



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

## Snowball Earth

Aalders, J.A.

### Citation

Aalders, J. A. *Snowball Earth*.

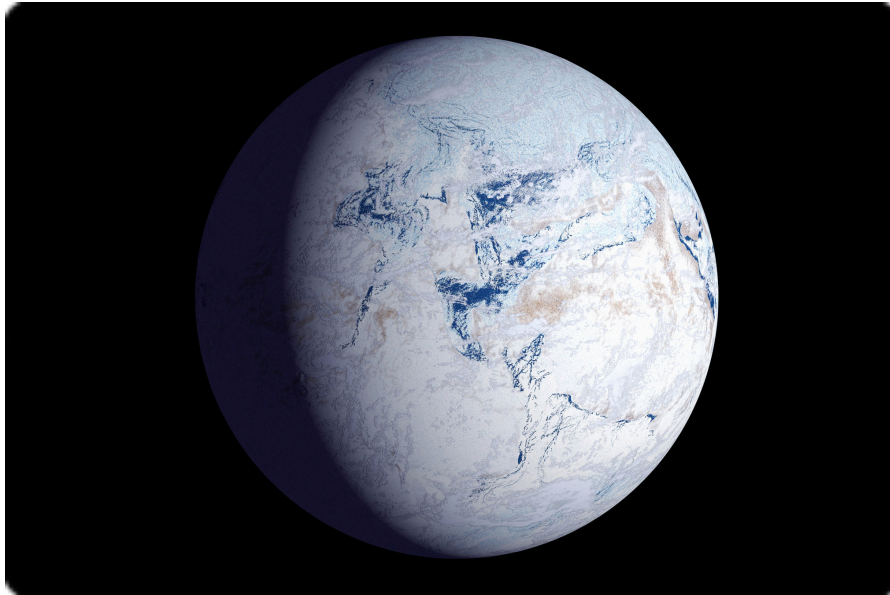
Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171255>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

# Snowball Earth



## ***Bachelor Scriptie Wiskunde***

**Naam:** Jozefien Aalders

**Studentennummer:** s1703153

**Datum:** 30 juli 2021

**Begeleider:** dr. F.W.J. Veerman



**Universiteit  
Leiden**

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Het Energiebalansmodel (EBM)</b>	<b>5</b>
2.1	Introductie . . . . .	5
2.2	De opbouw van het EBM . . . . .	5
2.2.1	Uitdrukking inkomende- en uitgaande energie bepalen . . . . .	7
2.3	De evenwichtstoestanden . . . . .	11
2.4	Het bifurcatiediagram van het EBM-model . . . . .	12
2.4.1	Bifurcatie theorie . . . . .	12
2.4.2	Bifurcatiediagram horende bij het EBM . . . . .	20
2.5	Andere Klimaatsystemen . . . . .	22
2.5.1	Het Oceanen model . . . . .	23
2.5.2	Het Maasch-Saltzman model . . . . .	27
2.6	Conclusie resultaten hoofdstuk 2 . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Fast-slow systemen</b>	<b>31</b>
3.1	Introductie . . . . .	31
3.2	Inleiding fast-slow systemen . . . . .	31
3.2.1	De dynamica op en buiten een slow manifold . . . . .	36
3.3	Van der Polvergelijking . . . . .	40
3.4	EBM naar de normaalvorm brengen . . . . .	45
3.5	Dynamica rond een zadelpuntbifurcatie . . . . .	53
3.6	Verstoring EBM . . . . .	58
3.7	Dynamica van het EBM model . . . . .	64
3.8	Conclusie resultaten hoofdstuk 3 . . . . .	69
<b>4</b>	<b>De invloed van ruis in het systeem</b>	<b>71</b>
4.1	Introductie . . . . .	71
4.2	Modelleren EBM onderinvloed van ruis voor het laten toenemen van de parameter $Q$ . . . . .	73
4.3	Modelleren EBM onder invloed ruis voor het laten afnemen van de parameter $Q$ . . . . .	81
4.4	Conclusie m.b.t. de invloed van ruis op het systeem . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Conclusie en Samenvatting</b>	<b>90</b>
<b>6</b>	<b>Discussie</b>	<b>92</b>
<b>7</b>	<b>Appendix I</b>	<b>94</b>

# 1 Inleiding

In dit project zullen we gaan kijken naar klimaatsystemen en in het bijzonder het klimaatsysteem van het Energy Balance Model (EBM). Dit model geeft de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak aan. We zullen zien dat dit een vrij eenvoudig systeem is voor iets wat zo complex is als het klimaat. Maar zulke eenvoudige klimaatsystemen kunnen ons helpen bij het begrijpen en controleren van complexere klimaatsystemen. Dit zullen we ook laten zien in het project.

Met behulp van het EBM krijgen we meer inzicht in hoe we van onze warme aarde opeens terecht kunnen komen in een ijsaarde, en andersom. Er blijkt in dit klimaatsysteem, maar ook in andere klimaatsystemen zoals in het oceanenmodel, dat er kritische overgangen in voor komen. Deze kritische overgangen zorgen ervoor dat je in een vrij korte periode van de ene situatie naar de andere situatie “springt”, dus van de huidige warme aarde naar een ijskoude aarde “springt”. Zulke klimaatovergangen zijn onomkeerbaar, en dat wil zeggen dat we niet meteen weer terug kunnen springen naar de oude situatie; om van een ijsaarde weer terug te gaan naar een warme aarde kost heel veel tijd. Daarom is het van belang om zulke overgangen of te voorkomen of ons er juist op voor te bereiden, want zulke klimaatovergangen zijn zeer ongewild.

In dit project zullen we eerst gaan kijken hoe we het EBM kunnen opstellen. Vervolgens zullen we kijken naar de evenwichtsvoorwaarden van dit systeem. Als we dan een parameter in dit systeem zullen veranderen, in dit geval de zonneconstante die de inkomende energie beïnvloedt, dan zien we dat er drastische veranderingen plaatsvinden. Immers er verdwijnen opeens evenwichten in dit systeem, en dit verschijnsel noemen we ook wel een “bifurcatie”. We zullen hier wat dieper op in gaan, en zullen dan ook kijken naar de bekende normaalvormen. We zullen zien dat complexere systemen ook om te zetten zijn naar zulke eenvoudige normaalvormen. Over deze normaalvormen is meer bekend, en ze helpen ons dus met het begrijpen van de complexere systemen.

We zullen zien dat die kritische overgangen wiskundig te begrijpen zijn door fast-slow systemen. De benodigde theorie hiervan zal worden behandeld, en vervolgens zullen we het EBM ook in één zo’n systeem zetten. Daarna kunnen we de dynamica op het EBM bepalen, en zullen we zien dat we te maken krijgen met twee verschillende tijdschalen, namelijk een snelle en een langzame tijdschaal. Dit verschil in tijdschalen verklaart ook dat de aarde opeens een “sprong” naar een andere klimaatsituatie kan maken.

Als we uiteindelijk de dynamica op het EBM hebben bepaald, en daarmee de kritische overgangen kunnen begrijpen, zullen we ons afvragen of en wanneer we dicht bij zo'n kritische overgang zijn. Een klimaat overgang is een te verwachten ongewilde gebeurtenis, omdat de consequenties heel groot zijn als we opeens van een warme aarde zoals we die nu ervaren naar een ijsaarde overgaan. Daarom is het fijn om te weten of we een kritische overgang naderen, zodat we deze overgang kunnen voorkomen of ons erop voor kunnen bereiden. We zullen dit onderzoeken door middel van ruis toe te voegen aan het EBM, we krijgen dan te maken met stochastische differentiaalvergelijkingen (SDE).

## 2 Het Energiebalansmodel (EBM)

### 2.1 Introductie

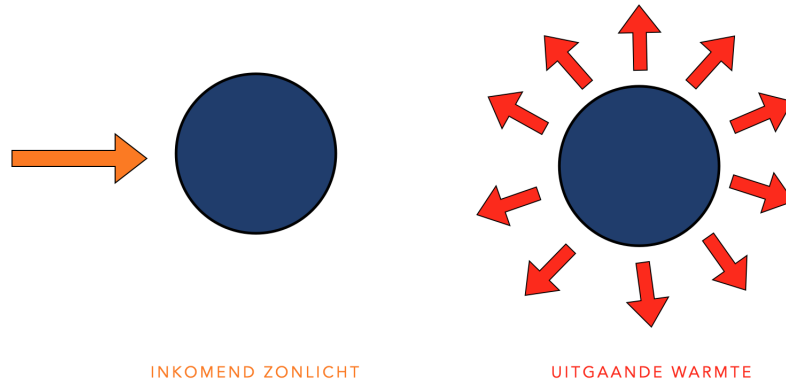
In dit hoofdstuk gaan we het “Energy Balance Model” (EBM) bekijken. Het klimaat is een complex systeem maar als we er globaal naar kijken en bijzaken terzijde laten, wordt dit systeem een stuk eenvoudiger. De vraag is echter, is het relevant om naar zo’n eenvoudiger klimaatsysteem te kijken en gaat het ons verder helpen? Vaak geeft een eenvoudig model ons inzicht in wat er gebeurt of gaat gebeuren in complexere systemen, en daarom lijkt dit wel nuttig te zijn. Zo’n eenvoudig klimaat model is het EBM model. Dit model houdt namelijk alleen rekening met de inkomende zonne-energie en uitgaande warmte van de aarde. Verder worden veel bijzaken die het model complex zouden maken genegeerd, denk bijvoorbeeld aan bijzaken als de samenstelling van atmosfeer, topografie, oceanen, en de verschillen tussen de continenten. [2]

### 2.2 De opbouw van het EBM

Het EBM geeft de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak aan. We zullen bekijken hoe we het EBM kunnen opstellen. Hierbij wordt gebruikt gemaakt van het boek *Mathematics and Climate*. [2]

Als we kijken naar figuur 1, zien we het klimaatsysteem van de aarde. We kunnen de aarde zien als een bol, die alle energie ontvangt van de zon, en weer een deel van die ontvangen energie uitstraalt. De inkomende energie van de zon naar de aarde, noteren we met  $E_{in}$ , en de uitgaande energie van de aarde, noteren we met  $E_{uit}$ . Verder negeren we dus, zoals in de introductie is uitgelegd, de kleine bijzaken die het systeem complex maken.

De gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak hangt af van deze inkomende en uitgaande energie. Als de hoeveelheid inkomende energie op aarde groter is dan de hoeveelheid uitgaande energie, betekent het dat de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak toeneemt. Als de situatie omgekeerd is, dus als de hoeveelheid uitgaande energie op aarde groter is dan de hoeveelheid inkomende energie, betekent het dat de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak afneemt. [2]



Figuur 1: Klimaatsysteem van de aarde

Nu we het klimaatsysteem hebben vastgesteld, een homogene bol met inkomende en uitgaande energie, kunnen we een vergelijking opstellen voor de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak. We krijgen de volgende differentiaalvergelijking [2] :

$$C \frac{dT}{dt} = E_{in} - E_{uit} \quad (1)$$

- $C$  is de gemiddelde warmtecapaciteit over de wereld in  $Wyr m^{-2}$  (Watt per jaar per vierkante meter). Dit wil zeggen de energie die nodig is om de temperatuur van het aardoppervlak met één graad te verhogen.
- $T$  is de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak in Kelvin ( $K$ ).
- $t$  is de tijd in jaren (yr).
- $E_{in}$  is de gemiddelde hoeveelheid energie die één vierkante meter van het aardoppervlak per tijdseenheid bereikt.
- $E_{uit}$  is de gemiddelde hoeveelheid energie die wordt uitgestraald door één vierkante meter van het aardoppervlak per tijdseenheid.

Nu we deze gewone differentiaal vergelijking hebben opgesteld, kunnen we de  $E_{in}$  en  $E_{uit}$  gaan bepalen.

### 2.2.1 Uitdrukking inkomende- en uitgaande energie bepalen

Allereerst bepalen we de inkomende energie, dus de energie die de aarde ontvangt (zonne-energie). Vanaf de zon gezien is de aarde een cirkel, dus de zonne-energie die het aardoppervlakte bereikt is de oppervlakte van de cirkel keer de energie van de zon, oftewel

$$\pi R^2 S_0$$

met  $R$  de straal van de aarde en  $S_0$  de zonneconstante. [2]

Hier is echter geen rekening gehouden met het plantaire albedo. Dit is het deel van de zonnestraling die het aardoppervlak niet bereikt, omdat het al voor die tijd de ruimte in wordt gereflecteerd. Het plantaire albedo is het gemiddelde van het lokale albedo (dit hangt af van lokale factoren zoals bewolking en ijs/sneeuw) en wordt genoteerd met de letter  $\alpha$ . Maar wij willen juist de inkomende zonnestraling die het aardoppervlakte wel bereikt weten, dit is  $1 - \alpha$ , ook wel het co-albedo genoemd. Nu kunnen de formule opstellen voor de hoeveelheid zonne-energie die het aardoppervlak bereikt per tijdseenheid [2] :

$$(1 - \alpha)\pi R^2 S_0$$

- $1 - \alpha$  het co-albedo, de inkomende zonnestraling die het aardoppervlak wel bereikt.
- $S_0$  de zonneconstante.
- $\pi R^2$  de oppervlakte van de platte schijf (aarde vanaf de zon gezien).

We weten dat de aarde een bol is, en hiervan in de oppervlakte  $4\pi R^2$ , en deze zonne-energie wordt gelijkmatig over het aardoppervlak verdeeld. Dit geeft de formule (voor de hoeveelheid energie die één vierkante meter van het aardoppervlak per tijdeendheid bereikt) [2] :

$$\frac{(1 - \alpha)\pi R^2 S_0}{(4\pi R^2)} = \frac{1}{4}(1 - \alpha)S_0$$

We definiëren de afkorting  $Q := \frac{1}{4}S_0$  , dit geeft:



$$E_{in} = (1 - \alpha)Q$$

Nu we de inkomende energie hebben bepaald, willen we de uitgaande energie bepalen.

We weten dat de hoeveelheid uitgestraalde energie afhankelijk is van de temperatuur. Bijvoorbeeld, als er een lage temperatuur is op aarde dan ligt er meer sneeuw en ijs op het aardoppervlak. Daarnaast weten we dat een wit object meer reflecteert dan een donker object. Dus als de aarde bedekt is onder een sneeuw-of ijslaag, dan zou dat betekenen dat de aarde meer warmte terugkaatst en dit zorgt ervoor dat de aarde meer energie uitstraalt. Als de temperatuur op aarde hoog is dan zal er juist minder sneeuw en ijs liggen, en dan zal er minder uitstralende energie zijn.

Als we aannemen dat de aarde straalt als een zwart lichaam met oppervlakte-temperatuur  $T$ , dan volgt dat de gemiddelde hoeveelheid uitgestraalde energie de wet van Stefan-Boltzmann is.[2] Dan vinden we de volgende formule voor de uitgaande energie:

$$E_{uit} : T \rightarrow E_{uit}(T) = \sigma T^4$$

$$\text{met } \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad (\text{Stefan's constante}) \quad (2)$$

Nu we zowel de inkomende als de uitgaande energie hebben bepaald, kunnen we deze invullen in vergelijking (1). Dit geeft:

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha)Q - \sigma T^4$$

Als we hiervoor de evenwichtoplossing willen bepalen, vinden we:

$$T^* = \left( \frac{(1 - \alpha)Q}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$$

We zien alleen dat als we waarden invullen voor deze oplossing, de evenwichtstemperatuur 254,8 Kelvin is, en de werkelijke temperatuur van de aarde 287,7 Kelvin is. [2] De verklaring voor het lager liggen van de werkelijke temperatuur is het broeikaseffect. Het broeikas effect wordt veroorzaakt door gassen zoals bijvoorbeeld CO<sub>2</sub> en methaan. Deze gassen zorgen ervoor dat er minder uitgaande energie is waardoor de aarde meer warmte vasthoudt en daardoor opwarmt. Nu de broeikasgassen alleen de hoeveelheid  $E_{uit}$  beïnvloeden, en niet de hoeveelheid  $E_{in}$ , gaan we nog een kleine aanpassing doen aan de  $E_{uit}$ .

We willen dat de uitdrukking van de  $E_{uit}$  kleiner wordt en dit kunnen we doen door een factor  $\theta$  (een parameter met waarden tussen de nul en de één) toe te voegen aan de benadering. Dit geeft [2] :

$$E_{uit} = \theta \sigma T^4$$

met  $0 < \theta < 1$ .

Door het toevoegen van deze factor  $\theta$  aan de uitdrukking van uitgaande energie, komen we dicht bij de werkelijke waarden van de aarde uit. Er zijn echter wel een aantal kleine kanttekeningen te maken bij het toevoegen van deze factor  $\theta$ , want we kiezen nu een  $\theta$  tussen 0 en 1 zodat hij dan goed overeenkomt met de juiste gemiddelde oppervlakte temperatuur van de aarde. Maar hoe realistisch is zo'n keuze voor  $\theta$ ? Deze factor hangt namelijk niet af van de variabelen in het systeem zelf, maar wordt gekozen. Het grote voordeel van het kiezen van factor  $\theta$ , is dat het een vrij eenvoudige oplossing biedt voor het verwerken van het broeikas effect in het model. Dit lijkt ook te werken, maar wel met een kleine onzekerheid over hoe realistisch deze keuze is.

Naast de broeikasgassen is er nog een factor waar we rekening mee moeten houden om dicht bij de werkelijke temperatuur van de aarde te komen.

We hadden aangenomen dat de aarde een zwart lichaam was, maar dat is de aarde in werkelijkheid niet. Bij lage temperaturen ligt er namelijk meer ijs en sneeuw, dan bij hogere temperaturen. Als de aarde met een sneeuw en ijs bedekt is, zorgt dat ervoor dat er meer energie wordt gereflecteerd, oftewel: een hoger albedo. Daarom maken we het albedo temperatuur afhankelijk [2] :

$$\alpha : T \rightarrow \alpha(T)$$

met

$$\alpha(T) = \begin{cases} 0,7 & \text{als } T < 250 \text{ K} \\ 0,3 & \text{als } T > 280 \text{ K} \end{cases}$$

We zien dat voor de waarden  $250 \text{ K} < T < 280 \text{ K}$  niks is gedefinieerd, maar we vermoeden dat het albedo  $\alpha(T)$  geleidelijk en monotoon toeneemt.

Verder kunnen we deze vergelijking voor het albedo  $\alpha(T)$  algemener uitdrukken, namelijk als volgt [2] :

$$\alpha(T) = 0,5 - 0,2 \cdot \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right) \quad (3)$$

Deze  $\alpha(T)$  zullen we ook verder gaan gebruiken, want deze voldoet aan de juiste eigenschappen. We zien namelijk dat als we het co-albedo tegen de temperatuur uitzetten, de grafiek S-vormig wordt, waarbij het co-albedo 0,3 is bij een temperatuur van 250 K, en dan monotoon toeneemt tot een waarde waarbij het co-albedo 0,7 is bij een temperatuur van 280 K. Dit komt precies overeen met de eigenschappen van de gedefinieerde albedo. Verder is in functie (3) af te lezen dat het buigpunt van de S-vormige grafiek zich tussen de temperaturen 250 K en 280 K bevindt, namelijk 265 K. [2]

Daarmee hebben we gevonden dat de inkomende energie en uitgaande energie een functie van de gemiddelde oppervlakte temperatuur is, en dit geeft [2] :

$$E_{in} : T \rightarrow E_{in}(T) = (1 - \alpha(T))Q \quad (4)$$

$$E_{uit} : T \rightarrow E_{uit} = \theta\sigma T^4 \quad (5)$$

Als we de  $E_{in}$  en de  $E_{uit}$  invullen in vergelijking (1), dan krijgen we:

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4 \quad (6)$$

## 2.3 De evenwichtstoestanden

In deze paragraaf willen we de evenwichtstoestanden van vergelijking (6) bepalen. Deze kunnen we vinden door  $E_{in}$  en  $E_{uit}$  te plotten, deze grafiek is in figuur 2 te zien. Als we de grafiek van de  $E_{in}$  bekijken (de dik gedrukte lijn), dan zien we dat deze afhankelijk is van de temperatuur. Bij een lagere temperatuur ligt er namelijk meer sneeuw en ijs op het aardoppervlak, en kleurt de aarde witter, en dit kaatst meer zonnestraling terug. Deze straling wordt niet geabsorbeerd en warmt de aarde dus niet op. Bij een hogere temperatuur ligt er relatief weinig sneeuw en ijs op de aarde, en kleurt de aarde donker. Als de aarde donker is dan betekent dit dat de aarde meer straling absorbeert. Dit is ook terug te zien in figuur 2. Daarin zien we dat bij een lagere temperatuur er niet veel inkomende energie is, omdat deze wordt terug gereflecteerd. [2]

Als de temperatuur oploopt, zien we dat de grafiek in figuur 2 opeens steiler stijgt. Dit komt omdat als de temperatuur stijgt, de aarde donkerder wordt (minder sneeuw en ijs), waardoor er minder energie wordt gereflecteerd en dus juist meer energie wordt geabsorbeerd. Met andere woorden: meer inkomende energie. Uiteindelijk gaat de grafiek minder hard stijgen en wordt deze constant omdat er dan geen sneeuw en ijs ligt, dus dan wordt er evenveel zonne-energie opgenomen. Net zo begint de grafiek eerst ook constant, want de aarde is bedekt onder een laag van sneeuw en ijs, dus evenveel energie wordt gereflecteerd. Tot het moment dat er ijs en sneeuw gaat smelten, en de aarde minder wit wordt, en meer inkomende energie gaat absorberen.

