



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Per ezel naar Zeus

Frinking, N.

### Citation

Frinking, N. *Per ezel naar Zeus*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171187>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

N. Frinking  
Per ezel naar Zeus

Bachelorscriptie  
23 augustus 2022

Scriptiebegeleider: prof.dr. F.M. Spijksma



Universiteit Leiden  
Mathematisch Instituut

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Analyse</b>	<b>4</b>
2.1	Model I . . . . .	4
2.1.1	Toestanden model I . . . . .	4
2.1.2	Parameters model I . . . . .	5
2.1.3	Markovproces model I . . . . .	5
2.1.4	Stationaire verdeling model I . . . . .	6
2.1.5	M/M/1-model . . . . .	8
2.1.6	Resultaten model I . . . . .	8
2.2	Model II . . . . .	10
2.2.1	Toestanden model II . . . . .	10
2.2.2	Parameters model II . . . . .	10
2.2.3	Markovproces model II . . . . .	11
2.2.4	Stationaire verdeling model II . . . . .	12
2.2.5	Resultaten model II . . . . .	15
2.3	Vergelijken model I en model II . . . . .	15

# 1 Inleiding

Een geliefd uitje tijdens een vakantie in Griekenland is een bezoek aan de Dikteon Grot op Kreta. Volgens de Griekse mythologie is deze grot de geboorteplek van de oppergod Zeus, daarom wordt deze grot ook wel de grot van Zeus genoemd. De ingang van de grot ligt echter boven op een berg en is moeilijk bereikbaar met de auto. De weg naar de top is een hele klim dus lopen is, alhoewel mogelijk, niet altijd te prefereren. Gelukkig is er de mogelijkheid om de trip per ezel af te leggen. Aan de voet van de berg en bij de ingang van de grot zijn ezelverhuurplekken vanwaar je een ezel naar boven respectievelijk naar beneden kan nemen. Er is echter maar een beperkt aantal ezels inzetbaar en de grot trekt grote aantallen toeristen die allemaal een ezeltocht willen maken. Een voor de hand liggende vraag is dan ook hoeveel ezels er minimaal nodig zijn om de grote aantallen toeristen te vervoeren. Wanneer veel toeristen enkel een ezel mee naar boven nemen en vervolgens besluiten zonder ezel af te dalen, kan het voorkomen dat er bij de ezelverhuurplek aan de voet van de berg geen ezels meer beschikbaar zijn. In dat geval kan het handig zijn om een aantal ezels van boven naar beneden te sturen, ook zonder passagier, om zo efficiënter de ezels te verdelen over de twee verhuurplekken. Voor de ezelverhuurder kan het dus voordelig zijn om een efficiënte strategie te verzinnen wat betreft de ezelverdeling. Deze strategie zouden we kunnen vinden met behulp van modelleren.

In deze scriptie gaan we het systeem met de twee ezelverhuurplekken nader onderzoeken. Dit doen we door een model van de situatie te construeren en te analyseren. We proberen hiermee vragen over dit systeem te beantwoorden zoals: Wat is de verwachte rijlengte van de klanten die per ezel naar boven willen gaan? Of bijvoorbeeld: Wat is de gemiddelde verwachte tijdsduur dat de ezels geen klanten aan het vervoeren zijn?

Het eerste en meest vereenvoudigde model bleek niet nauwkeurig genoeg om gemakkelijk expliciete resultaten te vinden waarna we een tweede, nauwkeuriger model hebben opgesteld en geanalyseerd. De modellen die we hiervoor construeren zijn niet eerder uitvoerig beschreven in de literatuur dus is het nodig deze eerst grondig te bestuderen. In deze scriptie beginnen we met het beschrijven en analyseren van de twee modellen. Vervolgens vergelijken we de modellen onderling en onderzoeken we in welke mate het gecompliceerdere model ons meer kan vertellen over het systeem ten opzichte van het vereenvoudigde model.

We kunnen met behulp van deze modellen een efficiënte strategie proberen te formuleren wat betreft de verdeling van de ezels over de twee verhuurplekken. Helaas bleek naast de analyse van beide modellen een efficiënte strategie vinden te ambitieus en is het niet gelukt de scriptie uit te breiden met het vinden van een dergelijke strategie. Voor een volgend onderzoek kan het interessant zijn om voor dit model de meest efficiënte strategie proberen te vinden.

## 2 Analyse

Om het proces met de rijen bij de ezelparkeerplaatsen beter te begrijpen, kunnen we modellen maken die het gedrag op de lange termijn simuleren. In deze scriptie bekijken we twee verschillende modellen voor hetzelfde proces, de rijvorming voor de ezelparkeerplaats aan de voet van de berg. We bekijken bij deze modellen dus niet de mogelijke rijvorming bij de ezelparkeerplaats aan de ingang van de grot. Het eerste model, model I, bevat de meeste versimpelingen. Deze zullen we uitgebreid onderzoeken en vervolgens vergelijken met het gecompliceerdere model, model II.

