit [Kal+20] voor. We breiden de stelling daarna gedeeltelijk uit naar andere waarden van β . Daarna bewijzen we in Stelling 3.6 dat een deelverzameling van E_β met $\beta \in (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$ geen geïsoleerde punten bevat. Als laatste bekijken we het punt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n}$ specifiek en bewijzen we dat voor $\beta > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ dit punt niet geïsoleerd ligt. In Hoofdstuk 4 berekenen we een ondergrens voor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ voor een zekere $t \in (0, 1)$. Als laatste sluiten we in Hoofdstuk 5 af met voorstellen van eventueel vervolgonderzoek.

1 Voorkennis

1.1 Dynamische systemen

In de inleiding is het dynamisch systeem $(T_\beta, [0, 1])$ besproken. Precies hebben we het dan over het viertal $(T_\beta, [0, 1], \mathfrak{B}, \mu)$, met \mathfrak{B} de Borel σ -algebra van $[0, 1]$ en μ een maat op \mathfrak{B} en T_β gegeven door

$$T_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1) : x \mapsto \beta x \pmod{1}. \quad (1.1.1)$$

In het algemeen bekijken we in deze scriptie enkel kansmaten, dus geldt altijd $\mu(X) = 1$, waar X het domein van de transformatie is. Bij het onderzoeken van het viertal $(T_\beta, [0, 1], \mathfrak{B}, \mu)$ bekijken we onder andere hoe punten $x \in [0, 1)$ zich door het interval $[0, 1)$ bewegen onder iteraties van T_β . Een eigenschap die een discrete tijd dynamisch systeem kan hebben is ergodiciteit. Ten eerste definiëren we de eigenschap maatbehoudendheid.

Definitie 1.1. Zij $T : X \rightarrow X$ een meetbare transformatie op domein X met σ -algebra \mathfrak{B} en maat μ . Dan is T *maatbehoudend* met betrekking tot μ (of μ is *T -invariant*) als voor alle $A \in \mathfrak{B}$ geldt

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Met deze eigenschap definiëren we ergodiciteit van het viertal $(T, X, \mathfrak{B}, \mu)$.

Definitie 1.2. Zij T een meetbare transformatie op domein X met σ -algebra \mathfrak{B} en invariante maat μ . Dan is T *ergodisch* als voor alle $A \in \mathfrak{B}$ met $T^{-1}(A) = A$ geldt $\mu(A) = 0$ of $\mu(X \setminus A) = 0$.

Een voorbeeld hiervan is het dynamisch systeem $(T_2, [0, 1], \mathfrak{B}, \lambda)$ met \mathfrak{B} de Borel σ -algebra op het interval $[0, 1)$ en λ de Lebesguemaat. Ter illustratie laten we zien dat λ maatbehoudend is voor T_2 .

Voorbeeld 1.3. De Lebesguemaat λ is invariant voor T_2 gegeven door $T_2 : [0, 1) \rightarrow [0, 1) : x \mapsto 2x \pmod{1}$.

Bewijs. Ten eerste merken we op dat het voldoende is om te laten zien dat λ maatbehoudend is voor de elementen in de verzameling $\mathfrak{L} = \{[a, b) : a, b \in [0, 1), a < b\}$, omdat deze verzameling intervallen \mathfrak{B} genereert, het bewijs hiervoor is bijvoorbeeld te vinden in [Daj14], Stelling 1.2.2. We zien dat voor iedere $[a, b) \in \mathfrak{L}$ geldt dat

$$T_2^{-1}([a, b)) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

en dus volgt hieruit dat

$$\lambda(T_2^{-1}([a, b))) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (b - a) = \lambda([a, b)).$$

We concluderen dat λ maatbehoudend is voor T_2 . □

Deze methode werkt alleen omdat we in dit geval $\beta = 2$ nemen en dus β geheel is. Voor een niet-gehele β is λ niet maatbehoudend voor T_β , zoals we in de volgende paragraaf zullen zien. Er bestaat echter wel een equivalente maat μ_β die invariant is voor T_β . Deze μ_β wordt gegeven door

$$\mu_\beta(A) = \int_A \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \mathbb{I}_{[0, T_\beta^n(1))}(x) d\lambda(x), \text{ voor alle } A \in \mathfrak{B},$$

waarin c een normalisatieconstante is zodat μ_β een kansmaat wordt en geldt $T_\beta^n(x) := (T_\beta \circ T_\beta \circ \dots \circ T_\beta)(x)$. Als laatste is \mathbb{I}_A de indicatorfunctie op van de verzameling A . Dit betekent dat $\mathbb{I}_A(x) = 1$ voor alle $x \in A$ en $\mathbb{I}_A(x) = 0$ voor alle $x \in X \setminus A$. Een bewijs van de invariantie van μ_β is gegeven in [Rén57], waar ook het bewijs van de ergodiciteit van T_β wordt gegeven. Een belangrijke eigenschap

van ergodische systemen is de volgende. Zij $(T, X, \mu, \mathfrak{B})$ een ergodisch dynamisch systeem, dan geldt voor alle $A \in \mathfrak{B}$ met $\mu(A) > 0$

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A)\right) = 1. \quad (1.1.2)$$

Dit is bijvoorbeeld bewezen in [DD09], Stelling 1.6.1. Om de resultaten te bewijzen in Hoofdstuk 3 met de transformatie T_β kijken we naar rijtjes (de β -ontwikkelingen) uit de verzameling $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i \geq 1} : x_i \in \{0, 1, 2\}\}$. In het algemeen definiëren we op de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (waarvan $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ een deelverzameling is) de *shiftableiding*, $\sigma : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, gedefinieerd door

$$\sigma((x_i)_{i \geq 1}) = (x_{i+1})_{i \geq 1}. \quad (1.1.3)$$

Verder definiëren we op de verzameling $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ een metriek p . Deze is gedefinieerd op $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ en gegeven door

$$p((x_n), (y_n)) = 2^{-\inf\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}} \text{ voor alle } (x_n) \neq (y_n) \text{ en } p((x_n), (x_n)) := 0. \quad (1.1.4)$$

Propositie 1.4. *De metriek p is welgedefinieerd.*

Bewijs. Laat $(x_n), (y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Er geldt voor alle $n \geq 0$ dat $2^{-n} > 0$ en er geldt $p((x_n), (y_n)) = 0$ dan en slechts dan als $(x_n) = (y_n)$, omdat uit $(x_n) \neq (y_n)$ volgt dat $p((x_n), (y_n)) \neq 0$. Er geldt verder per definitie dat $p((x_n), (x_n)) = 0$. Verder geldt

$$p((x_n), (y_n)) = 2^{-\inf\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}} = 2^{-\inf\{n \geq 1 : y_n \neq x_n\}} = p((y_n), (x_n)).$$

Laat ook $(z_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Dan kijken we als laatste naar $p((x_n), (y_n)) + p((y_n), (z_n))$ en nemen we aan dat (x_n) en (y_n) op minimale index k verschillen en (y_n) en (z_n) op minimale index l verschillen. Dit betekent dat (x_n) en (z_n) in ieder geval tot index $\min\{k, l\}$ gelijk zijn en dus $p((x_n), (z_n)) \leq 2^{-\min\{k, l\}}$. Daarom vinden we

$$p((x_n), (y_n)) + p((y_n), (z_n)) = 2^{-k} + 2^{-l} = 2^{-\min\{k, l\}} + 2^{-\max\{k, l\}} \geq p((x_n), (z_n)).$$

Hieruit concluderen we dat p een metriek is op $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. □

Met deze metriek kunnen we dus limieten en convergentie definiëren op $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

1.1.1 Betreft notatie

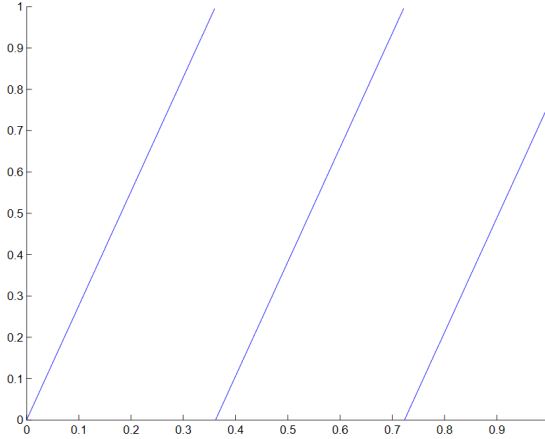
Als laatste geven we wat informatie over notatie van elementen in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ten eerste geven we deelverzamelingen van $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ of $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ aan met kalligrafische letters, bijvoorbeeld \mathcal{E} , \mathcal{Q} , \mathcal{K} . Verder geven we een periodiek rijtje, bijvoorbeeld het rijtje 010101... aan met een streep boven het periodieke gedeelte, dus 010101... = $\overline{01}$. Een eindig rijtje noemen we een *woord* en we geven de lengte van een woord w aan met de notatie $|w|$. Als we twee woorden v, w achter elkaar zetten, zoals vw , hebben we het over concatenatie en vormt dit het woord $v_1 \dots v_{|v|} w_1 \dots w_{|w|}$. Als laatste, de notatie w^k geeft aan dat we w k keer achter elkaar zetten.

1.2 β -ontwikkelingen

We herinneren ons de afbeelding T_β van (1.1.1). Het dynamische systeem met een discrete tijdsontwikkeling $(T_\beta, [0, 1], \mathfrak{B}, \mu_\beta)$ vormt de basis van de scriptie. Later, als er gesproken wordt over het viertal, schrijven we T_β en gebruiken we impliciet altijd de invariante μ_β samen met de Borel σ -algebra \mathfrak{B} .

In [Kal+20] is T_β bestudeerd met $\beta \in (1, 2)$. Dit levert een dynamisch systeem op met twee takken, de afbeelding bestaat namelijk uit twee lijnen met een discontinuïteit in het punt $\frac{1}{\beta}$. We zullen zien dat we dit kunnen relateren aan rijtjes met twee symbolen, oftewel $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. In deze

scriptie bekijken we $\beta \in (2, 3)$, wat een dynamisch systeem met drie takken (als te zien in Figuur 1.2) oplevert. Dit relateren we vervolgens aan rijtjes met drie symbolen: de verzameling $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Bij het bestuderen van T_β bekijken we de baan van punten $x \in [0, 1)$: het rijtje $(T_\beta^n(x))_{n \geq 0}$. In Figuur 1.2 zien we de grafiek van T_β voor een $\beta \in (2, 3)$. De discontinuïteiten van T_β bevinden zich op $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$. In dit figuur is te zien dat de derde tak van T_β niet vol is, als enige van de drie takken geldt er $T_\beta((\frac{2}{\beta}, 1)) \neq [0, 1)$. Om deze reden is de Lebesguemaat λ niet invariant voor T_β . Voor alle $\beta \in (2, 3)$ zien we bijvoorbeeld dat $T_\beta^{-1}(\beta - 2, 1) = (\frac{\beta-2}{\beta}, \frac{1}{\beta}) \cup (\frac{\beta-1}{\beta}, \frac{2}{\beta})$. Dus $\lambda(T_\beta^{-1}(\beta - 2, 1)) = 2 \cdot \frac{1}{\beta} \cdot (1 - (\beta - 2)) = \frac{2}{\beta} \lambda((\beta - 2, 1)) < \lambda((\beta - 2, 1))$.



Figuur 1.2: De grafiek voor T_β met $\beta = 2,71$.

Het dynamische systeem $(T_\beta, [0, 1), \mathfrak{B}, \mu_\beta)$ maakt het mogelijk om β -ontwikkelingen te bestuderen. We bekijken getallen in $[0, 1)$ en schrijven deze door middel van T_β als β -ontwikkelingen, dat wil zeggen, als een rijtje in $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Dat gaat als volgt. Ten eerste merken we op dat de afbeelding T_β ook te schrijven is als

$$T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor, \quad (1.2.1)$$

waarbij $\lfloor \beta x \rfloor$ de entierfunctie is, die βx naar beneden afrondt naar het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan βx . Vervolgens definiëren we het rijtje $(d_n)_{n \geq 1}$ door

$$d_n(x) = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor. \quad (1.2.2)$$

Er geldt dat dat $d_n \in \{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$ en voor $\beta \in (2, 3)$ geldt $\lfloor \beta \rfloor = 2$. Kort gezegd geeft dit rijtje telkens het aantal dat van het product $\beta T_\beta^{n-1}(x)$ wordt afgehaald bij het toepassen van modulo 1 op $T_\beta^n(x)$. Als we de uitdrukking (1.2.1) omschrijven geldt

$$T_\beta(x) = \beta x - d_1(x), \text{ dus } x = \frac{d_1(x)}{\beta} + \frac{T_\beta(x)}{\beta}.$$

Als we nu $T_\beta(x)$ weer uitschrijven, maar dan met $T_\beta^2(x)$ volgt dat niet $d_1(x)$ maar $d_2(x)$ gebruikt wordt, dus dan volgt

$$x = \frac{d_1(x)}{\beta} + \frac{T_\beta(x)}{\beta} = \frac{d_1(x)}{\beta} + \frac{d_2(x)}{\beta^2} + \frac{T_\beta^2(x)}{\beta^2} = \frac{d_1(x)}{\beta} + \frac{d_2(x)}{\beta^2} + \frac{d_3(x)}{\beta^3} + \frac{T_\beta^3(x)}{\beta^3}.$$

Als we deze redenatie voorzetten, volgt hieruit dat

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x)}{\beta^n}. \quad (1.2.3)$$

We zien dat $\sum_{n=1}^m \frac{d_n(x)}{\beta^n} + \frac{T_\beta^m(x)}{\beta^m}$ convergeert voor $m \rightarrow \infty$, omdat $\beta > 1$ en $T_\beta^m(x) \in [0, 1)$ voor alle m en de rij $d_n(x)$ van boven begrensd is. Het rijtje $(d_n(x))_{n \geq 1}$ definiëren we als de *greedy* β -ontwikkeling van $x \in [0, 1)$. Deze noteren we in het algemeen als $d_1(x)d_2(x)d_3(x)\dots$. In het vervolg schrijven we het rijtje van de *greedy* β -ontwikkeling van x op als $d(x, \beta)$. Deze procedure geeft ons voor iedere $x \in [0, 1)$ een unieke β -ontwikkeling.

Niet elk rijtje in $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ komt voor als β -ontwikkeling. Dat laten we zien met behulp van een voorbeeld.

Voorbeeld 1.5. Door te kijken naar de afbeelding T_β als functie is het mogelijk bepaalde conclusies te trekken over β -ontwikkelingen. In Figuur 1.2 is te zien dat de eerste twee takken het gehele codomein $[0, 1)$ beslaan. Echter, de derde tak van T_β beslaat niet het gehele codomein. Namelijk $T_\beta([\frac{2}{\beta}, 1)) = [0, \beta - 2)$. Dus specifiek, in de situatie waar geldt $\beta - 2 = \frac{2}{\beta}$ (oftewel $\beta = 1 + \sqrt{3}$), wordt het interval $[\frac{2}{\beta}, 1)$ afgebeeld op het interval $[0, \frac{2}{\beta})$. Hieruit volgt dat voor alle $x \in [0, 1)$ er geen $n > 0$ bestaat zodanig dat $T_\beta^{n-1}(x) \in [\frac{2}{\beta}, 1)$ én $T_\beta^n(x) \in [\frac{2}{\beta}, 1)$ oftewel $d_n(x, \beta) = d_{n+1}(x, \beta) = 2$. Voor alle $x \in [0, 1)$ geldt dus dat het woord 22 niet in $d(x, \beta)$ voor kan komen.

Dit illustreert dat niet voor alle β elk rijtje $(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ mogelijk is. In Gevolg 1.15 zullen we zien dat dit voor alle $\beta \in (2, 3)$ geldt en geven we een precieze beschrijving van de verzameling toelaatbare rijtjes, die we eerst definiëren.

Definitie 1.6. De verzameling \mathcal{Q}_β is de verzameling *toelaatbare greedy* β -ontwikkelingen. Dat wil zeggen

$$\mathcal{Q}_\beta := \{(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} : \exists x \in [0, 1) \text{ met } d(x, \beta) = (x_i)\}.$$

1.3 β -ontwikkelingen vergelijken

Om meer inzicht te krijgen in welke β -ontwikkelingen toelaatbaar zijn definiëren we de lexicografische ordening op $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$.

