D. J. van Leur

Disjunctheid van integraaloperatoren op een deelruimte van de continue functies

Bachelorscriptie Wiskunde
Begeleider: Dr. ir. O.W. van Gaans

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Nederland
22 juli 2022

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De functionaalanalyse is een deelgebied van de wiskunde dat zich bezig houdt met operatoren op vectorruimten. Zeer bekend is de theorie over genormeerde vectorruimten, Hilbertruimten en Banachruimten. Minder bekend zijn partieel geordende vectorruimten en Rieszruimten. Partieel geordende vectorruimten zijn vectorruimten met daarop een partiële ordening. Rieszruimten zijn partieel geordende vectorruimten met de supremum-eigenschap: elk paar elementen in een Rieszruimte heeft een supremum.

Partieel geordende vectorruimten op zich geven weinig aanleiding tot structuur of theorie. Het bestaan van een supremum geeft echter de mogelijkheid tot meer structuur, waaronder een definitie voor disjunctheid. Niet alle partieel geordende vectorruimten zijn ook Rieszruimten. Toch willen we ook in partieel geordende vectorruimten iets kunnen zeggen over disjunctheid. Bijvoorbeeld in de ruimte van lineaire operatoren op een partieel geordende vectorruimte. In deze scriptie zullen we gaan kijken naar disjunctheid van integraaloperatoren op $C[0,1]$, de ruimte van reëelwaardige, continue functies op het eenheidsinterval. We definiëren deze integraaloperatoren als volgt.

Definitie 1.1. Zij X een deelruimte van $C[0,1]$. Voor een continue afbeelding $a : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definiëren we de integraaloperator $T_a : X \to C[0,1]$ door

$$(T_a f)(x) = \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy, \quad f \in X,\ x \in [0,1].$$

Over dit soort operatoren is door George Huppertz in [Hup19, Stelling 6.20] al het volgende bewezen

Stelling (Huppertz)**.** *Zij X een uniform dichte deelruimte van $C[0,1]$. Zijn $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu en zijn T_a en T_b zoals in Definitie 1.1. Dan zijn T_a en T_b disjunct in X dan en slechts dan als a en b disjunct zijn.*

In deze scriptie zal deze stelling gegeneraliseerd worden. Ten eerste bewijst Huppertz de stelling binnen de ruimte van integraaloperatoren, maar niet binnen de ruimte van *alle* operatoren op $C[0,1]$. In deze scriptie wordt aangetoond dat de stelling ook geldt in de ruimte van *alle* lineaire operatoren op $C[0,1]$. Daarnaast bekijkt Huppertz operatoren op een deelruimte, waarbij die deelruimte uniform dicht ligt in $C[0,1]$. In deze scriptie zullen twee zwakkere eigenschappen gegeven worden waaraan die deelruimte moet voldoen om de stelling te laten gelden.

2 Rieszruimten

We beginnen met een introductie over partieel geordende vectorruimten en Rieszruimten. In deze scriptie wordt ervan uitgegaan dat vectorruimten over het lichaam $\mathbb{R}$ zijn. Hoofdstukken 2 en 3 bevatten definities uit [KG18] en vertonen gelijkenissen met [Hup19].

Definitie 2.1. Zij X een vectorruimte en zij $\leq$ een partiële ordening op X. Als

(i) voor alle $x, y, z \in X$ geldt $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$,

(ii) voor alle $x \in X$ en $\alpha \in [0, \infty)$ geldt $0 \leq x \Longrightarrow 0 \leq \alpha x$,

dan noemen we $(X, \leq)$ een *partieel geordende vectorruimte.*

Opmerking 2.2. In het vervolg zullen ook de notaties $\geq$, $<$ en $>$ gebruikt worden. Wanneer wordt gesproken over een partiële ordening $\geq$ op een vectorruimte X wil dat zeggen dat voor alle $x, y \in X$ geldt $x \geq y \Longleftrightarrow y \leq x$ voor een partiële ordening $\leq$ op X. Verder geldt er

1. voor alle $x, y \in X$ geldt $x < y$ dan en slechts dan als $x \leq y$ en $x \neq y$,
2. voor alle $x, y \in X$ geldt $x > y$ dan en slechts dan als $x \geq y$ en $x \neq y$.

Voorbeeld 2.3. De vectorruimte $\mathbb{R}$ met de standaard ordening $\leq$ is een partieel geordende vectorruimte.

Voorbeeld 2.4. Bekijk $\mathbb{R}^n$ met lexicografische ordening $\preceq$. Lexicografische ordening is een partiële ordening die stelt dat voor $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\begin{aligned} x \preceq y \Longleftrightarrow\ & x_1 < y_1 \text{ of} \\ & x_1 = y_1 \text{ en } x_2 < y_2 \text{ of} \\ & x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \text{ en } x_3 < y_3 \text{ of} \\ & \dots \\ & x_i = y_i \text{ voor } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ en } (x_n < y_n \text{ of } x_n = y_n). \end{aligned}$$

Laat $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in [0, \infty)$.

(i) Stel dat geldt $x \preceq y$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat geldt $x_1 < y_1$. Er geldt dan $x_1 + z_1 < y_1 + z_1$, want $(\mathbb{R}, \leq)$ is een partieel geordende vectorruimte. Dit geeft $x + z \preceq y + z$.

(ii) Stel dat geldt $0 \preceq x$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat geldt $0 < x_1$. Als geldt $\alpha = 0$, dan geldt $\alpha x = 0$, dus $0 \preceq \alpha x$. Voor $\alpha > 0$ geldt er $0 < \alpha x_1$, dus er geldt $0 \preceq \alpha x$.

Dus $\mathbb{R}^n$ met de lexicografische ordening is een partieel geordende vectorruimte.

Opmerking 2.5. In het vervolg zal voor elke partiële ordening het symbool $\leq$ gebruikt worden. Uit de context zal altijd blijken welke ordening bedoeld wordt.

Niet elke partiële ordening op een vectorruimte geeft ook een partieel geordende vectorruimte.

Voorbeeld 2.6. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{als } x < 0 \\ -x & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{als } x > 1 \end{cases}.$$

We definiëren een partiële ordening $\leq$ op $\mathbb{R}$ door

$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Neem nu $x = 2$ en $\alpha = \frac{1}{4}$. Er geldt $f(2) = 1 \geq 0$, dus $x \geq 0$. Er geldt echter $f\left(\frac{1}{4} \cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \leq 0$. Dus $\alpha x \leq 0$. Dus $(\mathbb{R}, \leq)$ is geen partieel geordende vectorruimte, want er wordt niet voldaan aan Definitie 2.1 (ii).