### 2.1 Model I

In dit versimpelde model onderzoeken we alleen het gedrag van de rij aan de voet van de berg en onder welke voorwaarden deze rij oneindig lang zou kunnen worden. De reden hiervoor is dat de resultaten over de rijvorming aan de voet van de berg eenvoudig iets kunnen zeggen over de rijvorming bij de ingang van de grot. Voor model I nemen we allereerst aan dat alle toeristen verplicht met een ezel de route afleggen en dus niet meer te voet naar boven of naar beneden kunnen. Ook nemen we aan dat er maar één ezel in gebruik is en dat deze zonder te stoppen of te rusten de ronde van beneden naar boven en weer terug loopt, al dan niet met een passagier. Verder nemen we aan dat een ezel alle rondes gemiddeld even snel loopt, met of zonder passagier. Dit betekent dat we geen rekening houden met het opstappen en afstappen van de ezel, het gewicht van de passagier of eventuele andere redenen waarom de ezel systematisch langer zou kunnen doen over een ronde.

Deze situatie kunnen we wiskundig beschrijven met het volgende wachtrijmodel[1]: Beschouw de twee ezilverhuurplekken als bedieningscentra waar de toeristen, de klanten van het wachtrijmodel, in een wachtrij plaatsnemen om te worden bediend door de ezels, de bedieners in het wachtrijmodel. Om de terminologie van wachtrijmodellen aan te houden, zeggen we voortaan dat wanneer een ezel bezig is met een ronde waarin hij een klant naar boven brengt/heeft gebracht, er sprake is van een ezel die ‘een klant bedient’. Het is belangrijk om op te merken dat in dit versimpelde model, model I, een ezel een klant kan bedienen terwijl de klant al bij de grot is afgezet en dus in feite het systeem heeft verlaten. Hier komen we later uitgebreid op terug.

We kunnen ons een aantal zaken afvragen bij dit model: Onder welke voorwaarden wordt de wachtrij oneindig lang? Hoeveel klanten staan er gemiddeld in de wachtrij? Voordat we op deze vragen in kunnen gaan, moet eerst het model gespecificeerd worden.

#### 2.1.1 Toestanden model I

In ons eerste model onderscheiden we de volgende toestanden: Laat  $X(t)$  het *virtuele* aantal klanten in het model zijn, wachtend en in bediening, op tijdstip  $t$ . De reden waarom hier sprake is van een virtueel aantal zal verderop verduidelijkt

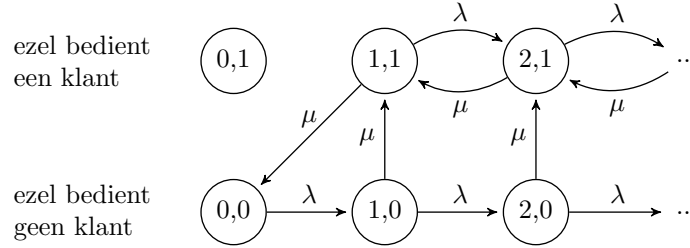
worden. Laat verder  $Y(t)$  aangeven in welke toestand de ezel zijn ronde loopt op tijdstip  $t$ . Neem  $Y(t) = 0$  wanneer de ezel bezig is met een ronde zonder dat hij een klant bedient en  $Y(t) = 1$  wanneer de ezel in zijn ronde juist wel een klant bedient. Verder geldt dat  $t \geq 0$ . De toestand op tijdstip  $t$  wordt dan beschreven door  $(X(t), Y(t))$  en de toestandruimte is  $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ . Hierbij is toestand  $(0, 1)$  een absorberende toestand, die vanuit de overige toestanden niet bereikt kan worden, opgenomen. Merk hierbij op dat de kans dat het proces zich in toestand  $(0, 1)$  bevindt gelijk is aan nul aangezien het niet mogelijk is om nul klanten in het systeem te hebben terwijl de ezel met een passagier een ronde loopt. We voegen de toestand  $(0, 1)$ , ondanks dat deze niet reëel is, toch toe in ons model vanwege notationale eenvoud in de formules. De reden waarom er sprake is van virtuele klanten, is dat wanneer het proces zich in  $(x, 1)$  bevindt met  $x \geq 1$ , dit niet hoeft te betekenen dat er ook daadwerkelijk  $x$  klanten in het systeem zijn. De klant die bediend wordt door de ezel kan namelijk al zijn afgezet bij de grot en het systeem feitelijk al hebben verlaten. Helaas is dit niet waar te nemen binnen ons model en zullen we bij de berekeningen hier rekening mee moeten houden. Deze tekortkoming van ons proces zal later problematisch blijken bij het berekenen van bepaalde gegevens van het systeem. Om die reden zullen we model I uitbreiden naar het complexere model II.