Definitie 1.7. We zeggen $(x_n) < (y_n)$ als er een $M \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $x_M < y_M$ en $x_m = y_m$ voor alle $m < M$. Daarnaast zeggen we $(x_n) \leq (y_n)$ als $(x_n) < (y_n)$ of $(x_n) = (y_n)$.

Het is eenvoudig te bewijzen dat dit een ordening is. Aan de hand van deze definitie kunnen we kijken naar de verzameling rijtjes (dus β -ontwikkelingen) \mathcal{Q}_β . Om de verzameling β -ontwikkelingen \mathcal{Q}_β en de reële getallen uit $[0, 1)$ aan elkaar te relateren definiëren we de *projectieafbeelding* die een β -ontwikkeling projecteert op \mathbb{R} als

$$\pi_\beta : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\beta^i}. \quad (1.3.1)$$

Opmerking 1.8. Deze projectieafbeelding is welgedefinieerd. Het grootst mogelijke rijtje dat π_β projecteert is het rijtje $\bar{2}$ en dus geldt er voor alle $(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$

$$\pi_\beta((x_i)) \leq \pi_\beta(\bar{2}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\beta^i} = \frac{2}{\beta - 1}.$$

Dit geeft een bovengrens voor de som. Daarnaast merken we op dat de rij van partiële sommen $(\sum_{i=1}^S \frac{x_i}{\beta^i})_{S > 0}$ monotoon stijgend is. Dan geldt volgens de monotone convergentiestelling dat $\pi_\beta((x_i))$ convergeert voor alle (x_i) .

Stelling 1.9. Voor alle $\beta \in (2, 3)$ is de projectieafbeelding $\pi_\beta|_{\mathcal{Q}_\beta}$ bijectief met als inverse de functie $\pi_\beta^{-1} : [0, 1) \rightarrow \mathcal{Q}_\beta, x \mapsto d(x, \beta)$.

Bewijs. In het artikel [Par60] is bewezen dat de functie $\pi_\beta^{-1} : x \mapsto d(x, \beta)$ een bijectie tussen $[0, 1)$ en \mathcal{Q}_β is en als π^{-1} de inverse is van π , is π ook een bijectie. We laten zien dat de inverse van deze functie gelijk is aan π_β . Zij $\beta \in (2, 3)$. Dan geldt voor alle $x \in [0, 1)$

$$\pi_\beta(\pi_\beta^{-1}(x)) = \pi_\beta(d(x, \beta)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x, \beta)}{\beta^n} = x$$

en daarnaast geldt voor alle $(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta$

$$\pi_\beta^{-1}(\pi_\beta((x_i))) = \pi_\beta^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n}\right) = d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n}, \beta\right) = (x_i).$$

We concluderen hieruit dat π_β dus bijectief is met als inverse de functie π_β^{-1} . \square

Uit deze stelling volgt dat de lexicografische ordening op \mathcal{Q}_β gedefinieerd in Definitie 1.7 equivalent is met de Euclidische ordening op \mathbb{R} . Dit lichten we toe en bewijzen we in de volgende stelling.

Stelling 1.10. *Zij $\beta \in (2, 3)$ en $x, y \in [0, 1]$. De metriek p en Euclidische norm zijn onder π_β equivalent. Dat wil zeggen dat voor $x, y \in [0, 1)$ respectievelijk geldt dat*

$$x \leq y \Leftrightarrow d(x, \beta) \leq d(y, \beta).$$

Bewijs. Zij $\beta \in (2, 3)$ en zij $x, y \in [0, 1)$. We bewijzen eerst de implicatie naar rechts. We nemen dus aan dat $x \leq y$. Dan geldt $d_1(x, \beta) \leq d_1(y, \beta)$. Als geldt $d_1(x, \beta) < d_1(y, \beta)$ vinden we $(x_i) \leq (y_i)$. Als geldt $d_1(x, \beta) = d_1(y, \beta)$ weten we dat $T_\beta(x) \leq T_\beta(y)$ aangezien x en y allebei op dezelfde tak liggen en een individuele tak van T_β stijgend en continu is. Hetzelfde argument kunnen we dan toepassen op $T_\beta(x)$ en $T_\beta(y)$, dit geeft dus altijd $d(x, \beta) \leq d(y, \beta)$.

We gaan verder naar de implicatie naar links. Stel $d(x, \beta) \leq d(y, \beta)$. Als geldt $d(x, \beta) = d(y, \beta)$ vinden we dat $x = \pi_\beta(d(x, \beta)) = \pi_\beta(d(y, \beta)) = y$. Stel $d(x, \beta) < d(y, \beta)$, dan weten we dat er per definitie een $M > 0$ bestaat zodanig dat $d_m(x, \beta) = d_m(y, \beta)$ voor alle $0 < m < M$ en dat geldt $d_M(x, \beta) < d_M(y, \beta)$. We definiëren $y' := \sum_{m=1}^M \frac{d_m(y, \beta)}{\beta^m}$. Oftewel, er geldt $d_m(y', \beta) = d_m(y, \beta)$ voor alle $0 < m \leq M$ en $d_m(y', \beta) = 0$ voor alle $m > M$. Dan geldt $y' \leq y$ en dus geldt $y' - x \leq y - x$.

Verder zien we dat geldt

$$\begin{aligned} y' - x &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(y', \beta)}{\beta^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x, \beta)}{\beta^i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{d_i(y', \beta)}{\beta^i} - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{d_i(x, \beta)}{\beta^i} \right) + \left(\frac{d_M(y', \beta)}{\beta^M} - \frac{x_M}{\beta^M} \right) - \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{d_i(x, \beta)}{\beta^i} \\ &= \frac{d_M(y', \beta) - d_M(x, \beta)}{\beta^M} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{M+i}(x, \beta)}{\beta^i \beta^M} \\ &= \frac{1}{\beta^M} \left(d_M(y', \beta) - d_M(x, \beta) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{M+i}(x, \beta)}{\beta^i} \right). \end{aligned}$$

Er geldt $d_M(y', \beta) - d_M(x, \beta) = d_M(y, \beta) - d_M(x, \beta) \geq 1$ en we zien daarnaast ook dat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{M+i}(x, \beta)}{\beta^i} = \pi_\beta(\sigma^M((x_i))) \leq 1.$$

Dus geldt

$$0 \leq y' - x \leq y - x \text{ oftewel } x \leq y.$$

De equivalentie is hierbij bewezen. \square

De verbinding tussen de baan van reële getallen x onder het discrete dynamische systeem T_β en β -ontwikkelingen $d(x, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta$ is zeer sterk. De projectieafbeelding π_β speelt hier een belangrijke rol in, deze geeft namelijk samen met π_β^{-1} de verbinding tussen het interval $[0, 1)$ en \mathcal{Q}_β . Met de volgende stelling bewijzen we dat T_β en σ topologisch geconjugeerd zijn aan de hand van het homeomorfisme π_β .

Definitie 1.11. Twee continue afbeeldingen $f : X \rightarrow X$ en $g : Y \rightarrow Y$ zijn elkaars *topologisch geconjugeerde* als er een homeomorfisme $h : X \rightarrow Y$ bestaat zodanig dat

$$h \circ f = g \circ h.$$

Stelling 1.12. De projectieafbeelding $\pi_\beta|_{\mathcal{Q}_\beta}$ is een topologische conjugatie tussen T_β en σ . In andere woorden, de afbeeldingen T_β en σ zijn topologisch geconjugeerd. Oftewel

$$T_\beta \circ \pi_\beta = \pi_\beta \circ \sigma$$

met π_β en π_β^{-1} bijectief en continu.

Voor de duidelijkheid stellen we in Figuur 1.3 het commutatieve diagram op dat de situatie schetst voor Stelling 1.12.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1) & \xrightarrow{T_\beta} & [0, 1) \\ \pi_\beta \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\ \mathcal{Q}_\beta & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{Q}_\beta \end{array}$$

Figuur 1.3 Het functiediagram voor de topologische conjugatie tussen T_β en σ .

Bewijs. We laten zien dat $T_\beta \circ \pi_\beta = \pi_\beta \circ \sigma$ geldt. Zij $(x_n) \in \mathcal{Q}_\beta$, dan geldt

$$(T_\beta \circ \pi_\beta)((x_n)) = T_\beta\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n}\right) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n} - x_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^{n-1}}.$$

Daarnaast zien we

$$(\pi_\beta \circ \sigma)((x_n)) = \pi_\beta((x_{n+1})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{\beta^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^{n-1}}.$$

En dus geldt $T_\beta \circ \pi_\beta = \pi_\beta \circ \sigma$ voor alle $(x_n) \in \mathcal{Q}_\beta$.

In Stelling 1.9 hebben we laten zien dat de projectieafbeelding π_β bijectief is met als inverse de functie $x \mapsto d(x, \beta)$. Er rest ons te laten zien dat π_β en π_β^{-1} continu zijn.

We laten zien dat π_β^{-1} continu is. Om dit te bewijzen bekijken we een convergente rij $(c_i)_{i \geq 0}$ in $[0, 1)$ met limiet c . Dan bekijken we de rij $(\pi_\beta^{-1}(c_i))_{i \geq 0} = (d(c_i, \beta))_{i \geq 0}$. We weten dat geldt $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i - c| = 0$. We weten dat er een convergente deelrij c_{i_k} bestaat zodanig dat $d(c_{i_k}, \beta) < d(c, \beta)$ voor alle $k \geq 0$ of $d(c_{i_k}, \beta) > d(c, \beta)$ voor alle $k \geq 0$. We bewijzen enkel het geval dat er een convergente deelrij bestaat zodanig dat $d(c_{i_k}, \beta) < d(c, \beta)$ voor alle $k \geq 0$. Het bewijs voor het andere geval gaat hetzelfde. Stel dan dat er een $(y_n) \in \mathcal{Q}_\beta$ bestaat zodanig dat

$$d(c_{i_k}, \beta) < (y_n) < d(c, \beta) \text{ voor alle } k \geq 0.$$

Volgens Stelling 1.10 geldt dan

$$c_{i_k} < \pi_\beta((y_n)) < c \text{ voor alle } k \geq 0.$$

Dit kan niet, omdat $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i - c| = 0$. Er kan dus geen één reëel getal bestaan dat voor alle i tussen c_i en c ligt en dus kan zo'n (y_n) niet bestaan. Daarom moet dus gelden $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi_\beta^{-1}(c_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_\beta^{-1}(c_{i_k}) = \pi_\beta^{-1}(c)$. Hieruit concluderen we dat π_β^{-1} continu is.

We bekijken nu π_β . Zij $x^{(n)}$ een rijtje van β -ontwikkelingen in \mathcal{Q}_β met $\lim x = (x_i) \in \mathcal{Q}_\beta$ onder de metriek p uit (1.1.4). Dan geldt dus per definitie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x^{(n)}, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\inf\{i \geq 1 : x_i^{(n)} \neq x_i\}} = 0.$$

Hieruit definiëren we voor iedere n het getal $k_n := \inf\{i \geq 1 : x_i^{(n)} \neq x_i\}$. Logischerwijs volgt hieruit $k_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Vervolgens bekijken we de projecties van het rijtje $\pi_\beta(x^{(n)})$ en het punt $\pi_\beta((x_i))$, er geldt voor alle $n \geq 0$

$$|\pi_\beta(x^{(n)}) - \pi_\beta(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^{(n)}}{\beta^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\beta^i} \right| = \left| \sum_{i=k_n}^{\infty} \frac{x_i^{(n)} - x_i}{\beta^i} \right|.$$

Omdat $k_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$, vinden we dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=k_n}^{\infty} \left| \frac{x_i^{(n)} - x_i}{\beta^i} \right| \right) = 0$$

en dus convergeert de rij $\pi_\beta(x^{(n)})$ naar $\pi_\beta((x_i))$. Hieruit volgt dat π_β continu is.

We hebben dus bewezen dat

$$T_\beta \circ \pi_\beta = \pi_\beta \circ \sigma$$

en dat π_β en π_β^{-1} bijectief en continu zijn. □

1.4 Greedy en quasi-greedy ontwikkelingen

In deze paragraaf geven we een precieze karakterisatie van \mathcal{Q}_β . We vinden precies welke β -ontwikkelingen onder T_β toelaatbaar zijn en welke niet. Hiervoor gebruiken we Stelling 1.10. Een kenmerk van de *greedy* β -ontwikkelingen die we gedefinieerd hebben is dat het voor alle $x \in [0, 1)$ het lexicografisch grootste rijtje definieert. Oftewel, voor alle (x_i) met $\pi_\beta((x_i)) = x$ geldt $d(x, \beta) \geq (x_i)$. Daarnaast weten we dat voor alle $(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta$ een $x \in [0, 1)$ bestaat zodanig dat $\pi_\beta((x_i)) = x$. Hieruit volgt dat $x < 1$ en dus geldt $(x_i) = d(x, \beta) < d(1, \beta)$. We vinden dat rijtjes die lexicografisch groter zijn dan $d(1, \beta)$ niet toegelaten zijn. Deze conclusie is echter niet volledig, in deze paragraaf vinden we uiteindelijk precies welke β -ontwikkelingen bevat zijn in \mathcal{Q}_β .

Bij $\beta < 3$ vinden we dat het lexicografisch grootste rijtje $\bar{2} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ een projectie groter heeft dan 1. Er geldt namelijk $\sup \pi_\beta(\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}) = \pi_\beta(\bar{2})$, wat gelijk is aan

$$\pi_\beta(\bar{2}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\beta^i} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^i} = \frac{2}{\beta - 1}.$$

Het supremum van \mathcal{Q}_β is daarom voor $\beta < 3$ ook ongelijk aan het rijtje $\bar{2}$. We observeren dat T_β rechts-continu is. De punten waar dat gecontroleerd moet worden zijn $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$. We zien dat $\lim_{x \downarrow \frac{1}{\beta}} T_\beta(x) = T_\beta(\frac{1}{\beta}) = 0$ en $\lim_{x \downarrow \frac{2}{\beta}} T_\beta(x) = T_\beta(\frac{2}{\beta}) = 0$. We herinneren ons uit (1.2.2) dat $d_n(x, \beta)$ gegeven wordt door

$$d_n(x, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in [0, \frac{1}{\beta}), \\ 1 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in [\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}), \\ 2 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in [\frac{2}{\beta}, 1). \end{cases}$$

De ontwikkeling $d(x, \beta)$ noemen we de *greedy* ontwikkeling van x , omdat de functie $d(x, \beta)$ het lexicografisch grootste rijtje definieert zodanig dat $\pi_\beta(d(x, \beta)) = x$. We zien hier bijvoorbeeld dat

de *greedy* ontwikkeling van $x = \frac{1}{\beta}$ gelijk is aan $1\bar{0}$. Vanwege de rechts-continuïteit van T_β zien we dat voor voldoende kleine $\varepsilon > 0$ geldt dat $d_1(\frac{1}{\beta}, \beta) = 1$ en $d_1(\frac{1}{\beta} - \varepsilon, \beta) = 0$ en dat dus geldt

$$p(d(\frac{1}{\beta}, \beta), d(\frac{1}{\beta} - \varepsilon, \beta)) = 2^{-1} \text{ voor alle voldoende kleine } \varepsilon.$$

We kijken naar $d(\frac{1}{\beta} - \varepsilon, \beta)$, we zien dat $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\beta(\frac{1}{\beta} - \varepsilon) = 1$. Echter $T_\beta(\frac{1}{\beta}) = 0$. We zien dus dat voor de β -ontwikkelingen van $T_\beta(\frac{1}{\beta} - \varepsilon)$ zal gelden dat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(\pi_\beta^{-1}(T_\beta(\frac{1}{\beta} - \varepsilon)), \sup \mathcal{Q}_\beta) = 0,$$

omdat $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\beta(\frac{1}{\beta} - \varepsilon) = 1$. Om te kunnen zien wat het supremum van \mathcal{Q}_β is, definiëren we \tilde{T}_β , een functie die heel erg lijkt op T_β , maar links-continu is. We noemen deze functie de *quasi-greedy* afbeelding.