Alleen de structuur van een partieel geordende vectorruimte is niet genoeg om een definitie voor disjunctheid te kunnen formuleren. Daar is nog een extra eigenschap voor nodig.

Definitie 2.7. Zij X een partieel geordende vectorruimte. Als voor alle $x, y \in X$ geldt dat het supremum van x en y bestaat, dan heet X een *Rieszruimte*. We zeggen $x \vee y := \sup\{x, y\}$.

Voorbeeld 2.8. Bekijk de ruimte $C[0, 1]$ van continue, reeëlwaardige functies op het eenheidsinterval met de partiële ordening

$$f \leq g \Longleftrightarrow \text{voor alle } x \in [0, 1] \text{ geldt } f(x) \leq g(x).$$

Dit noemen we de *puntsgewijze ordening*. Zij $f, g \in C[0, 1]$. Voor $x \in [0, 1]$, definieer $h(x) := f(x) \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Dan is h het supremum van f en g in $C[0, 1]$. Dus $C[0, 1]$ met de puntsgewijze ordening is een Rieszruimte.

Voorbeeld 2.9. Bekijk de ruimte $C^1[0, 1]$ van differentieerbare functies op het eenheidsinterval met de puntsgewijze ordening. Laat $f, g \in C^1[0, 1]$ gegeven zijn door $f(x) = x$ en $g(x) = -x + 1$. Laat $k : [0, 1] \to [0, 1]$ een functie zijn gegeven door $k(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. De functie k is niet bevat in $C^1[0, 1]$, want k is niet differentieerbaar in $x = \frac{1}{2}$. Stel dat $\{f, g\}$ een supremum h heeft in $C^1[0, 1]$. Voor $x = \frac{1}{2}$ geldt er $k(x) < h(x)$. Er is dan een interval (α, β) rond $x = \frac{1}{2}$ met $\alpha < \frac{1}{2} < \beta$ zodanig dat voor alle $x \in (\alpha, \beta)$ geldt $k(x) < h(x)$. Er bestaat dan een functie $l \in C^1[0, 1]$ zodanig dat geldt $l(x) = h(x)$ voor $x \notin (\alpha, \beta)$ en $k(x) < l(x) < h(x)$ voor $x \in (\alpha, \beta)$. Dus $l \geq f$ en $l \geq g$, maar $l \leq h$. Dat geeft een tegenspraak, dus $\{f, g\}$ heeft geen supremum. Dus $C^1[0, 1]$ met de puntsgewijze ordening is geen Rieszruimte.

Omdat de structuur van een partiële ordening kan worden overgenomen door deelruimten, zijn deelruimten van partieel geordende vectorruimten zelf ook partieel geordende vectorruimten. Deelruimten van Rieszruimten zijn echter niet per se ook Rieszruimten. Zo is $C^1[0, 1]$ een deelruimte van $C[0, 1]$, maar is $C^1[0, 1]$ geen Rieszruimte terwijl $C[0, 1]$ dat wel is.

Het bestaan van het supremum geeft aanleiding tot de volgende definitie voor de absolute waarde van een element in een Rieszruimte.

Definitie 2.10. Zij X een Rieszruimte. Voor alle $x \in X$ definiëren we $|x| := x \vee (-x)$.

Daarnaast geldt dat het bestaan van het supremum van twee elementen equivalent is met het bestaan van het supremum en infimum voor elke eindige, niet-lege deelverzameling van een Rieszruimte [KG18, Propositie 1.1.14]. Voor een Rieszruimte X met $x, y \in X$ kunnen we dus ook spreken over $\inf\{x, y\}$ en dat noteren we als $\inf\{x, y\} := x \wedge y$. Verder kan het infimum in het supremum worden uitgedrukt door

$$x \wedge y = -((-x) \vee (-y)).$$

We gebruiken het infimum en de absolute waarde om een definitie te geven voor disjunctheid in Rieszruimten.

Definitie 2.11. Zij X een Rieszruimte. We zeggen dat twee elementen $x, y \in X$ *disjunct* zijn dan en slechts dan als geldt $|x| \wedge |y| = 0$.

Voorbeeld 2.12. Voor twee functies $f, g \in C[0,1]$ geldt dat f en g disjunct zijn dan en slechts dan als geldt $|f| \wedge |g| = 0$. In $C[0,1]$ met de puntsgewijze ordening zijn de absolute waarde en het infimum net als het supremum puntsgewijs, aangezien beide in het supremum kunnen worden uitgedrukt. Dit betekent dat f en g disjunct zijn als f en g puntsgewijs 0 zijn, dus als voor alle $x \in [0,1]$ geldt $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$.

Voorbeeld 2.13. Op de ruimte van continue functies $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ kun je een partiële ordening leggen vergelijkbaar met Voorbeeld 2.8 door te zeggen

$$a \leq b \iff \text{voor alle } (x, y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ geldt } a(x, y) \leq b(x, y).$$

Analoog aan Voorbeeld 2.12 kan je dan op gelijke wijze stellen voor continue functies $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ geldt dat a en b disjunct zijn dan en slechts dan als voor alle $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ geldt $a(x, y) = 0$ of $b(x, y) = 0$.

3 Ruimte van lineaire operatoren

We zijn geïnteresseerd in disjunctheid van lineaire operatoren tussen partieel geordende vectorruimten. Daarvoor moet eerst worden gekeken naar een ordening op deze ruimte. Voor partieel geordende vectorruimten X en Y noemen we $L(X, Y)$ de ruimte van lineaire operatoren $X \to Y$. Als geldt $Y = X$, dan noemen we $L(X)$ de ruimte van lineaire operatoren $X \to X$.

Definitie 3.1. Zijn X en Y partieel geordende vectorruimten, en zij $T : X \to Y$ een lineaire operator. Als voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt $T(x) \geq 0$ dan heet T *positief.*

Definitie 3.2. Een partieel geordende vectorruimte X noemen we *gericht* als geldt $X = \operatorname{span}\{x \in X \mid x \geq 0\}$.