### 2.1.2 Parameters model I

We nemen aan dat de tijd tussen twee aankomsten van klanten exponentieel verdeeld is met parameter  $\lambda$ . Hieruit volgt dat het aankomstproces van de klanten een Poissonproces is met parameter  $\lambda$  en dat dit proces de geheugenloosheidseigenschap heeft, ofwel dat het aankomstmoment niet afhangt van vorige aankomsten. Naast dat dit een prettige eigenschap is om mee te rekenen, is een Poissonproces vaak een realistische aanname voor individuele klanten die aankomen bij een rij. We nemen verder aan dat de tijdsduur dat de ezel, met of zonder passagier, doet over een heel rondje, van de voet van de berg naar de ingang van de grot en weer terug, exponentieel verdeeld is met parameter  $\mu$ . Omdat het hier over een exponentiële verdeling gaat, is de gemiddelde duur van een ezelronde  $\frac{1}{\mu}$ . We zullen bij de resultaten van model I zien dat er moet gelden dat  $\lambda > \mu$  opdat de rij niet oneindig lang kan worden.

### 2.1.3 Markovproces model I

Doordat beide type verdelingen exponentieel zijn en dus de geheugenloosheidseigenschap hebben, hangt de toestand op het tijdstip  $t$  niet af van het verleden en is het proces  $(X(t), Y(t))_{t \geq 0}$  een Markovproces. Dit proces kunnen we als volgt grafisch weergeven, zie Figuur 1. Het Markovproces bestaat uit twee gesloten klassen, een eindige klasse met toestand  $(0, 1)$  en een oneindige klasse met de overige toestanden.



Figuur 1: Markovproces geassocieerd met model I. Met toestanden  $(i, j)$  waarbij  $i$  het aantal klanten en  $j$  de toestand van de ezel representeert.

### 2.1.4 Stationaire verdeling model I

Van dit model kunnen we de stationaire verdeling van de oneindige, gesloten klasse bepalen. We zullen naar de stationaire verdeling op deze oneindige, gesloten klasse refereren als de stationaire verdeling van het systeem. De stationaire verdeling representeert de fractie van de tijd dat het Markovproces zich in een bepaalde toestand bevindt. De stationaire verdeling kunnen we vinden door de balansvergelijkingen op te lossen. De balansvergelijking stelt dat de instroom naar een deel van de toestandsruimte gelijk moet zijn aan de uitstroom uit dit deel van de toestandsruimte. Laat  $\pi_{i,j}$  de fractie van de tijd zijn dat het proces zich in toestand  $(i, j)$  bevindt. Dan geldt in ons Markovproces bijvoorbeeld dat  $\lambda\pi_{0,0} = (\lambda + \mu)\pi_{1,0}$ . Dit samen met het feit dat  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,0} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} = 1$ , ofwel dat de fractie van de tijd dat het proces zich in een van de mogelijke toestanden bevindt gelijk aan 100% is, stelt ons in staat om de stationaire verdeling van de oneindige gesloten klasse te bepalen. Er geldt volgens de balansvergelijkingen voor  $i \geq 1$  dat

$$\begin{aligned}
 \lambda\pi_{i-1,0} &= (\lambda + \mu)\pi_{i,0} \\
 \Rightarrow \pi_{i,0} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\pi_{i-1,0}, \\
 \text{zodat } \pi_{i,0} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \pi_{0,0}. \tag{1}
 \end{aligned}$$

Verder geldt volgens de balansvergelijkingen dat

$$\begin{aligned}
 \mu\pi_{1,1} &= \lambda\pi_{0,0} \\
 \Rightarrow \pi_{1,1} &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_{0,0},
 \end{aligned}$$

en voor  $i \geq 2$  geldt dat

$$\begin{aligned}
\mu\pi_{i,1} &= \lambda\pi_{i-1,0} + \lambda\pi_{i-1,1} \\
\Rightarrow \pi_{i,1} &= \pi_{0,0} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-j} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^j \pi_{0,0} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{i-1}\right) \pi_{0,0} \\
&= \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{i-1}\right) \pi_{0,0}. \tag{2}
\end{aligned}$$

We zien dat vergelijking (2) ook geldt voor  $i \geq 1$ .