$$\tilde{T}_\beta(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \begin{cases} \beta x & \text{als } x \in [0, \frac{1}{\beta}], \\ \beta x - 1 & \text{als } x \in (\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}], \\ \beta x - 2 & \text{als } x \in (\frac{2}{\beta}, 1]. \end{cases}$$

We zien hier dat de verschillen tussen de twee functies liggen in de punten $\frac{1}{\beta}$, $\frac{2}{\beta}$ en 1, waar we 1 toegevoegd hebben aan het domein. De *greedy* afbeelding beeldt $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$ af op 0 en de *quasi-greedy* afbeelding beeldt $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$ af op 1. Met deze \tilde{T}_β kunnen we op dezelfde manier een β -ontwikkeling definiëren. Namelijk, voor alle $n > 0$ en $x \in [0, 1]$ geldt

$$\tilde{d}_n(x, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in [0, \frac{1}{\beta}], \\ 1 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in (\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}], \\ 2 & \text{als } T_\beta^{n-1}(x) \in (\frac{2}{\beta}, 1]. \end{cases}$$

Het rijtje $(\tilde{d}_n(x, \beta))_{n>0}$ noemen we dan de *quasi-greedy* β -ontwikkeling van x en schrijven we als $\tilde{d}(x, \beta)$. We merken op dat voor alle $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, 1\}$ geldt $T_\beta(x) = \tilde{T}_\beta(x)$ en dus, als geen enkel punt uit de verzameling $\{0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, 1\}$ in de baan van x zit, zal gelden $d(x, \beta) = \tilde{d}(x, \beta)$. Voor de punten $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$ geldt $T_\beta(\frac{1}{\beta}) = T_\beta(\frac{2}{\beta}) = 0$ en $\tilde{T}_\beta(\frac{1}{\beta}) = \tilde{T}_\beta(\frac{2}{\beta}) = 1$. We concluderen dan

$$d(\frac{1}{\beta}, \beta) = 1\bar{0} \text{ en } \tilde{d}(\frac{1}{\beta}, \beta) = 0\tilde{d}(1, \beta).$$

Voor $\frac{2}{\beta}$ geldt vergelijkbaar het volgende:

$$d(\frac{2}{\beta}, \beta) = 2\bar{0} \text{ en } \tilde{d}(\frac{2}{\beta}, \beta) = 1\tilde{d}(1, \beta).$$

Stel dat voor een x geldt dat er een kleinste $n \geq 0$ bestaat zodanig dat $T_\beta^n(x) = \frac{1}{\beta}$, dan geldt dus voor de *greedy* β -ontwikkeling van $T_\beta^n(x)$ dat

$$d(T_\beta^n(x), \beta) = \sigma^n(d(x, \beta)) = d(\frac{1}{\beta}, \beta) = 1\bar{0}.$$

Voor de *quasi-greedy* ontwikkeling van $T_\beta^n(x)$ geldt

$$\tilde{d}(T_\beta^n(x), \beta) = \sigma^n(\tilde{d}(x, \beta)) = \tilde{d}(\frac{1}{\beta}, \beta) = 0\tilde{d}(1, \beta).$$

Dus vinden we

$$\begin{aligned} d(x, \beta) &= d_1(x, \beta) \dots d_n(x, \beta) 1\bar{0}, \\ \tilde{d}(x, \beta) &= \tilde{d}_1(x, \beta) \dots \tilde{d}_n(x, \beta) 0\tilde{d}(1, \beta). \end{aligned}$$

Voor alle $i < n$ geldt dat $d_i(x, \beta) = \tilde{d}_i(x, \beta)$. Ditzelfde voorbeeld kan gegeven worden voor punten waar $\frac{2}{\beta}$ voorkomt in de baan van dat punt. Kortom, als de punten $\frac{1}{\beta}$ en $\frac{2}{\beta}$ in de baan van x zitten, zijn de *greedy* en *quasi-greedy* β -ontwikkelingen van $x \in [0, 1)$ hetzelfde in het beginstuk en anders aan het einde. We vinden hier onder andere dat een getal $x \in [0, 1)$ verschillende representaties kan hebben in de vorm van β -ontwikkelingen. Als laatste merken we op dat met hetzelfde argument dat gegeven is voor de *greedy* β -ontwikkeling de projectie van de *quasi-greedy* β -ontwikkeling van een x ook convergeert naar x .

Opmerking 1.13. De projectieafbeelding π_β is niet injectief op het domein $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Er geldt namelijk $\pi_\beta(d(x, \beta)) = \pi_\beta(\tilde{d}(x, \beta))$, waar niet altijd geldt $d(x, \beta) = \tilde{d}(x, \beta)$. Vergelijkbaar, als we kijken naar de decimale representatie van getallen in \mathbb{R} , geldt $0.\bar{9} = 1$.

Als laatste geven we de volgende stelling, die ons het supremum van \mathcal{Q}_β geeft.

Stelling 1.14. *Er geldt*

$$\lim_{x \rightarrow 1} d(x, \beta) = \tilde{d}(1, \beta).$$

en dus geldt $\sup \mathcal{Q}_\beta = \tilde{d}(1, \beta)$.

Bewijs. Het bewijs van deze stelling is gegeven in [Par60], Stelling 3. □

Parallel hieraan vinden we

$$\lim_{x \rightarrow 1} \pi_\beta(d(x, \beta)) = \pi_\beta(\tilde{d}(1, \beta)) = 1.$$

1.4.1 Welke rijtjes zijn mogelijk?

Aan de hand van de vorige secties weten we dat voor elk rijtje $(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta$ geldt

$$\bar{0} \leq (x_i) < \tilde{d}(1, \beta).$$

Echter is dit niet de enige voorwaarde voor rijtjes in \mathcal{Q}_β . Hier gebruiken we de eerder gedefinieerde *shiftafbeelding*. Een belangrijk feit, dat volgt uit de definitie van het rijtje $d(x, \beta)$ en toegelicht wordt in Stelling 1.12, is dat geldt

$$d(T_\beta(x), \beta) = \sigma(d(x, \beta)).$$

Een kleine observatie verder is dat voor alle $x \in [0, 1)$ ook $T_\beta(x) \in [0, 1)$ en een β -ontwikkeling heeft waarvoor geldt

$$\bar{0} \leq d(T_\beta(x), \beta) < \tilde{d}(1, \beta).$$

Samen met Stelling 1.12 vinden we dan

$$\bar{0} \leq d(T_\beta(x), \beta) = \sigma(d(x, \beta)) < \tilde{d}(1, \beta).$$

Ditzelfde argument kunnen we herhalen voor ieder punt in de baan van x . Hieruit leiden we af dat voor alle $n \geq 0$ en $x \in [0, 1)$ moet gelden

$$\bar{0} \leq d(T_\beta^n(x), \beta) = \sigma^n(d(x, \beta)) < \tilde{d}(1, \beta).$$

Met deze observatie karakteriseren we de verzameling \mathcal{Q}_β .

Stelling 1.15. *Er geldt*

$$\mathcal{Q}_\beta = \left\{ (x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} : \sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ voor alle } n \geq 0 \right\}.$$

Bewijs. Het feit dat voor alle $(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta$ en $n \geq 0$ geldt $\sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta)$ is bewezen in het begin van deze paragraaf. Het gehele bewijs van deze stelling wordt gegeven in [Par60], Stelling 3. □

Deze karakterisering geeft een duidelijke structuur van \mathcal{Q}_β . Dat is te illustreren met een voorbeeld. We gebruiken hier dezelfde β als in Voorbeeld 1.5.

Voorbeeld 1.16. We bekijken \mathcal{Q}_β voor $\beta = 1 + \sqrt{3}$. We bepalen eerst $\tilde{d}(1, \beta)$. Dit geeft

$$\tilde{T}_\beta(1) = \beta - 2 = \frac{2}{\beta} \text{ en } \tilde{T}_\beta\left(\frac{2}{\beta}\right) = 1 \Rightarrow \tilde{d}(1, 1 + \sqrt{3}) = \overline{21}.$$

Deze waarde $\tilde{d}(1, \beta) = \overline{21}$ is periodiek met een periode van 2. We zien dat

$$\mathcal{Q}_\beta = \{(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} : \sigma^n((x_i)) < \overline{21} \text{ voor alle } n \geq 0\}. \quad (1.4.1)$$

Hieruit volgt dat een rijtje (x_i) dat het woord 22 bevat geen *greedy* β -ontwikkeling kan zijn en dus kan (x_i) geen element zijn van \mathcal{Q}_β .

1.4.2 Verdere observaties over β -ontwikkelingen

Uit de vorige paragraaf is gebleken dat $\tilde{d}(1, \beta)$ de bovengrens van \mathcal{Q}_β bepaalt en daarmee precies \mathcal{Q}_β definieert. Als we de functie $\beta \mapsto \tilde{d}(1, \beta)$ met domein $(2, 3)$ en codomein $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ bekijken, kunnen we voor $\beta_1, \beta_2 \in (2, 3)$ kijken naar de verzamelingen \mathcal{Q}_{β_1} en \mathcal{Q}_{β_2} .

Lemma 1.17. *De functie $\beta \mapsto \tilde{d}(1, \beta)$ is strikt stijgend en dus geldt er voor $\beta_1, \beta_2 \in (2, 3)$ met $\beta_1 < \beta_2$ voor alle $(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ en voor alle $n \geq 0$*

$$\sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta_1) \Rightarrow \sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta_2).$$

Bewijs. Het bewijs is te vinden in [KL07], Stelling 2.3. □

Hieruit volgt dat voor iedere β_1, β_2 met $\beta_1 < \beta_2$ geldt $\mathcal{Q}_{\beta_1} \subset \mathcal{Q}_{\beta_2}$. Een duidelijke intuïtie is dat hoe groter β wordt, hoe groter het rijtje $\tilde{d}(1, \beta)$ wordt en dus hoe meer rijtjes toegelaten zijn. Omdat we $\beta \in (2, 3)$ bekijken, zien we dat het supremum van de verzameling $\{\tilde{d}(1, \beta), \beta \in (2, 3)\}$ gelijk is aan $\tilde{d}(1, 3) = \overline{2}$. Andersom vinden we dat het infimum over de rijtjes bij $\beta = 2$ hoort, dit geeft $\tilde{d}(1, 2) = \overline{1}$.

2 De overlevingsverzameling en bifurcatieverzameling

In dit hoofdstuk gaan we in plaats van gesloten dynamische systemen kijken naar open dynamische systemen. We gebruiken de Cantorverzameling om het begrip overlevingsverzameling te introduceren. We illustreren het belang van de Hausdorffdimensie als alternatieve 'maat' van deelverzamelingen van \mathbb{R}^n . We herhalen daarnaast een paar belangrijke resultaten over de zogenaamde overlevingsverzameling en bifurcatieverzameling die gelden voor $\beta \in (1, 2)$ uit [Kal+20] en generaliseren die voor $\beta \in (2, 3)$.

2.1 De Cantorverzameling

De Cantorverzameling, geïntroduceerd door de Duitse wiskundige Georg Cantor in 1869 in het artikel [Can80], is een klassiek voorbeeld van een meetbare verzameling met Lebesguemaat 0 die overaftelbaar veel punten bevat. We definiëren de Cantorverzameling op de traditionele wijze en bewijzen deze feiten met behulp van β -ontwikkelingen.

Definitie 2.1. De Cantorverzameling C is gedefinieerd door middel van de functies $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{1}{3}x$ en $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Dan is C precies de unieke niet-lege, compacte verzameling waarvoor geldt

$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Dit resultaat volgt uit de Stelling van Hutchinson in [Hut81]. Equivalent is de recursieve definitie met behulp van de rij (C_n) , waar we $C_0 = [0, 1]$ definiëren en verder C_n met $n > 0$ recursief definiëren als

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$

Hierin gebruiken we voor getallen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en een verzameling $A \subset \mathbb{R}$ de notatie

$$\lambda_1 + \lambda_2 A := \{\lambda_1 + \lambda_2 x : x \in A\}.$$

In Figuur 2.1 zijn C_0 tot en met C_6 te zien.



Figuur 2.1: Illustratie van C_0 tot en met C_6 (Bron: Publiek domein).

Vervolgens is de Cantorverzameling C gedefinieerd als $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. We kunnen de Cantorverzameling ook bekijken met behulp van β -ontwikkelingen met $\beta = 3$. Uit $\tilde{d}(1, 3) = \bar{2}$ volgt $\mathcal{Q}_3 = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\bar{2}\}$. Verder definiëren we de *overlevingsverzameling*.

Definitie 2.2. Zij $\beta \in [2, 3]$ en $(a, b) \subset \mathbb{R}$ een interval zodanig dat $0 \leq a < b < 1$. Dan is de *overlevingsverzameling* van de afbeelding T_β met gat (a, b) gedefinieerd als de verzameling

$$K_\beta(a, b) := \{x \in [0, 1) : T_\beta^n(x) \notin (a, b) \text{ voor alle } n \geq 0\}.$$

Bekijk $K_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ en zij $x \in [0, 1)$. Als er een $n > 0$ bestaat zodanig dat $d_n(x, 3) = 1$ geldt $T_3^{n-1}(x) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. We leiden hieruit af dat als voor alle $n > 0$ geldt $T_3^{n-1}(x) \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ dit impliceert dat $d_n(x, 3) \neq 1$ voor alle n dan wel dat er een $n \geq 0$ bestaat zodanig dat $T_3^n(x) = 0$, omdat $T_3(\frac{1}{3}) = 0$. Oftewel, voor alle $x \in K_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ geldt voor alle $n > 0$ dat $d_n(x, 3) \neq 1$ of bestaat er een $N \geq 0$ zodanig dat voor alle $n < N$ geldt $d_{n+1}(x, 3) \in \{0, 2\}$ en $\sigma^N(d(x, 3)) = \bar{10}$.

Stelling 2.3. Er geldt $C = K_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Bewijs. Vanuit het bovenstaande concluderen we dat

$$K_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \pi_3\left(\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{w1\bar{0} : w \in \{0, 2\}^k\}\right).$$

We definiëren vervolgens de cilinderverzameling

$$\Delta(d_1, \dots, d_n) := \{(x_i) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}, x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n \text{ en } d_1, \dots, d_n \in \{0, 1, 2\}\} \subset \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}.$$

Verder definiëren we de rij symbolische verzamelingen in $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ zodanig dat $\pi_3(C_n) = C_n$ voor alle $n \geq 0$. We merken op dat $C_0 = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$, $C_1 = \Delta(0) \cup \Delta(2) \cup \{1\bar{0}\}$ en

$$C_2 = \Delta(0, 0) \cup \Delta(0, 2) \cup \Delta(2, 0) \cup \Delta(2, 2) \cup \{01\bar{0}, 21\bar{0}\}.$$

Als we dit patroon voortzetten volgt voor $n > 0$ dat

$$C_n = \{\Delta(d_1 \dots d_n) : d_1, \dots, d_n \in \{0, 2\}\} \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} \{w1\bar{0} : w \in \{0, 2\}^{n-1}\}$$

Omdat geldt $C_{k+1} \subset C_k$ voor alle $k \geq 0$ volgt dat $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k$. Daarom concluderen we dat geldt

$$C = \pi_3\left(\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{w1\bar{0} : w \in \{0, 2\}^k\}\right) = K_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Dit maakt het bewijs voor de stelling af. □

We bewijzen de feiten gepresenteerd in de introductie van het hoofdstuk.