Als we nu gaan kijken naar de  $E_{uit}$  (de gestippelde lijn), is dit een kromme die stijgt als de temperatuur toeneemt. Want als de temperatuur op aarde toeneemt betekent dit dat de uitgaande energie ook iets toeneemt. We zien dat de grafieken elkaar snijden op drie verschillende punten, namelijk  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  en  $T_3^*$ . Dit zijn de evenwichtstoestanden van dit model (omdat  $\frac{dT}{dt} = 0$ , dus  $E_{in} - E_{uit} = 0$  oftewel  $E_{in} = E_{uit}$ ).

We kunnen zien dat  $T_2^*$  een onstabiel evenwicht is door vergelijking (6) (vergelijking EBM model) te bekijken. Als we namelijk een waarde  $T$  iets boven  $T_2^*$  nemen, dan volgt uit figuur 2 dat  $E_{in} > E_{uit}$ , dus dan volgt uit de vergelijking dat

$$C \frac{dT}{dt} = E_{in} - E_{uit} > 0$$

Als we nu een waarde  $T$  iets onder  $T_2^*$  nemen, dan volgt uit figuur 2 dat  $E_{in} < E_{uit}$ , dus dan volgt uit de vergelijking dat

$$C \frac{dT}{dt} = E_{in} - E_{uit} < 0$$

We zien dus dat  $T_2^*$  instabiel is omdat aan beide kanten de stroming wordt weggetrokken van dit punt. In de praktijk zullen we dit evenwicht niet tegen komen, aangezien instabiele evenwichten niet kunnen blijven bestaan en daarom verdwijnen. We hebben gezien dat de evenwichten  $T_1^*$  en  $T_3^*$  stabiele evenwichten zijn, omdat bij deze evenwichtspunten aan beide kanten de stroming wordt aangetrokken tot dit punt. [2]

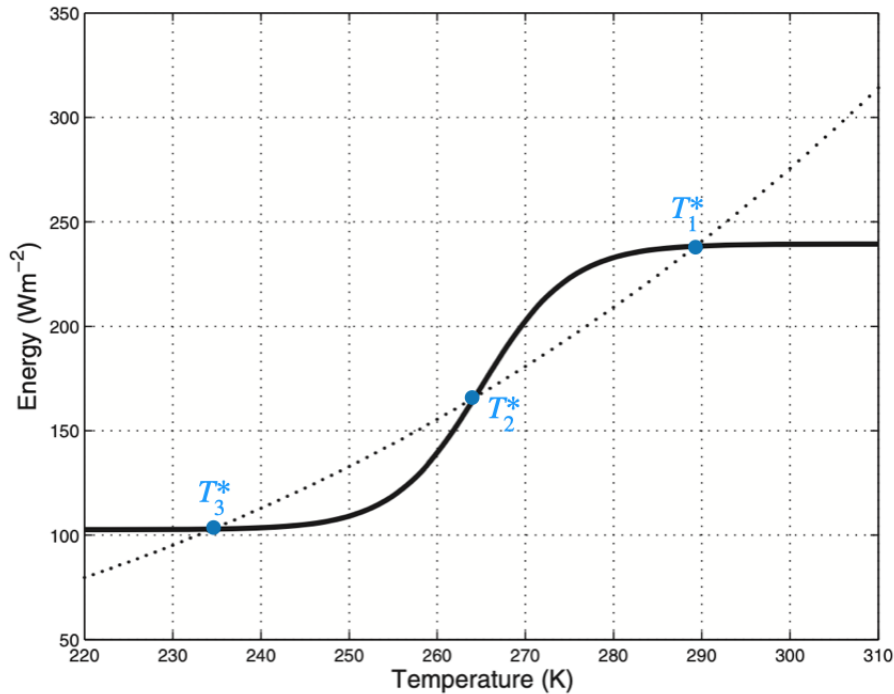
## 2.4 Het bifurcatiediagram van het EBM-model

Om meer inzicht te krijgen in de evenwichtstoestanden willen we een bifurcatiediagram maken van het EBM. Voordat we dit kunnen doen moeten we eerst weten wat precies een bifurcatie is. Kort gezegd is een bifurcatie een drastische verandering die ontstaat door een parameter in een dynamisch systeem te veranderen.[5] Dit wordt uitgebreider uitgelegd in de eerst volgende deelparagraaf. Als duidelijk is wat de bifurcatietheorie inhoudt, kunnen we gaan kijken naar het bifurcatiediagram van het EBM, omdat deze ons meer kan leren over de plotselinge veranderingen die optreden bij het EBM.

### 2.4.1 Bifurcatie theorie

We beschouwen het algemene dynamische systeem  $\frac{dx}{dt} = f(x, \mu)$ . Als we nu in het dynamische systeem de parameter  $\mu$  gaan veranderen, dan kan er bij sommige waarden van  $\mu$  een drastische verandering optreden in het gedrag van oplossingen van het systeem. Zulke veranderingen zijn bifurcaties, oftewel kleine veranderingen in een parameter die leiden tot een kwalitatieve verandering in het gedrag van het systeem.[5] We noemen de parameterwaarden waarbij die grote verandering plaats vinden ook wel de bifurcatie punten. [3]

Er bestaan verschillende standaard typen bifurcaties, ook wel normaalvormen genoemd. Deze komen regelmatig voor in allerlei dynamische systemen.



Figuur 2: Grafiek van  $E_{in}$ (doorlopende lijn) en  $E_{uit}$ (stippel lijn) en evenwichtstoestanden van vergelijking (6),  $T_1^*$ ,  $T_2^*$  en  $T_3^*$  ([2], p. 19)

Vaak zijn complexe dynamische systemen dus weer te herleiden naar zo'n normaalvorm. De meest voorkomende normaalvormen zijn [3]:

- Zadelpunt-bifurcatie
- Transcritische bifurcatie
- Pitch-fork bifurcatie
- Hopf bifurcatie

In dit project zullen we ons alleen richten op de zadelpunt-bifurcatie, en zullen we deze hieronder behandelen.

### Zadelpunt bifurcatie

We willen de normaalvorm van de zadelpunt bifurcatie bekijken. We hebben dan het systeem [4] :

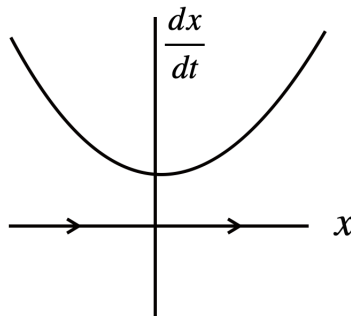
$$\frac{dx}{dt} = \mu + x^2 \quad (7)$$

Als we gaan kijken naar de parameter  $\mu$ , en deze gaan veranderen, dan vinden we dat er drastische veranderingen plaatsvinden bij het veranderen voor de waarde  $\mu = 0$ . We zien dus dat er een bifurcatie plaatsvindt bij de waarde  $\mu = 0$ , dus  $\mu = 0$  is het bifurcatiepunt. We bekijken daarom de waarden  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  en  $\mu > 0$ .

We bekijken eerst de waarden  $\mu > 0$ :

Als we de evenwichtsooplossingen willen vinden bekijken we  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Dus dan krijgen we  $x^2 + \mu = 0$ .

Dit geeft  $x_e^2 = -\mu$ . Omdat  $\mu > 0$  zijn hier geen reële oplossingen en daarom zijn er geen evenwichtsooplossingen. Als we dit dan gaan schetsen krijgen we een parabool die de x-as niet raakt en de stroming van het dynamische systeem wijst overal naar rechts. Dit is geschetst in figuur 3.



Figuur 3: Systeem voor de situatie  $\mu > 0$

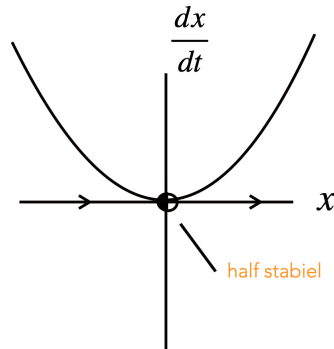
We bekijken nu de situatie voor  $\mu = 0$ :

Als we  $\mu = 0$  invullen in het systeem dan krijgen we  $\frac{dx}{dt} = x^2$ .

Nu willen we weer de evenwichtsooplossingen vinden, dus  $\frac{dx}{dt} = 0$ , dit geeft  $x_e^2 = 0$ , oftewel  $x_e = 0$ .

Als we deze situatie gaan schetsen dan vinden we dat de parabool door het nulpunt moet gaan. Omdat de afgeleide gelijk aan nul is, betekent het dat het nulpunt half-stabiel is. [4] Een half-stabiel punt is een punt waarvan de stroming van het dynamische systeem aan beide kanten dezelfde richting op wijst. Dus een punt waarvan we niet kunnen zeggen of het stabiel is, waar de stroming naar het punt toewijst of juist instabiel is, waar de stroming van het punt afwijst. Een half-stabiel evenwichtspunt is daardoor een erg

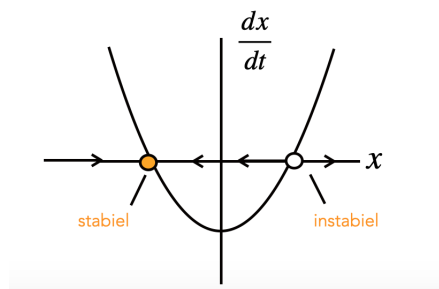
gevoelig punt [4]. De situatie is geschetst in figuur 4.



Figuur 4: Systeem voor de situatie  $\mu = 0$

Tenslotte willen we nog kijken naar de situatie  $\mu < 0$ .

Opnieuw beginnen we met het bekijken van de evenwichtoplossingen, dus stel  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Dit geeft  $x^2 + \mu = 0$ , dus  $x_e^2 = -\mu$ . Omdat  $\mu < 0$  geldt dat er een reële oplossing is voor deze vergelijking, namelijk  $x_e = \pm\sqrt{-\mu}$ . Als we dit gaan schetsen dan hebben we een parabool die dus de top heeft ergens op de negatieve y-as, en met twee snijpunten in de x-as. Het linker snijpunt van de parabool is stabiel en het rechter snijpunt van de x-as is instabiel. Rond het stabiele evenwicht wijst de stroming van het dynamische systeem naar het evenwicht toe, en rond het instabiele evenwicht wijst de stroming van het evenwicht vandaan. Deze situatie is geschetst in figuur 5.

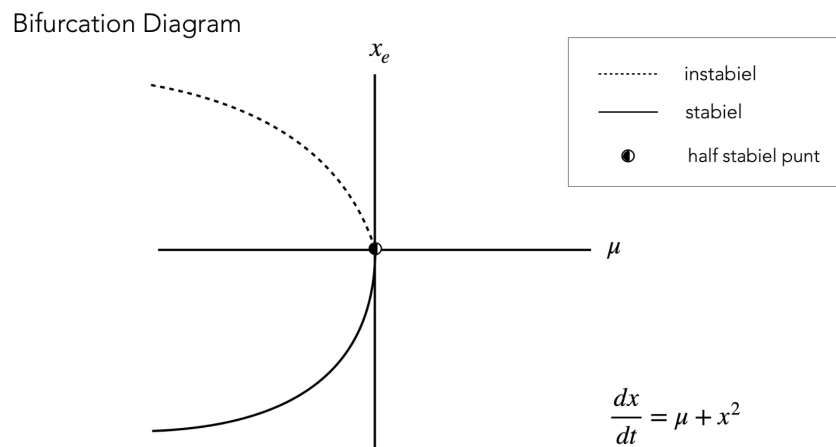


Figuur 5: Systeem voor de situatie  $\mu < 0$

Nu we dit hebben bekeken, kunnen we het bifurcatiediagram maken. Deze wordt weergegeven in figuur 6. We hadden  $x^2 + \mu = 0$ , dit geeft  $\mu = -x^2$ , en dit geeft de vorm van de grafiek. Bij  $\mu < 0$  hadden we een stabiel punt



aan het negatieve gedeelte van de x-as, dit geeft in het bifurcatiediagram bij het negatieve gedeelte van de x-as ook een stabiele oplossing (doorgetrokken lijn). Bij  $\mu > 0$  hadden we een instabiel punt aan het positieve gedeelte van de y-as, dit geeft in het bifurcatiediagram bij het positieve gedeelte van de x-as ook een instabiele oplossing (gestippelde lijn). Voor  $\mu = 0$  hadden we gezien dat het punt  $(0,0)$  een half-stabiel punt was, dus  $(0,0)$  is ook een half-stabiel punt in het bifurcatiediagram. Het bifurcatiediagram dat hoort bij de normaalvorm van de zadelpuntbifurcatie is weergegeven in figuur 6.



Figuur 6: Het bifurcatiediagram bij de normaalvorm van de zadelpunt bifurcatie  $\frac{dx}{dt} = \mu + x^2$ .

We zullen zien dat we complexere bifurcaties ook kunnen herleiden naar een normaalvorm. Dit helpt ons bij het beter begrijpen van complexe systemen. We zullen zien dat de resultaten van de complexere systemen overeen komen met deze normaalvormen. We gaan dus ook zien dat die eenvoudige systemen ons zullen helpen bij het begrijpen van complexe systemen. Daarom gaan we in de volgende deelparagraaf kijken naar een complexer systeem, namelijk  $\frac{dx}{dt} = \mu - x - e^{-x}$ . We gaan dan laten zien dat we dit complexere systeem ook kunnen herleiden naar een normaalvorm, namelijk die van een zadelpuntbifurcatie.

### Complex systeem herleiden naar een normaalvorm

We bekijken het volgende systeem: [4]

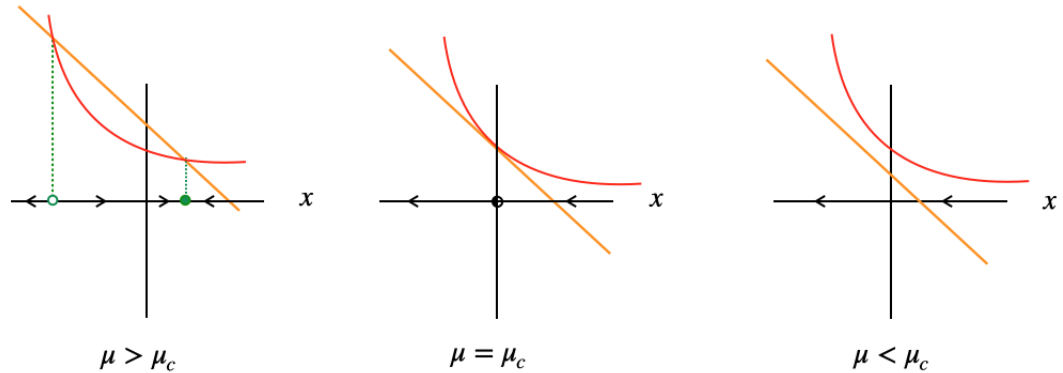
$$\frac{dx}{dt} = \mu - x - e^{-x} \quad (8)$$

Ook complexere systemen zoals deze kunnen we herleiden naar een normaalvorm, door opnieuw de verschillende waarden van de parameter  $\mu$  te bekijken. We zullen in dat geval zien dat de normaalvorm die bij dit systeem hoort een zadelpuntbifurcatie zal zijn. Om het systeem voor verschillende waarden te bekijken plotten we eerst de functies  $\mu - x$  en  $e^{-x}$ . We zullen zien dat de snijpunten van deze twee grafieken, de evenwichtspunten zijn, aangezien  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Als we deze twee functies schetsen in één figuur, dan ziet het eruit zoals in figuur 7.

Als we de parameter  $\mu$  gaan veranderen, dan zien we dat de rechte lijn  $\mu - x$  steeds verschuift, en de grafiek van  $e^{-x}$  op zijn plek blijft, waardoor er verschillende situaties ontstaan. Er is een situatie waarin je twee snijpunten hebt, een situatie waarin je maar één snijpunt hebt, en een situatie waarin je helemaal geen snijpunten meer hebt. Dus we zien dat er een bifurcatie optreedt bij het veranderen van de parameter  $\mu$ . We nemen als bifurcatiepunt  $\mu_c$ , en bekijken alle gevallen.

We bekijken allereerst het geval  $\mu > \mu_c$ .

We zien dat de grafiek hier twee snijpunten heeft, dus twee evenwichtspunten. Het evenwichtspunt links is instabiel en het punt rechts is stabiel. Omdat aan de linkerkant van het instabiele punt en aan de rechterkant van het stabiele punt geldt  $\frac{dx}{dt} < 0$ , omdat  $e^{-x} > \mu - x$  en rechts van het instabiele punt of



Figuur 7: Plot van functies  $\mu - x$ (oranje) en  $e^{-x}$ (rood)

links van het stabiele punt geldt  $\frac{dx}{dt} > 0$ , omdat  $e^{-x} < \mu - x$ . De stroming van het dynamische systeem beweegt van het instabiele punt af, en beweegt juist weer naar het stabiele punt toe.

Als we nu het geval  $\mu = \mu_c$  bekijken, zien we dat het grafieken elkaar op één punt snijden. Dit houdt in dat er een evenwichtspunt is, en dit punt is half-stabiel, aangezien  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Dus de richting van de stroming van dit systeem gaat aan beide kanten van het evenwichtspunt dezelfde kant op, dus in dit geval naar links.

Tenslotte bekijken we het geval  $\mu < \mu_c$ .

We zien hier dat beide grafieken elkaar niet snijden. Dit betekent dat er geen evenwichtspunten zijn voor deze situatie. De stroming van het dynamische systeem wijst overal naar links.

We zien dat door de parameter  $\mu$  te veranderen de twee evenwichtspunten die we eerst hadden opeens zijn verdwenen. Dus duidt dit op een zadelpuntbifurcatie. [4]

Er geldt  $r - x = e^{-x}$  en  $\frac{d}{dx}(r - x) = \frac{d}{dx}e^{-x}$ . Vandaar dat  $r = r_c$  en het bifurcatiepunt optreedt bij  $x = 0$ . [4]

Het leidt tot een zadelbifurcatie omdat als we systeem (8) vergelijken met systeem (7) we veel overeenkomsten zien.

We zien namelijk dat bij het veranderen van de parameter dezelfde situaties ontstaan in beide systemen, namelijk:

- Een situatie waarin we twee evenwichtspunten hebben, waarvan één evenwichtspunt stabiel is en het andere evenwichtspunt instabiel.
- Een situatie waarin we één evenwichtspunt hebben, en de oorsprong  $(0, 0)$  half-stabiel is.
- Een situatie waarin we géén enkel evenwichtspunt hebben.

We zien dus dat in beide systemen het veranderen van de parameter leidt tot een drastische verandering, waarin er evenwichten verdwijnen. Door systeem (8) te vergelijken met systeem (7) zien we de overeenkomsten. We zien dat in beide systemen een bifurcatie plaatsvindt, die zich hetzelfde gedraagt. Oftewel we zien dat systeem (8) ook een zadelpuntbifurcatie heeft, dit is dan ook wel de normaalvorm van systeem (8).

We kunnen ook laten zien dat dit een zadelpuntbifurcatie is door Taylorreeksen, want de Taylor ontwikkeling geeft een resultaat ongeveer gelijk aan de zadelpuntbifurcatie. [9]

We gaan gebruik maken van de Maclarineseries, voor  $e^{-x}$  rond  $x = 0$ . De Maclarineseries is als volgt: [10]

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\forall x)$$

Dus de Taylorreeks van  $\frac{dx}{dt} = \mu - x - e^{-x}$  rond  $(\mu = 1 \text{ en } x = 0)$  geeft:

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

We zien dat we de x'en in de bovenstaande vergelijking tegen elkaar kunnen wegstrepen. Verder zijn de termen van een graad hoger dan drie niet van belang, dus deze kunnen we ook negeren, dit geeft:

$$\frac{dx}{dt} = \mu - 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Als we goed kijken, zien we dat deze vorm erg lijkt op de normaalvorm  $\mu - x^2$ .

Voor de duidelijkheid, kiezen we  $\beta = \mu - 1$ , dit geeft:

$$\frac{dx}{dt} \approx \beta - \frac{x^2}{2!}$$

Dit is ongeveer gelijk aan de normaalvorm  $\mu - x^2$  mits we de kleine verschillen wegdenken, dus we concluderen dat  $\frac{dx}{dt} = \mu - x - e^{-x}$  te herleiden is naar de zadelpuntbifurcatie normaalvorm. Hiermee hebben we laten zien dat complexere systemen te herleiden zijn naar een eenvoudige normaalvorm.

Nu we de bifurcatietheorie hebben behandeld kunnen we verder kijken naar het bifurcatiediagram die hoort bij het EBM.