Propositie 3.3. *Zijn X en Y partieel geordende vectorruimten en stel dat X gericht is. Zijn $T, S \in L(X, Y)$. We definiëren nu een partiële ordening $\geq$ op $L(X, Y)$ door*

$$T \geq S \iff T - S \text{ is positief.}$$

Dan is $(L(X, Y), \geq)$ een partieel geordende vectorruimte.

Bewijs. Voordat we bewijzen dat de partiële ordening $\geq$ voldoet aan Definitie 2.1, moeten we eerst laten zien dat $\geq$ daadwerkelijk een partiële ordening is. Laat $T, S, U \in L(X, Y)$.

(i) Voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt $(T - T)(x) = T(x) - T(x) = 0$. Dus $T \geq T$, dus $\geq$ is reflexief.

(ii) Stel dat geldt $T \geq S$ en $S \geq T$. Voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt dan $(T - S)(x) \geq 0$ en $(S - T)(x) \geq 0$. Omdat geldt $(T - S)(x) \geq 0$, geldt er ook $-(T - S)(x) \leq -0$, dus $(S - T)(x) \leq 0$. Dus er geldt $(S - T)(x) = 0$. Dus voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt er $T(x) = S(x)$. Omdat X gericht is, geldt er $X = \operatorname{span}\{x \in X \mid x \geq 0\}$. We krijgen dus dat voor alle $x \in X$ geldt $T(x) = S(x)$. Dus $T = S$, dus $\geq$ is anti-symmetrisch.

(iii) Stel dat geldt $T \geq S$ en $S \geq U$. Voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt dan $(T - S)(x) \geq 0$ en $(S - U)(x) \geq 0$. Er geldt dan $(T - S)(x) + (S - U)(x) = (T - U)(x) \geq 0$, dus $T \geq U$. Dus $\geq$ is transitief.

De ordening $\geq$ is reflexief, anti-symmetrisch en transitief, dus $\geq$ is een partiële ordening.
We laten nu zien dat $\geq$ voldoet aan Definitie 2.1. Laat $T, S, U \in L(X, Y)$ en $\alpha \in [0, \infty)$.

(i) Stel dat geldt $T \geq S$. Voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt dan $(T-S)(x) \geq 0$. Er volgt dan $(T+U-U-S)(x) \geq 0$, dus $((T+U)-(S+U))(x) \geq 0$, dus er geldt $T+U \geq S+U$.

(ii) Stel dat geldt $T \geq 0$. Voor alle $x \in X$ met $x \geq 0$ geldt dan $T(x) \geq 0$. Er geldt dan ook $\alpha \cdot T(x) \geq 0$, dus $(\alpha T)(x) \geq 0$, dus $\alpha T \geq 0$.

Dus $(L(X,Y), \geq)$ is een partieel geordende vectorruimte. $\square$

De partiële ordening op de ruimte van lineaire operatoren wordt wat inzichtelijker gemaakt in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.4. Laat $X = \mathbb{R}^n$ met de lexicografische ordening. De ruimte $L(X)$ is nu de ruimte van reëelwaardige, $n \times n$ matrices. Zijn $A, B \in L(X)$ en stel dat geldt $A \geq B$. Er geldt nu

$$\begin{aligned}(A-B) \text{ is positief } &\iff \forall x \in X \text{met } x \geq 0 : (A-B)x \geq 0\\ &\iff \forall i : (A-B)e_i \geq 0\\ &\iff \forall i,j\ (a_{ij} - b_{ij}) \geq 0\\ &\iff \forall i,j\ a_{ij} \geq b_{ij}.\end{aligned}$$

Dus er geldt $A \geq B$ dan en slechts dan als voor alle $1 \leq i,j \leq n$ geldt $a_{ij} \geq b_{ij}$.

We weten nu, als X en Y partieel geordende vectorruimten zijn, met X gericht, dat $L(X,Y)$ een partieel geordende vectorruimte is. We willen echter iets weten over disjunctheid van operatoren. Disjunctheid is gedefinieerd in Rieszruimten, dus we zouden eerst nog moeten laten zien dat $L(X,Y)$ ook een Rieszruimte is. Helaas is dit niet altijd het geval.

Voorbeeld 3.5. Dit voorbeeld is afkomstig uit [AB85, Example 1.16]. Voor $f \in C[-1,1]$, bekijk de operator $T : C[-1,1] \to C[-1,1]$ gegeven door

$$(Tf)(t) = \begin{cases} f\left(\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) - f\left(\sin\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) & \text{als } 0 < |t| \leq 1 \\ 0 & \text{als } t = 0 \end{cases}.$$

Er wordt in [AB85] aangetoond dat er geen positieve operator $S : C[-1,1] \to C[-1,1]$ bestaat zodanig dat geldt $T \leq S$. Als $T \vee 0$ zou bestaan, waarbij 0 de nul-operator is, zou gelden $T \leq (T \vee 0)$. Er is echter geen positieve operator S zodanig dat geldt $T \leq S$, dus $T \vee 0$ bestaat niet. Dus $L(C[-1,1])$ is geen Rieszruimte.

Op vergelijkbare wijze is duidelijk te maken dat $L(C[0,1])$ ook geen Rieszruimte is. We kunnen de definitie van disjunctheid dus niet direct gebruiken om iets te zeggen over disjunctheid van twee operatoren. Toch is het mogelijk iets te zeggen over disjunctheid van operatoren in $L(C[0,1])$, en dan specifiek over integraaloperatoren volgens Definitie 1.1. Hiervoor generaliseren we de definitie voor disjunctheid in Rieszruimten naar een definitie voor disjunctheid in partieel geordende vectorruimten. Hiervoor bekijken we eerst de volgende propositie.

Propositie 3.6. [KG18, Proposition 1.3.2] *Zij X een Rieszruimte. Zijn $x, y \in X$. Er geldt*

$$x \text{ en } y \text{ zijn disjunct} \iff |x+y| = |x-y|.$$

Hoewel er binnen partieel geordende vectorruimtes geen kleinste bovengrens is van twee elementen, kunnen we in plaats daarvan kijken naar de verzameling van *alle* bovengrenzen. Met behulp van Definitie 2.10 en Propositie 3.6 krijgen we de volgende definitie voor disjunctheid in partieel geordende vectorruimten.