Stelling 2.4. *De Cantorverzameling C is overaftelbaar.*

Bewijs. We weten dat $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \subset C$. We definiëren de functie

$$\psi : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : (x_i) \mapsto \left(\frac{1}{2}x_i\right).$$

In een rijtje $(x_i) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ wordt iedere 2 in een 1 veranderd. Er is eenvoudig te bewijzen dat deze functie welgedefinieerd en bijtief is. Vervolgens leiden we af dat $\pi_2(\psi(\{0, 2\}^{\mathbb{N}})) = \pi_2(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = [0, 1]$. Het interval $[0, 1]$ is overaftelbaar en vanuit de injectiviteit van ψ volgt dat $\pi_3(\{0, 2\}^{\mathbb{N}}) \subset C$ dat ook is. □

Stelling 2.5. *De Cantorverzameling C heeft Lebesguemaat 0.*

Bewijs. We gebruiken hier vergelijking (1.1.2), afgeleid van het feit dat T_3 ergodisch is. We bekijken de verzameling $K_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Omdat $\beta = 3$ geheel is, is de Lebesguemaat λ invariant voor T_β (zie hiervoor Paragraaf 1.1). Dit geeft

$$\lambda\left(\bigcup_{n \geq 0} T_3^{-n}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right) = 1.$$

Deze verzameling bevat precies de punten die onder iteraties van T_3 in het gat $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ vallen. Er geldt dus

$$K_3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\bigcup_{n \geq 0} T_3^{-n}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)\right)^C.$$

Met deze feiten zien we dat $\lambda(C) = \lambda(K_3(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) = 0$. □

In Stelling 2.4 en Stelling 2.5 hebben we feiten bewezen over de Cantorverzameling. Het is eenvoudig te laten zien dat voor alle overlevingsverzamelingen $K_\beta(a, b)$ met $0 \leq a < b < 1$ geldt $\lambda(K_\beta(a, b)) = 0$. Verschillende overlevingsverzamelingen zijn dus niet te onderscheiden in Lebesguemaat. De Hausdorffdimensie van verzamelingen kan hier een oplossing in bieden, het kent aan elke deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ een getal in $[0, n]$ toe dat iets zegt over de hoeveelheid detail in een verzameling. Hier zullen we bij het definiëren van de Hausdorffdimensie dieper op in gaan. De Hausdorffdimensie zal mogelijk wel onderscheid kunnen maken tussen verschillende overlevingsverzamelingen.

2.2 Hausdorffdimensie

Felix Hausdorff heeft in zijn artikel [Hau18] de Hausdorffdimensie gedefinieerd. Dit concept wordt onder anderen gebruikt om deelverzamelingen van \mathbb{R}^n met maat 0 te onderscheiden. De Hausdorffdimensie is een getal in $[0, n]$ dat aan elke deelverzameling van \mathbb{R}^n toegekend kan worden. De Hausdorffdimensie overlapt ook met de traditionele definitie van dimensie die gebruikt wordt bij vectorruimtes: Een lijn heeft Hausdorffdimensie 1, een vlak Hausdorffdimensie 2, enzovoorts. Voor de uitleg van de definitie van Hausdorffdimensie kan het boek [Fal14] van Kenneth Falconer gebruikt worden. We beginnen met een definitie over deelverzamelingen $U \subset \mathbb{R}^n$. Om te beginnen definiëren we de *diameter* van een verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ als

$$|U| := \sup \{|x - y| : x, y \in U\}. \quad (2.2.1)$$

Zij $A \subset \mathbb{R}^n$. Van deze verzameling bepalen we de Hausdorffdimensie. Om te beginnen definiëren we een δ -overdekking van A als een aftelbare verzameling deelverzamelingen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, zodanig dat

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U \text{ en } 0 < |U| \leq \delta \text{ voor alle } U \in \mathcal{F}.$$

Dan definiëren we voor $s \geq 0$ en $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |U_n|^s : \{U_n : n > 0\} \text{ een } \delta\text{-overdekking van } A \right\}. \quad (2.2.2)$$

Duidelijk is dat voor δ_1, δ_2 met $\delta_1 < \delta_2$ geldt $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$. Zij namelijk \mathcal{F}_1 een δ_1 -overdekking. Dan geldt voor alle $U \in \mathcal{F}_1$ dat $0 < |U| \leq \delta_1 < \delta_2$ en daarom is \mathcal{F}_1 ook een δ_2 -overdekking.

We concluderen dat als de diameter δ van deelverzamelingen U kleiner wordt, het aantal δ -overdekkingen in ieder geval niet toeneemt. Dan definiëren we de s -dimensionale Hausdorffmaat van A als

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Het bewijs dat \mathcal{H}^s een maat is met de Borel σ -algebra, is te vinden in het boek [Fal14]. Verder zien we dat voor alle $A \subset \mathbb{R}$ de functie $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ dalend is in s . Daarom vinden we dat $\mathcal{H}^s(A)$ ook dalend is. We vinden zelfs, voor $t > s$ en \mathcal{F} een δ -overdekking van A , dat

$$\sum_{U \in \mathcal{F}} |U|^t = \sum_{U \in \mathcal{F}} |U|^{t-s} |U|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{U \in \mathcal{F}} |U|^s. \quad (2.2.3)$$

Oftewel, als we dan het infimum nemen over alle δ -overdekkingen vinden we dat $\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$. Als we dan de limiet $\delta \rightarrow 0$ nemen, zien we dat als $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, dat dan geldt $\mathcal{H}^t(A) = 0$ voor alle $t > s$. We zien dus dat er de grafiek van $\mathcal{H}^s(A)$ op hoogstens één punt niet 0 of ∞ kan zijn.

Definitie 2.6. De *Hausdorffdimensie* van een verzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ is gegeven door

$$\dim_H(A) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

De Hausdorffdimensie is dus het punt waar de s -dimensionale Hausdorffmaat van ∞ naar 0 'springt'. Alleen op $s = \dim_H(A)$ kan $\mathcal{H}^s(A)$ ongelijk zijn aan ∞ of 0.

In de praktijk is dit een zeer moeilijke definitie om mee te werken. Wel kunnen we bijvoorbeeld wat zeggen over de Hausdorffdimensie van aftelbare verzamelingen. Als we deze schrijven als $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zien we dat $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} := \{(a_n - \frac{1}{2}\delta, a_n + \frac{1}{2}\delta) : n \in \mathbb{N}\}$ een geldige aftelbare δ -overdekking is. Er geldt namelijk

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n - \frac{1}{2}\delta, a_n + \frac{1}{2}\delta).$$

Daarom geldt dat voor alle $s > 0$ volgens de monotone convergentiestelling en het feit dat de rij van partiële sommen van $\sum_{i=1}^n \delta^s$ monotoon stijgend is dat

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| (a_n - \frac{1}{2}\delta, a_n + \frac{1}{2}\delta) \right|^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^s = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^s = 0.$$

Oftewel, $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0$ voor alle $\delta > 0$. We concluderen dan uiteindelijk dat de Hausdorffdimensie van aftelbare deelverzamelingen $A \subset \mathbb{R}^n$ gelijk is aan

$$\dim_H(A) = \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = 0. \quad (2.2.4)$$

Als laatste geven we een identiteit betreffende de Hausdorffdimensie van de vereniging van twee verzamelingen. Namelijk zij $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Dan geldt

$$\dim_H(A \cup B) = \sup\{\dim_H(A), \dim_H(B)\}. \quad (2.2.5)$$

In het artikel [Kal+20] wordt naar een subklasse overlevingsverzamelingen gekeken. Later kijken we onder andere naar de Hausdorffdimensie van deze subklasse overlevingsverzamelingen. We definiëren nu de subklasse overlevingsverzamelingen zoals deze bekeken worden in [Kal+20].

2.3 De overlevingsverzameling $K_\beta(t)$

De overlevingsverzameling is een belangrijk onderdeel in het artikel [Kal+20]. Deze bekijken we in een minder brede zin als in gedefinieerd in Definitie 2.2. Er worden gaten bestudeerd van de vorm $(0, t)$ met $t \in [0, 1]$. We geven de definitie van de overlevingsverzameling zoals we die in de rest van de scriptie gaan gebruiken.

Definitie 2.7. Zij $\beta \in (2, 3)$ en zij $t \in [0, 1)$ en bekijk het interval $(0, t)$. Dan is de *overlevingsverzameling* van de afbeelding T_β gedefinieerd als de verzameling

$$K_\beta(t) := \{x \in [0, 1) : T_\beta^n(x) \notin (0, t) \text{ voor alle } n \geq 0\}.$$

We beperken ons dus gaten van de vorm $(0, t)$, $t \in [0, 1)$. In het verdere onderzoek splitsen we de overlevingsverzameling. We bekijken de punten die in 0 terechtkomen apart.

$$\begin{aligned} K_\beta^0(t) &= \{x \in [0, 1) : \exists M \text{ zodanig dat } T_\beta^M(x) = 0 \text{ en } T_\beta^n(x) \notin (0, t) \text{ voor alle } n < M\}. \\ K_\beta^+(t) &= \{x \in [0, 1) : T_\beta^n(x) \geq t \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Naast deze definitie definiëren we de symbolische overlevingsverzameling als

$$\mathcal{K}_\beta(t) := \{(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta : \pi_\beta((x_i)) \in K_\beta(t)\}.$$

Analoog definiëren we de symbolische verzamelingen $\mathcal{K}_\beta^0(t)$ en $\mathcal{K}_\beta^+(t)$. We bewijzen de volgende stelling over $K_\beta^0(t)$.

Stelling 2.8. *De verzameling $K_\beta^0(t)$ is voor alle $t > 0$ aftelbaar.*

Bewijs. Zij $x \in K_\beta^0(t)$. Dan bestaat er een $M > 0$ zodanig dat voor alle $m > M$ geldt $d_m(x, \beta) = 0$ en laat $M = M(x)$ de minimale waarde zijn waarvoor dit geldt. Dan bestaat er een woord $w = w(x) \in \{0, 1, 2\}^M$ zodanig dat $d(x, \beta) = w\bar{0}$. We definiëren nu de functie

$$\psi : K_\beta^0(t) \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \sum_{n=1}^M d_n(x, \beta) \cdot 3^n \text{ voor } x \neq 0.$$

We weten dat ieder natuurlijk getal een unieke representatie heeft in grondtal 3, dus is ψ injectief. Omdat \mathbb{N} aftelbaar is impliceert dit dat $K_\beta^0(t)$ dit ook is. \square

In Vergelijking (2.2.4) hebben we gezien dat de Haudorffdimensie van een aftelbare verzameling altijd 0 is en in Stelling 2.8 hebben we bewezen dat $K_\beta^0(t)$ aftelbaar is. We herinneren ons de identiteit gegeven in Vergelijking (2.2.5) uit [Fal14]. We leiden de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ af als

$$\dim_H(K_\beta(t)) = \dim_H(K_\beta^0(t) \cup K_\beta^+(t)) = \sup\{\dim_H(K_\beta^0(t)), \dim_H(K_\beta^+(t))\} = \dim_H(K_\beta^+(t)).$$

Om deze reden bekijken we de Hausdorffdimensie van $K_\beta^+(t)$, omdat $K_\beta(t)$ niet aftelbaar is als t klein genoeg is. Door middel van β -ontwikkelingen kunnen we daarnaast een precieze karakterisatie geven van $K_\beta^+(t)$.

Stelling 2.9. *Zij $d(t, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta$. Dan geldt voor alle $d(x, \beta) \in \mathcal{K}_\beta^+(t)$ met bijbehorende $d(x, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta$ dat*

$$d(t, \beta) \leq \sigma^n(d(x, \beta)) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ voor alle } n \geq 0.$$

De β -ontwikkeling $d(t, \beta)$ geeft dus een ondergrens voor $\mathcal{K}_\beta^+(t)$ zoals $\tilde{d}(1, \beta)$ een bovengrens geeft voor \mathcal{Q}_β .

Bewijs. Stel er geldt niet $d(t, \beta) \leq \sigma^n(d(x, \beta))$ voor alle $n \geq 0$. Dan is er dus een zekere $k \geq 0$ zodanig dat $\sigma^k(d(x, \beta)) < d(t, \beta)$. Vanuit Gevolg 1.10 volgt $\pi_\beta(\sigma^k(d(x, \beta))) < t$. Daarom geldt

$$(0, t) \ni \pi_\beta(\sigma^k(d(x, \beta))) = \pi_\beta(d(T_\beta^k(x), \beta)) = T_\beta^k(x).$$

We concluderen hieruit dat $x \notin K_\beta^+(t)$, wat een tegenstelling oplevert. \square

Gevolg 2.10. *Voor de symbolische overlevingsverzameling $\mathcal{K}_\beta^+(t)$ geldt*

$$\mathcal{K}_\beta^+(t) = \{(x_i) \in \mathcal{Q}_\beta : d(t, \beta) \leq \sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ voor alle } n \geq 0\}.$$

Bij het kijken naar $d(x, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta$ kunnen we met Stelling 2.9 controleren of $d(x, \beta) \in \mathcal{K}_\beta^+(t)$. In Paragraaf 4.1 berekenen we een t waarvoor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ positief is. We bekijken nu de functie

$$F_\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), t \mapsto K_\beta^+(t)$$

en observeren dat deze functie dalend is. Dat betekent dat alle $t_1 < t_2$ geldt dat als $x \in K_\beta^+(t_2)$ er ook $x \in K_\beta^+(t_1)$ geldt, oftewel $K_\beta(t_1) \subset K_\beta(t_2)$. Dit is omdat

$$d(t_1, \beta) < d(t_2, \beta) \leq \sigma^n(d(x, \beta)) \text{ voor alle } n \geq 0.$$

In [Urb86] is bewezen dat de functie $\tilde{F}_\beta : t \mapsto K_\beta(t)$ λ -bijna overal lokaal constant is. We weten dat op de punten waar \tilde{F}_β niet constant is er punten in het gat $(0, t)$ vallen. Op punten waar F_β niet constant is, vallen er punten in het gat $[0, t)$. Oftewel, als F_β constant is, is \tilde{F}_β dat ook en dus is F_β ook λ -bijna overal lokaal constant. Dat wil zeggen dat

$$\lambda(\{t \in [0, 1] : F_\beta(t) \text{ is constant}\}) = 1.$$

In [Kal+20] is onderzoek gedaan naar de verzameling punten waar F_β niet constant is. Deze verzameling heet de *bifurcatieverzameling*.

2.4 Bifurcatieverzameling E_β

We definiëren de *bifurcatieverzameling* door middel van K_β^+ , zonder F_β .

Definitie 2.11. De *bifurcatieverzameling* E_β is gedefinieerd als

$$E_\beta := \{t \in (0, 1) : K_\beta^+(\varepsilon) \neq K_\beta^+(t) \text{ voor alle } \varepsilon > t\}. \quad (2.4.1)$$

Dit is hetzelfde als de verzameling van punten waar F_β niet constant is. Zij $t \notin E_\beta$, dan bestaat er een $\varepsilon > t$ zodanig dat $K_\beta^+(t) = K_\beta^+(\varepsilon)$. Dat betekent dat op het interval (t, ε) geen punten zitten die wel in $K_\beta^+(t)$ zitten, maar niet in $K_\beta^+(\varepsilon)$. Oftewel, F_β is constant op het interval $[t, \varepsilon]$. Andersom, voor $t \in E_\beta$ geldt voor alle $\varepsilon > t$ dat F_β niet constant is op het interval $[t, \varepsilon]$. Voor alle $\varepsilon > t$ bestaat er dus een $x \in [t, \varepsilon]$ zodanig dat $x \in K_\beta^+(t)$ en $x \notin K_\beta^+(\varepsilon)$. Daarom concluderen we dat $t \in K_\beta(t)^+$. We vinden dus een alternatieve karakterisering voor E_β . Deze is geïntroduceerd in [Urb86] en bewezen in [Kal+20].

Opmerking 2.12. In het artikel [Kal+20] is E_β gedefinieerd als de bifurcatieverzameling van $K_\beta(t)$, in plaats van $K_\beta^+(t)$. E_β in deze scriptie is dus E_β^+ in [Kal+20].

Propositie 2.13. *Er geldt $E_\beta = \{t \in [0, 1) : t \in K_\beta^+(t)\}$.*

Uit deze propositie leiden we af dat voor alle t geldt $E_\beta \cap [t, 1) \subseteq K_\beta^+(t)$. Er geldt dus voor de Lebesguemaat van E_β dat $\lambda(E_\beta) = 0$. We leiden dan de volgende equivalente beschrijving van E_β af.