#### 2.4.2 Bifurcatiediagram horende bij het EBM

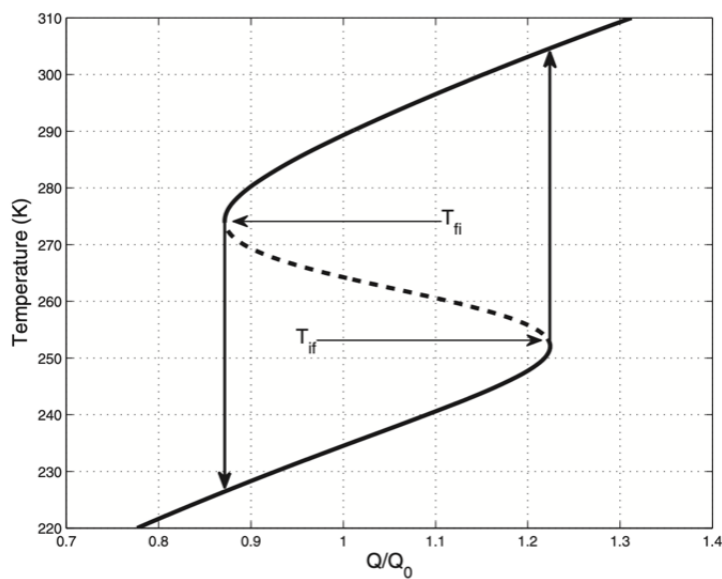
Als we in het EBM de zonneconstante  $S_0$  laten veranderen, oftewel de parameter  $Q = \frac{1}{4}S_0$ , dan zien we dat er evenwichtoplossingen verschijnen en verdwijnen. Er vindt dus een drastische verandering plaats als we de parameter  $Q$  in de vergelijking (6) veranderen, oftewel er vindt een bifurcatie plaats. [2]

Als we de zonneconstante  $S_0$  laten toenemen, oftewel de parameter  $Q$ , dan zien we in figuur 2 dat de doorlopende lijn, de grafiek van de  $E_{in}$  naar beneden gaat. (De grafiek daalt omdat  $E_{in}$  kleiner wordt doordat de parameter  $Q$  kleiner wordt, zie vergelijking (4)). De grafiek behoudt hierdoor maar één snijpunt met de gestippelde lijn, de grafiek van de  $E_{uit}$ . Dit betekent dus dat de evenwichtstoestanden  $T_1^*$  en  $T_2^*$  samenvoegen, en vervolgens verdwijnen, waardoor alleen de evenwichtstoestand  $T_3^*$  overblijft. Als dit het geval is, heb je te maken met een aarde die bedekt is onder een laag van sneeuw en ijs.

Als we de zonneconstante  $S_0$  laten afnemen, oftewel de parameter  $Q$ , dan zien we in figuur 2 dat de doorlopende lijn, de grafiek van  $E_{in}$  zich naar boven verschuift. (De grafiek verschuift omhoog omdat  $E_{in}$  groter wordt doordat de parameter  $Q$  groter wordt, zie vergelijking (4)). De grafiek behoudt hierdoor uiteindelijk maar één snijpunt met de gestippelde lijn, de grafiek van de  $E_{uit}$ . Dit betekent dus dat de evenwichtstoestanden  $T_2^*$  en  $T_3^*$  samenvoegen en vervolgens verdwijnen, waardoor alleen de evenwichtstoestand  $T_1^*$  overblijft. Als dit het geval is, heb je te maken met een aarde die ijs- en sneeuw vrij is. [2]

Door de zonneconstante te veranderen zien we dus dat er bij het EBM een bifurcatie optreedt.

In figuur 8 is de bifurcatiediagram van het EBM weergegeven. De doorlopende lijn van de grafiek weergeeft de stabiele oplossingen, en de gestippelde lijn van de grafiek weergeeft de instabiele oplossingen. We zien hier twee evenwichten  $T_{if}$  en  $T_{fi}$ . Waarden die kleiner zijn dan  $T_{if}$  hebben maar één evenwicht en waarden die groter zijn dan  $T_{fi}$  hebben ook maar één evenwicht. Echter, voor de waarden tussen  $T_{if}$  en  $T_{fi}$  zijn er drie evenwichtspunten. We zien dat de buitenste evenwichten stabiel zijn, en dat het middelste evenwicht instabiel is. [2]



Figuur 8: Gemiddelde oppervlakte temperatuur bij evenwicht als functie van de zonneconstante ( in eenheden van de huidige waarden)

Stel we bevinden ons in het gedeelte met waarden groter dan  $T_{if}$ , dan zitten we in een situatie waarin we één stabiel evenwicht hebben. Als dan de parameter  $Q$  langzaam begint af te nemen, kom je in een situatie dat we kleiner zijn dan  $T_{if}$ . Dan bestaan er drie evenwichten (één stabiel, één instabiel, en nog één stabiel evenwicht). Als parameter  $Q$  dan nog steeds langzaam begint af te nemen, dan komen we op een gegeven moment in  $T_{fi}$  terecht. Op dat moment is er geen stabiele toestand meer en moet het systeem naar een nieuw evenwicht op zoek. Dus springt de grafiek naar het enige evenwicht dat er nog is. Dit is in figuur 8 te zien als de grote pijl verticaal naar beneden. We zien dat door deze grote sprong, je opeens van een hoge temperatuur naar een lage temperatuur gaat. Deze snelle verandering of zelfs sprong is een kritische overgang van het ene stabiele evenwicht naar het andere stabiele evenwicht.

We zien dat andersom ook precies gebeuren. Als je bij een waarde kleiner dan  $T_{fi}$  de parameter  $Q$  langzaam laat toenemen, dan kom je in een situatie terecht waarin de waarden groter zijn dan  $T_{fi}$ . Dan ga je weer van een situatie met één stabiel evenwicht, naar een situatie met drie evenwichten (waarvan twee stabiel en één instabiel). Als je vervolgens de parameter  $Q$  weer langzaam laat toenemen, kom je op een gegeven moment in  $T_{if}$  terecht. Hierbij heb je geen stabiele toestand meer, en ga je zo snel mogelijk naar het enig overgebleven stabiele evenwicht toe. Dit is in het figuur te zien als de verticale pijl naar boven en dit is wederom een kritische overgang. Je springt als het ware van het ene evenwicht naar het andere evenwicht, waardoor je van een situatie met een lage temperatuur naar een situatie met een hoge temperatuur springt.

Zulke kritische translaties zijn onomkeerbaar, je kunt niet opeens na zo'n sprong van een warme aarde naar een koude aarde, en vervolgens weer snel terug naar de oude situatie, een warme aarde. Dat kost namelijk heel veel tijd, want je moet eerst weer de parameter  $Q$  langzaam laten toenemen, tot hij uiteindelijk weer die kritische translatie maakt naar een situatie waarin de aarde warm is.

We zien dat de punten  $T_{if}$  en  $T_{fi}$  bifurcatiepunten zijn. We willen eigenlijk leren beschrijven wat er nou precies gebeurt dichtbij zo'n bifurcatiepunt. Er gebeuren namelijk opmerkelijke dingen in de buurt van een bifurcatiepunt. Zo ontstaan er situaties waarbij een stabiel en instabiel evenwicht bij elkaar komen en dan opeens verdwijnen. Daarom willen we in het volgende hoofdstuk proberen te beschrijven wat er nou precies gebeurt bij zo'n bifurcatiepunt. Hiervoor gaan we gebruik maken van de theorie die hoort bij Fast-slow-systems. [2]

Daarnaast willen we ook nog kijken naar die kritische overgangen, waarin je van een toestand waarin de aarde warm en bewoonbaar is vrij snel kan omslaan naar een toestand waarin de aarde bedekt is met sneeuw en ijs. Zulke kritische overgangen zijn niet fijn om te hebben, en zullen we het liefst willen voorkomen. Daarom willen we ook in het volgende hoofdstuk kijken hoe wij die kritische overgangen wiskundig kunnen bepalen. Tot slot willen we ook nog graag onderzoeken of we momenteel dichtbij zo'n kritische overgang zijn. Dit zal onderzocht worden doormiddel van ruis in hoofdstuk 4.

## 2.5 Andere Klimaatsystemen

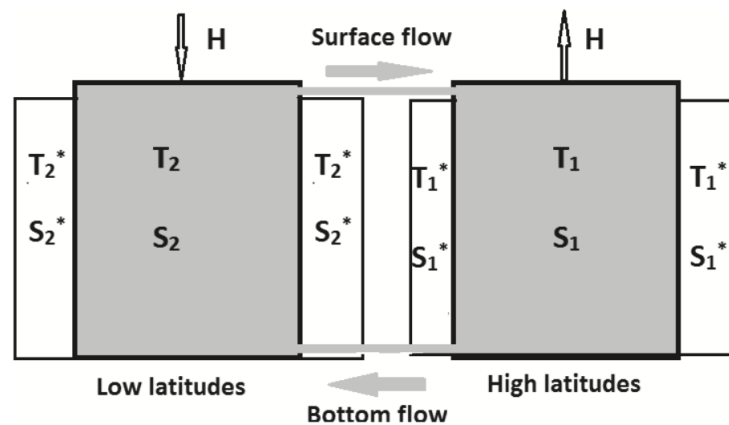
Er zijn nog meer klimaatsystemen dan alleen het EBM. In dit deze paragraaf zullen we het Oceanen en Maasch-Saltzman model kort bespreken. We zullen

zien dat deze klimaatsystemen op dezelfde manier werken als het EBM. Zo treden er bij deze klimaatsystemen eveneens bifurcaties op, die te herleiden zijn naar een normaalvorm.

### 2.5.1 Het Oceanen model

In het boek *Mathematics and Climate* [2] wordt ook een ander klimaatsysteem beschreven, namelijk die van de oceaan, en deze is erg belangrijk voor het klimaatsysteem van de aarde. We hebben over de wereld een grote lus van circulatiepatronen van de oceanen. Dit patroon wordt aangedreven door het verschil in de dichtheid. De dichtheid van de oceaan is een functie van de temperatuur en het zoutgehalte, en dit patroon staat ook wel bekend als THC (thermohaline-circulatie). Ook is gebleken dat zulke oceaanstromen bijdragen aan de verandering van het klimaat van de aarde, dit is ook actueel in het nieuws. [6] We hebben namelijk gezien dat deze oceaanstromingen vrij stabiel zijn, tot dat ze verstoord raken, en dan abrupte klimaatveranderingen veroorzaken. [2]

We kunnen het THC modelleren, maar dit is een enorme uitdaging vanwege de vele complexe bijzaken. Daarom is er een eenvoudige oplossing, namelijk een eenvoudig twee-boxen model gebruiken, om bijvoorbeeld de Noord-Atlantische Oceaan stroming te bestuderen. Het model wordt als volgt opgebouwd (zie figuur 9):



Figuur 9: **Box 1** (rechts) geeft het poolgebied aan (hoge breedtegraad) en **box 2** (links) geeft het equatoriale gebied aan (lage breedtegraad) ([2], p. 34)

In box 1 wordt de temperatuur aangegeven met  $T_1$  en het zoutgehalte met



$S_1$ . In box 2 wordt de temperatuur aangegeven met  $T_2$  en het zoutgehalte met  $S_2$ . Dit zijn allemaal functies van de tijd ( $t$ ). De temperatuur in box 2 is hoger dan de temperatuur in box 1, dus we hebben  $T_2 > T_1$ . We hebben de situatie dat de zoutstroom in box 2 overeen komt met de zoutstroom van box 1, dus de totale zoutstroom is nul in beide boxen.  $H$  is de virtuele zoutstroom met  $H > 0$ , en deze is positief in box 2 en een compenserende zoutstroom  $-H$  in box 1. De temperatuur en zoutgehalte in de bassins rondom box 1 zijn  $T_1^*$ ,  $S_1^*$  respectievelijk, en rondom box 2 zijn  $T_2^*$  en  $S_2^*$  respectievelijk. [2]

Laat  $q$  de stroom in de capillaire buis zijn: [2]

$$q = k(\alpha(T_2 - T_1) - \beta(S_2 - S_1))$$

met de volgende constante (en hierbij gebruikelijke waarden):

- $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$ , dit is de thermische samentrekkingcoëfficiënt.
- $\beta = 8 \cdot 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$ , dit is de zoutuitzettings coëfficiënt.
- $k = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , is de hydraulische constante (parameterisering verschillende gevallen voor de stroming).

We vinden hier het volgende systeem [2] :

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= c(T_1^* - T_1) + |q| (T_2 - T_1), \\ \frac{dT_2}{dt} &= c(T_2^* - T_2) + |q| (T_1 - T_2), \\ \frac{dS_1}{dt} &= -H + d(S_1^* - S_1) + |q| (S_2 - S_1), \\ \frac{dS_2}{dt} &= H + d(S_2^* - S_2) + |q| (S_1 - S_2) \end{aligned}$$

We kunnen dit systeem ook anders schrijven door [2] :

Neem

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad \text{en} \quad S_0 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2), \\ \bar{T}_i &= T_i - T_{i-1}^* \quad \text{en} \quad \bar{S}_i = S_i - S_{i-1}^* \quad \text{met } i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

en

$$T^* = \frac{1}{2}(T_2^* - T_1^*) \quad \text{en} \quad S^* = \frac{1}{2}(S_2^* - S_1^*)$$

Dit geeft systeem [2] :

$$\begin{aligned}
\frac{dT_1}{dt} &= c(-T^* - T_1) + |q| (T_2 - T_1), \\
\frac{dT_2}{dt} &= c(T^* - T_2) + |q| (T_1 - T_2), \\
\frac{dS_1}{dt} &= -H + d(-S^* - S_1) + |q| (S_2 - S_1), \\
\frac{dS_2}{dt} &= H + d(S^* - S_2) + |q| (S_1 - S_2)
\end{aligned} \tag{9}$$

We kunnen systeem (9) kleiner maken door een aantal slimme keuzes toe te passen.

We vinden dan de uitdrukking [2] :

$$\frac{d\Delta S}{dt} = 2H - 2k | \alpha\Delta T - \beta\Delta S | \Delta S$$

met

$$\Delta = T_2 - T_1 = 2T^* \text{ en } \Delta S = S_2 - S_1.$$

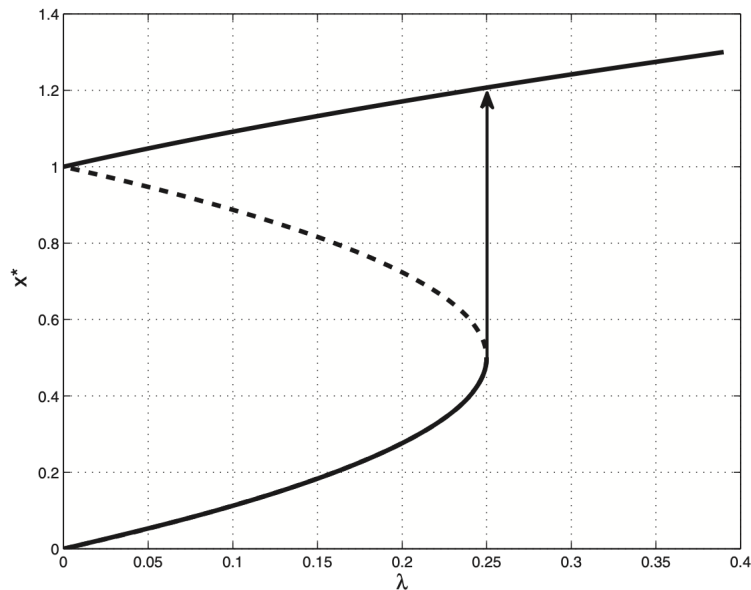
We maken het probleem dimensieloos door de volgende variabelen en parameter te introduceren [2]:

$$x = \frac{\beta\Delta S}{\alpha\Delta T}, \quad t' = 2\alpha k | \Delta T | t, \quad \text{en } \lambda = \frac{\beta H}{\alpha^2 k \Delta T | \Delta T |}$$

De geschaalde versie van variabele  $t$  is nu variabele  $t'$ .

De parameter  $\lambda$  komt overeen met de dimensieloze oppervlakte van de zoutgehalte stroom. We hadden  $\Delta T > 0$ , dus we hebben  $\lambda > 0$ . [2]

De dynamica van het twee-boxen model wordt nu beschreven door de volgende gewone differentiaalvergelijking voor de functie  $x : t \mapsto x(t)$  in  $\mathbb{R}$  [2] :



Figuur 10: Bifurcatiediagram van de twee boxen-model, de doorgetrokken strepen zijn de stabiele oplossingen ( $x_1^*$  en  $x_3^*$ ) en de gestippelde lijn is de onstabiele oplossing ( $x_2^*$ ). ([2], p .39)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - |1 - x| x$$

(We kunnen zonder verlies van algemeenheid zeggen dat  $t = t'$ ).

We kunnen de evenwichtso oplossingen vinden door  $\frac{dx}{dt} = 0$ , dus dan krijgen we [2] :

$$|1 - x| x = \lambda$$

We vinden dan de volgende evenwichtso oplossingen:

Voor  $\lambda > 0$  vinden we  $x_1^* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\lambda})$ .

Als  $\lambda \in (0, \frac{1}{4})$ , zijn er twee oplossingen meer, namelijk:

$$x_2^* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4\lambda}) \text{ en } x_3^* = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\lambda}).$$

Als we de parameter  $\lambda$  veranderen zien we dat er weer drastische veranderingen optreden. In figuur 10 is het bifurcatiediagram te zien.

We zien dat de doorgetrokken lijnstukken de oplossingen  $x_1^*$  en  $x_3^*$  zijn en dat beide oplossingen stabiel zijn. Daarnaast is het gestippelde lijnstuk de oplossing  $x_2^*$  en deze is instabiel. Ook zien we in deze figuur dat er een kritische translatie voorkomt net als in het EBM. We zien dat als je in het punt  $x_1^*$  komt, er een kritische translatie is. Zo'n kritische translatie is onomkeerbaar. Na deze translatie zien we ook dat de grafiek monotoon stijgend is. Ook dit systeem heeft net als het EBM een zadelpuntbifurcatienormaalvorm. Ook hier treedt er een bifurcatie op als we de parameter  $H$  gaan veranderen, omdat er in dat geval evenwichten verdwijnen. In dit systeem zien we eveneens dat er een kritische translatie voorkomt, en dat die onomkeerbaar is. Deze kritische translatie is ook te verklaren met de theorie uit het volgende hoofdstuk, namelijk van de fast-slow systemen.

De zoutflux  $H$  is nu namelijk vast, maar als we hem laten toenemen in de tijd, krijgen we  $\frac{dH}{dt} = \epsilon$ . Zo gaan we zien dat we hem in een normaalvorm kunnen krijgen, en dat dit de zadelpuntbifurcatie normaalvorm zal zijn. Dit laat ook zien dat het een zadelpunt als evenwicht heeft.

Voor meer informatie over dit systeem, verwijst ik naar het boek *Mathematics and Climate*, hoofdstuk 2. [2]

### 2.5.2 Het Maasch-Saltzman model

We gaan nu kijken naar een model dat wat meer past bij het onderwerp Snowball Earth. Het Maasch-Saltzman model is namelijk een klimaatmodel dat is ontwikkeld om de ijstijd te bestuderen. Dit onder invloed van de hoeveelheid CO<sub>2</sub> in de atmosfeer, het volume van het Noord Atlantische diepe water (NADW), en de totale mondiale ijsmassa. [7]

Het systeem van Maasch-Saltzman is als volgt [7] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= ry - pz + sz^2 - yz^2 \\ \dot{z} &= -qx - qz \end{aligned} \tag{10}$$

De bovenstaande genoemde invloeden zijn onderverdeeld in drie variabelen die de afwijking van de lange termijn gemiddelden representeren.

- Variabele  $x$  is de afwijking van de lange termijn gemiddelden van de totale mondiale ijsmassa.
- Variabele  $y$  is de afwijking van de lange termijn gemiddelden van de concentratie CO<sub>2</sub> in de atmosfeer.
- Variabele  $z$  is de afwijking van de lange termijn gemiddelden van volume van het Noord Atlantische diepe water (NADW).

Er zijn in dit systeem vier parameters, en deze zijn allemaal positief.

- Parameter  $q > 1$  is de verhouding van de tijdschalen voor de totale mondiale ijsmassa (variabele  $x$ ) en het volume van het NADW (variabele  $z$ ).
- Parameter  $p$  is de snelheidsconstante voor hoe de CO<sub>2</sub> concentratie in de atmosfeer (variabele  $y$ ) verandert.
- Parameter  $r$  is de snelheidsconstante voor hoe het volume van het NADW (variabele  $z$ ) verandert.
- Parameter  $s$  is de reflectie symmetrie, dat wil zeggen als  $(x, y, z)$  dan is de reflectiesymmetrie  $(-x, -y, -z)$ . [7]

We hebben de volgende evenwichten voor dit systeem:

Voor alle parameters hebben we:

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

Voor het geval  $s^2 + 4(r - p) > 0$ , zijn er nog twee evenwichtspunten.

We vinden als we de differentiaal vergelijkingen gelijk stellen aan nul dat dan moet gelden,  $x = -y = -z$  en  $x = \frac{1}{2}(-s \pm \sqrt{s^2 + 4(r - p)})$ .

Dus vinden we twee evenwichten [7]:

$$P_1 = (x_1^*, -x_1^*, -x_1^*) \text{ en } P_2 = (x_2^*, -x_2^*, -x_2^*) \text{ met}$$

$$x_1^* = \frac{1}{2}(-s + \sqrt{s^2 + 4(r - p)}) \text{ en } x_2^* = \frac{1}{2}(-s - \sqrt{s^2 + 4(r - p)})$$

Hiervoor geldt [7] :

$$\begin{aligned}x_2^* = x_1^* < 0 & \text{ als } r = p - \frac{1}{4}s^2 \\x_2^* < x_1^* < 0 & \text{ als } p = \frac{1}{4}s^2 < r < p \\x_2^* < 0 = x_1^* & \text{ als } r = p \text{ en} \\x_2^* < 0 < x_1^* & \text{ als } r > p\end{aligned}$$

We zien aan de evenwichten dat hier ook een zadelbifurcatie optreedt, want er vinden opnieuw drastische veranderingen plaats bij het veranderen van de parameters  $p$  en  $r$ . In dit systeem zijn  $p$  en  $r$  daarom de bifurcatieparameters. We kunnen ook dit systeem weer herleiden tot een normaalvorm, namelijk die van een zadelpuntbifurcatie. [7]

We zien dat het Oceanen model en het Maasch-Saltzman model erg lijken op het klimaatmodel van het EBM. Beide systemen zijn vrij eenvoudige systemen voor zo iets complex als het klimaat. Deze klimaatsystemen hebben niet alle complexe bijzaken van het klimaat in het systeem verwerkt, maar geven toch een goede representatie van het klimaat. Zulke klimaatsystemen zijn dan ook van belang om de complexere systemen te begrijpen en te controleren.