Definitie 3.7. [KG18, Definition 4.1.1] In een partieel geordende vectorruimte X geldt dat twee elementen $x, y \in X$ disjunct zijn als de verzameling van bovengrenzen van $x+y$ en $-x-y$ gelijk is aan de verzameling van bovengrenzen van $x-y$ en $-x+y$, oftewel als geldt

$$\{z \in X \mid z \geq x+y, z \geq -x-y\} = \{z \in X \mid z \geq x-y, z \geq -x+y\}.$$

Deze definitie is minder toegankelijk, en levert vaak geen gewenste uitdrukking op wanneer men iets wilt zeggen over disjunctheid, aangezien er gewerkt moet worden met gelijkheid van verzamelingen van bovengrenzen. Voor integraaloperatoren is deze definitie echter wel te gebruiken, zoals later te lezen is. In het vervolg wordt voor disjunctheid de bovenstaande definitie gebruikt.

4 Disjunctheid van integraaloperatoren

Nu we hebben gezien dat $L(C[0,1])$ geen Rieszruimte is, maar dat we wel een definitie hebben die we kunnen gebruiken, zijn we klaar om iets te bewijzen over disjunctheid van integraaloperatoren. Er worden in dit hoofdstuk twee dingen door elkaar bewezen. Merk op dat waar in [Hup19] slechts werd bewezen dat T_a en T_b disjunct zijn binnen een deelruimte van $L(C[0,1])$, namelijk de ruimte

$$L^{int} := \left\{ T_a \in L(C[0,1]) \mid (T_a f)(x) = \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy,\ f \in C[0,1],\ x \in [0,1],\ a \in C([0,1]\times[0,1]) \right\},$$

dan en slechts dan als a en b disjunct zijn, er hier wordt bewezen dat T_a en T_b disjunct zijn *in de hele ruimte* $L(C[0,1])$ dan en slechts dan als a en b disjunct zijn. Dit wordt gedaan door te laten zien dat, hoewel $L(C[0,1])$ geen Rieszruimte is, voor integraaloperatoren T_a en T_b het supremum $T_a \vee T_b$ wel bestaat in de ruimte $L(C[0,1])$ en gelijk is aan $T_{a\vee b}$.

Tegelijkertijd bekijken we niet slechts operatoren in $L(C[0,1])$, maar operatoren in $L(X, C[0,1])$ waarbij $X \subset C[0,1]$ een gerichte deelruimte is. Er wordt bewezen dat disjunctheid niet alleen geldt wanneer X uniform dicht ligt in $C[0,1]$, zoals is bewezen in [Hup19], maar ook wanneer X Eigenschappen 1 en 2 heeft. Deze eigenschappen worden verderop gedefinieerd.

Eigenschap 1 is nodig om te laten zien dat voor integraaloperatoren T_a en T_b geldt $T_a \leq T_b$ dan en slechts dan als $a \leq b$. Dit bewijzen we in Stelling 4.1. We hebben daarnaast nog Eigenschap 2 nodig om te laten zien dat voor integraaloperatoren T_a en T_b geldt dat $T_a \vee T_b$ bestaat en dat geldt $T_a \vee T_b = T_{a\vee b}$. Dit laten we zien in Stelling 4.5. Vervolgens combineren we beide resultaten in Stelling 4.6. We beginnen met het geven van Eigenschap 1.

Eigenschap 1. *Zij $X \subset C[0,1]$ een deelruimte. We zeggen dat X Eigenschap 1 heeft als voor alle $\alpha, \beta \in (0,1)$ met $\alpha < \beta$ geldt dat er een $f \in X$ is zodanig dat voor alle $x \in (\alpha, \beta)$ geldt $f(x) > 0$ en voor alle $x \notin (\alpha,\beta)$ geldt $f(x) = 0$.*

Stelling 4.1. *Zij $X \subset C[0,1]$ een gerichte deelruimte met Eigenschap 1. Zijn $a, b : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ continue afbeeldingen en laat T_a en T_b zijn zoals in Definitie 1.1. Er geldt dan $T_a \leq T_b$ in de ruimte $L(X, C[0,1])$ dan en slechts dan als $a \leq b$.*

Bewijs. Zijn de continue afbeeldingen $a, b : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ gegeven. Stel dat geldt $a \leq b$. Voor alle $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ geldt dan $b(x,y) - a(x,y) \geq 0$. Laat nu $f \in X$ met $f \geq 0$. Voor alle $x \in [0,1]$ geldt er

$$\begin{aligned}(T_b f)(x) - (T_a f)(x) &= \int_0^1 b(x,y)f(y)\,dy - \int_0^1 a(x,y)f(y)\,dy \\ &= \int_0^1 (b(x,y) - a(x,y))f(y)\,dy \geq 0.\end{aligned}$$

Dus $T_b - T_a$ is positief, dus $T_a \leq T_b$.

Stel dat geldt $T_a \leq T_b$. Voor $f \in X$ met $f \geq 0$ en voor alle $x \in [0,1]$ geldt dan

$$(T_b f)(x) - (T_a f)(x) = \int_0^1 (b(x,y) - a(x,y))f(y)\,dy \geq 0.$$

Stel nu dat geldt dat er een $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0,1]\times[0,1]$ is zodanig dat geldt $b(\tilde{x},\tilde{y}) - a(\tilde{x},\tilde{y}) < 0$. Voor $x = \tilde{x}$ vast bestaat er een interval (α, β) zodanig dat voor alle $y \in (\alpha,\beta)$ geldt $b(\tilde{x},y) - a(\tilde{x},y) < 0$. Vanwege Eigenschap 1 bestaat er nu een $f \in X$ zodanig dat geldt $f(x) > 0$ voor $x \in (\alpha,\beta)$ en $f(x) = 0$ voor $x \notin (\alpha,\beta)$. Er geldt nu

$$\begin{aligned}\int_0^1 (b(\tilde{x},y) - a(\tilde{x},y))f(y)\,dy &= \int_\alpha^\beta (b(\tilde{x},y) - a(\tilde{x},y))f(y)\,dy \\ &= -\int_\alpha^\beta (a(\tilde{x},y) - b(\tilde{x},y))f(y)\,dy < 0.\end{aligned}$$

Dit geeft een tegenspraak, dus voor alle $x, y \in [0,1]\times[0,1]$ geldt $b(x,y) - a(x,y) \geq 0$, dus $a \leq b$.
Dus er geldt $T_a \leq T_b$ dan en slechts dan als $a \leq b$. $\square$

Vervolgens geven we Eigenschap 2. Eigenschap 2 is nodig om te laten zien dat $T_a \vee T_b$ bestaat en dat geldt $T_a \vee T_b = T_{a\vee b}$. Wat inzicht in hoe deze eigenschap tot stand is gekomen, wordt gegeven rond Lemma 4.2.