De gesloten oneindige klasse waarvan we de stationaire verdeling bepalen is een irreducibele Markovketen. Dit heeft als gevolg dat voor alle  $\pi_{i,j}$  in deze klasse geldt dat  $\pi_{i,j} > 0$ . Om de waarde  $\pi_{0,0}$  te vinden, gebruiken we (1) en (2) en het feit dat  $\pi_{0,1} = 0$ . Als de stationaire verdeling bestaat dan geldt dat

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,0} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{\lambda+\mu}{\lambda} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{i-1}\right) \pi_{0,0} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \pi_{0,0} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{\lambda+\mu}{\lambda} - \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\right) \pi_{0,0} \\
&= \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} - 1\right)\right) \pi_{0,0} \\
&= \frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu} \pi_{0,0} \\
\Rightarrow \pi_{0,0} &= \frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Omdat alle bovenstaande sommen moeten convergeren, bestaat de stationaire verdeling dan en slechts dan als  $\lambda < \mu$ . Dit geeft ons de volgende stelling.

**Stelling 1** *De stationaire verdeling van de oneindige, gesloten klasse in model I bestaat dan en slechts dan als  $\lambda < \mu$ . De stationaire verdeling is dan:*

$$\pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i, & j = 0 \\ \frac{\mu-\lambda}{\lambda} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\right), & j = 1. \end{cases}$$



### 2.1.5 M/M/1-model

Wanneer in model I een rij klanten staan te wachten en de ezel bezig is een klant te bedienen heeft het model veel weg van een M/M/1-model. Het M/M/1-model is het meest eenvoudige wachtrijmodel waarbij een rij klanten door één bediende wordt bediend met exponentieel ( $\lambda$ ) verdeelde tussenaankomsttijden en exponentieel ( $\mu$ ) verdeelde bedieningsduren. Naast de subtiliteit met de klant die halverwege de bediening het systeem verlaat heeft model I nog één verschil met het M/M/1-model. Wanneer een klant een leeg systeem aantreft in een M/M/1-model wordt deze direct bediend maar wanneer dit gebeurt in model I kan het zo zijn dat de ezel vlak daarvoor zonder passagier zijn ronde is gaan maken en dat de aankomende klant de ronde van de ezel, die gemiddeld  $\frac{1}{\mu}$  duurt, moet afwachten. Een model waarbij een aankomende klant moet wachten terwijl de server niemand bedient en dus een soort 'vakantie' neemt, wordt ook wel een vakantiemodel genoemd.

### 2.1.6 Resultaten model I

We hebben gezien dat zolang  $\lambda < \mu$  er een stationaire verdeling mogelijk is en de rij nooit oneindig lang wordt. Dit is opmerkelijk aangezien bij het M/M/1-model ook al geldt dat de rij niet oneindig lang wordt zolang  $\lambda < \mu$  en we model I kunnen beschouwen als een soort M/M/1-model met toevoeging van vakantieperiodes met een gemiddelde lengte van maximaal  $\frac{1}{\mu}$ .

We kunnen met de resultaten van model I ook iets zeggen over de wachtrij boven bij de grot. Aangezien de gemiddelde aankomstnelheid beneden bij de voet van de berg  $\lambda$  is, geldt dat de aankomstnelheid boven bij de grot, die slechts afhangt van de aankomsten beneden bij de berg,  $\lambda$  is. Dit betekent dat zolang de ezel de klanten even snel naar boven als naar beneden kan brengen, namelijk met snelheid  $\mu$  waarbij ook nog de eis geldt dat  $\lambda < \mu$ , de rij boven bij de grot ook niet oneindig lang kan worden.

Bij het bepalen van de fractie van de tijd dat het systeem geen klanten bevat en dus leeg is vallen er tekortkomingen op van dit model. In toestand  $(0, 0)$  is het systeem overduidelijk leeg maar ook in toestand  $(1, 1)$  kan het voorkomen dat het systeem leeg is. Wanneer de ezel de klant boven aan de berg heeft afgezet, bevindt het systeem zich nog in toestand  $(1, 1)$  terwijl het systeem wel leeg is. Als er tijdens de weg naar beneden verder geen nieuwe klanten meer aankomen, blijft het systeem dus gemiddeld de helft van de tijd leeg in toestand  $(1, 1)$ . Als er echter wel een nieuwe klant aankomt tijdens de weg naar beneden, springt het systeem naar toestand  $(2, 1)$  in plaats van naar  $(0, 0)$  en is dit niet meer leeg. De kans dat dit gebeurt is positief, namelijk  $\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}$ . In dat geval is het systeem gemiddeld minder dan de helft van de tijd leeg in toestand  $(1, 1)$ . Dit maakt het lastig om exact te berekenen wat de fractie van de tijd is dat het systeem leeg is. We kunnen wel een onder en een bovengrens bepalen. De fractie van de tijd dat het systeem geen klanten bevat is minimaal

$$\pi_{0,0} = \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu} \quad (4)$$

en maximaal

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} + \frac{1}{2}\pi_{1,1} &= \left(\frac{\lambda}{2\mu} + 1\right) \pi_{0,0} \\ &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Op dezelfde manier zien we dat in toestand  $(i, 1)$  met  $i \geq 1$  het systeem maximaal de helft van de tijd  $i - 1$  klanten bevat. Laat  $L$  het gemiddelde aantal klanten zijn in het systeem per tijdseenheid. Dan kunnen we als volgt een ondergrens voor  $L$  vinden:

$$\begin{aligned} L &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi_{i,1} + \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_{i,0} \\ &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left(i - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i - \sum_{i=1}^{\infty} \left(i - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \right) \\ &\quad + \frac{\mu - \lambda}{\lambda + \mu} \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \\ &= \frac{\mu - \lambda}{\lambda} \left( \frac{\lambda\mu}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{\lambda}{2(\mu - \lambda)} - \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\mu^2} + \frac{\lambda}{2\mu} \right) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)}{\mu^2} \\ &= \frac{\mu}{\mu - \lambda} + \frac{\frac{1}{2}\lambda - \mu}{\mu} \\ &= \frac{\lambda}{2\mu} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \end{aligned} \quad (6)$$

Een bovengrens voor  $L$  is:

$$\begin{aligned} L &\leq \sum_{i=1}^{\infty} i \pi_{i,1} + \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_{i,0} \\ &= \frac{\mu}{\mu - \lambda} - \frac{\mu - \lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

De  $L$  van het M/M/1-model is  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ , dus we zien dat door de vakantieperiodes er minimaal  $\frac{\lambda}{2\mu}$  klanten in het systeem erbij zijn gekomen. Met de formule van Little die stelt dat  $L = \lambda W$  waar  $W$  de gemiddelde verblijftijd in het systeem is, vinden we

$$\frac{2\mu - \lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \geq W \geq \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{-\lambda + \mu}$$

Voor het bepalen van het gemiddelde aantal klanten in de rij,  $L_q$ , hebben we het hierboven genoemde probleem niet. Daarvoor geldt:

$$\begin{aligned}
 L_q &= \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \pi_{i,1} + \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_{i,0} \\
 &= \frac{\mu}{\mu-\lambda} + \frac{\lambda-\mu}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \\
 &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

De  $L_q$  van het M/M/1-model is  $\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$  dus we zien dat door de vakantieperiodes er een factor  $\frac{\mu}{\lambda}$  meer klanten in de wachtrij staan. Tenslotte vinden we met de formule van Little de gemiddelde verblijftijd in de rij,  $W_q = \frac{1}{\mu-\lambda}$ .

## 2.2 Model II

Model II komt in grote lijnen overeen met model I alleen maken we nu wel onderscheid tussen de loopsnelheid bergopwaarts en bergafwaarts. We maken daarnaast ook onderscheid tussen de loopsnelheid naar boven met klant en zonder klant. We nemen aan dat er geen klanten met de ezel naar beneden gaan en dat de ezel dus altijd zonder klant naar beneden loopt. Een groot verschil met model I zoals we straks zullen zien zijn de toestanden waarin de ezel zich kan verkeren. In model I onderscheidden we twee toestanden: met passagier en zonder passagier. Bij model II hebben we daarentegen drie verschillende toestanden. Verder is de beschrijving van model II hetzelfde als model I.

### 2.2.1 Toestanden model II

In ons tweede model onderscheiden we de volgende toestanden: Laat  $X(t)$  weer het aantal klanten in het hele systeem zijn, wachtend en in bediening, op tijdstip  $t$ . Laat  $Y(t)$  aangeven in welke richting en toestand de ezel zijn ronde loopt op tijdstip  $t$ . Er geldt  $Y(t) = 0$  als de ezel naar beneden loopt, dit is altijd zonder klant,  $Y(t) = 1$  wanneer de ezel naar boven loopt met een klant en  $Y(t) = -1$  wanneer de ezel naar boven loopt zonder een klant. Verder geldt dat  $t \geq 0$ . De toestand op tijdstip  $t$  wordt dan beschreven door  $(X(t), Y(t))$  en de toestandsruimte is  $\mathbb{N} \times \{-1, 0, 1\}$ . Merk hierbij weer op dat de kans dat het proces zich in toestand  $(0, 1)$  bevindt nul is. Er is hier in tegenstelling tot model I geen sprake van virtuele klanten, dus daar hoeven we bij de berekeningen ook geen rekening mee te houden.