Stelling 2.14. *Er geldt*

$$\begin{aligned} E_\beta &= \{t \in [0, 1) : T_\beta^n(t) \geq t \text{ voor alle } n \geq 0\} \\ &= \{t \in [0, 1) : d(t, \beta) \leq \sigma^n(d(t, \beta)) \text{ voor alle } n \geq 0\}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Bewijs. Het bewijs van deze equivalentie is gegeven in Propositie 2.3 van [Kal+20]. \square

We definiëren daarnaast de symbolische bifurcatieverzameling als

$$\mathcal{E}_\beta := \{d(t, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta : t \in E_\beta\} = \{d(t, \beta) : d(t, \beta) \leq \sigma^n(d(t, \beta)) \text{ voor alle } n \geq 0\}. \quad (2.4.3)$$

Verder merken we het volgende op over E_β .

Lemma 2.15. *Zij $\beta_1, \beta_2 > 1$ zodanig dat $\beta_1 < \beta_2$. Dan geldt $\mathcal{E}_{\beta_1} \subset \mathcal{E}_{\beta_2}$.*

Bewijs. Zij (x_i) in \mathcal{E}_{β_1} . Dan geldt volgens Stelling 2.14 dat $(x_i) \leq \sigma^n((x_i))$ voor alle $n \geq 0$. Daarnaast geldt volgens Lemma 1.17 dat $\sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta_1) < \tilde{d}(1, \beta_2)$ voor alle $n \geq 0$. Dus geldt $(x_i) \in \mathcal{E}_{\beta_2}$ en dus $\mathcal{E}_{\beta_1} \subset \mathcal{E}_{\beta_2}$. \square

Merk op dat dit enkel geldt voor de symbolische bifurcatieverzamelingen, in het algemeen geldt namelijk $\pi_{\beta_1}((x_i)) \neq \pi_{\beta_2}((x_i))$ en bevatten de reële bifurcatieverzamelingen verschillende punten (met dezelfde β -ontwikkeling). Een belangrijk onderzoek betreffende de bifurcatieverzameling is de aan- of afwezigheid van geïsoleerde punten in de verzameling, De aanwezigheid van een niet-geïsoleerd punt zegt iets de omgeving van dat punt en dus iets over de dichtheid van andere punten in de omgeving van dat punt. Een methode om te laten zien dat een punt $x \in A \subset \mathbb{R}$ niet geïsoleerd ligt in een verzameling is het opstellen van een convergent rijtje naar x . Een resultaat, bewezen in [Urb86] en [Nil09], betreft de afwezigheid van geïsoleerde punten in de bifurcatieverzameling E_2 .

Lemma 2.16. *De bifurcatieverzameling E_2 bevat geen geïsoleerde punten.*

In [Kal+20] is gekeken naar de $\beta \in (1, 2)$ zodat $\overline{E_\beta}$ een Cantorverzameling is, deze verzameling is definiëren we als \tilde{V} . Precies geldt dan

$$\tilde{V} := \{\beta \in (1, 2) : E_\beta \text{ bevat geen geïsoleerde punten}\}. \quad (2.4.4)$$

In [Kal+20] wordt deze verzameling precies gekarakteriseerd door middel van condities op $\tilde{d}(1, \beta)$. We gebruiken de verzameling \tilde{V} in Stelling 3.1 om een verzameling $V \subset (2, 3)$ te vinden waarvoor E_β geen geïsoleerde punten bevat op het interval $[\frac{1}{\beta}, 1]$ voor alle $\beta \in V$.

3 Hoofdresultaten

In [Kal+20] is onderzoek gedaan naar E_β met $\beta \in (1, 2)$. In deze scriptie doen we onderzoek naar E_β met $\beta \in (2, 3)$. We kijken of bepaalde resultaten over geïsoleerde punten uit [Kal+20] toe te passen zijn op een deelverzameling van E_β met $\beta \in (2, 3)$. In de verdere stellingen breiden we dit uit en kijken we naar de verzameling E_β .

3.1 Geïsoleerde punten in $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$

In (2.4.4) is de verzameling \tilde{V} gedefinieerd als de verzameling van $\beta \in (1, 2)$ waarvoor E_β geen geïsoleerde punten bevat. Deze verzameling is precies gedefinieerd in [Kal+20]. In de volgende stelling geven we een andere verzameling $V \subset (2, 3)$ met de eigenschap dat voor alle $\beta \in V$ de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$ geen geïsoleerde punten bevat. We definiëren de functie

$$\varphi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{1, 2\}^{\mathbb{N}} : (x_i) \mapsto (x_i + 1).$$

Voor het rijtje $\overline{01}$ geldt dus bijvoorbeeld $\varphi(\overline{01}) = \overline{12}$. We formuleren het eerste resultaat.

Stelling 3.1. *Definieer de verzameling V als*

$$V := \left\{ \beta \in (2, 3) \mid \text{Er bestaat een } \tilde{\beta} \in \tilde{V} : \tilde{d}(1, \beta) = \varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) \right\}.$$

Dan geldt voor alle $\beta \in V$ dat de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$ geen geïsoleerde punten bevat.

Laat $\beta \in V$. Voor het gemak definiëren we de verzameling $A_\beta := E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$ en $\mathcal{A}_\beta := \{d(x, \beta) : x \in A_\beta\}$. Er geldt voor de verzameling \mathcal{A}_β dat

$$\mathcal{A}_\beta = \left\{ (x_i) \in \mathcal{Q}_\beta : 1\bar{0} \leq \sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ en } (x_i) \leq \sigma^n((x_i)) \text{ voor alle } n \geq 0 \right\}.$$

Uit $\inf A_\beta \geq \frac{1}{\beta}$ en $d(\frac{1}{\beta}, \beta) = 1\bar{0}$ volgt vanwege eigenschap (2.4.2) van de bifurcatieverzameling dat $\inf \mathcal{A}_\beta = \bar{1}$, dus $\mathcal{A}_\beta \subset \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Om Stelling 3.1 te bewijzen volgen eerst twee lemma's.

Lemma 3.2. *Voor alle $\tilde{\beta} \in \tilde{V}$ bestaat er een unieke $\beta \in (2, 3)$ zodanig dat $\tilde{d}(1, \beta) = \varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta}))$.*

Bewijs. Zij $\tilde{\beta} \in \tilde{V}$ en bekijk $\tilde{d}(1, \tilde{\beta})$. Er geldt $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = (\tilde{d}_n(1, \tilde{\beta}) + 1)_{n>0}$. We zoeken een $\beta \in (2, 3)$ zodanig dat geldt

$$\pi_\beta \left((\tilde{d}_n(1, \tilde{\beta}) + 1)_{n>0} \right) = \sum_{n>0}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n(1, \tilde{\beta}) + 1}{\beta^n} = 1.$$

We weten dat $\tilde{d}_n(1, \tilde{\beta}) \in \{0, 1\}$ voor alle $n > 0$. We bekijken voor ieder rijtje $(x_i) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ de functie $g_{(x_n)} : \beta \mapsto \sum_{n>0}^{\infty} \frac{x_n}{\beta^n}$ op het domein $[2, 3]$. We merken op dat deze functie continu en strikt dalend is voor alle $(x_n) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Gegeven een (x_n) weten we dat $g_{(x_n)}(2) \geq 1$, omdat $\inf\{1, 2\}^{\mathbb{N}} = \bar{1}$ en $\sum_{n>0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Daarnaast weten we dat $g_{(x_n)}(3) \leq 1$, omdat $\sup\{1, 2\}^{\mathbb{N}} = \bar{2}$ en $\sum_{n>0}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1$. Met de tussenwaardstelling vinden we dan dat er een $\beta \in (2, 3)$ bestaat zodanig dat $g_{(x_n)}(\beta) = 1$. Het rijtje $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta}))$ is de quasi-greedy ontwikkeling van 1 in de basis β , omdat $\pi_\beta(\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta}))) = 1$ en omdat $\tilde{d}(1, \tilde{\beta})$ een quasi-greedy ontwikkeling is. Omdat $g_{(x_n)}$ strikt dalend is, is β uniek. \square

Lemma 3.3. *Bekijk de verzameling $\beta \in (2, 3)$ waarvoor er een $\tilde{\beta} \in (1, 2)$ bestaat met $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = \tilde{d}(1, \beta)$. De functie $\varphi|_{\mathcal{E}_\beta}$ met als codomein \mathcal{A}_β is voor alle $\beta \in \tilde{V}$ welgedefinieerd (1), ordebewarend (2), bijjectief (3) en continu (4).*

Bewijs. We weten dat voor alle $(x_i) \in \mathcal{E}_\beta$ en alle $i \geq 0$ geldt dat $(x_i) \leq \sigma^n((x_i))$. Dit is de eigenschap van elementen uit de bifurcatieverzameling.

1. Zij $(x_i) \in \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$. Dan volgt $\varphi((x_i)) = (x_i + 1)_{i \geq 0}$. Omdat $(x_i) \in \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$ geldt voor alle $n \geq 0$ dat $(x_i) \leq \sigma^n(x_i)$. Er geldt dan ook voor alle $n \geq 0$, $(x_i + 1) \leq \sigma^n(x_i + 1)$. Daarnaast weten we dat $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = \tilde{d}(1, \beta)$. Omdat geldt $\sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \tilde{\beta})$ voor alle $n \geq 0$ volgt hieruit dat $\sigma^n(\varphi(x_i)) = \varphi(\sigma^n(x_i)) < \varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = \tilde{d}(1, \beta)$ voor alle $n \geq 0$. Voor $\varphi((x_i))$ geldt dus voor alle $n \geq 0$

$$1\bar{0} \leq \sigma^n(\varphi((x_i))) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ en } \varphi((x_i)) \leq \sigma^n(\varphi((x_i))).$$

Dus $\varphi((x_i))$ is een element van \mathcal{A}_β en φ is welgedefinieerd.

2. Zij $(x_i), (y_i) \in \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$, zodanig dat $(x_i) < (y_i)$. Omdat $(x_i) < (y_i)$ weten we dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $x_i = y_i$ voor alle $i < N$ en $x_N < y_N$. Dan geldt ook $x_i + 1 = y_i + 1$ en $x_N + 1 < y_N + 1$ voor alle $i < N$ en dus $\varphi((x_i)) < \varphi((y_i))$. De functie φ is dus ordebewarend.
3. Definieer de functie $\varphi^{-1} : \mathcal{A}_\beta \rightarrow \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$ als

$$\varphi^{-1}((x_i)_{i \geq 1}) = (x_i - 1)_{i \geq 1}.$$

We weten dat $\mathcal{A}_\beta \subset \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ en dus $\varphi^{-1}(\mathcal{A}_\beta) \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zij $(x_i) \in \mathcal{A}_\beta$. Er geldt voor $(x_i) \leq \sigma^n((x_i))$, met hetzelfde argument als voor φ geldt dan ook $\varphi^{-1}((x_i)) \leq \sigma^n(\varphi^{-1}((x_i)))$ voor alle $i \geq 0$. Daarnaast geldt $\sigma^n((x_i)) \leq \tilde{d}(1, \beta)$, omdat $(x_i) \in \mathcal{A}_\beta$ en $\varphi^{-1}(\tilde{d}(1, \beta)) = \tilde{d}(1, \tilde{\beta})$. Dus φ^{-1} is welgedefinieerd. Dan geldt ten eerste

$$\varphi(\varphi^{-1}((x_i)_{i \geq 1})) = \varphi((x_i - 1)_{i \geq 1}) = (x_i).$$

Ten tweede geldt

$$\varphi^{-1}(\varphi((x_i)_{i \geq 1})) = \varphi^{-1}((x_i + 1)_{i \geq 1}) = (x_i).$$

Dus is φ bijectief met als inverse φ^{-1} .

4. Om de continuïteit van φ te bewijzen laten we zien dat het beeld van elke convergente rij $x^{(k)}$ in $\mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$ ook convergeert in \mathcal{A}_β en wel naar de functiewaarde van de limiet in $\mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$. Oftewel,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^{(k)}) = \varphi(\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}).$$

Om het te hebben over convergentie in de symbolische verzamelingen herinneren we ons de metriek $p : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven in (1.1.4) als

$$p((x_n), (y_n)) = 2^{-\inf\{n \geq 1 : x_n \neq y_n\}} \text{ voor alle } (x_n) \neq (y_n) \text{ en } p((x_n), (x_n)) := 0.$$

Zij $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ een convergente rij in $\mathcal{E}_{\tilde{\beta}}$ met als limiet (c_i) . Dan geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(x^{(k)}, (c_i)) = 0. \text{ Oftewel, } \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-\inf\{i \geq 1 : x_i^{(k)} \neq c_i\}} = 0.$$

Vervolgens kijken we of $\varphi(x^{(k)})$ convergeert naar $\varphi((c_i))$. We bekijken

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(\varphi(x^{(k)}), \varphi((c_i))).$$

Zij $k \geq 0$, dan zien we dat $p(\varphi(x^{(k)}), \varphi((c_i))) = p((x_i^{(k)} + 1), (c_i + 1))$ en dus

$$p((x_i^{(k)} + 1), (c_i + 1)) = 2^{-\inf\{i \geq 1 : x_i^{(k)} + 1 \neq c_i + 1\}} = 2^{-\inf\{i \geq 1 : x_i^{(k)} \neq c_i\}} = p(x^{(k)}, (c_i)).$$

We vinden dus dat $p(\varphi(x^{(k)}), \varphi((c_i))) = p(x^{(k)}, (c_i))$. Daarom geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(\varphi(x^{(k)}), \varphi((c_i))) = 0.$$

Hieruit volgt dat φ continu is.

De vier eigenschappen van φ zijn nu bewezen. □

Omdat we weten dat de projectieafbeelding π_β een topologische conjugatie vormt tussen de reële verzameling $[0, 1)$ en de symbolische verzameling \mathcal{Q}_β , zie Stelling 1.12, merken we op dat Figuur 3.1 een beeld geeft van de situatie.

$$E_{\tilde{\beta}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\tilde{\beta}}^{-1}} \\ \xleftrightarrow{\pi_{\tilde{\beta}}} \\ \xleftarrow{\pi_{\tilde{\beta}}} \end{array} \mathcal{E}_{\tilde{\beta}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftrightarrow{\varphi^{-1}} \\ \xleftarrow{\varphi^{-1}} \end{array} \mathcal{A}_\beta \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_\beta} \\ \xleftrightarrow{\pi_\beta^{-1}} \\ \xleftarrow{\pi_\beta^{-1}} \end{array} A_\beta$$

Figuur 3.1: Commutatieve diagram.

Met Lemma 3.3 bewijzen we Stelling 3.1.

Bewijs van Stelling 3.1. Zij $\beta \in V$, $x \in A_\beta$ en zij $\varepsilon > 0$. We bekijken de verzameling $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A_\beta$. Verder definiëren we de functie $f : A_\beta \rightarrow E_{\tilde{\beta}}$, gegeven door $f(x) = (\pi_{\tilde{\beta}} \circ \varphi^{-1} \circ \pi_\beta^{-1})(x)$, waarbij $\tilde{\beta} \in (1, 2)$ zo is dat $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = \tilde{d}(1, \beta)$. Vanuit Gevolg 1.10 weten we dat $\pi_{\tilde{\beta}}$ en π_β^{-1} orbewarend zijn. Hieruit concluderen we met Lemma 3.3 dat f ook orbewarend is. Verder volgt uit Stelling 1.12 dat f ook continu en bijtief is. Hieruit leiden we af dat

$$f^{-1}\left((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E_{\tilde{\beta}}\right) \subset (f^{-1}(x - \varepsilon), f^{-1}(x + \varepsilon)) =: (a, b)$$

en dat $f^{-1}(x) \in (a, b)$. Daarnaast weten we dat $f^{-1}(x) \in E_{\tilde{\beta}}$, omdat $\tilde{\beta} \in \tilde{V}$. Neem

$$\varepsilon_0 = \min\{|f^{-1}(x) - a|, |f^{-1}(x) - b|\}.$$

Omdat $E_{\tilde{\beta}}$ geen geïsoleerde punten bevat, volgt dan dat er een $y \in E_{\tilde{\beta}} \cap (f^{-1}(x) - \varepsilon_0, f^{-1}(x) + \varepsilon_0) \setminus \{f^{-1}(x)\}$ bestaat. Dus geldt $f(y) \in A_\beta$ en omdat $y \neq f^{-1}(x)$ geldt $f(y) \neq x$. Als laatste geldt $f(y) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ en omdat ε willekeurig gekozen was ligt x niet geïsoleerd. Daarnaast hebben we $x \in A_\beta$ willekeurig gekozen, dus bevat A_β geen geïsoleerde punten. \square

We hebben nu bewezen dat er voor alle $\tilde{\beta} \in \tilde{V}$ een $\beta \in (2, 3)$ bestaat zodanig dat de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\tilde{\beta}}, 1]$ geen geïsoleerde punten bevat. Namelijk die β waarvoor geldt $\varphi(\tilde{d}(1, \tilde{\beta})) = \tilde{d}(1, \beta)$.