Eigenschap 2. *Zij $X \subset C[0,1]$ een deelruimte. Laat $f \in X$ met $f \geq 0$, laat $A \subset [0,1]$ open en stel $g := f\mathbb{1}_A$. De deelruimte X heeft Eigenschap 2 als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $h \in X$, $0 \leq h \leq f$, bestaat zodanig dat geldt*

$$\int_0^1 |g(x) - h(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

Om inzicht te krijgen waarom we deze eigenschap nodig hebben, moeten we eerst het volgende bekijken. Laat X en Y partieel geordende vectorruimten zijn, waarbij X gericht is, en laat $S, T : X \to Y$ lineaire operatoren zijn. Stel dat $S \vee T$ bestaat. Voor $x, y \in X$ met $0 \leq y \leq x$ geldt er

$$T(y) + S(x-y) \leq (T \vee S)(y) + (T \vee S)(x-y) = (T \vee S)(x).$$

Bekijk dan het volgende lemma.

Lemma 4.2. *Zijn $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu en laat T_a, T_b en $T_{a\vee b}$ zijn volgens Definitie 1.1 en Opmerking 4.3. Laat nu $x \in [0,1]$ en bekijk $A = \{y \mid a(x,y) > b(x,y)\}$. Laat $f \in X$ met $f \geq 0$ en neem $g = f\mathbb{1}_A$. Er geldt dan*

$$T_a(g) + T_b(f-g) = T_{a\vee b}(f).$$

Bewijs. Voor iedere $x \in [0,1]$ geldt

$$\begin{aligned}
\big(T_a(g) + T_b(f-g)\big)(x) &= \int_0^1 a(x,y)g(y)\, dy + \int_0^1 b(x,y)(f(y)-g(y))\, dy \\
&= \int_A a(x,y)f(y)\, dy + \int_{A^c} b(x,y)f(y)\, dy \\
&= \int_A (a(x,y) \vee b(x,y))f(y)\, dy + \int_{A^c} (a(x,y) \vee b(x,y))f(y)\, dy \\
&= \int_0^1 (a(x,y) \vee b(x,y))f(y)\, dy = T_{a\vee b}(f)(x).
\end{aligned}$$

□

We zouden nu willen stellen dat voor alle $f \in X$ met $f \geq 0$ en $x \in [0,1]$ geldt

$$(T_{a\vee b}f)(x) = T_a(g) + T_b(f-g))(x) \leq ((T_a \vee T_b)f)(x),$$

en dus dat geldt $T_{a\vee b} \leq T_a \vee T_b$. Met Stelling 4.1 kan dan worden bewezen dat $T_{a\vee b}$ een bovengrens is van T_a en T_b, dus dat er ook echt geldt $T_{a\vee b} = T_a \vee T_b$. De functie g is echter niet continue, dus niet bevat in $C[0,1]$ en daarom ook niet in X, dus dit argument kan niet als zodanig gebruikt worden. We kunnen het argument echter toch gebruiken door g te benaderen met een continue functie h die wel in X zit. Hiervoor gebruiken we Eigenschap 2.

Opmerking 4.3. In Lemma 4.2 spreken we over $(T_a g)$ en $(T_b(f-g))$. De operatoren T_a en T_b zijn echter alleen gedefinieerd op een deelruimte $X \subset C[0,1]$. Aangezien g niet continu is, en dus niet bevat is in $C[0,1]$, dus ook niet in X, kunnen we officieel niet spreken over $T_a(g)$ en $T_b(f-g)$. Dit kunnen we echter oplossen door de definitie van de operator uit te breiden naar integreerbare functies zodat ook g kan worden uitgerekend in integraaloperatoren. Voor $x \in [0,1]$ stellen we dus

$$\begin{aligned}
(T_a g)(x) &:= \int_0^1 a(x,y)g(y)\, dy, \\
(T_b(f-g))(x) &:= \int_0^1 b(x,y)(f(y)-g(y))\, dy.
\end{aligned}$$

Voordat we laten zien dat $T_a \vee T_b$ bestaat, is hier eerst nog een technisch lemma dat we daarvoor nodig hebben.

Lemma 4.4. *Laat $X \subset C[0,1]$ een gerichte deelruimte zijn met Eigenschap 2. Zij $f \in X$. Zijn $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu. Voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dan dat voor alle $x \in [0,1]$ geldt*

$$\left| \int_0^1 a(x,y)(h(y) - g(y))\, dy + \int_0^1 b(x,y)(g(y) - h(y))\, dy \right| \leq \varepsilon.$$

waarbij g en h zijn zoals in Eigenschap 2 voor een geschikt gekozen ε' in plaats van ε.

Bewijs. Laat $\varepsilon > 0$. Er geldt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 a(x,y)(h(y) - g(y))\, dy + \int_0^1 b(x,y)(g(y) - h(y))\, dy \right| \\
&\overset{1}{\leq} \left| \int_0^1 a(x,y)(h(y) - g(y))\, dy \right| + \left| \int_0^1 b(x,y)(g(y) - h(y))\, dy \right| \\
&\overset{2}{\leq} \int_0^1 |a(x,y)| \cdot |h(y) - g(y)|\, dy + \int_0^1 |b(x,y)| \cdot |g(y) - h(y)|\, dy \\
&\overset{3}{\leq} 2R \int_0^1 |g(y) - h(y)|\, dy \\
&\overset{4}{\leq} 2R\varepsilon' = 2R\frac{\varepsilon}{2R} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

In bovenstaande ongelijkheden wordt het volgende gebruikt:

1. Driehoeksongelijkheid.
2. Ongelijkheid voor absolute waarde van integraal en $|xy| = |x||y|$.
3. De functies a en b zijn continu op $[0,1] \times [0,1]$ en dus begrensd. Voor $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, laat $|a(x,y)| \leq R$ en $|b(x,y)| \leq R$ voor $R \in \mathbb{R}_{>0}$.
4. Gebruik Eigenschap 2 door te stellen

$$\int_0^1 |g(x) - h(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2R} =: \varepsilon'.$$

□

We kunnen nu Lemma's 4.2 en 4.4 gebruiken om te bewijzen dat $T_{a\vee b}$ bestaat in $L(X, C[0,1])$ en dat geldt $T_{a\vee b} = T_a \vee T_b$.