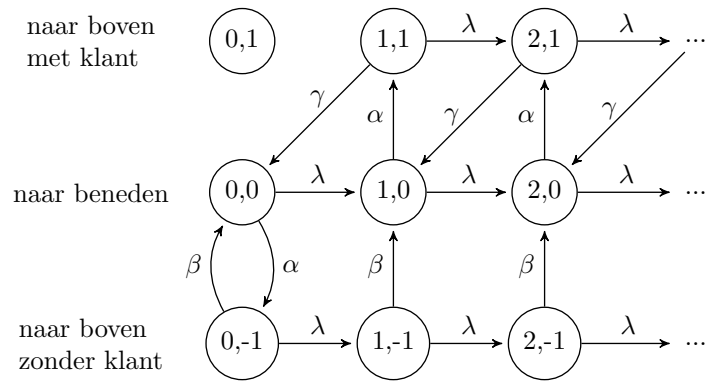
### 2.2.2 Parameters model II

We nemen weer aan dat de tussentijd tussen twee aankomsten van klanten exponentieel verdeeld is met parameter  $\lambda$ . Verder nemen we aan dat de tijdsduur voor de route naar boven met een klant exponentieel ( $\gamma$ ) verdeeld is, de tijdsduur

voor de route naar boven zonder een klant exponentieel ( $\beta$ ) verdeeld is en de tijdsduur voor de route naar beneden exponentieel ( $\alpha$ ) verdeeld is.

### 2.2.3 Markovproces model II

Dit model kunnen we net als model I beschouwen als een Markovproces. Dit geeft ons het volgende, iets gecompliceerdere stroomdiagram, zie Figuur 2.



Figuur 2: Markovproces geassocieerd met model II. Met toestanden  $(i, j)$  waarbij  $i$  het aantal klanten en  $j$  de toestand van de ezel representeert.

## 2.2.4 Stationaire verdeling model II

Van dit model kunnen we, alhoewel het Markovproces gecompliceerd is, expliciet de stationaire verdeling van het proces op de oneindige, gesloten klasse bepalen. We zullen weer naar de stationaire verdeling op deze oneindige, gesloten klasse refereren als de stationaire verdeling van het systeem. Met behulp van de balansvergelijkingen en het feit dat  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,0} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} = 1$  vinden we het volgende:

$$\begin{aligned} (\beta + \lambda)\pi_{0,-1} &= \alpha\pi_{0,0} \\ \Rightarrow \pi_{0,-1} &= \frac{\alpha}{\beta + \lambda}\pi_{0,0}. \end{aligned}$$

Er geldt verder dat

$$\begin{aligned} (\beta + \lambda)\pi_{i,-1} &= \lambda\pi_{i-1,-1}, \\ \text{zodat } \pi_{i,-1} &= \left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda}\right)^i \frac{\alpha}{\beta + \lambda}\pi_{0,0}, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ook geldt

$$\begin{aligned} \gamma\pi_{1,1} &= \lambda(\pi_{0,0} + \pi_{0,-1}) \\ \Rightarrow \pi_{1,1} &= \left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\alpha}{\beta + \lambda}\right)\pi_{0,0}, \end{aligned} \quad (9)$$

en

$$\begin{aligned} \alpha\pi_{1,0} &= (\gamma + \lambda)\pi_{1,1} \\ \Rightarrow \pi_{1,0} &= \frac{\gamma + \lambda}{\alpha} \left(\frac{\lambda}{\gamma} \left(\pi_{0,0} + \frac{\alpha}{\beta + \lambda}\pi_{0,0}\right)\right), \\ \gamma\pi_{i,1} &= \lambda(\pi_{i-1,1} + \pi_{i-1,0} + \pi_{i-1,-1}) \quad i \geq 1, \\ \Rightarrow \pi_{i,1} &= \frac{\lambda}{\gamma} (\pi_{i-1,1} + \pi_{i-1,0} + \pi_{i-1,-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha\pi_{i,0} + \lambda\pi_{i-1,1} &= (\gamma + \lambda)\pi_{i,1} \quad i \geq 1 \\ \Rightarrow \pi_{i,0} &= \frac{(\gamma + \lambda)\pi_{i,1} - \lambda\pi_{i-1,1}}{\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Combineren van (8), (10) en (11) geeft voor  $i \geq 2$

$$\pi_{i,1} = \frac{\lambda}{\gamma} \left( \pi_{i-1,1} + \frac{(\gamma + \lambda)\pi_{i-1,1} - \lambda\pi_{i-2,1}}{\alpha} + \left(\frac{\lambda}{\beta + \lambda}\right)^{i-1} \frac{\alpha}{\beta + \lambda}\pi_{0,0} \right). \quad (12)$$

Vergelijking (12) is een tweede orde lineaire inhomogene recurrente betrek-

king, die we expliciet kunnen oplossen. Deze is van de volgende vorm:

$$f_i = Af_{i-1} + Bf_{i-2} + g(i)$$

met

$$A = \frac{\lambda(\alpha + \gamma + \lambda)}{\alpha\gamma},$$

$$B = -\frac{\lambda^2}{\alpha\gamma},$$

$$g(i) = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^i \pi_{0,0}.$$

De beginvoorwaarden zijn

$$f_0 = 0,$$

$$f_1 = \left( \frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\alpha}{\beta + \lambda} \right) \pi_{0,0}.$$