Ook kunnen al deze klimaatmodellen in normaalvorm gezet worden, wat opvallenderwijs ook de zadelpuntbifurcatie normaalvorm is. Daarom zien we dat ook in deze klimaatmodellen een zadelpunt voorkomt. Daarnaast zien we die kritische translatie zoals in het EBM ook terug in het klimaatsysteem van de oceaan. Deze kritische overgangen laten zien dat als het klimaat verstoord wordt, er opeens drastische verandering kunnen plaatsvinden in een relatief korte periode. Daarom is het bestuderen van zulke klimaatsystemen van belang, omdat je wilt weten wanneer je dichtbij een grote verandering bent, om ook te proberen dit te voorkomen.

## 2.6 Conclusie resultaten hoofdstuk 2

In dit hoofdstuk hebben we het EBM opgesteld, en deze is als volgt:

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4$$

We hebben deze vergelijking geplot in figuur 2, en hiervan hebben we de evenwichten bepaald. De buitenste twee evenwichten van de grafiek waren stabiel en het middelste evenwicht van de grafiek was instabiel. Vervolgens hebben we gekeken naar bifurcaties. Dit zijn drastische veranderingen die optreden als je de parameter van het systeem verandert. Je ziet dan bijvoorbeeld evenwichten opeens verdwijnen. We zien ook dat als we de zonneconstante  $S_0$  oftewel de parameter  $Q$ , veranderen, dat er ook drastische veranderingen plaatsvinden. We hebben gezien dat één van de twee stabiele evenwichten kan samensmelten met het instabiele evenwicht, en daarna opeens kan verdwijnen. Dit staat ook weergegeven in het bifurcatiediagram in figuur 8. We hebben in het bifurcatiediagram gezien dat er twee kritische translaties plaatsvinden. Deze zorgen ervoor dat de temperatuur op aarde drastisch verandert. Je gaat van een warme aarde naar een sneeuwaarde, of juist andersom. Zulke kritische translaties zijn onomkeerbaar, want je kunt niet meer direct terug naar je oude situatie, dat kost erg veel tijd. Daarom willen we graag de wiskunde achter deze kritische translaties begrijpen, om uiteindelijk te weten of we met de aarde dichtbij zo'n kritische translatie zijn. Deze kritische translaties zijn te begrijpen door middel van fast-slow systems, en daarop zullen we in het volgend hoofdstuk ingaan.

Tot slot hebben we ook andere klimaatsystemen bekeken, die vrij eenvoudig zijn voor zoiets complex als het klimaat. Ook bij deze klimaatsystemen treden bifurcaties op en bij één van deze systemen zagen we ook zo'n kritische translatie. We kunnen deze systemen ook in een normaalvorm (Zadelpunt, Hopf, Pitch-fork of Transcritische bifurcatie) zetten met uiteindelijk het doel om ook de complexe systemen te kunnen begrijpen en te controleren.

## 3 Fast-slow systemen

### 3.1 Introductie

In het bifurcatiediagram van het EBM model hebben we gezien dat er twee kritische overgangen plaatsvinden. Deze kritische overgangen zorgen ervoor dat je van een koude toestand opeens naar een warme toestand springt, en andersom. Zulke kritische overgangen willen we in dit hoofdstuk gaan beschrijven. We hebben dat de parameter  $Q$  in het EBM vast is, oftewel tijdsafhankelijk, maar als we parameter  $Q$  langzaam laten toenemen in de tijd, is deze parameter  $Q$  opeens niet meer vast en niet meer tijdsafhankelijk. We zijn gewend dat in een systeem de parameter vast is, en dus tijd onafhankelijk is. Maar stel dat we de parameter tijd afhankelijk maken, en deze langzaam laten toenemen in de tijd, dan past de parameter zich trager aan dan het systeem. We krijgen dan in het EBM te maken met verschillende tijdschalen: een slow-fast systeem. Deze theorie gaan we in de onderstaande paragraaf uitleggen. Na de uitleg van wat een slow-fast systeem is gaan we het EBM omzetten in een slow-fast systeem. Vervolgens willen we de dynamica op het EBM bepalen, dit kunnen we doen met behulp van de stelling van Fenichel. Bij het bepalen van de dynamica kunnen we ook beter die kritische overgangen van het EBM verklaren. Om het EBM beter te begrijpen zullen we het ook in normaalvorm zetten, en dit blijkt die van een zadel-puntbifurcatie te zijn. In het EBM blijkt dus ook een zadelpuntbifurcatie voor te komen, en daarom zullen we ook gaan kijken naar de dynamica rond zadelpuntbifurcaties.

### 3.2 Inleiding fast-slow systemen

Als we kijken naar de variabelen van gewone differentiaal vergelijkingen hebben we soms dat die variabelen verschillen in de snelheid waarmee ze veranderen. We hebben dan te maken met een systeem dat verschillende tijdschalen heeft. In dat geval kun je de variabelen bijvoorbeeld indelen in snelle variabelen en langzame variabelen. Zo'n systeem met langzame en snelle variabelen wordt ook wel een slow-fast systeem genoemd. [8]

Een fast-slow systeem is een systeem met de volgende vorm: [8]

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{d\tau} = \epsilon \dot{x} = f(x, y, \epsilon) \\ \frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = g(x, y, \epsilon) \end{cases} \quad (11)$$

met  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  en met tijdschaalpa-



parameter  $0 < \epsilon \ll 1$ .

We zien dus dat de parameter  $\epsilon$  de scheiding van tijdschalen is, en  $\epsilon$  is klein en positief. Merk hierbij op dat “ $\ll$ ” betekent “veel kleiner dan”.

In dit systeem zijn  $x$  de **snelle variabelen** en  $y$  de **langzame variabelen**. Verder zijn er ook twee verschillende tijdschalen, namelijk  $t$ , dit is de **snelle tijdschaal** en  $\tau = \epsilon t$  dit is de **langzame tijdschaal**. [8]

Als we nu  $t = \frac{\tau}{\epsilon}$  nemen in systeem (11), dan geeft dit [8]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(x, y, \epsilon) \\ \frac{dy}{dt} = y' = \epsilon g(x, y, \epsilon) \end{cases} \quad (12)$$

Hierboven hebben we twee fast-slow systemen gedefinieerd, systeem (11) op een snelle tijdschaal, en systeem (12) op een langzame tijdschaal. We willen graag deze fast-slow systemen verder analyseren, en hierbij kunnen we  $\epsilon = 0$  gebruiken, aangezien we hier al veel over weten.

Later in deze paragraaf zullen we ook zien dat we meer kunnen zeggen over het geval  $\epsilon = 0$ . We zullen namelijk later in deze paragraaf de stelling van Fenichel definiëren.[8] Deze stelling geeft aan dat als we de situatie voor  $\epsilon = 0$  weten, dat we dan ook de situatie voor  $\epsilon > 0$  weten. Maar voordat we hieraan gaan beginnen, willen we graag de systemen (11) en (12) verder analyseren, door  $\epsilon = 0$  te nemen.

Als we kijken naar het systeem (11) van de langzame tijdschaal, dan wordt dit systeem ook wel het **langzame deelsysteem** (slow subsystem) genoemd. Invullen van  $\epsilon = 0$  in het systeem (11) geeft

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, 0) \\ \dot{y} = g(x, y, 0) \end{cases} \quad (13)$$

De stroming (flow) die hierbij hoort, wordt ook wel de **langzame stroming** (slow flow) genoemd. [8]

Als we kijken naar het systeem (12) van de snelle tijdschaal, dan wordt dit systeem ook wel het **snelle deelsysteem** (fast subsystem) genoemd. Invullen van  $\epsilon = 0$  in het systeem (12) geeft

$$\begin{cases} x' = f(x, y, 0) \\ y' = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Dit is dus de bijbehorende stroom bij het snelle deelsysteem, en we noemen dit ook wel de **snelle stroming** (fast flow). [8]

**Merk op:** Voor systemen (11) en (12) kunnen we  $f(x, y, \epsilon)$  en  $g(x, y, \epsilon)$  ook schrijven als  $f(x, y)$  en  $g(x, y)$  respectievelijk, omdat  $f$  en  $g$  onafhankelijk zijn van de parameter  $\epsilon$ .

Zoals al eerder werd uitgelegd, is het geval  $\epsilon = 0$ , van belang om het systeem beter te leren begrijpen, omdat we over  $\epsilon = 0$  meer weten, dan over  $\epsilon > 0$ . Hiervoor willen we een nieuw begrip introduceren, namelijk die van het **critical manifold**; deze is als volgt gedefinieerd:

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : f(x, y, 0) = 0\}$$

dit is een submanifold van  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ . [8]

We kunnen naar systeem (11) kijken voor meer informatie over het critical manifold, immers als we het systeem (11) bekijken en hier vervolgens een langzaam deelsysteem van maken door  $t = \frac{\tau}{\epsilon}$  te nemen, geeft dit systeem (12). We willen dit systeem verder analyseren voor  $\epsilon = 0$ , en dit geeft systeem (14):

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = 0 \end{cases}$$

Als we de evenwichtspunten van dit systeem gaan bekijken, dan geldt  $x' = f(x, y) = 0$ . Als we vervolgens naar de definitie van het critical manifold  $C_0$  kijken, zien we dat dit overeenkomt. We zien dat  $f(x, y) = 0$  geldt, oftewel  $(x, y) \in C_0$ . Dus we zien nu dat het critical manifold gedefinieerd is als de evenwichtspunten van systeem (12).

We zien ook dat dit overeenkomt met stelling 1.5.5 uit het boek [8]. Deze stelt dat de evenwichtspunten voor een systeem met een snelle stroming één op één zijn met de punten van de critical manifold.

Wel merken we op dat systeem (13) niet representatief is aangezien in het systeem waar we mee begonnen, systeem (11), gold dat  $0 < \epsilon \ll 1$ , oftewel

$\epsilon \neq 0$ . Dit komt niet overeen met  $\epsilon = 0$  die wij hadden gekozen. De theorie die dit kan verklaren is de stelling van Fenichel. Deze stelling willen we nu graag introduceren, maar voordat we dit kunnen doen zullen we eerst het begrip normaal hyperbolisch definiëren, omdat we dit bij de stelling van Fenichel nodig hebben.

**Normaal hyperbolisch** betekent volgens definitie 3.1.1 van het boek [8] het volgende:

”Een deelverzameling  $S \subset C_0$  is normaal hyperbolisch als de  $m \times m$  matrix  $(D_x f)(p, 0)$  als eerste partiële afgeleide met relatie tot de snelle variabelen geen eigenwaarden hebben met een nul-gedeelte voor alle  $p \in S$ .” ([8], pp54)

Oftewel in de systemen die wij gaan gebruiken zullen we de definitie van normaal hyperbolisch als volgt definiëren,  $\frac{d}{dx} f(x_*, y_*) \neq 0$  voor alle evenwichtspunten  $(x_*, y_*)$ , en dit zijn ook wel de punten op het critical manifold  $C_0$ .

Nu we het begrip normaal hyperbolisch hebben gedefinieerd kunnen we ons richten op de stelling van Fenichel.

We citeren stelling 3.1.4 uit het boek [8] de **steling van Fenichel**, en deze luidt als volgt:

”Stel  $S = S_0$  is een compact normaal hyperbolische deel manifold (mogelijk met grenzen) van het critical  $C_0$  van vergelijking (11) en dat  $f, g \in C^r$  ( $r < \infty$ ). Dan geldt voor  $\epsilon > 0$  voldoende klein, het volgende:

(F1) Er bestaat een lokaal invariant manifold  $S_\epsilon$  diffeomorphie aan  $S_0$ . Lokaal invariant betekent dat de trajecten/delen  $S_\epsilon$  alleen via zijn grenzen kunnen binnenkomen of verlaten.

(F2)  $S_\epsilon$  heeft Hausdorffafstand  $O(\epsilon)$  (als  $\epsilon \rightarrow 0$ ) van  $S_0$ .

(F3) De stroom/flow op  $S_\epsilon$  convergeert naar de langzame stroom als  $\epsilon \rightarrow 0$ .

(F4)  $S_\epsilon$  is  $C^r$ -glad.

(F5)  $S_\epsilon$  is normaal hyperbolisch en heeft dezelfde stabiliteits voorwaarden met relatie tot de snelle variabelen als  $S_0$  ( aantrekken, afstoten, of zadelty-

pes).

(F6)  $S_\epsilon$  is meestal niet uniek.

In regio's die op een vaste afstand van  $\delta S_\epsilon$  blijven, liggen alle manifolds die voldoen aan (F1)-(F2) op een Hausdorffafstand  $O(e^{-k/\epsilon})$  van elkaar voor enige  $K > 0$ ,  $K = O(1)$ .

Merk op dat alle asymptotische notaties verwijzen naar  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Dezelfde conclusies als voor  $S_0$  lokaal gelden voor zijn stabiele en onstabiele manifolds:

$W_{loc}^s(S_0) = \bigcup_{p \in S_0} W_{loc}^s(p)$  en  $W_{loc}^u(S_0) = \bigcup_{p \in S_0} W_{loc}^u(p)$  waar we de punten  $p \in S_0$  zien als evenwichten van het snelle subsysteem.

Deze manifolds blijven ook bestaan voor  $\epsilon \rightarrow 0$  voldoende klein: er bestaan lokale stabiele en onstabiele manifolds  $W_{loc}^s(S_\epsilon)$  en  $W_{loc}^u(S_\epsilon)$  respectievelijk, voor welke conclusies (F1)-(F6) vasthouden als we vervangen  $S_\epsilon$  en  $S_0$  door  $W_{loc}^s(S_\epsilon)$  en  $W_{loc}^s(S_0)$  (of op dezelfde manier door  $W_{loc}^u(S_\epsilon)$  en  $W_{loc}^u(S_0)$ )” ([8], p. 55)

Door deze stelling geldt dat als we delen van het critical manifold  $C_0$  hebben die normaal hyperbolisch zijn, en waarvoor geldt dat  $\epsilon > 0$  voldoende klein is, dan gelden die eigenschappen ook voor deze delen op het slow manifold  $C_\epsilon$ .

Als we op een critical manifold  $C_0$  de dynamica bepalen dan betekent dat de stelling van Fenichel een goede benadering geeft voor de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$ . In het kort zegt de stelling van Fenichel dus, dat als er een  $\epsilon$  klein genoeg is en  $C_0$  is normaalhyperbolisch, dat dan dezelfde eigenschappen lijken te gelden voor het slow manifold  $C_\epsilon$ . Het critical manifold  $C_0$  en het slow manifold  $C_\epsilon$  zijn ongeveer aan elkaar gelijk, dus dan krijgen we de situatie waarin voor  $\epsilon = 0$  ongeveer hetzelfde werkt als voor  $\epsilon > 0$ .

Nu we de stelling van Fenichel hebben geïntroduceerd, willen we graag kijken naar de dynamica op en buiten zo'n critical manifold. Bewegen we juist snel of juist langzaam op of buiten een critical manifold  $C_0$ ? Ook vragen we ons af hoe punten zich dicht bij zo'n critical manifold  $C_0$  gedragen. Als we de dynamica begrijpen op een critical manifold  $C_0$  kunnen we dankzij de stelling van Fenichel ook de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$  begrijpen. Dit zijn vragen die we graag willen beantwoorden om later ook beter de kritische translaties van het EBM te kunnen begrijpen.

### 3.2.1 De dynamica op en buiten een slow manifold

We willen graag de dynamica op een slow manifold bepalen. Dit kunnen we doen met behulp van de stelling van Fenichel, want we kunnen de dynamica bepalen op een critical manifold, en als de  $\epsilon$  klein genoeg is en het systeem normaal hyperbolisch is kunnen we concluderen dat  $C_0 \approx C_\epsilon$ .

We kunnen de dynamica op en buiten een critical manifold  $C_0$  bepalen door de fast-slow systemen te analyseren. We hadden twee soorten systemen, het langzame deelsysteem (11) en het snelle deelsysteem (12). Als we meer te weten willen komen over dynamica van deze systemen willen we de deelsystemen graag bekijken voor  $\epsilon = 0$ .

Als we het langzame deelsysteem (11) nemen, en hier  $\epsilon = 0$  nemen krijgen we systeem (13). Voor het gemak zullen we de systemen er even bij halen.

We hebben dus het langzame deelsysteem:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{dx}{d\tau} = \epsilon \dot{x} = f(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} = \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (15)$$

Dan nemen we  $\epsilon = 0$ , dit geeft:

$$\begin{cases} 0 = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (16)$$

We hebben dus ook het snelle deelsysteem ( $t = \frac{\tau}{\epsilon}$ ):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y' = \epsilon g(x, y) \end{cases} \quad (17)$$

Dan nemen we  $\epsilon = 0$ , dit geeft:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = 0 \end{cases} \quad (18)$$

We definiëren als eerst het critical manifold, deze is als volgt:

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

We zien in het systeem (16) dat geldt  $f(x, y) = 0$ , dus  $(x, y) \in C_0$ .

Als we in systeem (18) naar de evenwichten kijken, dus  $x' = 0$ . Voor  $f(x^*, y^*) = 0$ , geldt dat  $(x^*, y^*)$  de evenwichten van dit systeem zijn. Dus het critical manifold  $C_0$  zijn de evenwichten  $(x^*, y^*)$  van systeem (18).

Als we kijken naar systeem (16), dan zien we dat geldt  $f(x, y) = 0$ , dus  $(x, y) \in C_0$ , en dat er geldt  $\dot{y} = g(x, y)$ .

We zien dat  $x$  niet verandert, omdat  $x$  in de evenwichtstoestand is, maar  $y$  verandert wel, want die is  $\dot{y} = g(x, y)$ .

We weten dat variabele  $x$  de snelle variabelen is en dat variabelen  $y$  de langzame variabelen is.

Als we een punt op het critical manifold nemen  $(a, b) \in C_0$ , dan geldt voor deze punten op de critical manifold dat ze de stroom  $y$  volgen, omdat  $y$  wel veranderde en  $x$  niet. Dus op het critical manifold volg je  $\dot{y} = g(a, b)$ , en deze stroom is langzaam, omdat  $y$  de langzame variabele is. Dus we hebben nu bepaald dat op het critical manifold de stroom langzaam is.

Nu willen we weten hoe de stroom buiten het critical manifold is. Dus we nemen dan een punt wat niet op het critical manifold  $C_0$  ligt, neem  $(c, d) \notin C_0$ .

Hiervoor geldt  $f(c, d) \neq 0$ .

Als we de fast-slow systemen opnieuw bekijken zien we dat als we het snelle deelsysteem (12) bekijken en hier  $\epsilon = 0$  nemen, dat geldt:

$$\begin{cases} x' = f(c, d) \neq 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

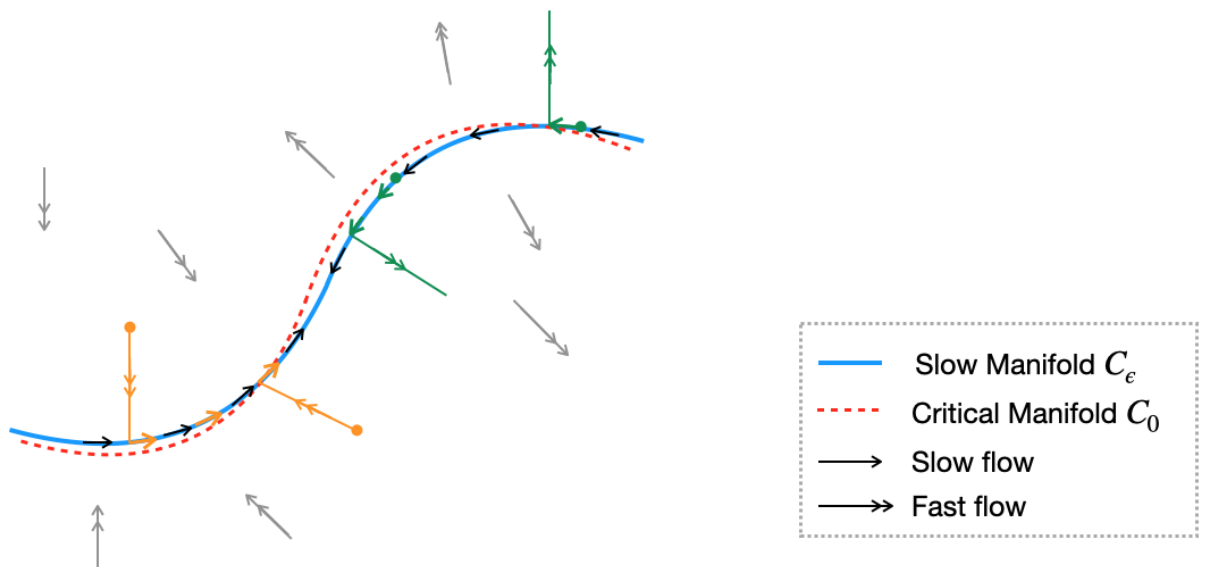
Dus we hebben dat een situatie waarin  $x$  niet verandert maar  $y$  wel.

Nu geldt buiten het critical manifold dat we de stroom  $x' = f(c, d)$  volgen. De variabele  $x$  is de snelle variabele en de variabele  $y$  is de langzame variabele. Hieruit volgt de stroom buiten het critical manifold  $x' = f(c, d)$ , dit is een snelle stroming. Oftewel, de stroming buiten het critical manifold beweegt snel.