Stelling 4.5. *Laat $X \subset C[0,1]$ een gerichte deelruimte zijn met Eigenschappen 1 en 2. Laat $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue afbeeldingen zijn. Laat T_a, T_b en $T_{a\vee b}$ zijn zoals in Definitie 1.1. Dan geldt dat $T_a \vee T_b$ bestaat in $L(X, C[0,1])$, en er geldt $T_a \vee T_b = T_{a\vee b}$.*

Bewijs. We bewijzen dat $T_a \vee T_b$ bestaat en gelijk is aan $T_{a\vee b}$ door te laten zien dat $T_{a\vee b}$ een bovengrens is van T_a en T_b en vervolgens dat voor alle bovengrenzen U van T_a en T_b geldt $U \geq T_{a\vee b}$.
We bewijzen eerst dat geldt dat $T_{a\vee b}$ een bovengrens is van T_a en T_b. Aangezien er volgens Stelling 4.1 geldt $a \leq b$ dan en slechts dan als er geldt $T_a \leq T_b$, en aangezien er geldt $a \leq a \vee b$ en $b \leq a \vee b$, geldt er $T_a \leq T_{a\vee b}$ en $T_b \leq T_{a\vee b}$. Dus $T_{a\vee b}$ is een bovengrens van T_a en T_b.
Vervolgens bewijzen we dat $T_a \vee T_b$ daadwerkelijk bestaat en gelijk is aan $T_{a\vee b}$ door te laten zien dat voor alle bovengrenzen van T_a en T_b geldt dat ze groter zijn dan $T_{a\vee b}$. Laat U een bovengrens zijn van T_a en T_b. Merk op dat voor $f, h \in X$ met $0 \leq h \leq f$ geldt

$$T_a(h) + T_b(f - h) \leq U(h) + U(f - h) = U(f).$$

Laat $f \in X$ met $f \geq 0$. Laat $\varepsilon > 0$ en laat $g, h \in X$ zijn volgens Eigenschap 2. Voor alle $x \in [0,1]$ geldt nu

$$\begin{aligned}
(T_a(h) + T_b(f-h))(x) &= \int_0^1 a(x,y)h(y)\,dy + \int_0^1 b(x,y)(f(y)-h(y))\,dy \\
&= \int_0^1 a(x,y)g(y)\,dy + \int_0^1 b(x,y)(f(y)-g(y))\,dy \\
&+ \int_0^1 a(x,y)(h(y)-g(y))\,dy + \int_0^1 b(x,y)(g(y)-h(y))\,dy \\
&\geq \int_0^1 a(x,y)g(y)\,dy + \int_0^1 b(x,y)(f(y)-g(y))\,dy \\
&- \left| \int_0^1 a(x,y)(h(y)-g(y))\,dy + \int_0^1 b(x,y)(g(y)-h(y))\,dy \right| \\
&\overset{\text{Lemma 4.4}}{\geq} \int_0^1 a(x,y)g(y)\,dy + \int_0^1 b(x,y)(f(y)-g(y))\,dy - \varepsilon \\
&\overset{\text{Lemma 4.2}}{=} T_{a\vee b}(f)(x) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Omdat ε willekeurig klein kan zijn, krijgen we

$$T_{a\vee b}(f)(x) \leq (T_a(h) + T_b(f-h))(x) \leq U(f).$$

Dus voor alle bovengrenzen U van T_a en T_b geldt $U \geq T_{a\vee b}$. Dus $T_a \vee T_b$ bestaat en er geldt $T_a \vee T_b = T_{a\vee b}$. $\square$

Stelling 4.6. *Zij $X \subset C[0,1]$ een gerichte deelruimte met Eigenschap 1 en Eigenschap 2. Zijn $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue afbeeldingen, en laat T_a en T_b zijn zoals gedefinieerd in Definitie 1.1. Er geldt nu dat T_a en T_b disjunct zijn in $L(X, C[0,1])$ dan en slechts dan als a en b disjunct zijn.*

Bewijs. Stel dat T_a en T_b disjunct zijn. Met Definitie 3.7 geldt dan

$$\{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a+b}, T \geq T_{-a-b}\} = \{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a-b}, T \geq T_{-a+b}\}.$$

We doorsnijden deze twee verzamelingen met de verzameling

$$\{T \in L(X,C[0,1]) \mid \exists c : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R} \text{ continu}, T = T_c\}.$$

Dit geeft

$$\{T_c \in L(X,C[0,1]) \mid T_c \geq T_{a+b}, T_c \geq T_{-a-b}\} = \{T_c \in L(X,C[0,1]) \mid T_c \geq T_{a-b}, T_c \geq T_{-a+b}\}.$$

Met Stelling 4.1 geldt dan

$$\{c \colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R} \text{ continu} \mid c \geq a+b, c \geq -a-b\} = \{c : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R} \text{ continu} \mid c \geq a-b, c \geq -a+b\}.$$

Met Definitie 3.7 geldt nu dat a en b disjunct zijn.

Stel dat geldt dat a en b disjunct zijn. Met Definitie 3.7 en Stelling 4.1 krijgen we dan dat geldt

$$\{T_c \in L(X,C[0,1]) \mid T_c \geq T_{a+b}, T_c \geq T_{-a-b}\} = \{T_c \in L(X,C[0,1]) \mid T_c \geq T_{a-b}, T_c \geq T_{-a+b}\}.$$

Zij $T \in L(X, C[0,1])$ een operator en stel dat geldt $T \geq T_{a+b}$ en $T \geq T_{-a-b}$. We weten door Stelling 4.5 dat geldt $T \geq T_{a+b} \vee T_{-a-b} = T_c$ voor $c = (a+b) \vee (-a-b)$. Er geldt ook $T_c \geq T_{a-b}$ en $T_c \geq T_{-a+b}$, dus er geldt $T \geq T_{a-b}$ en $T \geq T_{-a+b}$. Dus er geldt

$$\{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a+b}, T \geq T_{-a-b}\} \subseteq \{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a-b}, T \geq T_{-a+b}\}.$$

Op analoge wijze kunnen we stellen dat voor een operator $T \in L(X, C[0,1])$, met $T \geq T_{a-b}$ en $T \geq T_{-a+b}$ geldt $T \geq T_{a+b}$ en $T \geq T_{-a-b}$, dus er geldt

$$\{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a+b}, T \geq T_{-a-b}\} \supseteq \{T \in L(X,C[0,1]) \mid T \geq T_{a-b}, T \geq T_{-a+b}\}.$$

Dus via Definitie 3.7 zijn T_a en T_b disjunct. $\square$

5 Deelruimten met Eigenschappen 1 en 2

Als afsluiting bekijken we nog wat deelruimten van $C[0,1]$ die Eigenschappen 1 en 2 wel en niet hebben. Alle deelruimten die worden genoemd zijn gericht.