Merk op dat $\tilde{\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in V$. Voor deze $\tilde{\beta}$ geldt $\tilde{d}(1, \tilde{\beta}) = \overline{10}$. Met $\beta = 1 + \sqrt{3}$ zien we dat geldt

$$\varphi(\overline{10}) = \overline{21} = \tilde{d}(1, 1 + \sqrt{3}).$$

Oftewel, afleidend uit Stelling 3.1 weten we dat de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\tilde{\beta}}, 1]$ voor $\beta = 1 + \sqrt{3}$ geen geïsoleerde punten bevat. Een natuurlijke vraag die hieruit volgt is of voor $\beta = 1 + \sqrt{3}$ de verzameling $E_\beta \cap [0, \frac{1}{\tilde{\beta}}]$ geïsoleerde punten bevat. Dat bekijken we in Hoofdstuk 3.2.

3.2 Geïsoleerde punten voor $\beta_0 = 1 + \sqrt{3}$

We schrijven $\beta_0 = 1 + \sqrt{3}$. Bij het kijken naar punten in de verzameling E_{β_0} weten we dat alle β_0 -ontwikkelingen $d(x, \beta_0) \in \mathcal{E}_{\beta_0}$ met $d_1(x, \beta_0) = 1$ niet geïsoleerd liggen. Dit is bewezen in Stelling 3.1. Nu bekijken we de verzameling $B := E_{\beta_0} \cap [0, \frac{1}{\beta_0})$. De symbolische verzameling is dan gelijk aan $\{d(x, \beta_0) \in \mathcal{E}_{\beta_0} : d_1(x, \beta_0) = 0\}$. We formuleren de volgende stelling.

Stelling 3.4. *Zij $\beta_0 = 1 + \sqrt{3}$. De verzameling E_{β_0} bevat geen geïsoleerde punten.*

We bekijken \mathcal{E}_{β_0} . Hier geldt voor alle $(x_n) \in \mathcal{E}_{\beta_0}$

$$(x_n) \leq \sigma^i((x_n)) \text{ en } \sigma^i((x_n)) < \tilde{d}(1, \beta_0) = \overline{21} \text{ voor alle } i \geq 0.$$

Om Stelling 3.4 te bewijzen laten we zien dat B geen geïsoleerde punten bevat.

Stelling 3.5. *De verzameling $B = E_{\beta_0} \cap [0, \frac{1}{\beta_0})$ bevat geen geïsoleerde punten.*

Bewijs. We bekijken \mathcal{B} en splitsen deze op in drie verzamelingen, namelijk

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{d(x, \beta_0) \in \mathcal{B} : \exists M > 0 \text{ zodanig dat } d_n(x, \beta_0) = 1, \forall n > M\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \{x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1 : \exists M > 0 \text{ zodanig dat } d_n(x, \beta_0) \neq 0 \forall n > M\} \text{ en} \\ \mathcal{B}_3 &= \mathcal{B} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2).\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Er geldt $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$. Voor elk van deze verzamelingen laten we zien dat deze geen geïsoleerde punten bevat.

- Zij $x \in B$ met $d(x, \beta_0) \in \mathcal{B}_1$. Dan is er een woord $w = w_1 w_2 \dots w_M \in \{0, 1, 2\}^M$ zodanig dat $w_1 = 0$ en $d(x, \beta_0) = w\bar{1}$. Definieer een rijtje $x^{(n)} \subset \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ met $x^{(n)} = w\bar{1}^n\bar{2}$. Dan geldt voor iedere $n > 1$

$$\sigma^i(x^{(n)}) < \bar{2}\bar{1} \text{ voor alle } i \geq 0.$$

Oftewel, er geldt $x^{(n)} \in \mathcal{Q}_{\beta_0}$ voor alle $n > 1$. Hieruit volgt samen met Stelling 1.12 dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{\beta_0}(x^{(n)}) = \pi_{\beta_0}(d(x, \beta_0)) = x.$$

Om te laten zien dat x niet geïsoleerd ligt, laten we zien dat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$ voor alle $n > 1$. Hiervoor laten we zien dat voor alle $n > 1, i \geq 0$ geldt dat $x^{(n)} \leq \sigma^i(x^{(n)})$. Zij $n > 1$ en stel dat er een $i \geq 1$ bestaat met $\sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}$. Laat vanuit Definitie 1.7 $N > 0$ zo zijn dat $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_j^{(n)}$ voor alle $1 \leq j \leq N$ en $\sigma^i(x^{(n)})_{N+1} < x_{N+1}^{(n)}$. Ten opzichte van x is het enige dat veranderd is in $x^{(n)}$ dat in de staart $\bar{1}$ na elke k 1'en een 1 in een 2 veranderd is. Hieruit volgt dat

$$d(x, \beta_0) \leq \sigma^i(d(x, \beta_0)) < \sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}.\tag{3.2.2}$$

Er geldt $d_j(x, \beta_0) = x_j^{(n)}$ voor alle $1 \leq j \leq M + n$, wat betekent dat $N \geq M + n$. Vanwege (3.2.2) vinden we dan dat ook moet gelden $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_j^{(n)}$ voor alle $1 \leq j \leq M + n$. Laat

$$M_0 := \max\{j > 0 : d_j(x, \beta_0) = 0\}.$$

Deze M_0 bestaat omdat er een $M > 0$ bestaat zodanig dat $d_n(x, \beta_0) = 1$, voor alle $n > M$. Dan geldt er $M_0 \leq M \leq N$, aangezien $x^{(n)}$ alleen nullen bevat in w en $|w| = M$. Hieruit volgt dat $0 = d_{M_0}(x, \beta_0) = x_{M_0}^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_{M_0}$. Echter, voor alle $j > M_0 - i$ geldt $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_{j+i}^{(n)} > 0$, dus $\sigma^i(x^{(n)})_{M_0} = x_{M_0+i}^{(n)} > 0$. Dit geeft een tegenspraak en we concluderen dat er geen $i > 0$ bestaat zodanig dat $\sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}$. Er geldt dus voor alle $n > 0$ dat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$. $\pi_{\beta_0}(\mathcal{B}_1)$ bevat dus geen geïsoleerde punten in B .

- Zij $x \in B$ met $d(x, \beta_0) \in \mathcal{B}_2$. We weten dat het woord $2\bar{2}$ niet voorkomt in $d(x, \beta_0)$. Dus bestaat er een woord $w \in \{0, 1, 2\}^M$ zodanig dat $d(x, \beta_0) = w21^{p_1}21^{p_2}\dots$ met $(p_i)_{i>0} \subset \mathbb{N}_{>0}$. Omdat $\sigma^i(d(x, \beta_0)) < \bar{2}\bar{1}$ voor alle $i \geq 0$ bestaan er oneindig veel p_i met $p_i > 1$. Definieer dan $(j_k)_{k>0} \subset \mathbb{N}$ een strikt stijgende rij zijn met $p_{j_k} > 1$ voor alle $k > 0$. Dan definiëren we de rij $x^{(n)} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ met

$$x^{(n)} = w21^{p_1}2\dots 21^{p_{j_n-1}}21\bar{2}\bar{1}.$$

Dan geldt $\sigma^i(x^{(n)}) < \bar{2}\bar{1}$ voor alle $i \geq 0$ en $n > 0$. Iedere $x^{(n)}$ is dus een β -ontwikkeling en er volgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{\beta_0}(x^{(n)}) = \pi_{\beta_0}(d(x, \beta_0)) = x.$$

We laten nu zien dat voor alle $x^{(n)}$ geldt $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$, oftewel $x^{(n)} \leq \sigma^i(x^{(n)})$ voor alle $i \geq 0$. Zij $n > 0$ en stel dat er een $i > 0$ bestaat zodanig dat $x^{(n)} > \sigma^i(x^{(n)})$. Dan geldt

$$d(x, \beta_0) \leq \sigma^i(d(x, \beta_0)) < \sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}.\tag{3.2.3}$$

Laat $N > 0$ zoals in Definitie 1.7 zo zijn dat $x_j^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_j$ voor alle $1 \leq j \leq N$ en $\sigma^i(x^{(n)})_{N+1} < x_{N+1}^{(n)}$. Verder weten we dat geldt $d_j(x, \beta_0) = x_j^{(n)}$ voor alle $0 < j \leq M < N$.

We concluderen dan met behulp van (3.2.3) dat $d_j(x, \beta_0) = x_j^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_j$ voor alle $0 < j \leq M$. Laat

$$M_0 := \max\{j > 0 : d_j(x, \beta_0) = 0\},$$

dan geldt er $M_0 \leq M < N$, aangezien in $x^{(n)}$ alleen nullen bevat in w en $|w| = M$. Daarom geldt $0 = d_{M_0}(x, \beta_0) = x_{M_0}^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_{M_0}$. Echter, voor alle $j > M_0 - i$ geldt $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_{j+i}^{(n)} > 0$, dus $\sigma^i(x^{(n)})_{M_0} = x_{M_0+i}^{(n)} > 0$. Dit geeft een tegenspraak en we concluderen dat er geen $i > 0$ kan bestaan zodanig dat $\sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}$. Er geldt dus voor alle n dat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$. Dus is x geen geïsoleerd punt in B .

- Zij $x \in B$ met $d(x, \beta_0) \in \mathcal{B}_3$. Voor $d(x, \beta_0)$ geldt dat deze oneindig veel nullen bevat. Laat $(b_n) \subset \mathbb{N}$ een strikt stijgende rij zijn zodat $d_{b_n}(x, \beta_0) = 0$ voor alle $n > 0$. Definieer dan het rijtje $(x^{(n)})_{n>0}$ zodanig dat

$$x^{(n)} = d_1(x, \beta_0)d_2(x, \beta_0)\dots d_{b_n-1}(x, \beta_0)\bar{1}.$$

Dan geldt $\sigma^i(x^{(n)}) < \bar{2}\bar{1}$ voor alle $i \geq 0$ en alle $n > 0$ en dus is iedere $x^{(n)}$ een β -ontwikkeling. Verder zien we dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{\beta_0}(x^{(n)}) = \pi_{\beta_0}(d(x, \beta_0)) = x.$$

Om te laten zien dat $x \in B$ niet geïsoleerd ligt in E_{β_0} laten we zien dat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$ voor alle $n > 0$. Hiervoor laten we zien dat $x^{(n)} \leq \sigma^i(x^{(n)})$ voor alle $n > 0$, $i \geq 0$. Zij $n > 0$ en stel dat er een $i > 0$ bestaat zodanig dat $x^{(n)} > \sigma^i(x^{(n)})$. Laat vanuit Definitie 1.7 $N > 0$ zo zijn dat $x_j^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_j$ voor alle $1 \leq j \leq N$ en $\sigma^i(x^{(n)})_{N+1} < x_{N+1}^{(n)}$. Dan geldt

$$d(x, \beta_0) \leq \sigma^i(d(x, \beta_0)) < \sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}. \quad (3.2.4)$$

Er geldt $d_j(x, \beta_0) = x_j^{(n)}$ voor alle $1 \leq j \leq b_n - 1$, vanwege (3.2.4) concluderen we dan dat moet gelden $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_j^{(n)}$ voor alle $1 \leq j \leq b_n - 1$. Hieruit volgt dat $N \geq b_n - 1$. Laat

$$M_0 := \max\{k > 0 : x_k^{(n)} = 0\}.$$

Dan geldt er $M_0 \leq b_n - 1$, aangezien $x^{(n)}$ alleen nullen bevat voor index b_n . Hieruit volgt dat $0 = d_{M_0}(x, \beta_0) = x_{M_0}^{(n)} = \sigma^i(x^{(n)})_{M_0}$. Echter, voor alle $j > M_0 - i$ geldt $\sigma^i(x^{(n)})_j = x_{j+i}^{(n)} > 0$, dus $\sigma^i(x^{(n)})_{M_0} = x_{M_0+i}^{(n)} > 0$. Dit geeft een tegenspraak en we concluderen dat er geen $i > 0$ bestaat zodanig dat $\sigma^i(x^{(n)}) < x^{(n)}$. Er geldt dus voor alle $n > 0$ dat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_{\beta_0}$. Dus ligt x niet geïsoleerd in B .

Voor iedere $x \in B$ is nu laten zien dat dit geen geïsoleerd punt is. □

We bewijzen Stelling 3.4.

Bewijs van Stelling 3.4. In Stelling 3.5 is bewezen dat geen enkel punt in de verzameling $B = E_{\beta_0} \cap [0, \frac{1}{\beta_0})$ geïsoleerd ligt en uit Stelling 3.1 volgt dat dat de verzameling $A_{\beta_0} = E_{\beta_0} \cap [\frac{1}{\beta_0}, 1]$ geen geïsoleerde punten bevat. We concluderen dat dat de verzameling $E_{\beta_0} = A_{\beta_0} \cup B$ geen geïsoleerde punten bevat. □

In Stelling 3.4 is bewezen dat de verzameling E_{β} geen geïsoleerde punten bevat voor $\beta = 1 + \sqrt{3}$. De technieken in het bewijs van Stelling 3.5 zijn echter ook geldig voor andere $\beta \in (2, 3)$, zoals we in de volgende paragraaf zullen zien.

3.3 E_β met $\beta \in (2, 3)$

Het bewijs voor Stelling 3.4 is gedeeltelijk te generaliseren voor andere $\beta \in (2, 3)$. Door middel van twee stellingen geven we deelintervallen van $(2, 3)$ zodat bepaalde deelverzamelingen van E_β geen geïsoleerde punten bevatten voor alle β in deze deelintervallen. We beginnen met het definiëren van $B_\beta := E_\beta \cap [0, \frac{1}{\beta}]$, met de symbolische verzameling $\mathcal{B}_\beta := \{d(x, \beta) : x \in B_\beta\}$. Deze verzameling splitsen we op dezelfde manier als in Stelling 3.4 bij (3.2.1) op in $\mathcal{B}_\beta^1, \mathcal{B}_\beta^2, \mathcal{B}_\beta^3$. We definiëren

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\beta^1 &= \{d(x, \beta) \in \mathcal{B}_\beta : \exists M > 0 \text{ zodanig dat } d_n(x, \beta) = 1, \forall n > M\}, \\ \mathcal{B}_\beta^2 &= \{x \in \mathcal{B}_\beta \setminus \mathcal{B}_\beta^1 : \exists M > 0 \text{ zodanig dat } d_n(x, \beta) \neq 0 \forall n > M\} \text{ en} \\ \mathcal{B}_\beta^3 &= \mathcal{B}_\beta \setminus (\mathcal{B}_\beta^1 \cup \mathcal{B}_\beta^2).\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Verder definiëren we $B_\beta^1 := \pi_\beta(\mathcal{B}_\beta^1)$, $B_\beta^2 := \pi_\beta(\mathcal{B}_\beta^2)$ en $B_\beta^3 := \pi_\beta(\mathcal{B}_\beta^3)$.

Stelling 3.6. Voor $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \beta < 3$ bevat de verzameling B_β^1 geen geïsoleerde punten in E_β .