We hebben nu de dynamica op en buiten het critical manifold  $C_0$  bepaald, maar we wilden de dynamica weten voor het slow manifold  $C_\epsilon$ .

Want oorspronkelijk waren systemen (15) en (17) het geval. In het geval dat dit systeem normaal hyperbolisch is, en we hebben onze  $\epsilon$  klein genoeg gekozen, volgt er uit de stelling van Fenichel dus dat de slow manifold  $C_\epsilon$  ongeveer gelijk is aan het critical manifold  $C_0$ . Een voorbeeld van hoe de stelling van Fenichel werkt is uitgebeeld in figuur 11. We zien hier dat het critical manifold en het slow manifold erg dicht op elkaar liggen. Nu we het critical

manifold weten, weten we ook het slow manifold wegens de stelling van Fenichel. We zien dat op het slow manifold, er een langzame stroming (enkele pijl) is en buiten het slow manifold een snelle stroming (dubbele pijl). In figuur 11 zijn ook oranje en groene pijlen getekend. Dit is hoe de dynamica zich gedraagt bij een slow manifold als je een willekeurig beginpunt neemt.



Figuur 11: Hier zien we de dynamica rond een slow manifold  $C_{\epsilonpsilon}$  bepaald doormiddel van de stelling van Fenichel.

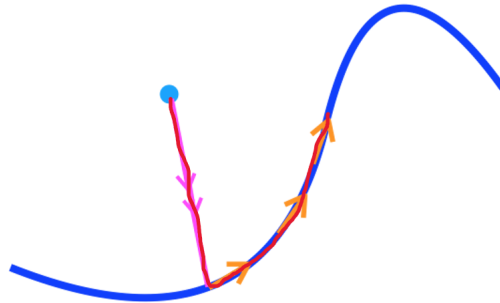
Als we een beginpunt buiten het slow manifold nemen, bijvoorbeeld één van de oranje punten dan zien we dat de stroming vanaf dat punt eerst snel beweegt, en vervolgens snel opzoek gaat naar een stabiel evenwicht. Een stabiel evenwicht ligt dus op dat slow manifold, dus beweegt de stroom zich daar snel naar toe. Eenmaal op het slow manifold zal de stroming veranderen. In plaats van de snelle stroming buiten het slow manifold zal deze stroming eenmaal aangekomen op het slow manifold, zich langzaam gaan bewegen.

Als we kijken naar één van de groene punten, dan zien we dat deze zich op een instabiel gedeelte bij het slow manifold bevinden. Daarom wilt het punt zo snel mogelijk opzoek naar een stabiel evenwicht. Dus beweegt de stroming zich langzaam van het slow manifold af, maar eenmaal van het slow manifold af, verandert de langzame stroming in een snelle stroming.

We geven voor de verduidelijking voor beide soorten punten rondom een slow manifold een voorbeeld. In figuur 12 is een slow manifold weergeven,

waar de stroom op het slow manifold zich langzaam beweegt en daarbuiten beweegt de stroom zich snel. Als we een punt nemen iets buiten dit slow manifold, dan wilt dit punt zo snel mogelijk naar een stabiel evenwicht, en deze bevindt zich op het slow manifold. Dus het punt beweegt zich snel naar het slow manifold toe, en eenmaal op het slow manifold verandert de snelle stroming in een langzame stroming. De baan van deze stroming is in figuur 12 in het rood getekend.

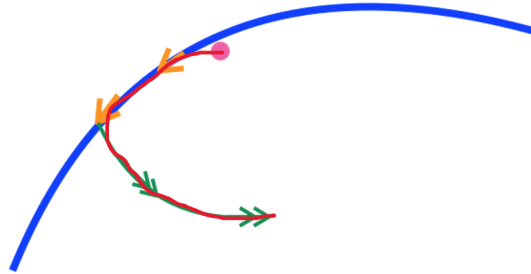
In figuur 13 is een punt dichtbij bij een slow manifold getekend. De stroming op het slow manifold beweegt zich langzaam, en het deel van het slow manifold is instabiel. Dus wil je weg bij het instabiele critical manifold, we zien in deze situatie dat het punt erg dicht op het slow manifold ligt, en daarom blijft de stroom van dit punt nog een tijdje de langzame stroming van het critical manifold volgen, ondanks de instabiliteit. Maar uiteindelijk stopt de stroom met het volgen van de stroming van het slow manifold, en gaat hij met een snelle stroming verder. Dit soort gedrag, het volgen van de stroming van het instabiele manifold, voldoet niet helemaal aan de verwachting. De benaming voor de baan bij dit soort gedrag heet een canard. [8] We zullen hier niet verder op in gaan, maar deze theorie is verder te lezen in hoofdstuk 6 van het boek Kuehn.



Figuur 12: De dynamica van een beginpunt bij een slow manifold dat er naar toe beweegt.

Echter vragen we ons wel het volgende af: wat gebeurt er met de dynamica van punten die niet normaal hyperbolisch zijn? De stelling van Fenichel werkt namelijk alleen in het geval dat  $\epsilon$  klein genoeg is en het critical manifold normaal hyperbolisch is. Voordat we deze vraag gaan onderzoeken, willen we eerst nog meer inzicht krijgen in de nieuwe stof over fast-slow systemen. Dit willen we doen doormiddel van een bekende vergelijking voor slow-fast systemen, namelijk de van der Pol vergelijking.





Figuur 13: De dynamica van een beginpunt bij een slow manifold dat er van af beweegt.

### 3.3 Van der Polvergelijking

De van der Polvergelijking is van de vorm: [8]

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{dx}{dt} &= \epsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = -x\end{aligned}$$

Als we  $\tau = \frac{t}{\epsilon}$  nemen, dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon dx}{\epsilon d\tau} &= x' = y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \frac{1 dy}{\epsilon d\tau} &= \frac{1}{\epsilon}y' = -x\end{aligned}$$

Oftewel:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= x' = y - \frac{1}{3}x^3 + x \\ \frac{dy}{d\tau} &= y' = -\epsilon x\end{aligned}$$

Als  $\epsilon = 0$  geeft dit:

$$\begin{aligned}x' &= y - \frac{1}{3}x^3 + x \\y' &= 0\end{aligned}$$

We hebben nu het critical manifold bepaald, deze is  $f(x, y) = 0$ , oftewel  $y - \frac{1}{3}x^3 + x = 0$ :

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^3}{3} - x\}$$

We houden nu één oplossing over voor  $x(\tau)$ , namelijk:

$$x' = y - \frac{1}{3}x^3 + x$$

We willen nu de evenwichtoplossingen bekijken, en bekijken of deze stabiel of juist instabiel zijn.

Stel  $(x_*, y_*)$  is een evenwichtoplossing, dan geldt

$$f(x_*, y_*) = y_* - \frac{1}{3}x_*^3 + x_* = 0$$

Om te kijken of  $(x_*, y_*)$  stabiel of instabiel is, kijken we of de afgeleide groter of kleiner dan nul is.

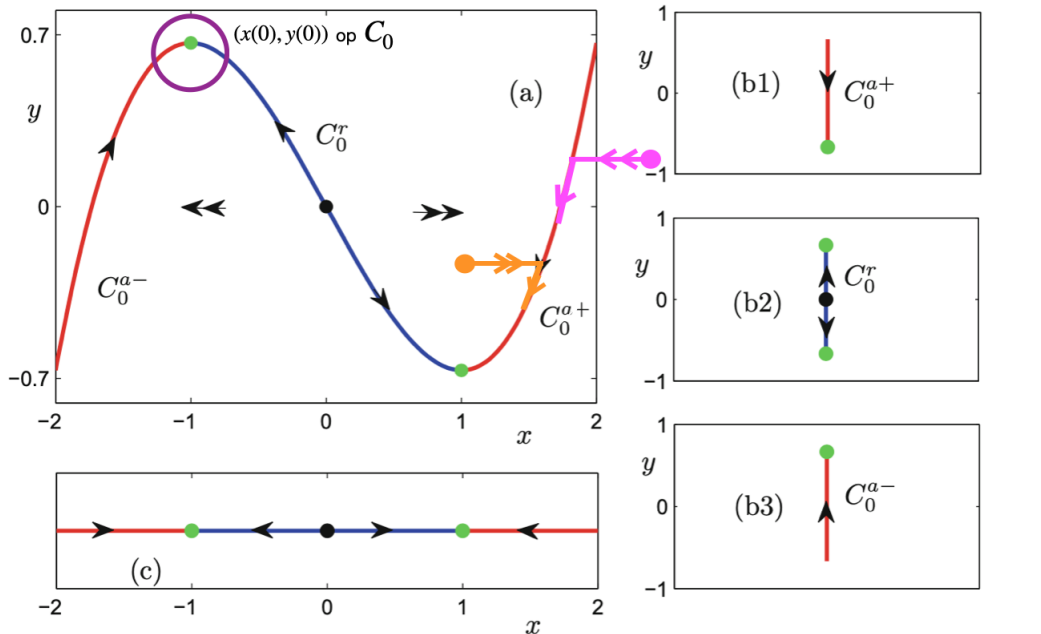
Dus dan krijgen we:

$$\frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x_*} = -x_*^2 + 1 = \begin{cases} > 0 \text{ als } -1 < x < 1 \\ < 0 \text{ als } x < -1 \text{ of } x > 1 \end{cases}$$

We vragen ons nu af of hij normaal hyperbolisch is, en we zien dat dit mis gaat als de afgeleide gelijk is aan nul, en dit is het geval op  $x = -1$  en  $x = 1$ .

We kunnen nu de situatie schetsen, zoals in figuur 14 te zien is.

De situatie van de van der Pol vergelijking is dat we de grafiek van het critical manifold  $C_0$  kunnen schetsen, die is namelijk  $y = \frac{x^3}{3} - x$ . We hebben dan een evenwichtstoestand op  $(0, 0)$ , en dit wordt weergegeven met een zwart punt.



Figuur 14: Situatie schets van de van der Pol vergelijking. Met rood de verzameling van stabiele evenwichten en blauw de verzameling van onstabiele evenwichten, de groenen punten zijn de niet hyperbolische punten op  $C_0$  en de zwarte punt is de evenwichtstoestand in de oorspong. De enkele pijlen geven de langzame stroming weer en de dubbele pijlen de snelle stroming. ([8],p.60)

Verder hadden we ook nog twee niet normaal hyperbolische punten,  $x = -1$  en  $x = 1$ , deze worden weergeven in figuur 14 met twee groene punten. We weten dat de afgeleide groter dan nul is voor  $-1 < x < 1$ , en dus dat de verzameling op het critical manifold  $C_0$  tussen  $-1 < x < 1$  de verzameling is van instabiele evenwichten. Dit wordt weergeven met de kleur blauw. Dit wordt ook wel het afstotende gedeelte genoemd. We weten verder dat de afgeleide kleiner dan nul is voor  $x < -1$  of  $x > 1$ , dus dat dit de verzameling op het critical manifold  $C_0$  is van stabiele evenwichten. Dit wordt weergeven met de kleur rood. Deze delen worden ook wel aantrekkende gedeelte genoemd. Verder zien we ook dat er onderscheid wordt gemaakt tussen een dubbele en enkele pijl, de enkele pijl is de langzame stroming en de dubbele pijl is de snelle stroming.

We weten ook dat bij het punt  $(0,0)$  de pijlen divergent bewegen omdat het een instabiel evenwichtspunt is. Verder weten we ook dat de evenwichtspunten op  $x = -1$  en  $x = 1$  stabiel zijn en de pijlen hier convergeren. [8]

We weten dat als we buiten het critical manifold een punt nemen, zoals bijvoorbeeld in figuur 14 het roze punt en het oranje punt, dit punt zich snel beweegt naar een stabiel evenwicht, dat zich op het aantrekkende gedeelte van critical manifold  $C_0$  bevindt. Eenmaal op de kromme  $C_0$  aangekomen, betekent het dat de stroming van een snelle stroming overgaat naar een langzame stroming. Op de critical manifold  $C_0$  heb je namelijk een langzame stroming, en buiten  $C_0$  een snelle stroming. We hebben ook een andere mogelijkheid, namelijk als we een beginpunt kiezen op de onstabiele verzameling evenwichten, dus het blauwe gedeelte. Dan beweegt de stroom van dit punt langzaam op de kromme  $C_0$  maar schiet de stroming van dat punt af, en als deze van de kromme  $C_0$  af is dan krijgt hij een snelle stroming.

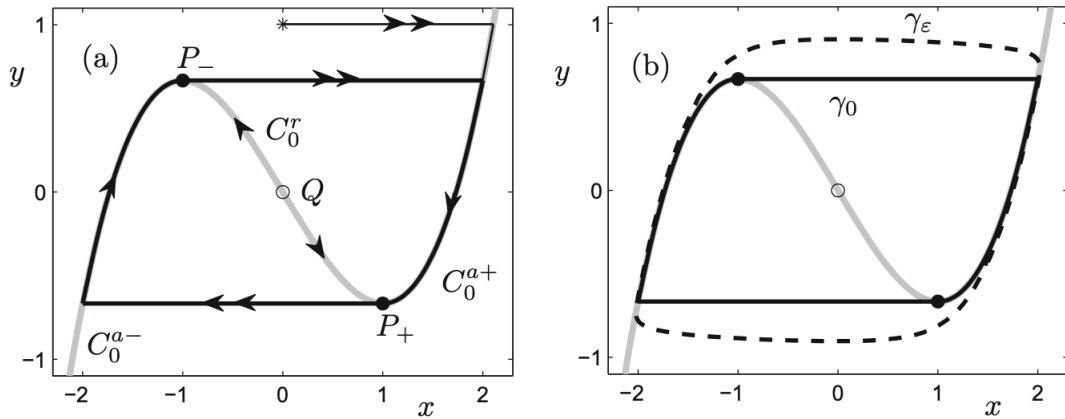
We wilden eigenlijk de dynamica bepalen voor het slow manifold  $C_\epsilon$  en dat kan met de stelling van Fenichel, mits het critical manifold  $C_0$  normaal hyperbolisch is. Maar we hebben twee niet normaal hyperbolische punten en zullen zien dat deze niet normaal hyperbolische punten  $P_+ = (1, -\frac{2}{3})$  en  $P_- = (-1, \frac{2}{3})$  in het van der Pol systeem zadelpunten zijn. We kunnen dus alleen de dynamica bepalen op de wel normaal hyperbolische punten op het critical manifold  $C_0$  dus als we het critical manifold  $C_0$  splitsen in drie normaalhyperbolische gedeeltes [8] :

$$\begin{aligned} C_0^{a-} &= C_0 \cap \{x < -1\}, \\ C_0^r &= C_0 \cap \{-1 < x < 1\} \text{ en} \\ C_0^{a+} &= C_0 \cap \{x > 1\}. \end{aligned}$$

met  $C_0^{a-}$  en  $C_0^{a+}$  als stabiele oplossingen en  $C_0^r$  als instabiele oplossing.

Als we van deze drie normaal hyperbolische gedeeltes de dynamica bepalen, krijgen we een situatie zoals in figuur 15 weergegeven.

Maar dit is nog niet het werkelijke systeem, want we wilden de dynamica voor het hele slow manifold  $C_\epsilon$  bepalen, en dat kan met de stelling van Fenichel mits  $C_0$  normaal hyperbolisch is. Maar we kunnen dit niet bepalen met de stelling van Fenichel voor het hele systeem vanwege die twee niet normaal hyperbolische punten, en hiervan weten we niet hoe ze zich gedragen. Hiervoor bekijken we in figuur 14 het gebied bij het niet hyperbolische punt  $x = -1$ , weergegeven met een paarse cirkel. We nemen hier een beginpunt  $(x_0, y_0) \in C_0$  dicht bij het punt  $x = -1$ . We kunnen een Taylorreeks toepassen rond deze beginwaarde  $(x_0, y_0)$ , dit geeft:



Figuur 15: De dynamica van een fast-slow systeem van der Pol vergelijking voor  $\epsilon = 0$ . In figuur (a) is in het grijs het critical manifold  $C_0$  weergegeven. De punten  $P_-$  en  $P_+$  zijn de zadelpunten, en worden weergegeven met zwarte punten. Het punt in het midden  $Q = (0, 0)$  is het instabiele punt. De ster geeft een beginpunt aan en laat met de dunne zwarte lijn zien hoe de baan loopt vanuit dit beginpunt. Verder is er ook een dikke zwarte lijn weergegeven en deze laat zien hoe de baan loopt, en deze is periodiek. De enkele pijlen geven een langzame stroming aan en de dubbele pijlen een snelle stroming. In figuur (b) is de doorgetrokken zwarte lijn een mogelijke baan  $\gamma_0$  weergegeven, en de gestippelde lijn is hoe  $\gamma_\epsilon$  er uit kan zien, en in dit figuur is voor  $\gamma_\epsilon$  de waarde  $\epsilon = 0.05$  gebruikt. ([8],p.96)

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \dots$$

We kunnen de hogere termen bij deze ontwikkeling negeren. Daarnaast, weten we ook dat  $f(x_0, y_0) = 0$  is, dus we houden over de termen:

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

We kunnen de Taylorreeks  $f(x, y)$  invullen voor het systeem. Maar voordat we dit gaan doen willen we nog wat opmerken.

We hebben dat de term  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x$  overheerst als  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ . Maar als we  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \approx 0$  nemen, dan gebeurt er iets opmerkelijks. We nemen dan

hiervoor een constante  $\alpha$ , en we willen dat deze heel dicht bij nul zit, maar niet gelijk aan nul, dus neem  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \alpha\epsilon$ .

Als we dit dan invullen in het systeem dan krijgen we:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\epsilon}\alpha x\epsilon \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

Merk nu op dat we al hadden dat de parameter langzaam was maar nu ook het systeem langzaam is geworden. Nu zijn dus zowel het systeem als de parameter langzaam geworden. Dus we zien dat we bij zo'n niet normaal hyperbolisch punt niet meer het verschil hebben in langzaam en snel bewegen. Om het gedrag bij niet normaal hyperbolische punten te begrijpen willen we het gedrag van punten dichtbij zo'n niet normaal hyperbolisch punt bekijken. We zullen later in dit hoofdstuk de dynamica bepalen rond zo'n niet normaal hyperbolisch punt, namelijk de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie.

### 3.4 EBM naar de normaalvorm brengen

Eerder hadden we al gezien, dat je complexere bifurcaties in een normaalvorm kon brengen. Bekende normaalvormen zijn de zadelpunt bifurcatie, transcritische bifurcatie, de Pitchfork bifurcatie en de Hopf-bifurcatie. Over deze normaalvormen is al veel bekend over hoe ze zich gedragen, dus dit zou ons ook kunnen helpen met het begrijpen van complexere systemen. We kunnen nu door het EBM in een normaalvorm te zetten, meer zeggen over hoe deze punten zich gedragen bij de evenwichtstoestanden. We hadden al een vermoeden dat het EBM waarschijnlijk een zadelpuntbifurcatie heeft, aangezien de buitenste twee evenwichten stabiel zijn en het middelste evenwicht instabiel is. Als we de parameter gingen veranderen kwamen er drastische veranderingen. We zagen dat één van de stabiele evenwichten samensmelt met het instabiele evenwicht. Welk van de twee stabiele evenwichten samensmelt is afhankelijk van of de parameter  $Q$  afneemt of juist toeneemt. Als één van de stabiele evenwichten samensmelt met het instabiele evenwicht,

verdwijnen deze evenwichten, en houd je één stabiel evenwicht over. Dit gedraagt zich als een zadelpunt bifurcatie en we willen nu dit vermoeden proberen te bevestigen. We willen daarom de normaalvorm van het EBM bepalen, door middel van een Taylorreeks rond één van de evenwichten, en laten zien dat de normaalvorm een zadelpuntbifurcatie zal zijn.

In eerdere paragrafen hadden we al gezien hoe we een systeem in een normaalvorm brachten, door een Taylorreeks rond een punt te nemen. We hebben niet de precieze gegevens van onze evenwichtstoestanden echter we moeten ook onderscheid maken welk punt relevant is voor ons om te onderzoeken. Dit zullen we later in deze paragraaf motiveren.

We willen allereerst het EBM omzetten in een slow-fast system. We hadden in systeem (6) het EBM systeem bepaald, en deze was als volgt:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= E_{in}(T) - E_{uit}(T) \\ &= (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4\end{aligned}$$

We zagen dat als we de parameter  $Q$  gingen veranderen, er een drastische kwalitatieve verandering plaatsvond, oftewel er vond een bifurcatie plaats, waarbij parameter  $Q$  de bifurcatieparameter is. We hebben alleen in de bifurcatietheorie geleerd dat deze parameter vast is, maar als we hem langzaam met de tijd laten toenemen, zullen we twee verschillende tijdschalen krijgen. Namelijk een snelle tijdschaal  $t$  en een langzame tijdschaal  $\tau$ . We zullen hier zien dat  $T$  de snelle variabele is en  $Q$  de langzame variabele.

We hebben het langzame deelsysteem:

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{dT}{d\tau} &= \epsilon \dot{T} = f(T, Q) \\ \frac{dQ}{d\tau} &= \dot{Q} = 1\end{aligned}\tag{19}$$

met

$$f(T, Q) = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4$$

en het snelle deelsysteem (neem  $t = \frac{\tau}{\epsilon}$ ):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= T' = f(T, Q) \\ \frac{dQ}{dt} &= Q' = \epsilon\end{aligned}\tag{20}$$

met

$$f(T, Q) = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4$$

Dit is hoe dus het EBM eruit ziet in een slow-fast systeem.