Voor de oplossing van de homogene vergelijking

$$f_i = Af_{i-1} + Bf_{i-2},$$

moeten we de wortels bepalen van het karakteristieke polynoom

$$r^2 - Ar - B = 0.$$

Deze zijn

$$r_1 = \frac{\lambda}{2\alpha\gamma} \left( \alpha + \gamma + \lambda + \sqrt{(\alpha + \gamma + \lambda)^2 - 4\alpha\gamma} \right),$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{2\alpha\gamma} \left( \alpha + \gamma + \lambda - \sqrt{(\alpha + \gamma + \lambda)^2 - 4\alpha\gamma} \right).$$

Merk op dat

$$(\alpha + \gamma + \lambda)^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha - \gamma)^2 + \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 2\gamma\lambda,$$

groter is dan nul. Dus de  $r_1$  en  $r_2$  zijn reëelwaardig.

Vervolgens nemen we aan dat er een particuliere oplossing van de vorm  $C \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^i$  met  $i \geq 2$  bestaat. Nagaan hiervan levert

$$C \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^2 = C \frac{\lambda}{\beta + \lambda} A + CB + g(2)$$

$$\Leftrightarrow C \left( \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^2 - \frac{\lambda}{\beta + \lambda} A - B \right) = g(2)$$

$$\Leftrightarrow C \left( \frac{\alpha\gamma\lambda^2 - \lambda^2(\beta + \lambda)(\alpha + \gamma + \lambda) + \lambda^2(\beta + \lambda)^2}{\alpha\gamma(\beta + \lambda)^2} \right) = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^2 \pi_{0,0}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\alpha^2}{\alpha\gamma - (\beta + \lambda)(\alpha + \gamma + \lambda) + (\beta + \lambda)^2} \pi_{0,0}.$$

De oplossing is tenslotte

$$\pi_{i,1} = ar_1^i + br_2^i + C \left( \frac{\lambda}{\beta + \lambda} \right)^i \quad i \geq 2, \quad (13)$$

met

$$a = b - C,$$

$$b = \frac{\alpha\pi_{0,0} + C(\alpha + \gamma + \lambda)}{\sqrt{(\alpha + \gamma + \lambda)^2 - 4\alpha\gamma}} + \frac{\alpha^2\pi_{0,0} - 2\alpha\gamma C}{\sqrt{(\alpha + \gamma + \lambda)^2 - 4\alpha\gamma(\beta + \lambda)}}.$$

Aannemende dat de stationaire verdeling bestaat, kunnen we met behulp van de volgende balansvergelijkingen  $\pi_{0,0}$  bepalen:

$$\begin{aligned} \beta \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,-1} &= \alpha\pi_{0,0} \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,-1} &= \frac{\alpha}{\beta}\pi_{0,0}, \\ \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,0} &= \gamma \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,1} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,0} &= \frac{\gamma}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i,1}. \end{aligned}$$

We vinden dat

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} &= \lambda \left( \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,-1} + \pi_{i,0} + \pi_{i,1} \right) \\ &= \lambda \left( \frac{\alpha}{\beta}\pi_{0,0} + \pi_{0,0} + \frac{\gamma}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} \right) \\ \Rightarrow \left( \lambda \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) - \gamma \right) \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} &= -\lambda \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \pi_{0,0} \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} &= \frac{\alpha(-\beta\lambda - \alpha\lambda)}{\beta(\alpha\lambda + \gamma\lambda - \alpha\gamma)} \pi_{0,0}. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) combineren met  $\sum_{i=0}^{\infty} (\pi_{i,-1} + \pi_{i,0} + \pi_{i,1}) = 1$  geeft:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 1 &= \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{i,1} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{\gamma}{\lambda} \frac{\alpha(-\beta\lambda - \alpha\lambda)}{\beta(\alpha\lambda + \gamma\lambda - \alpha\gamma)} \pi_{0,0} \\ \Rightarrow \pi_{0,0} &= \frac{\beta(-\alpha\lambda - \gamma\lambda + \alpha\gamma)}{\alpha\gamma(\beta + \alpha)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Als de stationaire verdeling bestaat, dan is  $\pi_{0,0} > 0$  hetgeen volgens (15) dan en slechts dan het geval is als

$$\alpha\gamma > \lambda(\alpha + \gamma). \quad (16)$$

De ongelijkheid (16) impliceert ook dat  $0 < r_2 < r_1 < 1$  als de stationaire verdeling bestaat. Dus we hebben nu de volgende stelling.