Voorbeeld 5.1. De ruimte $C[0,1]$ zelf heeft uiteraard Eigenschap 1. Ook de deelruimte $C^k[0,1]$ voor $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ heeft Eigenschap 1.

Voorbeeld 5.2. De ruimte van polynomen op het eenheidsinterval, $P[0,1]$, heeft niet Eigenschap 1. Een n-de graads polynoom dat niet het 0-polynoom is heeft ten hoogste n nulpunten. Een deelruimte met Eigenschap 1 moet functies hebben die gelijk zijn aan 0 op een interval, dus functies die overaftelbaar veel nulpunten hebben. Behalve het 0-polynoom bestaan die niet in $P[0,1]$, dus $P[0,1]$ heeft niet Eigenschap 1.

Voorbeeld 5.3. Voor $\alpha \in [0,1]$ heeft de deelruimte $C_\alpha[0,1] = \{f \in C[0,1] \mid f(\alpha) = 0\}$ niet Eigenschap 1. Toch kunnen we wel stellen dat geldt $T_a \leq T_b$ binnen $L(C_\alpha[0,1], C[0,1])$ dan en slechts dan als $a \leq b$. Laat $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continu. Laat T_a en T_b volgens Definitie 1.1 en stel dat geldt $T_a \leq T_b$. Voor alle $f \in C_\alpha[0,1]$ met $f \geq 0$ en voor alle $x \in [0,1]$ geldt dan

$$(T_b f)(x) - (T_a f)(x) = \int_0^1 (b(x,y) - a(x,y)) f(y)\, dy \geq 0.$$

Stel dat er voor $x = \tilde{x}$ vast een $\tilde{y} \in [0,1]$ bestaat zodanig dat geldt $b(\tilde{x},\tilde{y}) - a(\tilde{x},\tilde{y}) < 0$. Als geldt $\tilde{y} \neq \alpha$ geldt via hetzelfde argument als in Stelling 4.1 dat er een tegenspraak volgt. Neem aan dat geldt $\tilde{y} = \alpha$. Er is een interval (β, γ) zodanig dat voor $y \in (\beta,\gamma)$ geldt $b(\tilde{x}, y) - a(\tilde{x}, y) < 0$. Er is dan een $f \in C_\alpha[0,1]$ met $f \geq 0$ zodanig dat geldt $f(y) > 0$ voor $y \in (\beta,\gamma) \setminus \{\alpha\}$ en $f(y) = 0$ elders. Er geldt dan

$$\int_0^1 (b(\tilde{x}, y) - a(\tilde{x}, y)) f(y)\, dy = \int_\beta^\gamma (b(\tilde{x}, y) - a(\tilde{x}, y)) f(y)\, dy < 0.$$

Dus dat geeft ook tegenspraak. Dus $a \leq b$. Dus er is een deelruimte zonder Eigenschap 1 maar waarvoor wel geldt $a \leq b$ dan en slechts dan als $T_a \leq T_b$ (de andere implicatie gaat als in Stelling 4.1).

Voordat we kijken welke deelruimten van $C[0,1]$ Eigenschap 2 hebben, is hier eerst een propositie.

Propositie 5.4. [Roy88, Proposition 2.8] *Als $B \subseteq \mathbb{R}$ open is dan zijn er open intervallen $I_1, I_2, \ldots$ met $I_i \cap I_j = \emptyset$ als $i \neq j$ en $B = \bigcup_{i=1}^\infty I_i$. Als $B \subseteq [0,1]$ dan geldt $\sum_{j=1}^\infty |I_j| \leq 1$ en voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\sum_{j=N+1}^\infty |I_j| < \varepsilon$.*

We gebruiken deze propositie om aan te tonen dat $C[0,1]$ Eigenschap 2 heeft door voor een $f \in C[0,1]$ met $f \geq 0$ een continue functie h op te stellen die voldoet aan Eigenschap 2.

Propositie 5.5. *De ruimte $C[0,1]$ heeft Eigenschap 2.*

Bewijs. Laat $f \in C[0,1]$ met $f \geq 0$. Laat $A \subset [0,1]$ open en neem $g = \mathbb{1}_A f$. Laat $\varepsilon > 0$. Toepassen van Propositie 5.4 op A geeft dat er een reeks open intervallen $I_1, I_2, I_3, \ldots$ is zodanig dat geldt

$$A = \bigcup_{i=1}^\infty I_i,$$

en $I_i \cap I_j = \emptyset$ voor $i \neq j$. De functie f is continu op $[0,1]$ en dus begrensd, dus er bestaat een $M \in \mathbb{R}_{>0}$ zodanig dat geldt

$$M = \max_{y \in [0,1]} |f(y)|.$$

Verder bestaat er voor $\varepsilon' \leq \frac{1}{2M}\varepsilon$ een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat geldt

$$\sum_{i=N+1}^\infty |I_i| < \varepsilon',$$

waarbij we ε' in ieder geval kleiner dan 1 kiezen. Als geldt $M = 0$, dan kiezen we $h(y) = g(y)$ voor alle $y \in [0,1]$ en dan voldoet h aan Eigenschap 2. In het vervolg wordt ervan uitgegaan dat geldt $M \neq 0$. We willen g benaderen met een continue h. Voor $y \notin A$ definiëren we $h(y) := g(y) = 0$. Voor $y \in \bigcup_{i=N+1}^\infty I_i$ definiëren we

$h(y) := 0$. Voor $i \in \{1, \ldots, N\}$ zeggen we $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ met $\alpha_i < \beta_i$. We definiëren nu $J_i := [\alpha_i + \varepsilon'', \beta_i - \varepsilon'']$ waarbij we stellen

$$\varepsilon'' = \min\left\{\frac{1}{2NM}\varepsilon, \frac{\min_i\{\beta_i - \alpha_i\}}{2}\right\}.$$