Het critical manifold is:

$$\begin{aligned}C_0 &= \{(T, Q) \in \mathbb{R}^2 : f(T, Q) = 0\} \\ &= \{(T, Q) \in \mathbb{R}^2 : (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4 = 0\}\end{aligned}\tag{21}$$

We hadden  $\alpha(T)$  al eerder bepaald in systeem (3), dit was

$$\alpha(T) = 0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right)$$

Als we dit substitueren in systeem (20), dan krijgen we het volgende snelle deelsysteem van het EBM:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (1 - (0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right)))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon\end{aligned}\tag{22}$$

We kunnen het ook omzetten tot een langzaam deelsysteem van het EBM, dit geeft:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\tau} &= \epsilon \dot{T} = (1 - (0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right)))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{d\tau} &= 1\end{aligned}\tag{23}$$



We kunnen de normaalvorm van het EBM vinden door een Taylorreeks toe te passen op het systeem:

We krijgen dan:

$$f(T, Q) = f(T_*, Q_*) + (T - T_*) \frac{\partial f}{\partial T}(T_*, Q_*) + (Q - Q_*) \frac{\partial f}{\partial Q}(T_*, Q_*) + \dots \quad (24)$$

Merk op dat we de hogere termen weg kunnen laten, omdat dit niet van belang is voor onze uitkomst. Merk daarnaast op dat de constante  $\sigma$  bekend is, dit is namelijk de Stefan's constante  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ , zie vergelijking (2). Verder weten we dat  $\theta$  tussen 0 en 1 ligt.

We definiëren hierboven  $(T_*, Q_*)$  als evenwichtstoestand van het EBM systeem. We hebben in het EBM systeem drie evenwichtstoestanden. Door te kijken naar het gedrag van deze evenwichtstoestanden kunnen we zien dat er een zadelpuntbifurcatie moet zijn, omdat twee evenwichtoplossingen samenvallen en dan vervolgens verdwijnen. Dit geldt voor het onderste en middelste evenwicht ( $T_1^*$  en  $T_2^*$ ) en voor het bovenste en middelste evenwicht ( $T_2^*$  en  $T_3^*$ ). We kiezen het onderste evenwichtspunt  $T_3^*$  om de Taylorreeks rond toe te passen. We kiezen het onderste evenwicht  $T_3^*$ , omdat het bovenste evenwicht niet relevant is als we de parameter  $Q$  laten toenemen, dan blijft op een gegeven moment de temperatuur toenemen.

Voor het evenwicht geldt:

$$\sigma \theta T^4 = Q(1 - \alpha(T)) \quad \text{en}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\theta \sigma T^4)|_{T=T_*} = \frac{\partial}{\partial T}(Q(1 - \alpha(T))|_{T=T_*, Q=Q_*}$$

We zien nu dat we twee vergelijkingen hebben voor het evenwichtspunt  $(T_*, Q_*)$ . Deze twee voorwaarden gaan we gebruiken om het EBM systeem in normaalvorm te krijgen.

Om het overzichtelijk te houden zullen we eerst de afgeleiden van de Taylorreeks berekenen, vervolgens zullen we dit vermenigvuldigen met de bijhorende factor van de Taylorreeks, en tot slot zullen we dit in de formule voor de Taylorreeks invullen.

We hebben de volgende afgeleiden:

$$\frac{\partial f}{\partial T}(T, Q) = \frac{\partial}{\partial T}((1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \sigma\theta T^4)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q}f(T, Q) = 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10}) + 0,5$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial T^2}f(T, Q) &= \frac{\partial}{\partial T}(0,02Q \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) - r\sigma\theta T^3) \\ &= -12\sigma\theta T^2 - 0,004Q \tanh(\frac{T - 265}{10}) \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Q^2}f(T, Q) = 0$$

Het weglaten van de hogere termen geeft:

$$\begin{aligned} (T - T_*) \frac{\partial f}{\partial T}(T_*, Q_*) &= (T - T_*)(0,02Q_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) - 4\sigma\theta T_*^3) \\ &= (T - T_*)(0,02Q_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) - (T - T_*)4\sigma\theta T_*^3) \\ &= 0,02Q_* T \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) - 0,02Q_* T_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) - 4\sigma\theta T_*^3 T + 4\sigma\theta T_*^4 \end{aligned}$$

Weglaten van de hogere machten geeft:

$$\approx 0,02Q_* T \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) - 0,02Q_* T_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) + O(T^3)$$

$$\begin{aligned}
(Q - Q_*) \frac{\partial f}{\partial T}(T_*, Q_*) &= (Q - Q_*)(0, 2 \tanh(\frac{T - 265}{10}) + 0, 5) \\
&= 0, 2Q \tanh(\frac{T - 265}{10}) + 0, 5Q - 0, 2Q_* \tanh(\frac{T - 265}{10}) - 0, 5Q_*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(T - T_*)^2 \frac{\partial f}{\partial T^2}(T_*, Q_*) \\
&= \frac{1}{2}(T^2 - 2TT_* + T_*^2)(-12\theta\sigma T^2 - 0, 004Q \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10})) \\
&= (\frac{1}{2}T^2 - TT_* + \frac{1}{2}T_*^2)(-12\theta\sigma T^2 - 0, 004Q \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10})) \\
&= -6\theta\sigma T^4 + 12\theta\sigma T^3 T_* - 6\theta\sigma T^2 T_*^2 - 0, 002QT^2 \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) + \\
&\quad 0, 004QTT_* \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10})
\end{aligned}$$

Hogere termen weglaten geeft:

$$\begin{aligned}
&\approx -0, 002QT^2 \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) + 0, 004QTT_* \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) \\
&\quad - 0, 002QT_*^2 \tanh(\frac{T - 265}{10}) \cdot \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10}) + O(T^3)
\end{aligned}$$

Invullen in de Taylorreeks (24), geeft:

$$\begin{aligned}
f(T, Q) \approx & 0,02Q_*T \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) - 0,02Q_*T_* \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) + 0,2Q \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \\
& + 0,5Q - 0,2Q_* \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) - 0,5Q_* - 0,002QT^2 \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \\
& + 0,004QTT_* \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) - 0,002QT_*^2 \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \\
& + O(T_*^3)
\end{aligned}$$

We gaan een aantal afkortingen gebruiken om het overzichtelijk te maken.  
Neem

$$x := \tanh\left(\frac{T_* - 265}{10}\right) \quad \text{en} \quad y := \operatorname{sech}^2\left(\frac{T_* - 265}{10}\right)$$

Dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
\approx & 0,02Q_*Ty - 0,02Q_*T_*y + 0,2Qx + 0,5Q - 0,2Q_*x - 0,5Q_* \\
& - 0,002QT^2xy + 0,004QTT_*xy - 0,002QT_*^2xy
\end{aligned}$$

$$\approx (0,02Q_*y)(T - T_*) + (0,2x + 0,5)(Q - Q_*) + (T - T_*)^2(-0,002Qxy)$$

We vinden:

$$\alpha\Delta T + \beta\Delta Q + \gamma\Delta T^2$$

met

$$\alpha = 0,02Qy, \quad \beta = 0,2x + 0,5 \quad \text{en} \quad \gamma = -0,002Qxy$$

We gaan nu de tweede eigenschap gebruiken, namelijk

$$\frac{\partial}{\partial T}(\theta\sigma T^4)|_{T=T_*} = \frac{\partial}{\partial T}(Q(1 - \alpha(T))|_{T=T_*, Q=Q_*}$$

Dit uitwerken geeft:

$$\frac{\partial}{\partial T}(\theta\sigma T^4)|_{T=T^*} = 4\theta\sigma T^3|_{T=T^*} = 4\theta\sigma T_*^3$$

oftewel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T}(Q - (1 - (0,5 - 0,2 \cdot \tanh(\frac{T - 265}{10}))))|_{T=T^*, Q=Q_*} &= 0,02Q \operatorname{sech}^2(\frac{T - 265}{10})|_{T=T^*, Q=Q_*} \\ &= 0,02Q_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10}) \end{aligned}$$

Dus dan geldt

$$4\theta\sigma T_*^3 = 0,02Q_* \operatorname{sech}^2(\frac{T_* - 265}{10})$$

Oftewel:

$$4\theta\sigma T_*^3 = 0,02Q_* y \tag{25}$$

Dit kunnen we ook gebruiken voor onze formule  $\alpha\Delta T + \beta\Delta Q + \gamma\Delta T^2$ , want hier hebben we  $\alpha = 0,02Q_* y$ . Dit is precies wat we hierboven hebben uitgerekend bij de tweede eigenschap, vergelijking (25). Vergelijking (25) substitueren in  $\alpha$  geeft:

$$\alpha = 0,02Q_* y = 4\theta\sigma T_*^3$$

De term valt weg omdat het een hogere macht is.  
Dus we houden dan over:

$$\beta\Delta Q + \gamma\Delta T^2 \tag{26}$$

We zien dat deze vergelijking heel erg lijkt op de normaalvorm van een zadelpuntbifurcatie, want de zadelpuntbifurcatie normaalvorm heeft als vorm  $Q + T^2$ .

Als we de kleine verschillen wegdenken, zien we dat deze vergelijking gelijk is aan de zadelpuntbifurcatie normaalvorm.

We concluderen hieruit dat het EBM als normaalvorm een zadelpuntbifurcatie heeft.

Dat we weten dat er een zadelpuntbifurcatie voorkomt in het EBM, helpt ons verder met de dynamica begrijpen van het EBM.

We hadden namelijk geleerd dat we de dynamica kunnen bepalen met behulp van de stelling van Fenichel, alleen dat dit mis gaat voor niet normaal hyperbolische punten. We zien echter dat het EBM ook niet normaal hyperbolische punten heeft, want we hebben net gezien dat er een zadelpuntbifurcatie optreedt in het systeem. Bovendien weten we dat Taylorreeksen rond het andere evenwichtpunt  $T_1^* = (T_*, Q_*)$  ook een zadelpuntbifurcatie geeft.

Nu we weten dat het EBM een zadelpuntbifurcatie heeft, kunnen we ons verdiepen in de dynamica van een zadelpuntbifurcatie, want daarover is meer bekend. We kunnen dichtbij zo'n zadelpuntbifurcatie naar meerdere oplossingen kijken en daarvan de dynamica bestuderen. Daarom was het in de normaalvorm zetten van het EBM van belang, want van normaalvorm bifurcaties weten we meer af. In de volgende paragraaf zullen we bekijken wat er gebeurt met de dynamica bij zo'n zadelpuntbifurcatie.

### 3.5 Dynamica rond een zadelpuntbifurcatie

We willen graag de dynamica bepalen bij een algemene zadelpuntbifurcatie. Als we de zadelpunt-bifurcatie in normaalvorm nemen, dan geeft dit: [8]

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 = f(x, y)$$

In dit geval is de parameter  $\mu$  vast, maar we laten  $\mu$  langzaam toenemen in de tijd en dan krijgen we:

$$\frac{d\mu}{dt} = \epsilon g(x, y) = \epsilon \cdot -1 = -\epsilon$$

$$\text{met } \mu(t) = -\epsilon t + \mu(0) \text{ en } 0 < \epsilon \ll 1$$

We krijgen dan het snelle deelsysteem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mu - x^2 = f(x, y) \\ \frac{d\mu}{dt} &= \epsilon g(x, y) = -\epsilon\end{aligned}$$

met  $0 < \epsilon \ll 1$

De variabele  $x$  is de snelle variabele en de variabele  $\mu$  is de langzame variabele.

De dynamica bij een zadelpunt bifurcatie kunnen we bepalen door eerst die van het critical manifold te bepalen.

Het critical manifold is als volgt:

$$\begin{aligned}C_0 &= \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu + x^2 = 0\} \\ &= \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \mu = -x^2\}\end{aligned}$$

Het critical manifold  $C_0$  is niet normaal hyperbolisch voor het punt  $(0, 0) \in C_0$ , want hiervoor geldt:

$$\frac{d}{dx} f(0, 0) = -2 * 0 = 0$$

Voor  $\epsilon = 0$  op het snelle deelsysteem geldt:

$$\begin{aligned}x' &= \mu - x^2 \\ \mu' &= 0\end{aligned}$$

en voor  $\epsilon = 0$  voor het langzame deelsysteem geldt

$$\begin{aligned}0 &= \mu - x^2 \\ \dot{\mu} &= g(x, y)\end{aligned}$$

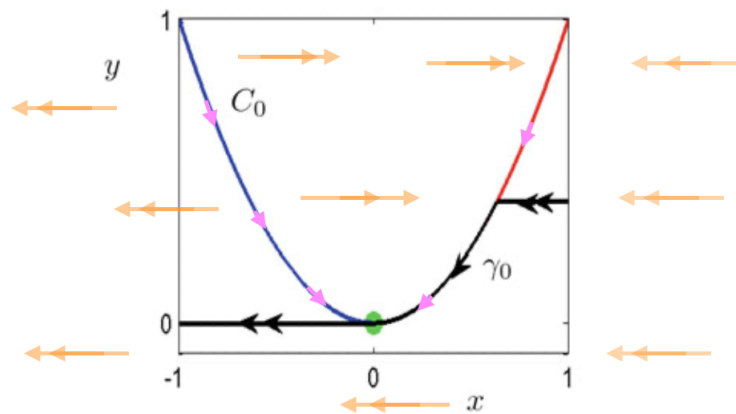
Dus we zien dat  $x$  niet verandert maar  $\mu$  wel, en dat de stroom op het critical manifold  $\dot{\mu} = g(x, y) = -1$  volgt. We hadden vastgesteld dat  $\mu$  de langzame

variabele was, en dus is de stroming op het critical manifold langzaam. De stroming buiten het critical manifold is dan snel, omdat  $x$  de snelle variabele is.

In figuur 16 is te zien hoe de dynamica op een zadelpuntbifurcatie is.

De oranje pijlen zijn de snelle stroming buiten het critical manifold  $C_0$  en de roze pijlen zijn de langzame stroming op het critical manifold  $C_0$ .

Er is ook een mogelijke baan beschreven, namelijk dat als je buiten het critical manifold begint, dan beweeg je snel naar een evenwicht, dus kom je op het aantrekkende gedeelte van het critical manifold terecht. Eenmaal op het critical manifold beweeg je langzaam. Dan kom je in het zadelpunt  $(0,0)$  terecht, en verdwijnt die stabiele situatie, dus dan beweegt de stroming weg op zoek naar het volgende stabiele evenwicht. Dus als de stroming eenmaal van het critical manifold af is, beweegt de stroming snel.



Figuur 16: Dit is de dynamica op het critical manifold van de zadelpunt bifurcatie normaalvorm. Het rode gedeelte van het critical manifold  $C_0$  is de stabiele oplossing (aantrekkende gedeelte) en het blauwe gedeelte van het critical manifold  $C_0$  is de instabiele oplossing (afstotende gedeelte). Het groene punt  $(0,0)$  is het zadelpunt/niet normaal hyperbolische punt. De enkele pijlen zijn de langzame stromingen en dubbele pijlen zijn de snelle stromingen. Er is ook een mogelijke baan beschreven dit is  $\gamma_0$ , dit is de zwarte doorgetrokken lijn. ([8],p.64)

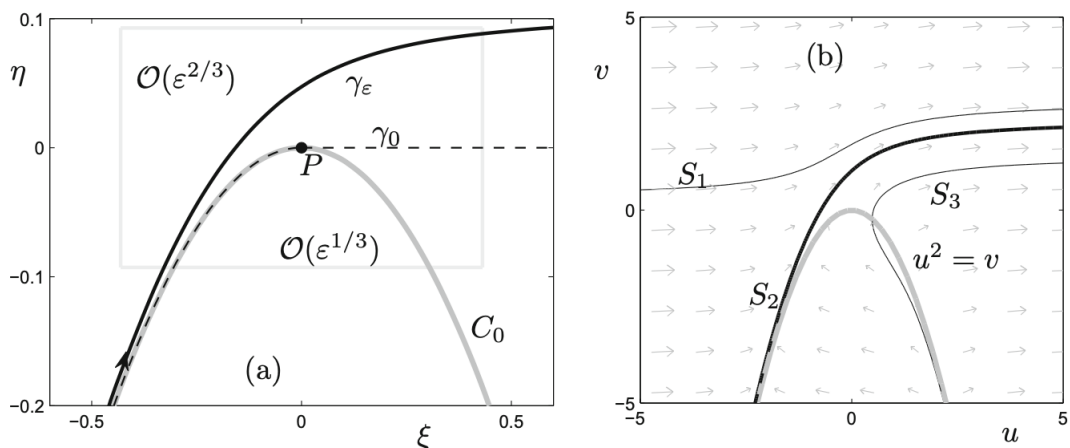
We willen nog meer te weten komen over wat er precies gebeurt bij zo'n niet normaal hyperbolisch punt, in dit geval het zadelpunt. Dit gaan we nu verder onderzoeken.

We weten dat als we dichterbij een zadelpunt gaan kijken, dat in een bepaalde omgeving rond dit punt de omgeving verstoord raakt. Dit hadden we ook



al gezien door een Taylorreeks te doen rond een niet normaal hyperbolisch punt. In dat geval zagen we dat zowel het systeem als de variabelen beide langzaam waren geworden. Zo'n verstoring brengt onzekerheden met zich mee, bijvoorbeeld over hoe de dynamica van een baan daadwerkelijk loopt dichtbij zo'n zadelpunt. In paragraaf 5.4 uit het boek *Multiple Time Scale Dynamics* [8] staan belangrijke resultaten, die we gaan gebruiken om de dynamica op een zadelpunt te beschrijven. Hierbij kijken we vooral naar de uitkomst van een figuur in het boek die de dynamica beschrijft rond een zadelpuntbifurcatie. Dit figuur is verkregen door de analyse in 5.4.1. Het resultaat wordt ook samengevat in stelling 5.4.2. Hieronder zullen we de belangrijkste resultaten uit de paragraaf uit het boek bespreken, maar voor meer informatie verwijs ik naar het boek, *Multiple Time Scale Dynamics*.

We kunnen voorbeeld 5.4.1 uit het boek gebruiken om de verstoorde omgeving rond een zadelpunt te vinden. We vinden namelijk dat de oplossing verstoord raakt in de buurt van  $O(\epsilon^{2/3})$  van de y-coördinaat van het zadelpunt  $(0, 0)$ , en  $O(\epsilon^{1/3})$  van de x-coördinaat van het zadelpunt  $(0, 0)$ . [8]



Figuur 17: Hier wordt de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie beschreven. In figuur (a) is het punt  $P = (0, 0)$  het zadelpunt, de grijze lijn het critical manifold  $C_0$ , de gestippelde lijn een mogelijke baan  $\gamma_0$ , en de doorgetrokken zwarte lijn een mogelijke baan  $\gamma_\epsilon$  en in dit figuur is gekozen voor  $\epsilon = 0,01$ . Verder is ook de geschaalde omgeving er bij getekend, dit is de lichtgrijze rechthoek. In figuur (b) zijn drie mogelijke oplossingen  $S_j$  geschetst, waarvan  $S_2$  overeen komt met de eigenschappen. ([8],p.105)

De dynamica rond een zadelpuntbifurcatie wordt weergeven in figuur 17. Figuur (a) geeft een plot dichtbij een zadelpunt, en hierin is ook de geschaalde omgeving die verstoord is rond het zadelpunt weergegeven en in figuur (b) zijn

de mogelijke banen beschreven rond een zadelpunt, waarbij de dik gedrukte lijn van de baan  $S_2$  het beste past bij het gedrag van de dynamica. Hoe we de baan kunnen beschrijven wordt ook beschreven in paragraaf 5.4 uit het boek van *Multiple Time Scale Dynamics* van Kuehn. Dit wordt gedaan met behulp van stelling 5.4.2 en met behulp van de oplossing van Ricatti-vergelijking. Hiermee kun je expliciet de baan bepalen rond een zadelpuntbifurcatie.

### 3.6 Verstoring EBM

In de vorige paragraaf hebben we de dynamica rond een zadelpunt bekeken. We zagen dat rond een bepaalde omgeving van het zadelpunt, de stroming verstoord raakt. Het is van belang om deze verstoorde omgeving van het EBM te berekenen, zodat we de baan in deze verstoorde omgeving kunnen bepalen. Dit zullen we doen aan het hand van voorbeeld 5.4.1 uit het boek. [8] We zullen zien dat we ook hier terugblikken naar de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm, zoals we in de vorige paragraaf hebben behandeld.

We zullen de verstoorde omgeving bepalen van het systeem, dus we bekijken het langzame deelsysteem (23).

Neem  $Q(\tau) = \tau + Q(0)$ , dit geeft:

$$\epsilon \dot{T} = \left(1 - \left(0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T - 265}{10}\right)\right)\right)(\tau + Q(0)) - \theta \sigma T^4$$

Substitueer  $T(\tau, \epsilon) = T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$  in de bovenstaande vergelijking, dit geeft:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{T}_0 + \epsilon^2 \dot{T}_1 + O(\epsilon^3) = & \tau + \left(1 - \left(0,5 - 0,2 \tanh\left(\frac{T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)}{10}\right)\right)\right)(\tau + Q(0)) \\ & - \theta \sigma (T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)) \end{aligned}$$

We zien echter dat dit een erg lastig probleem is om uit te rekenen, vanwege de termen in de tanh.