**Stelling 2** *De stationaire verdeling van de oneindige, gesloten klasse in model II bestaat dan en slechts dan als  $\alpha\gamma > \lambda(\alpha + \gamma)$ . Voor de stationaire verdeling geldt het volgende:  $\pi_{i,1}$  is gelijk aan (13) voor  $i \geq 2$ ,  $\pi_{1,1}$  is gelijk aan (9),  $\pi_{i,0}$  is gelijk aan (11) voor  $i \geq 1$  en  $\pi_{i,-1}$  is gelijk aan (8). Hierbij geldt dat  $\pi_{0,0} = \frac{\beta(-\alpha\lambda - \gamma\lambda + \alpha\gamma)}{\alpha\gamma(\beta + \alpha)}$ .*

### 2.2.5 Resultaten model II

Ook van dit model kunnen we het gemiddelde aantal klanten  $L$  bepalen. Er geldt  $L = \sum_{i=0}^{\infty} i(\pi_{i,1} + \pi_{i,0} + \pi_{i,-1})$ . Substitueren van (10) geeft:

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\gamma}{\lambda} \pi_{i+1,1} \\ &= \frac{\gamma}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_{i+1,1}. \end{aligned}$$

Met de formule van Little vinden we dat de gemiddelde verblijftijd in het systeem,  $W = \frac{\gamma}{\lambda^2} \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_{i+1,1}$ .

Een feit dat opvalt uit de berekeningen is dat de enige eis op de parameters opdat de stationaire verdeling bestaat, (16) is. De grootte van  $\beta$  speelt dus geen rol voor de existentie van de stationaire verdeling. Als we nader bekijken wat  $\beta$ , ofwel de snelheid van de ezel op weg naar boven zonder klant, daadwerkelijk betekent voor het proces, zien we dat dit in feite weer onderdeel is van de 'vakantie' die de ezel neemt als het systeem leeg is. Wanneer een klant een leeg systeem aantreft kan de ezel één van twee dingen doen, of hij loopt al naar beneden, wat gemiddeld  $\frac{1}{\alpha}$  duurt, of hij moet zelfs eerst nog naar boven lopen zonder klant, wat gemiddeld  $\frac{1}{\beta}$  duurt, waarna de rijlengte gemiddeld met  $\frac{\beta(\lambda + \beta)}{\lambda^2}$  is toegenomen. Dit samen zal de stabiliteit van het systeem niet beïnvloeden. Omdat de grootte van  $\beta$  niet uitmaakt voor het vastlopen van het systeem heeft dit als gevolg dat zolang de ezel geen oneindig lange vakantie neemt, de rij nooit oneindig lang kan worden. Dit is dus een ander eis dan we bij model I konden stellen aangezien de vakantie daar slechts een gemiddelde lengte van maximaal  $\frac{1}{\mu}$  mocht hebben.

## 2.3 Vergelijken model I en model II

We zullen tenslotte model I met model II vergelijken. Hiertoe proberen we de parameters van model II zo aan te passen dat deze precies overeenkomen met



die van model I. Aangezien de ezelronde in model I gemiddeld  $\frac{1}{\mu}$  duurt en in model II de ronde of gemiddeld  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$  of gemiddeld  $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}$  duurt kunnen we deze tijden gelijk maken door te aan te nemen dat  $\alpha = \beta = \gamma = 2\mu$ . Dan geldt voor (16):

$$\begin{aligned} \frac{4\mu^2}{4\mu} &> \lambda \\ \Leftrightarrow \mu &> \lambda. \end{aligned}$$

Dat komt precies overeen met de eis bij model I voor het bestaan van de stationaire verdeling. Als we nu  $\pi_{0,0}$  van model II bepalen vinden we

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} &= \frac{2\mu(-2\mu\lambda - 2\mu\lambda + 4\mu^2)}{8\mu^3 + 8\mu^3} \\ &= \frac{\mu - \lambda}{2\mu} \end{aligned} \tag{17}$$

Nu kunnen we net als bij model I berekenen wat de fractie van de tijd is dat het systeem leeg is bij model II.

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} + \pi_{0,-1} &= \left( \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} + 1 \right) \pi_{0,0} \\ &= \frac{4\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \cdot \frac{\mu - \lambda}{2\mu}. \end{aligned} \tag{18}$$

Opmerkelijk genoeg is (18) groter dan de bovengrens voor (5). Bij deze scriptie is het niet gelukt precies te achterhalen waarom dit zo is. Een reden zou kunnen zijn dat we een exponentieel ( $\mu$ ) verdeelde parameter in model I vervangen door een Erlang  $(2, 2\mu)$  verdeelde parameter in model II wat een kleinere variantie heeft. Daarnaast zou een reden kunnen zijn dat we in model I de situatie hebben dat het systeem naar  $(2, 1)$  in plaats van naar  $(0, 0)$  overgaat, waardoor de terugkeertijd naar een leeg systeem wordt verlengd en de stationaire kans hierop kleiner wordt.

## Referenties

- [1] L.C.M. Kallenberg, F.M. Spiekma en M.J.H. van den Bergh. *Stochastische Besliskunde*. Universiteit Leiden, 2021.