Bewijs. Om te bewijzen dat B_β^1 geen geïsoleerde punten bevat definiëren we ten eerste het rijtje $(\beta_n)_{n \geq 0}$ zodanig dat $\tilde{d}(1, \beta_n) = \overline{21^n}$. Vanuit Lemma 1.17 weten we dat deze β_n bestaan. Er geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}(1, \beta_n) = 2\bar{1}$. Dit geeft dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

De splitsing in (3.3.1) is hetzelfde als de splitsing in (3.2.1). Om te laten zien dat voor alle $\beta \in (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$ en $x \in B_\beta^1$ geldt dat x geen geïsoleerd punt is in E_β , nemen we een willekeurige $x \in B_\beta^1$ vast en definiëren we een rijtje $x^{(n)}$ dat convergeert naar $d(x, \beta)$. We bewijzen dan ten eerste dat er een $N > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n > N$ en $i \geq 0$ geldt $\sigma^i(x^{(n)}) < \tilde{d}(1, \beta)$, zodat $(x^{(n)})_{n > N}$ een rijtje van β -ontwikkelingen is. Ten tweede tonen we aan dat voor alle $n > N$ en $i \geq 0$ geldt $x^{(n)} \leq \sigma^i(x^{(n)})$, zodat $x^{(n)} \in \mathcal{E}_\beta$.

Zij $\beta \in (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$ en zij $x \in B_\beta^1$. Dan geldt $d(x, \beta) = w\bar{1} = d_1 \dots d_M \bar{1}$, met $w \in \{0, 1, 2\}^M$ voor een of andere M . Definiër het rijtje $(x^{(n)})$ met $x^{(n)} = w\bar{1}^n \bar{2}$. Omdat $(\beta_m)_{m \geq 1}$ een monotoon dalend rijtje is naar $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, bestaat er altijd een $m \geq 1$ zodanig dat $\tilde{d}(1, \beta_{m+1}) < \tilde{d}(1, \beta) \leq \tilde{d}(1, \beta_m)$. Hieruit concluderen we dat geldt $\tilde{d}(1, \beta) = 21^m \bar{2} \dots$. We laten zien dat er een $N > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $n > N$ en $i \geq 0$ geldt $\sigma^i(x^{(n)}) < \tilde{d}(1, \beta)$. In ieder geval geldt duidelijk voor alle $i \geq M$ en alle $n > m + 1$ dat

$$\sigma^i(x^{(n)}) < \tilde{d}(1, \beta_{m+1}) = \overline{21^{m+1}} < \tilde{d}(1, \beta).$$

Stel $i < M$. We willen uiteindelijk een $N > 0$ vinden zodanig dat voor alle $n > N$ alle $x^{(n)}$ β -ontwikkelingen zijn. Stel dat er een $n \geq 1$ bestaat zodanig dat $\sigma^i(x^{(n)}) \geq \tilde{d}(1, \beta)$. Als er gelijkheid geldt, bestaat er dus een $n = n(i)$ zodanig dat

$$\sigma^i(x^{(n(i))}) = \sigma^i(w\bar{1}^{n(i)} \bar{2}) = \tilde{d}(1, \beta).$$

Omdat $\sigma^i(x^{(n)}) < \sigma^i(x^{(n+1)})$ voor alle $n > 0$, concluderen we dat voor alle $n > n(i)$ in ieder geval wel geldt $\sigma^i(x^{(n)}) < \tilde{d}(1, \beta)$. Bij ongelijkheid volgt de vergelijking

$$\sigma^i(d(x, \beta)) = d_i \dots d_M \bar{1} < \tilde{d}(1, \beta) = 21^m \bar{2} \dots < d_i \dots d_M \bar{1}^n \bar{2} = \sigma^i(x^{(n)}).$$

We vinden dus een $p(i) > n$ met $\tilde{d}(1, \beta) = d_i \dots d_M 1^{p(i)} \bar{2} \dots$. Dus geldt dan voor alle $n' \geq p(i) + 1$ dat $\sigma^i(x^{(n')}) = d_i \dots d_M \bar{1}^{n'} \bar{2} < d_i \dots d_M 1^{p(i)} \bar{2} \dots = \tilde{d}(1, \beta)$. Dan geldt dus voor alle $n \geq \max\{p(i) : 1 \leq i \leq M\}$ dat $\sigma^i(x^{(n)}) < \tilde{d}(1, \beta)$ voor alle $1 \leq i \leq M$. We concluderen dus dat voor alle $n > N := \max\{n(i), m + 1, p(i) : 1 \leq i \leq M\}$ geldt $x^{(n)} \in \mathcal{Q}_\beta$.

Als laatste laten we zien dat voor alle $n \geq N$ en $i \geq 0$ geldt $x^{(n)} \leq \sigma^i(x^{(n)})$. Deze vergelijking hangt echter niet af van $\tilde{d}(1, \beta)$. In het bewijs van Stelling 3.4 is hetzelfde rijtje $x^{(n)}$ gebruikt en dus is dit bewijs hetzelfde als het bewijs gegeven in het bewijs van Stelling 3.4. We concluderen we dat voor $\beta \in (\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3)$ de verzameling B_β^1 geen geïsoleerde punten in E_β bevat.

Dit voltooid het bewijs van Stelling 3.6. □

Eenzelfde uitspraak is niet gemaakt over de verzameling B_β^2 en B_β^3 . We kunnen echter wel een uitspraak doen over geïsoleerde punten in B_β^2 voor $\beta \in (2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$.

Stelling 3.7. *Er geldt $\{\beta \in (2, 3) : B_\beta^2 = \emptyset\} = \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ en dus bevat de verzameling B_β^2 voor deze β geen geïsoleerde punten.*

Bewijs. Definiëer $\beta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Dan geldt $\tilde{d}(1, \beta_1) = 2\bar{1}$. We laten zien dat $B_{\beta_1}^2 = \emptyset$. Voor iedere $x \in B_{\beta_1}^2$ zou gelden dat er een $M > 0$ is, een $w \in \{0, 1, 2\}^M$ en een $y \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\bar{1}\}$ zodat $d(x, \beta) = wy$. Verder bestaat er ook geen $N > 0$ zodanig dat $d_n(x, \beta_1) \neq 2$ voor alle $n \geq N$. Zij $n > M$ zodanig dat $d_n(x, \beta_1) = 2$, dan bestaat er een $n' > n$ met $d_{n'}(x, \beta_1) = 2$ en $d_j(x, \beta_1) = 1$ voor alle $n < j < n'$ en dus $\sigma^{n-1}(d(x, \beta_1)) = 21^{n'-n-1}2\dots > 2\bar{1} = \tilde{d}(1, \beta_1)$. Dit betekent dat $d(x, \beta_1)$ niet toegestaan is, dus een $x \in B_{\beta_1}^2$ kan niet bestaan. Hieruit volgt dat $B_{\beta_1}^2 = \emptyset$.

We laten zien dat hetzelfde geldt voor $2 < \beta < \beta_1$. Zij $2 < \beta < \beta_1$ en stel dat $B_\beta^2 \neq \emptyset$. Laat $x \in B_\beta^2$. Dan geldt ten eerste $d(x, \beta) < \tilde{d}(1, \beta) < \tilde{d}(1, \beta_1)$, dus $d(x, \beta)$ is een toegestane ontwikkeling in basis β_1 . Ten tweede, aangezien $d(x, \beta) \in B_\beta^2$, volgt ook dat $d(x, \beta) \in B_{\beta_1}^2$. Dit betekent dat $\pi_{\beta_1}(d(x, \beta)) \in B_{\beta_1}^2$ en dat geeft een tegenspraak. We concluderen dat $B_\beta^2 = \emptyset$. Aangezien $B_\beta^2 = \emptyset$, bevat B_β^2 ook geen geïsoleerde punten.

Ten slotte laten we zien dat voor alle $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \beta < 3$ geldt dat $B_\beta^2 \neq \emptyset$. Beschouw weer het rijtje $(\beta_m)_{m \geq 0}$ gegeven door $\tilde{d}(1, \beta_m) = 2\bar{1}^m$. In het bewijs van Stelling 3.6 zagen we dat $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Zij $m > 0$ en bekijk $B_{\beta_m}^2$. Dan geldt $0\bar{1}^{m+1}\bar{2} \in B_{\beta_m}^2$, dus $B_{\beta_m}^2 \neq \emptyset$. Net als hierboven volgt dat als $x \in B_{\beta_m}^2$, dan geldt voor iedere $\beta_m < \beta < 3$ dat $\pi_\beta(d(x, \beta_m)) \in B_\beta^2$. Dus $B_\beta^2 \neq \emptyset$ voor iedere $\beta \in \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$. \square

3.4 Over de isolatie van $\bar{1}$

Het punt $\bar{1}$ is een bijzonder punt in \mathcal{E}_β , er geldt namelijk

$$\min\{d(x, \beta) \in \mathcal{E}_\beta : d_1(x, \beta) = 1\} = \min\{d(x, \beta) : x \in E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]\} = \bar{1}.$$

Het is dus het overgangspunt tussen ontwikkelingen die met een 0 en 1 beginnen. We bekijken het punt $\bar{1}$ in \mathcal{E}_β met $\beta = 1 + \sqrt{2}$.

Stelling 3.8. *Het punt $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \pi_{1+\sqrt{2}}(\bar{1})$ ligt in $E_{1+\sqrt{2}}$ geïsoleerd.*

Bewijs. Ten eerste weten we dat geldt $\tilde{d}(1, 1 + \sqrt{2}) = 2\bar{0}$. Zij $x \in E_{1+\sqrt{2}} \cap [\frac{1}{1+\sqrt{2}}, 1]$. Dan $d_1(x, 1 + \sqrt{2}) = 1$. Omdat $d(x, 1 + \sqrt{2}) \leq \sigma^i(d(x, 1 + \sqrt{2})) < 2\bar{0}$ voor alle $i \geq 0$ volgt dat $d_i(x, 1 + \sqrt{2}) \notin \{0, 2\}$ voor alle $i \geq 0$. Daarom geldt $d(x, 1 + \sqrt{2}) = \bar{1}$, wat betekent dat

$$E_{1+\sqrt{2}} \cap [\frac{1}{1+\sqrt{2}}, 1] = \{\pi_{1+\sqrt{2}}(\bar{1})\} = \{\frac{1}{2}\sqrt{2}\}.$$

Verder weten we dat

$$\sup\{d(x, 1 + \sqrt{2}) \in \mathcal{E}_{1+\sqrt{2}} : d_1(x, 1 + \sqrt{2}) = 0\} \leq 0\bar{2}\bar{0}.$$

We zien daarna dat

$$|\pi_{1+\sqrt{2}}(0\bar{2}\bar{0}) - \pi_{1+\sqrt{2}}(\bar{1})| = \left| \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right|.$$

Voor alle $0 < \varepsilon < \frac{1}{2+\sqrt{2}}$ geldt daarom dat

$$E_{1+\sqrt{2}} \cap \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \emptyset.$$

Dus ligt $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geïsoleerd in $E_{1+\sqrt{2}}$. \square

We zien dus dat voor $\beta = 1 + \sqrt{2}$ het punt $\pi_{1+\sqrt{2}}(\bar{1})$ geïsoleerd ligt. Echter, in Stelling 3.1 is bewezen dat voor $\beta = 1 + \sqrt{3}$ het punt $\pi_{1+\sqrt{3}}(\bar{1})$ niet geïsoleerd ligt. Vanwege Lemma 2.15 weten we dan dat $\sup\{\beta \in (2, 3) : \pi_\beta(\bar{1}) \text{ ligt geïsoleerd in } E_\beta\}$ bestaat.

Stelling 3.9. *Er geldt*

$$\max \left\{ \beta \in (2, 3) : \frac{1}{\beta-1} \text{ ligt geïsoleerd in } E_\beta \right\} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Om Stelling 3.9 te bewijzen, formuleren we eerst een lemma.

Lemma 3.10. *Voor alle $\beta \in (2, 3)$ bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor $\pi_\beta(\bar{1}) = \frac{1}{\beta-1}$ geldt*

$$E_\beta \cap \left(\frac{1}{\beta-1} - \varepsilon, \frac{1}{\beta-1} \right) = \emptyset.$$

Bewijs. Zij $\beta \in (2, 3)$. Voor alle $d(x, \beta) \in \mathcal{E}_\beta$ met $d_1(x, \beta) = 1$ geldt $d_n(x, \beta) \neq 0$ voor alle $n > 1$, vanwege eigenschap (2.4.2) van de bifurcatieverzameling. Verder geldt er dat

$$\begin{aligned} \sup \{d(x, \beta) \in \mathcal{Q}_\beta : d_1(x, \beta) = 0\} &= 0\tilde{d}(1, \beta), \\ \inf \{d(x, \beta) \in \mathcal{E}_\beta : d_1(x, \beta) = 1\} &= \bar{1}. \end{aligned}$$

We weten daarnaast dat geldt $\pi_\beta(0\tilde{d}(1, \beta)) = \pi_\beta(1\bar{0}) = \frac{1}{\beta}$. Hieruit concluderen we dat

$$(\pi_\beta(1\bar{0}), \pi_\beta(\bar{1})) \cap E_\beta = \emptyset.$$

Daarom geldt voor alle $0 < \varepsilon < |\pi_\beta(1\bar{0}) - \pi_\beta(\bar{1})| = \frac{1}{\beta(\beta-1)}$ dat $(\pi_\beta(\bar{1}) - \varepsilon, \pi_\beta(\bar{1})) = \emptyset$. \square

Met dit lemma concluderen we dat als $\bar{1}$ niet geïsoleerd ligt, er een rijtje $(x^{(k)}) \subset \mathcal{E}_\beta$ bestaat dat van boven naar $\bar{1}$ convergeert. We merken nog een aantal feiten op die moeten gelden voor een dergelijk rijtje $(x^{(k)})_{k>0} \subset \mathcal{E}_\beta$.

- $(x^{(k)})$ moet van bovenaf naar $\bar{1}$ convergeren en dus moeten alle $x^{(k)}$ met een één beginnen.
- Alle $x^{(k)}$ zijn een element van $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$.
- Alle $x^{(k)}$ kunnen nooit eindigen in $\bar{1}$ en dus bevatten deze $x^{(k)}$ oneindig veel tweeën.

Met deze gevonden eisen aan $(x^{(k)})$ bewijzen we Stelling 3.9.

Bewijs van Stelling 3.9. We definiëren een rijtje (β_m) zodanig dat $\tilde{d}(1, \beta_m) = \overline{21^m}$. We bekijken hier verder het rijtje $(x^{(k)})_{k>0}$ gedefinieerd door $x^{(k)} = \overline{1^k 2}$. We zien dat geldt $x^{(k)} \leq \sigma^n(x^{(k)})$ voor alle k en n . Ook geldt voor alle k, m met $k > m$ dat $\sigma^n(x^{(k)}) < \tilde{d}(1, \beta_m)$ voor alle n . Dan weten we $x^{(k)} \in \mathcal{E}_{\beta_m}$ voor alle k, m met $k > m$. Verder geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{1} \text{ en } x^{(k)} \neq \bar{1} \text{ voor alle } k > 0.$$

We concluderen dat voor alle $m > 1$ het punt $\pi_{\beta_m}(\bar{1})$ niet geïsoleerd ligt in E_{β_m} . Verder zien we dat geldt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{d}(1, \beta_m) = 2\bar{1}.$$

Voor $\beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ geldt $\tilde{d}(1, \beta) = 2\bar{1}$ en dus

$$\{d(x, \beta) \in \mathcal{E}_\beta : d_1(x, \beta) = 1\} = \{\bar{1}\}.$$

Dit laatste volgt uit het feit dat als $d_1(x, \beta) = 1$ voor alle $i > 1$ geldt $d_i \neq 0$. Daarnaast geldt als $d_i(x, \beta) = 2$ dat voor alle $j > i$ geldt $d_j(x, \beta) = 1$. Vanwege eigenschap (2.4.2) van de

bifurcatieverzameling kan dat ook niet. Samen met Lemma 3.10 volgt hieruit dat het punt $\pi_\beta(\bar{1})$ voor deze β geïsoleerd ligt in E_β . We hebben dus nu een rijtje (β_m) waarvoor voor alle $m > 1$ geldt dat $\pi_{\beta_m}(\bar{1})$ niet geïsoleerd ligt in E_{β_m} en in de limiet van $m \rightarrow \infty$ wel. Als voor bepaalde β een punt niet geïsoleerd ligt in E_β , volgt vervolgens uit Lemma 2.15 dat dat punt ook niet geïsoleerd ligt in $E_{\beta'}$ voor alle $\beta' > \beta$. Aangezien $\tilde{d}(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}) = 2\bar{1}$, concluderen we dat hieruit volgt

$$\max \left\{ \beta \in (2, 3) : \frac{1}{\beta-1} \text{ ligt geïsoleerd in } E_\beta \right\} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

□

Samenvattend hebben we in dit hoofdstuk de volgende resultaten over E_β voor $\beta \in (2, 3)$ verkregen.