Daarom gebruiken we in plaats van de uitdrukking zoals in vergelijking (3), de eerdere uitdrukking van deze  $\alpha(T)$ :

$$\alpha(T) = \begin{cases} 0,7 & \text{als } T < 250K \\ 0,3 & \text{als } T > 280K \end{cases}$$

Zoals al eerder uitgelegd, willen we graag het onderste evenwicht bekijken, omdat deze het relevantst is voor ons. Daarom bekijken we alleen het geval

$T < 250K$ , dus in dit geval is  $\alpha(T) = 0,7$ .

We hebben nu het albedo, maar we willen graag het co-albedo weten, deze is dan:

$$(1 - \alpha(T)) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Dit invullen in de formule van het langzame subsysteem van het EBM geeft:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \epsilon \dot{T} = 0,3Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{dt} = 1 \end{cases}$$

Neem opnieuw  $Q(\tau) = \tau + Q(0)$ , dit invullen geeft:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{T} &= 0,3Q(\tau) - \theta\sigma T^4 \\ &= 0,3(\tau + Q(0)) - \theta\sigma T^4 \\ &= 0,3\tau + 0,3Q(0) - \theta\sigma T^4 \end{aligned} \tag{27}$$

Substitueer  $T(\tau, \epsilon) = T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$  in (27) geeft:

$$\epsilon \dot{T}_0 + \epsilon^2 \dot{T}_1 + O(\epsilon^3) = 0,3\tau + 0,3Q(0) - \theta\sigma [T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)]^4$$

We willen als eerste de term tussen de blokhaken uitwerken.

Merk op dat in de onderstaande berekeningen de hogere termen worden weggelaten.

$$(a + bx + cx^2)^4 = a^4 + 4a^3bx + 4a^3cx^2 + 6a^2b^2x^2 + O(x^3)$$

Neem  $a = T_0$ ,  $b = T_1$ ,  $c = T_2$  en  $x = \epsilon$ , dit geeft:

$$(T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3))^4 =$$

$$T_0^4(\tau) + 4T_0^3(\tau)T_1(\tau)\epsilon + 4T_0^3(\tau)T_2(\tau)\epsilon^2 + 6T_0^2(\tau)T_1^2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

Oftewel:

$$\epsilon \dot{T}_0 + \epsilon^2 \dot{T}_1 + O(\epsilon^3) =$$

$$0, 3\tau + 0, 3Q(0) - \theta\sigma[T_0^4(\tau) + 4T_0^3(\tau)T_1(\tau)\epsilon + 4T_0^3(\tau)T_2(\tau)\epsilon^2 + 6T_0^2(\tau)T_1^2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)] =$$

$$0, 3\tau + 0, 3Q(0) - \theta\sigma T_0^4(\tau) - 4\theta\sigma T_0^3(\tau)T_1(\tau)\epsilon - 4\theta\sigma T_0^3(\tau)T_2(\tau)\epsilon^2 - 6\theta\sigma T_0^2(\tau)T_1^2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

• Op orde  $O(1)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= 0, 3\tau + 0, 3Q(0) - \theta\sigma T_0^4(\tau) \\ \theta\sigma T_0^4(\tau) &= 0, 3\tau + 0, 3Q(0) \\ T_0^4(\tau) &= \frac{0, 3\tau}{\theta\sigma} + \frac{0, 3Q(0)}{\sigma\theta} \\ T_0(\tau) &= \pm \sqrt[4]{\frac{0, 3\tau + 0, 3Q(0)}{\sigma\theta}} \text{ of} \\ T_0(\tau) &= \pm i \sqrt[4]{\frac{0, 3\tau + 0, 3Q(0)}{\sigma\theta}} \end{aligned}$$

Neem

$$T_0(\tau) = -\sqrt[4]{\frac{0, 3\tau + 0, 3Q(0)}{\sigma\theta}}$$

• Op orde  $O(\epsilon)$ :

We hebben:

$$\dot{T}_0 = -4\theta\sigma T_0^3(\tau)T_1(\tau) \tag{28}$$

We weten dat

$$T_0(\tau) = -\sqrt[4]{\frac{0, 3\tau + 0, 3Q(0)}{\sigma\theta}}$$

De afgeleide hiervan is:

$$\begin{aligned}\dot{T}_0(\tau) &= -\frac{d}{d\tau}\left(\sqrt[4]{\frac{0,3\tau + 0,3Q(0)}{\sigma\theta}}\right) \\ &= -\frac{0,075}{\theta\tau\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\theta\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}}\end{aligned}$$

Invullen in vergelijking (28) geeft:

$$\begin{aligned}-\frac{0,075}{\theta\tau\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\theta\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}} &= -4\theta\sigma\left(-\sqrt[4]{\frac{0,3\tau + 0,3Q(0)}{\sigma\theta}}\right)^3(\tau)T_1(\tau) \\ &= -4\theta\sigma\left(-\frac{0,3\tau + 0,3Q(0)}{\sigma\theta}\right)^{\frac{3}{4}}(\tau)T_1(\tau)\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{0,075}{\theta\tau\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\theta\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}}}{\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta}} = -4\sigma\theta T_1(\tau)$$

$$\frac{0,075}{\theta\sigma\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\theta\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}} = -4\sigma\theta T_1(\tau)$$

$$T_1(\tau) = -\frac{0,01875}{\theta^2\sigma^2\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\tau}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

• Op orde  $O(\epsilon^2)$ :

$$\dot{T}_1 = -4\sigma\theta T_0^3(\tau)T_2(\tau) - 6\sigma\theta T_0^2(\tau)T_1^2(\tau)$$

We wisten al dat

$$T_1(\tau) = \frac{-0,01875}{\theta^2\sigma^2\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\theta\sigma}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hiervan kunnen we de afgeleide berekenen:

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{-0,01875}{\theta^2 \sigma^2 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \frac{\frac{27}{3200}}{\theta^3 \sigma^3 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

De waarden  $T_1(\tau)$ ,  $\dot{T}_1(\tau)$  en  $T_0(\tau)$  invullen geeft:

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{27}{3200}}{\theta^3 \sigma^3 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{5}{2}}} = \\ &-4\sigma\theta \left( -\frac{0,075}{\theta\tau \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{3}{4}}} \right)^3 T_2(\tau) - 6\theta\sigma \left( -\frac{0,075}{\theta\tau \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{3}{4}}} \right)^2 \left( \frac{-0,01875}{\theta^2 \sigma^2 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \end{aligned}$$

We willen nu  $T_2(\tau)$  bepalen:

$$\begin{aligned} T_2(\tau) &= \frac{\frac{\frac{27}{3200}}{\theta^3 \sigma^3 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{5}{2}}} + 6\sigma\theta \left( \frac{0,000351563 \sqrt{\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta}}}{\sigma\theta(0,3\tau+0,3Q(0))^3} \right)}{-4\sigma\theta} \\ &= \frac{0,00210938}{\theta^4 \sigma^4 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{0,000527344 \sqrt{\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta}}}{\sigma\theta(0,3\tau+0,3Q(0))^3} \\ &= -\frac{0,00263672}{\theta^4 \sigma^4 \left( \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta} \right)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

We hebben nu de waarden  $T_1(\tau)$ ,  $T_2(\tau)$  en  $T_3(\tau)$  gevonden. Deze kunnen we substitueren in de onderstaande vergelijking:

$$T(\tau, \epsilon) = T_0(\tau) + T_1(\tau)\epsilon + T_2(\tau)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

Dit geeft:

$$= -\sqrt[4]{\frac{0,3\tau + 0,3Q(0)}{\sigma\theta}} - \frac{0,01875}{\theta^2\sigma^2\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\tau}\right)^{\frac{3}{2}}}\epsilon - \frac{0,00263672}{\theta^4\sigma^4\left(\frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta}\right)^{\frac{5}{2}}}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

We definiëren:  $\bar{Q} = \frac{0,3\tau+0,3Q(0)}{\sigma\theta}$ , en we definiëren de constante coëfficiënten  $c_1, c_2$  en  $c_3$ .

Dit geeft:

$$T(\tau, \epsilon) = c_0\bar{Q}^{\frac{1}{4}} + c_1\bar{Q}^{\left(\frac{-3}{2}\right)} + c_2\bar{Q}^{\left(\frac{-5}{2}\right)} + O(\epsilon^3) \quad (29)$$

Als de reeks asymptotisch is, geldt het volgende:

$$c_0\bar{Q}^{\frac{1}{4}} \ll c_1\bar{Q}^{\left(\frac{-3}{2}\right)}\epsilon \quad \text{als } \epsilon \rightarrow 0 \quad (30)$$

Deze voorwaarde gaat mis als:

$$\begin{aligned} c_0\bar{Q}^{\frac{1}{4}} \sim c_1\bar{Q}^{\left(\frac{-3}{2}\right)} &\iff \bar{Q}^{\frac{1}{4}} \sim \bar{Q}^{\left(\frac{-3}{2}\right)}\epsilon \\ &\iff \bar{Q} \sim \epsilon^{\frac{4}{7}} \end{aligned} \quad (31)$$

We hebben nu laten zien dat de y-coördinaat geschaald wordt met  $\epsilon^{4/7}$ , en nu willen we het nog weten voor de x-coördinaat.

Dit doen we met  $T_0^2 = \bar{Q} = \epsilon^{\frac{4}{7}}$ , dit geeft:  $T_0 = \epsilon^{\frac{2}{7}}$ . Dus de x-coördinaat wordt geschaald met  $\epsilon^{\frac{2}{7}}$ .

Dus we vinden dat de reeks verstoord wordt wanneer de oplossing de verstoorte omgeving bereikt. We zien dat dit ligt op  $O(\epsilon^{\frac{4}{7}})$ -afstand van de y-coördinaat tot het zadelpunt, en op  $O(\epsilon^{\frac{2}{7}})$ -afstand ligt van de x-coördinaat tot het zadelpunt.

Dus we hebben nu de verstoorte omgeving bepaald rond het zadelpunt, en dit gaan we ook gebruiken voor de dynamica van het EBM systeem. Dit zullen we in de volgende paragraaf bespreken.



We hebben gezien dat in de zadelpuntbifurcatie normaalvorm het geschaalde gebied groter was, namelijk  $O(\epsilon^{2/3})$  voor de y-coördinaat en  $O(\epsilon^{1/3})$  voor de x-coördinaat. [8] We zouden daarentegen verwachten dat de verstoorde omgeving in beide gevallen hetzelfde zou zijn, aangezien beide zadelpuntbifurcaties in normaalvorm zijn. Wellicht zit er een kleine afwijking door het kiezen van de  $\alpha(T)$ . Deze keuze is iets minder nauwkeurig dan de  $\alpha(T)$  kiezen zoals in vergelijking (3).

In de vorige paragraaf in figuur 17, is de dynamica weergegeven rond een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm. Ondanks dat het verstoorde gebied groter is dan in onze berekeningen voor het EBM systeem, kunnen we de dynamica van dit systeem toepassen op de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie in ons EBM systeem. In beide gevallen zijn de zadelpuntbifurcaties namelijk in normaalvorm gegeven.

### 3.7 Dynamica van het EBM model

We brachten het EBM in een normaalvorm en kregen de zadelpuntbifurcatie als normaalvorm. We hebben ook de dynamica rond zo'n zadelpuntbifurcatie bepaald, en dit kunnen we ook gebruiken voor het EBM systeem.

De analyse van voorbeeld 5.4.1 uit het boek van Kuehn, gaat precies over de analyse van een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm, en de verdere analyse in paragraaf 5.4 gaat hierover. Dit leidt tot figuur 17 die de dynamica rond zo'n zadelpuntbifurcatie beschrijft, en dit is precies de zadelpuntbifurcatie die wij ook in het EBM model hebben. We hebben nu dus alle informatie om de volledige dynamica van het EBM model te beschrijven.

We hadden al het fast-slow systeem van het EBM bepaald, en het langzame deelsysteem zoals weergegeven in systeem (19) en het snelle deelsysteem zoals weergegeven in systeem (20), deze zijn respectievelijk:

$$\begin{aligned}\epsilon \frac{dT}{d\tau} &= \epsilon \dot{T} = (1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{d\tau} &= \dot{Q} = 1\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon\end{aligned}$$

Voor  $\epsilon = 0$  invullen in beide systemen geeft:

$$\begin{aligned}0 &= (1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{d\tau} &= 1\end{aligned}\tag{32}$$

en

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{33}$$

Hierbij is variabele  $T$  de snelle variabele en variabele  $Q$  de langzame variabele.

Het critical manifold zoals in vergelijking (21) is bepaald is als volgt:

$$\begin{aligned}C_0 &= \{(T, Q) \in \mathbb{R}^2 : f(T, Q) = 0\} \\ &= \{(T, Q) \in \mathbb{R}^2 : (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4 = 0\}\end{aligned}\tag{34}$$

Als we voor systeem (33) de evenwichten bekijken dan hebben we dat  $\frac{dT}{dt} = 0$ , dus op  $f(T^*, Q^*) = 0$  geldt dat  $(T^*, Q^*)$  de evenwichten van dit systeem zijn. Dus het critical manifold  $C_0$  zijn de evenwichten van systeem (33).

Voor systeem (32) zien we dat dat  $f(T, Q) = 0$  dus op het critical manifold  $C_0$  volg je de stroom  $\dot{Q}$ , omdat  $T$  niet verandert (evenwichtoplossing) maar  $Q$  wel verandert (want  $\dot{Q} = 1$ ). We weten dat variabele  $Q$  de langzame variabele is dus op het critical manifold volg je de stroom  $\dot{Q}$  en deze beweegt langzaam.

Dit betekent dus dat de dynamica op het critical manifold  $C_0$  langzaam is en de dynamica buiten het critical manifold  $C_0$  snel is.

We hebben de dynamica op het critical manifold  $C_0$  bepaald, maar dit is niet het werkelijke geval, want we willen de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$

bepalen. We weten met behulp van de stelling van Fenichel dat de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$  dezelfde eigenschappen heeft als de dynamica op het critical manifold  $C_0$  mits het critical manifold  $C_0$  normaal hyperbolisch is en de  $\epsilon$  klein genoeg.

We hebben alleen op het EBM dat niet alle punten normaal hyperbolisch zijn.

We hadden namelijk twee punten die niet normaal hyperbolisch zijn, en dit zijn de punten  $T_{if} = (Q_1, T_1)$  en  $T_{fi} = (Q_2, T_2)$ , die zijn weergegeven in figuur 8.

We kunnen nu de wel de dynamica beschrijven buiten deze niet-normaal hyperbolische punten, dus we splitsen het critical manifold op in 3 normaal hyperbolische stukken, dit geeft:

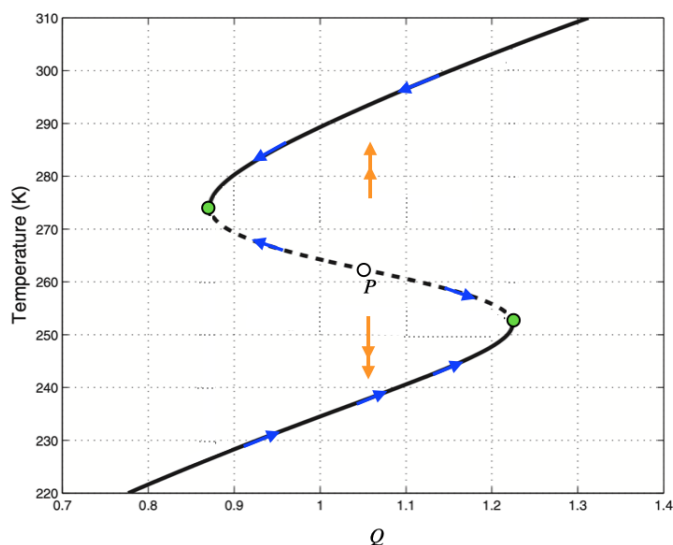
$$\begin{aligned} C_0^a &= C_0 \cap \{T < T_1\} \\ C_0^b &= C_0 \cap \{T_1 < T < T_2\} \\ C_0^c &= C_0 \cap \{T > T_2\} \end{aligned}$$

.

Hier is  $C_0^a$  en  $C_0^c$  het stabiele gedeelte en  $C_0^b$  het onstabiele gedeelte.

Ook kunnen we nu de dynamica schetsen op het critical manifold van het EBM en deze is te zien in figuur 18.

Dan is het alleen nog de vraag wat we moeten doen met die niet-normaal hyperbolische punten. In paragraaf 3.4 hadden we het EBM model rond het evenwichtpunt  $T_3^*$  in normaalvorm gezet, en we kwamen toen uit op een zadelpuntbifurcatie. Voor het evenwicht  $T_1^*$  kunnen we op dezelfde manier ook uitkomen op een zadelpuntbifurcatie, mits we de parameter  $Q$  laten afnemen. Doordat we het systeem in de normaalvorm hebben gezet, en daaruit de zadelpuntbifurcatie kwam, weten we dat het EBM ook een zadelpuntbifurcatie bevat. Het ligt aan hoe de parameter  $Q$  te veranderen welk van de evenwichten verdwijnen en welke verschijnen. Het toenemen van de parameter  $Q$ , zorgt ervoor dat de evenwichten  $T_3^*$  en  $T_2^*$  samensmelten en vervolgens verdwijnen. Dit is ook wel de zadelpuntbifurcatie. Maar als we de parameter  $Q$  zouden laten afnemen, dan zouden de evenwichten  $T_2^*$  en  $T_1^*$  samensmelten, en vervolgens verdwijnen, en dit zou ook een zadelpuntbifurcatie zijn.

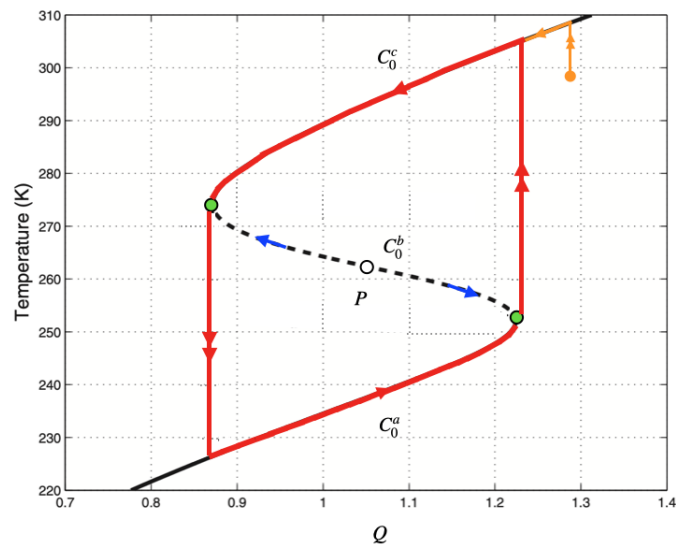


Figuur 18: De dynamica van het EBM model. De enkele pijlen zijn de langzame stromingen en de dubbele pijlen zijn de snelle stromingen. De groene punten zijn de zadelpunten en deze zijn niet normaal hyperbolische punten, en het punt  $P$  is het instabiele evenwicht. De doorgetrokken zwarte lijn is stabiel en de gestippelde lijn is onstabiel.

Omdat dit zadelpuntbifurcaties zijn, ook wel niet normaal hyperbolische punten, kunnen we niet de stelling van Fenichel gebruiken. Daarom hebben we in paragraaf 3.5 de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie bepaald. We zagen hier dat er een bepaalde omgeving rond het zadelpunt is waarin de omgeving wordt verstoord. Daarom hebben we in paragraaf 3.6 de verstoorde omgeving van het EBM model bepaald. We zagen bij de zadelpuntbifurcatie dat de verstoorde omgeving  $O(\epsilon^{\frac{2}{3}})$  is voor de  $y$ -coördinaat, en  $O(\epsilon^{\frac{1}{3}})$  voor de  $x$ -coördinaat. In het EBM hebben we ook te maken met een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm, maar hier kwamen we op een andere geschaalde omgeving uit, namelijk  $O(\epsilon^{\frac{7}{4}})$  voor de  $y$ -coördinaat, en  $O(\epsilon^{\frac{7}{2}})$  voor de  $x$ -coördinaat. Dus de verstoorde omgeving voor de zadelpuntbifurcatie in normaalvorm van het EBM systeem is een kleinere omgeving dan die van de zadelpuntbifurcatie in normaalvorm uit paragraaf 3.5. Er kan in de berekening een kleine onnauwkeurigheid zitten in de gekozen waarden voor  $\alpha(T)$ , en dat de verstoorde omgeving van het EBM daarom afwijkt van de omgeving zoals bepaald in paragraaf 3.5. Maar in principe blijft de dynamica die we in paragraaf 3.5 hebben bepaald voor de zadelpuntbifurcatie in normaalvorm hetzelfde werken als de zadelpuntbifurcatie van het EBM, omdat ze beide in normaalvorm zijn. Dus de dynamica rond het zadelpuntbifurcatie van het

EBM zal hetzelfde zijn als bepaald in paragraaf 3.5. In paragraaf 3.5 hadden we de dynamica rond de zadelpuntbifurcatie bepaald, en hierbij ook de resultaten over hoe de baan rond een zadelpuntbifurcatie loopt uit het boek gehaald. Deze gegevens zullen we ook gebruiken voor de zadelpuntbifurcatie in het EBM systeem. Figuur 17 vertelt dus ook hoe de baan loopt rond een zadelpuntbifurcatie in het EBM systeem.

We gebruiken nu de stelling van Fenichel voor de critical manifold stukken  $C_0^a, C_0^b$  en  $C_0^c$ , en de stelling van Fenichel geeft dat de dynamica op de slow manifold stukken  $C_\epsilon^a, C_\epsilon^b$  en  $C_\epsilon^c$  hetzelfde gedrag vertoont. Oftewel de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$ , op de niet normaal hyperbolische punten na, is hetzelfde als de dynamica op het critical manifold  $C_0$ , op de niet normaal hyperbolische punten na, wegens de stelling van Fenichel. Voor de twee zadelpunten weten we nu ook de dynamica, want hiervoor gebruiken we de dynamica die in paragraaf 3.5 is gebruikt voor het beschrijven van de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm. We hebben nu dus de dynamica bepaald van het hele EBM systeem.