Voor $y \in J_i$ nemen we $h(y) := g(y) = f(y)$. Voor $y \in I_i \setminus J_i$ bekijken we de rechte verbindingslijn tussen $g(y) = 0$ in $y = \alpha_i$ en $g(y) = f(y)$ in $y = \alpha_i + \varepsilon_i$ of tussen $g(y) = f(y)$ in $\beta_i - \varepsilon_i$ en $g(y) = 0$ in $y = \beta_i$. Voor $y \in I_i \setminus J_i$ definiëren we $h(y)$ als het minimum van deze verbindingslijn en f. Dit geeft een continue h met $0 \leq h \leq f$ die een benadering is van g. We krijgen nu

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(y) - h(y)|\, dy &= \int_{\bigcup_{i=1}^N J_i} |g(y) - h(y)|\, dy + \int_{\bigcup_{i=1}^N I_i \setminus J_i} |g(y) - h(y)|\, dy \\
&\quad + \int_{\bigcup_{i=N+1}^\infty I_i} |g(y) - h(y)|\, dy + \int_{[0,1]\setminus A} |g(y) - h(y)|\, dy \\
&\leq 0 + 2N \cdot \frac{1}{2} \cdot \varepsilon'' \cdot M + \varepsilon' \cdot M + 0 \\
&\leq NM \cdot \frac{1}{2NM}\varepsilon + M \cdot \frac{1}{2M}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dus $C[0,1]$ heeft Eigenschap 2. □

Deze constructie kan ook worden opgesteld voor bepaalde deelruimten van $C[0,1]$. Voor een deelruimte $X \subset C[0,1]$ zodanig dat voor alle $\varepsilon > 0$ en voor alle $h \in C[0,1]$ met $h \geq 0$ er een $\tilde{h} \in X$ bestaat met $0 \leq \tilde{h} \leq h$ zodanig dat geldt

$$\int_0^1 |h(x) - \tilde{h}(x)|\, dx \leq \varepsilon,$$

kunnen we zeggen dat X Eigenschap 2 heeft. Via Propositie 5.5 vinden we dan namelijk een $h \in [0,1]$ zoals in Eigenschap 2 en die h kunnen we dan benaderen met een $\tilde{h} \in X$ met $0 \leq \tilde{h} \leq h$.

Voorbeeld 5.6. Voor $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat $C^k[0,1]$ Eigenschap 2 heeft.

Gevolg 5.7. We hebben gezien dat voor $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat de ruimte $C^k[0,1]$ Eigenschappen 1 en 2 heeft. We kunnen met Stelling 4.6 dus concluderen dat, voor $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, geldt dat voor continue functies $a, b : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ en voor operatoren T_a en T_b volgens Definitie 1.1 geldt dat T_a en T_b disjunct zijn binnen $L(C^k[0,1], C[0,1])$ dan en slechts dan als a en b disjunct zijn.

Voorbeeld 5.8. De ruimte $P[0,1]$ heeft niet Eigenschap 2.

Voorbeeld 5.9. Voor $\alpha \in [0,1]$ heeft de deelruimte $C_\alpha[0,1]$ wel Eigenschap 2. Voor elke $\varepsilon > 0$ kan er een h op dezelfde manier als in Propositie 5.5 geconstrueerd worden. Vervolgens definiëren we $\tilde{h}$ door op een klein genoeg interval (β, γ) rond α is te stellen dat geldt $\tilde{h}(\alpha) = 0$ en voor $y \in (\beta, \gamma) \setminus \{\alpha\}$ te stellen dat $\tilde{h}$ wordt gekozen als het minimum van h en de verbindingslijnen tussen $h(\beta) = f(\beta)$ en $h(\alpha) = 0$, en tussen $h(\alpha) = 0$ en $h(\gamma) = f(\gamma)$. Dit geeft een geschikte $\tilde{h}$ in $C_\alpha[0,1]$.

Je zou je nu af kunnen vragen of Eigenschap 1 en Eigenschap 2 de zwakste eigenschappen zijn die je kan stellen aan een gerichte deelruimte $X \subset C[0,1]$ zodanig dat de stelling nog geldt. In voorbeeld 5.3 was al te zien dat de deelruimte $C_\alpha[0,1]$ niet Eigenschap 1 heeft, maar dat er wel geldt $T_a \leq T_b$ dan en slechts dan als $a \leq b$. Aangezien $C_\alpha[0,1]$ wel Eigenschap 2 heeft, geldt dus wel dat T_a en T_b disjunct zijn dan en slechts dan als a en b disjunct zijn. Het lijkt dus alsof er nog wat te winnen valt.

Een mogelijke aanscherping wordt verkregen door Eigenschap 1 aan te passen zodanig dat voor $x \in (\alpha, \beta)$ geldt $f(x) > 0$ op *eindig veel punten na*. Binnen de context van continue functies op het eenheidsinterval voegt deze notie echter niet veel toe, aangezien de Riemann-integraal altijd 0 is in een eindig aantal punten.

Deze aangescherpte versie van Eigenschap 1 wordt waarschijnlijk wel relevant als je in plaats van continue functies op $[0,1]$ gaat kijken naar continue functies op een willekeurige compacte Hausdorff-ruimte met daarop gedefinieerd een maat, zoals bijvoorbeeld de Borelmaat. Binnen de maattheorie is de eigenschap dat iets geldt voor een verzameling op een eindig aantal punten na wel relevant. Er lijkt dus nog ruimte te zijn om de stelling verder te generaliseren.

Referenties

[AB85] Charalambos D Aliprantis en Owen Burkinshaw. *Positive operators*. eng. Pure and applied mathematics. 810852004. Orlando [etc.]: Academic Press, 1985. ISBN: 0120502607.

[Hup19] George Huppertz. "Disjunctheid van integraaloperatoren". ned. Bachelorscriptie. 2019.

[KG18] Anke Kalauch en Onno van Gaans. *Pre-Riesz spaces*. eng. De Gruyter expositions in mathematics ; Band/Volume 66. 2018. ISBN: 9783110476293.

[Roy88] H.L. Royden. *Real Analysis 3rd Ed.* Prentice-Hall Of India Pvt. Limited, 1988. ISBN: 9788120309739. URL: https://books.google.nl/books?id=KBCfPwAACAAJ.