- In Stelling 3.1 hebben we een verzameling $V \subset (2, 3)$ gevonden, zodat voor alle $\beta \in V$ de verzameling $E_\beta \cap [\frac{1}{\beta}, 1]$ geen geïsoleerde punten bevat.
- In Stelling 3.4 hebben we laten zien dat $E_{1+\sqrt{3}}$ geen geïsoleerde punten bevat.
- We hebben vervolgens de verzameling $E_\beta \cap [0, \frac{1}{\beta})$ opgesplitst in drie disjuncte verzamelingen $E_\beta \cap [0, \frac{1}{\beta}) = B_\beta^1 \cup B_\beta^2 \cup B_\beta^3$. In Stelling 3.6 hebben we laten zien dat voor $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \beta < 3$ de verzameling B_β^1 geen geïsoleerde punten bevat. In Stelling 3.7 hebben we laten zien dat voor alle $2 < \beta \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ geldt dat $B_\beta^2 = \emptyset$.
- Ten slotte hebben we in Stelling 3.9 laten zien dat $\frac{1}{\beta-1}$ geïsoleerd ligt in E_β voor alle $2 < \beta \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ en niet geïsoleerd ligt in E_β voor alle $\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \beta < 3$.

In het volgende hoofdstuk berekenen we een ondergrens voor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ voor een bepaalde $t \in (0, 1)$.

4 De Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$

In Hoofdstuk 2.2 is de definitie van Hausdorffdimensie gegeven. Samen met formules en stellingen gegeven in [Kal+20] en [Rai94] berekenen we een ondergrens voor de Hausdorffdimensie van de overlevingsverzameling $K_\beta(t)$.

4.1 Positieve Hausdorffdimensie

In [Kal+20] vinden we een algemene formule voor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$. Deze is afgeleid van een formule gegeven in [Rai94]. De formule luidt

$$\dim_H K_\beta(t) = \frac{h_{\text{top}}(\mathcal{K}_\beta(t))}{\log \beta}. \quad (4.1.1)$$

Hierin is h_{top} de topologische entropie. De topologische entropie h_{top} is als volgt gedefinieerd voor deelverzamelingen \mathcal{A} van $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. We definiëren eerst $\mathcal{B}_n(\mathcal{A})$ als de verzameling van woorden van lengte n die voorkomen in rijtjes in \mathcal{A} . Daarnaast is $|\mathcal{A}|$ de kardinaliteit van \mathcal{A} . De definitie van *topologische entropie* is dan

$$h_{\text{top}}(\mathcal{A}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{B}_n(\mathcal{A})|}{n}. \quad (4.1.2)$$

Met deze definities hebben we genoeg om te laten zien dat er voor alle β een t_β bestaat zodanig dat $K_\beta(t)$ een positieve Hausdorffdimensie heeft. Aan de hand van de formule merken we ten eerste op dat de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ positief is dan en slechts dan als de topologische entropie van $\mathcal{K}_\beta(t)$ positief is. We richten ons dus op de topologische entropie van $\mathcal{K}_\beta(t)$. Stel dat er w_1, w_2 bestaan met $w_1 \neq w_2$, zodanig dat $\{w_1, w_2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_\beta(t)$. Vervolgens stellen we $k = |w_1| \cdot |w_2|$ het product van de lengtes van w_1 en w_2 en definiëren we w'_1 en w'_2 als $w'_1 := (w_1)^{|w_2|}$ en $w'_2 := (w_2)^{|w_1|}$. Dit geeft $|w'_1| = |w'_2| = k$. Verder weten we dat $\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}} \subset \{w_1, w_2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_\beta(t)$. Vervolgens zien we in $\mathcal{B}_n(\mathcal{K}_\beta(t))$ dat geldt

$$2|\mathcal{B}_n(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})| \leq |\mathcal{B}_{n+k}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|.$$

Een deel van de woorden in $\mathcal{B}_n(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})$ bestaat namelijk uit combinaties van w'_1 en w'_2 en als de lengte van de woorden verlengd wordt met k symbolen, betekent dat dat het aantal combinaties minstens verdubbeld, omdat dan op zijn minst weer gekozen kan worden om aan elk woord w'_1 of w'_2 toe te voegen. De kardinaliteit van $\mathcal{B}_n(\mathcal{K}_\beta(t))$ groeit dus exponentieel in n . We definiëren het rijtje $(n_m)_{m \geq 1}$ met $n_m = mk$, dit geeft

$$2|\mathcal{B}_{n_m}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})| \leq |\mathcal{B}_{n_{m+1}}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|.$$

Daarom geldt

$$\log_2 |\mathcal{B}_{n_{m+1}}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})| \geq \log_2 (2|\mathcal{B}_{n_m}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|) = \log_2 (|\mathcal{B}_{n_m}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|) + 1. \quad (4.1.3)$$

Vanwege het feit dat $\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_\beta(t)$ leiden we verder af dat $\mathcal{B}_{n_m}(\mathcal{K}_\beta(t))$ ook exponentieel groeit in m (en dus in n). We vinden daarom dat, als we Vergelijking (4.1.3) $m - 1$ keer herhalen dat

$$\log_2 |\mathcal{B}_{n_m}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})| \geq \log_2 (|\mathcal{B}_{n_1}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|) + m - 1.$$

Daarom vinden we samen met Vergelijking (4.1.2) dat de topologische entropie van $\mathcal{K}_\beta(t)$ minstens gelijk is aan

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(\mathcal{K}_\beta(t)) &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log_2 (|\mathcal{B}_{n_m}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|)}{n_m} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log_2 (|\mathcal{B}_{n_1}(\{w'_1, w'_2\}^{\mathbb{N}})|)}{n_m} + \frac{m - 1}{n_m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m - 1}{mk} = \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Dat impliceert dat onder deze aanname de Hausdorffdimensie positief is. In Paragraaf 4.2 berekenen we specifiek een ondergrens.

4.2 Ondergrens voor $\dim_H(K_\beta(t))$

We bewijzen nu dat voor elke $\beta \in (2, 3]$ een t_β bestaat zodanig dat de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ positief is. Neem $w_1 = 01$ en $w_2 = 11$. Neem daarnaast $t_\beta \in (0, 1)$ zo dat $d(t_\beta, \beta) = 01\bar{0}$. Definieer dan $\mathcal{X} := \{w_1, w_2\}^{\mathbb{N}}$. Dan zien we dat voor elke $(x_i) \in \mathcal{X}$ geldt $d(t_\beta, \beta) < \sigma^n((x_i))$ voor alle $n \geq 0$, aangezien $\inf_{n \geq 0} \sigma^n(\mathcal{X}) = \overline{01}$. Daarnaast geldt $\tilde{d}(1, 2) = \bar{1}$, dus geldt voor alle $\beta > 2$ dat $\mathcal{X} \subset \mathcal{Q}_\beta$. Dan volgt uit Lemma 1.17 dat dus voor alle $\beta \in (2, 3]$ geldt

$$\sigma^n((x_i)) < \tilde{d}(1, \beta) \text{ voor alle } n \geq 0.$$

We zullen laten zien dat voor alle $\beta \in (2, 3)$ voor $t_\beta = \pi_\beta(01\bar{0})$ de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t_\beta)$ positief is. Daarnaast geven we een niet-triviale ondergrens voor de Hausdorffdimensie van $\mathcal{K}_\beta(t)$. We zien dat voor alle $(x_i) \in \mathcal{X}$ geldt $(x_i) \in \mathcal{K}_\beta(t_\beta)$, voor alle $\beta > 2$. Aangezien $|w_1| = |w_2| = 2$ kennen we $w'_1 := w_1$ en $w'_2 := w_2$ en dus $k = 2$. De topologische entropie berekenen we dan met (4.1.2) als

$$h_{\text{top}}(\mathcal{K}_\beta(t)) \geq \frac{1}{2}.$$

Samen met (4.1.1) volgt dan dat een ondergrens voor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t_\beta)$ als

$$\dim_H(K_\beta(t_\beta)) \geq \frac{1}{2 \log \beta}.$$

We vinden dus een ondergrens voor de Hausdorffdimensie van $K_\beta(t)$ met $t \leq t_\beta = \pi_\beta(01\bar{0}) = \frac{1}{\beta^2}$ gegeven door $\frac{1}{2 \log \beta}$.

Met dit resultaat zijn we aan het einde gekomen van de bevindingen in het onderzoek naar dynamische systemen met drie takken. Binnen het gebied van open dynamische systemen met drie takken zijn echter nog een hoop onderzoeksmogelijkheden, daarom presenteren we in het laatste hoofdstuk ideeën en vragen over mogelijk verder onderzoek.

5 Verdere studie

In Hoofdstuk 3 hebben we gekeken naar de aanwezigheid van geïsoleerde punten in E_β met $\beta \in (2, 3)$. Buiten deze stellingen is meer onderzoek mogelijk. Hier is een aantal vragen uiteengezet die de basis kunnen vormen voor vervolgonderzoek naar β -ontwikkelingen en het dynamisch systeem $(T_\beta, [0, 1))$.

E_β voor alle $\beta \in (2, 3)$

Ten eerste is de aanwezigheid van geïsoleerde punten nog niet onderzocht voor alle E_β met $\beta \in (2, 3)$. In Stelling 3.4 is bewezen dat de verzameling E_β geen geïsoleerde punten bevat voor $\beta = 1 + \sqrt{2}$. In Stelling 3.6 is laten zien de bewijstechnieken gegeven in het bewijs van Stelling 3.4 toe te passen zijn op een deelverzameling van $(2, 3)$. Wat is de verzameling $\beta \in (2, 3)$ waarvoor E_β geen geïsoleerde punten bevat?

Als we β verder vergroten

In [Kal+20] is gekeken naar $\beta \in (1, 2)$, en in deze scriptie is gekeken naar $\beta \in (2, 3)$. Een logische vervolgvraag is dan te kijken of de kwestie te veralgemeniseren is voor alle $\beta > 1$. Oftewel, we bekijken het dynamisch systeem

$$T_\beta(x) = \beta x \pmod{1} \quad \text{met } \beta > 1.$$

We kunnen vervolgens op dezelfde manier de β -ontwikkelingen van $x \in [0, 1)$ definiëren, maar dan aan de hand van $[\beta]$ symbolen. Dit geeft

$$d(x, \beta) \in \{0, 1, \dots, [\beta]\}^{\mathbb{N}}.$$

Verder kunnen we de eigenschappen gegeven in Stelling 2.10 en (2.4.2) voor β -ontwikkelingen in $\mathcal{K}_\beta(t)$ en \mathcal{E}_β afleiden. We kunnen hier verder dezelfde vragen stellen over geïsoleerde punten in E_β . Echter kunnen we op dezelfde manier als in Stelling 3.1 de structuur betreffende geïsoleerde punten afleiden uit voorafgaande resultaten. We breiden de functie φ uit naar

$$\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (x_i) \mapsto (x_i + 1).$$

Voor $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ definiëren we $\beta \in (n, n+1)$ zodanig dat $\tilde{d}(1, \beta) = \varphi(\tilde{d}(1, \beta'))$ voor $\beta' \in (n-1, n)$. Als $x \in E_{\beta'}$ geïsoleerd ligt in $E_{\beta'}$, dan ligt $\pi_\beta(\varphi(d(x, \beta')))$ geïsoleerd in E_β . Andersom geldt ook als $x \in E_{\beta'}$ niet geïsoleerd ligt in $E_{\beta'}$, dan ligt $\pi_\beta(\varphi(d(x, \beta')))$ niet geïsoleerd in E_β . Een precies bewijs volgt zoals het bewijs van Stelling 3.1. Als de structuur van $E_{\beta'}$ met $\beta' \in (n-1, n)$ bekend is, kunnen we dus wat zeggen over $E_\beta \cap [\frac{[\beta]-1}{\beta}, 1]$. De structuur van $E_\beta \cap [0, \frac{[\beta]-1}{\beta}]$ zal daarnaast dus onderzocht moeten worden. We weten dat hoe groter β wordt, hoe meer symbolen mogelijk zijn in β -ontwikkelingen in $\mathcal{E}_\beta \cap [0, \frac{[\beta]-1}{\beta}]$. Daarom is het vermoeden dat dus steeds 'minder' punten geïsoleerd liggen, omdat er meer mogelijk wordt in het vormen van convergerende rijtjes (om te laten zien dat punten niet geïsoleerd liggen). Oftewel, we weten dat voor $\gamma < \gamma'$ met $|\gamma - \gamma'| > 1$ en $\gamma, \gamma' \notin \mathbb{N}$ zal gelden

$$\begin{aligned} & \dim_H(\{\beta \in ([\gamma], [\gamma]) : E_\beta^+ \text{ bevat geen geïsoleerde punten}\}) \\ & \leq \dim_H(\{\beta \in ([\gamma'], [\gamma']) : E_\beta^+ \text{ bevat geen geïsoleerde punten}\}). \end{aligned}$$

In [Kal+20] is laten zien dat $\dim_H(\{\beta \in (1, 2) : E_\beta^+ \text{ bevat geen geïsoleerde punten}\}) = 0$. Bestaat er dan een τ zodanig dat voor alle $\gamma > \tau$ geldt

$$\dim_H(\{\beta \in ([\gamma], [\gamma]) : E_\beta^+ \text{ bevat geen geïsoleerde punten}\}) > 0?$$

Referenties

- [Can80] Georg Cantor. “Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten”. In: *Mathematische Annalen* 17.3 (1880), p. 355–358. ISSN: 0025-5831.
- [Hau18] Felix Hausdorff. “Dimension und Aueres Ma”. In: *Mathematische Annalen* 79.1-2 (1918), p. 157–179. ISSN: 0025-5831.
- [Rn57] Alfrd Rnyi. “On algorithms for the generation of real numbers”. In: *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kzl.* 7 (1957), p. 265–293.
- [Par60] William Parry. “On the β -expansions of real numbers”. In: *Acta mathematica Hungarica* 11.3-4 (1960), p. 401–416. ISSN: 0236-5294.
- [Hut81] John E. Hutchinson. “Fractals and self-similarity”. In: *The Indiana University mathematics journal* 30.5 (1981), p. 713–747. ISSN: 0022-2518.
- [Urb86] Mariusz Urbaski. “On Hausdorff dimension of invariant sets for expanding maps of a circle”. In: *Ergodic theory and dynamical systems* 6.2 (1986), p. 295–309. ISSN: 0143-3857.
- [Rai94] Peter Raith. “Continuity of the Hausdorff dimension for invariant subsets of interval maps”. In: *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* 63.1 (1994), p. 39–53. ISSN: 0862-9544.
- [KL07] Vilmos Komornik en Paola Loreti. “On the topological structure of univoque sets”. In: *Journal of Number Theory* 122.1 (2007), p. 157–183. ISSN: 0022-314X.
- [DD09] Karma Dajani en Sjoerd Dirksin. *A Simple Introduction to Ergodic Theory*. 2009.
- [Nil09] Johan Nilsson. “On numbers badly approximable by dyadic rationals”. In: *Israel journal of mathematics* 171.1 (2009), p. 93–110. ISSN: 0021-2172.
- [Daj14] Karma Dajani. *Introduction to Ergodic Theory and its Applications to Number Theory*. 2014.
- [Fal14] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. Third. Mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, p. xxx+368. ISBN: 978-1-119-94239-9.
- [Kal+20] Charlene Kalle, Derong Kong, Niels Langeveld en Wenxia Li. “The β -transformation with a hole at 0”. In: *Ergodic theory and dynamical systems* 40.9 (2020), p. 2482–2514. ISSN: 0143-3857.