Figuur 19: Het oranje punt is een beginpunt, en beweegt zich snel naar een stabiel evenwicht, en komt dan op het critical manifold. Op het critical manifold aangekomen beweegt de stroom van het oranje punt langzaam. In het rood is de baan getekend van  $\lambda_0$ , dicht op deze baan  $\lambda_0$  zit de werkelijke baan  $\lambda_\epsilon$ .

We zien ook dat we nu antwoord kunnen geven op de vraag waar die kritische translaties vandaan komen, en dat dit te verklaren valt met twee verschil-

lende tijdschalen. Dit zorgt ervoor dat je langzaam beweegt op het critical manifold  $C_0$ , tot er een onstabiele omgeving ontstaat (deze wordt veroorzaakt door de zadelpuntbifurcatie) en als je buiten het critical manifold  $C_0$  treedt, je een snelle stroom krijgt. Vervolgens gaat deze op zoek naar een stabiel evenwicht, er is maar één stabiel evenwicht overgebleven (doordat bij de zadelpuntbifurcatie evenwichten zijn verdwenen), en daar beweegt de stroom snel naar toe, omdat het buiten het critical manifold is. Doordat je zo snel beweegt is dus ook die "sprong" ofwel die grote verticale pijl, zoals in figuur 18 te zien is, te verklaren.

In figuur 19 zijn er twee banen beschreven op het EBM. We zien dat er een beginpunt is gekozen buiten het slow manifold  $C_\epsilon$ , en deze beweegt snel naar een stabiel evenwicht toe, en deze bevindt zich op het slow manifold  $C_\epsilon$ . Als de stroom het slow manifold  $C_\epsilon$  bereikt zal de stroom langzaam zijn. De baan is in het oranje weergegeven in figuur 19. Er is ook nog een andere baan weergegeven in het rood. We zagen een soortgelijke dynamica bij de van der Pol vergelijking.

### 3.8 Conclusie resultaten hoofdstuk 3

In dit hoofdstuk hebben we alle theorie besproken over fast-slow systemen die nodig waren om de dynamica op het EBM te bepalen.

De stelling om de dynamica op het EBM te bepalen was de stelling van Fenichel. Deze stelling zegt in het kort dat als het critical manifold  $C_0$  normaal hyperbolisch is en  $\epsilon > 0$  is klein genoeg, de dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$  zich hetzelfde lijkt te gedragen als de dynamica op het critical manifold  $C_0$ . Dit hebben we ook gebruikt om de dynamica te bepalen op het EBM, en het resultaat hiervan is te zien in figuur 18. We hadden het EBM in de normaalvorm gezet, en kwamen uit op de zadelpuntbifurcatie. Hieraan konden we ook zien dat er zadelpuntbifurcaties optreden in het EBM systeem. De verstoorde omgeving rond deze zadelpuntbifurcaties is  $O(\epsilon^{\frac{4}{7}})$  voor de y-coördinaat en  $O(\epsilon^{\frac{2}{7}})$  voor de x-coördinaat. De dynamica rond deze twee zadelpunten werkt hetzelfde als de dynamica rond een zadelpuntbifurcatie zoals in figuur 17. De kritische translaties zijn dus ook te verklaren door de twee verschillende tijdschalen van de fast-slow systemen. De dynamica op het slow manifold  $C_\epsilon$  is namelijk langzaam en daarbuiten is de stroom snel. We zien dat stroming op het slow manifold zich langzaam beweegt, tot er een zadelpuntbifurcatie optreedt, en de situatie drastisch verandert. Het stabiele evenwicht en onstabiele evenwicht smelten samen, en verdwijnen vervolgens. Daardoor raakt de stroom van het slow manifold  $C_\epsilon$  af, en beweegt de stro-

ming naar het enig overgebleven evenwicht. Deze stroming is snel omdat het buiten het slow manifold  $C_\epsilon$  is, dit is ook wel die kritische translatie. De baan  $\lambda_0$  is geschetst in figuur 19, en ook hier zijn die kritische translaties terug te vinden in de baan.

## 4 De invloed van ruis in het systeem

### 4.1 Introductie

We hebben gezien dat in het EBM twee kritische overgangen plaatsvinden, en zulke kritische overgangen willen we in de praktijk het liefst voorkomen. Omdat kritische overgangen onomkeerbaar zijn, kan de aarde met een hoge temperatuur opeens veranderen in een aarde met een zeer lage temperatuur, en duurt het lang voordat de aarde weer terug kan naar de oude situatie. Om kritische overgangen te (kunnen) voorkomen, is het belangrijk om te weten wanneer we dichtbij een kritische overgang zijn. Ook is het van belang om te weten of we net voor of na een kritische overgang zijn, omdat bij die kritische overgangen de verschillen erg groot zijn. Je springt namelijk van de ene situatie naar een totaal andere situatie. Een klimaatsysteem is nooit volledig perfect, want een klimaatsysteem bevat veel componenten, maar welke nemen deel aan het model en welke niet? Dit brengt onzekerheden mee in een model.

Om de bovenstaande vragen te beantwoorden willen we graag kijken naar de invloed van ruis op het EBM.

In systeem (6) hebben we het EBM bepaald, en hier willen we ruis  $\xi$  aan toevoegen, dit geeft: [11]

$$\frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4 + \xi \quad (35)$$

Neem  $\dot{W} = \xi$ .

Dan kunnen we dit substitueren in het bovenstaande systeem (35),

$$\frac{dT}{dt} = (1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4 dt + \rho \frac{dW}{dt}$$

We willen nu vermenigvuldigen met  $dt$ , dit geeft:

$$dT = ((1 - \alpha(T))Q - \theta\sigma T^4)dt + \rho dW$$

Hierbij is  $\rho$  een constante die de sterkte van de ruis aangeeft. Merk op dat  $\rho$  heel klein is. Het bovenstaande systeem is een stochastische differentiaal vergelijking (SDE). [11]



We hadden voor het EBM het volgende snelle deelsysteem (20):

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4 \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon\end{aligned}$$

Hierop willen we de bovenstaande theorie toepassen, dus er een SDE van maken, en dit geeft:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= ((1 - (0,5 - 0,2 \tanh(\frac{T - 265}{10})))Q - \theta\sigma T^4)dt + \rho dW \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon dt + 0 \cdot dW\end{aligned}\tag{36}$$

Hier is ook  $\rho$  ook een constante die de sterkte van de ruis aangeeft, en  $\rho$  is eveneens heel klein.

Nu we bij het EBM ruis hebben toegevoegd, willen we graag het EBM met deze toegevoegde ruis onderzoeken. We willen kijken naar hoe de invloed van ruis werkt op het EBM. Allereerst zullen we onderzoeken of we dicht bij een klimaatovergang zijn, en dit kunnen we doen door ruis toe te voegen aan het EBM. Als we de invloed van het ruis zien toenemen, weten we namelijk dat we dichtbij zo'n kritische overgang zijn. Ook willen we graag kijken of het systeem eerder of later springt (eerder of later die kritische overgang maakt) als we de ruis laten toenemen of afnemen en we willen kijken of ruis de stabiliteit van de evenwichten beïnvloedt. We gaan nu het systeem met verschillende hoeveelheden ruis modelleren.

We zullen twee soorten systemen plotten, namelijk één waarin we de parameter  $Q$  laten toenemen, en één waarin we de parameter  $Q$  laten afnemen.

De Matlab codes voor het modelleren van het systeem met ruis zijn terug te vinden in de appendix.

In de appendix staan twee verschillende codes, één voor het model waarin we de parameter  $Q$  laten toenemen, en één model waarin we de parameter  $Q$  laten afnemen. Er worden veel verschillende plotten gemaakt in dit hoofdstuk, en hiervoor worden verschillende waarden van de ruis  $\rho$  gebruikt. Voor alle

plotten is de code hetzelfde, op de waarden  $\rho$  en het interval van de assen na. Nu we bij het modelleren van de plotten alleen dit veranderd hebben in de code, hebben we achterin in de appendix van elk systeem één code staan.

Als eerste zullen we de situatie voor het laten toenemen van de parameter  $Q$  onderzoeken, en vervolgens zullen we de situatie van het laten afnemen van de parameter  $Q$  onderzoeken. Daarna kunnen we een algemene conclusie maken over de invloed van ruis op het EBM.

## 4.2 Modelleren EBM onderinvloed van ruis voor het laten toenemen van de parameter $Q$

We modelleren allereerst het EBM onder invloed van nauwelijks ruis, dit doen we met de waarden  $\rho = 0, 3$ . In figuur 20 is in een plot het EBM onder invloed van nauwelijks ruis te zien. In de plots worden steeds twee grafieken weergegeven. Één grafiek voor het EBM onder invloed van ruis, in het rood weergegeven, en één grafiek voor het oorspronkelijke EBM zonder ruis, in het blauw weergegeven.

Wat opvalt in figuur 20 is dat we ondanks deze kleine invloed van ruis kunnen zien dat het EBM onder invloed van ruis pas later springt dan het EBM zonder ruis. Ondanks deze kleine waarden voor de ruis is er al wel een klein verschil af te lezen in de plot.

Merk op dat we met springen het steile stijgende gedeelte van de grafiek bedoelen, immers dit stelt die kritische overgang voor. Als we figuur 8 bekijken zien we de kritische translaties van het EBM. In dit systeem laten we de parameter  $Q$  toenemen, en beginnen we bij een lage temperatuur, links onderaan in de grafiek, en deze beweegt met de grafiek mee naar de kritische translatie. Daarna springt hij omhoog (neemt de kritische overgang omhoog), en daarna beweegt de grafiek weer mee naar rechts omhoog. Dit is ook in de plots te zien.

Nu willen we de situatie bekijken voor het verder laten toenemen van de ruis in het EBM. Als we de waarde  $\rho = 1.0$  nemen, dan is deze ruis alsnog niet erg groot. In figuur 21 is in de plot al meer invloed van de ruis te zien. We zagen net al bij een ruis van  $\rho = 0.3$  dat er een klein verschil te zien is in het eerder springen, maar nu is dat nog duidelijker te zien. Het EBM onder invloed van ruis springt nu nog wat later dan het EBM zonder ruis.

In figuur 22 is in de plot te zien dat het EBM met invloed van meer ruis nog later springt dan het systeem zonder ruis. Wat ook opvalt is dat het figuur

steeds meer ruisachtig gedrag gaat vertonen, door meer te gaan kronkelen.

Eerder zagen we voor de waarden  $\rho = 0.3$ ,  $\rho = 1.0$  en  $\rho = 2.9$  dat het systeem onder invloed van ruis steeds later begon met de sprong. Maar rond de waarden van  $\rho = 3.8$  gebeurt juist het tegenovergestelde. Hier gaat het systeem onder invloed van ruis opeens eerder springen dan het EBM systeem zonder ruis. Duidelijke sprongen om dit waar te nemen, krijgen we bij de waarden  $\rho = 3.7$ ,  $\rho = 3.8$  en  $\rho = 3.9$ . In figuur 23 is te zien dat het systeem onder invloed van ruis weer erg dicht bij het systeem zonder ruis is teruggekomen. In figuur 24 is te zien dat beide grafieken ongeveer op hetzelfde moment omhoog springen. In figuur 25 is te zien dat de rollen nu zijn omgedraaid en het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het systeem zonder ruis. In figuur 26 is te zien dat naarmate de ruis groter wordt, het systeem onder invloed van ruis steeds eerder begint met springen dan het systeem zonder ruis.

Hieruit kunnen we concluderen dat het systeem met een kleine ruis niet eerder springt dan het oorspronkelijke EBM zonder invloed van ruis. Maar als we de ruis verder laten toenemen, dan springt het EBM onder invloed van de ruis eerder dan het oorspronkelijke model.

De ruis  $\rho$  kan ook een negatieve waarde aannemen, en we zijn ook nieuwsgierig naar hoe die negatieve ruis zich gedraagt. In figuur 27 is een kleine invloed van negatieve ruis te zien op het systeem. We zien hier dat het systeem onder invloed van negatieve ruis iets eerder springt dan het systeem zonder ruis. In de figuren 28 en 29 is te zien dat naarmate de ruis kleiner wordt, het systeem onder invloed van ruis steeds eerder begint met springen dan het systeem zonder ruis.

Dus die negatieve ruis sluit niet helemaal aan bij de conclusie dat hoe kleiner de ruis hoe eerder het systeem onder invloed van ruis springt ten opzichte van het systeem zonder ruis.

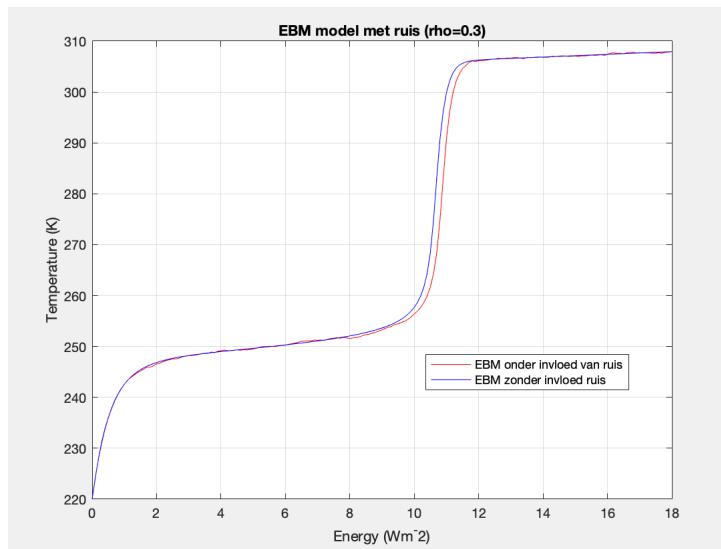
We zien dat het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het oorspronkelijke systeem zonder ruis, als:

- Voor negatieve ruis: de waarde steeds kleiner wordt.
- Voor positieve ruis: de waarde steeds groter wordt ( $\rho > 3,8$ ).

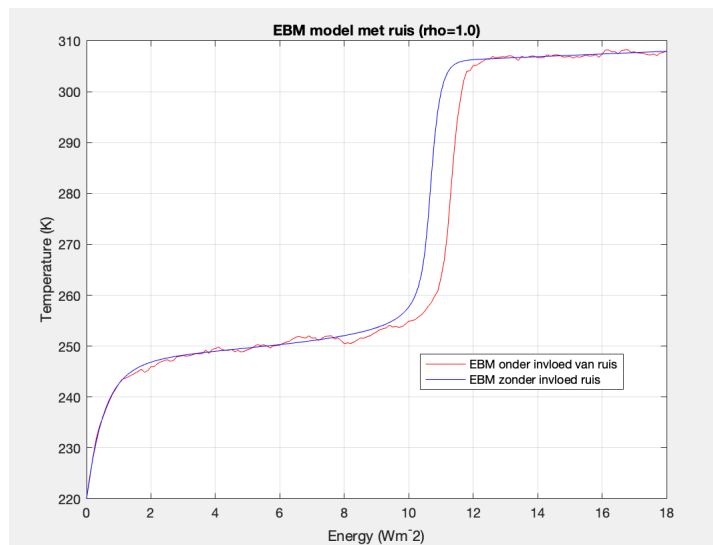
Het systeem voor positieve ruis was nog wat interessanter om te bestuderen, want bij de positieve ruis treedt er nóg een verandering op, namelijk, dat het systeem met ruis in eerste instantie later springt dan het oorspronkelijke

systeem, en vervolgens juist eerder springt dan het oorspronkelijke systeem, naarmate de ruis toeneemt. Bij de negatieve ruis is het zo dat naarmate de ruis afneemt hij juist eerder begint met springen, en hier zit dus geen verschil tussen eerder en later springen dan het oorspronkelijke systeem.

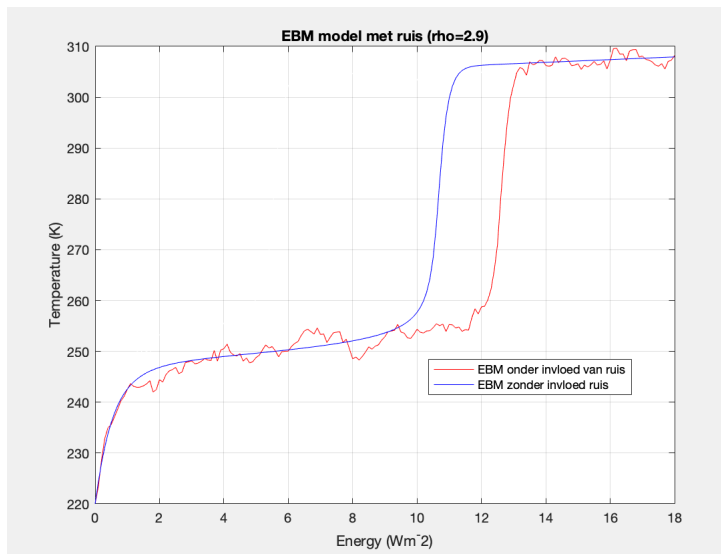
We zullen nu in de volgende deelparagraaf kijken naar het laten afnemen van de parameter  $Q$ .



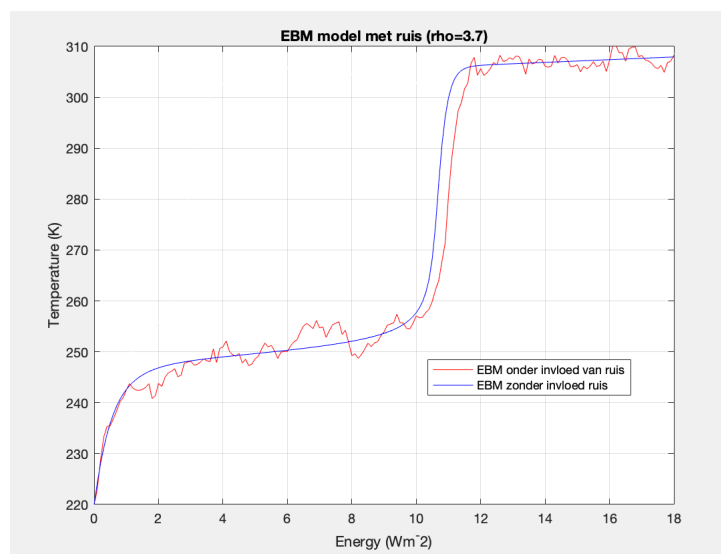
Figuur 20: In dit figuur is het EBM onder invloed van een erg kleine ruis te zien, namelijk met een waarde  $\rho = 0,3$ .



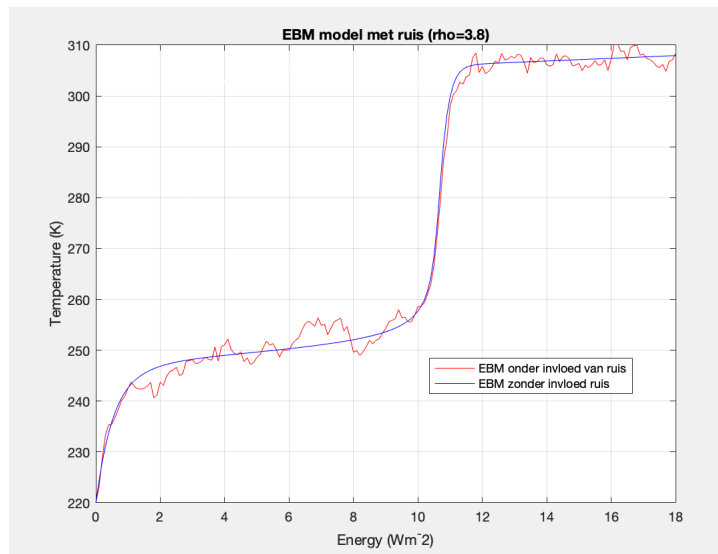
Figuur 21: In dit figuur is het EBM onder invloed van een kleine ruis te zien, namelijk voor een waarde  $\rho = 1,0$ .



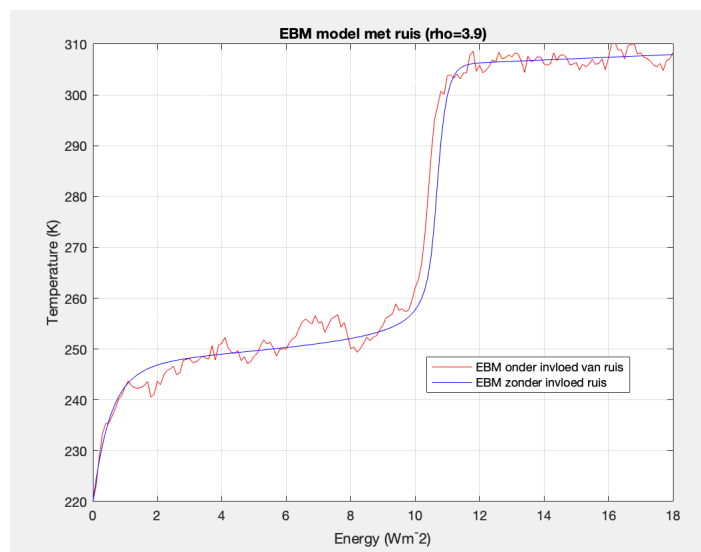
Figuur 22: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis met de waarde  $\rho = 2,9$  te zien.



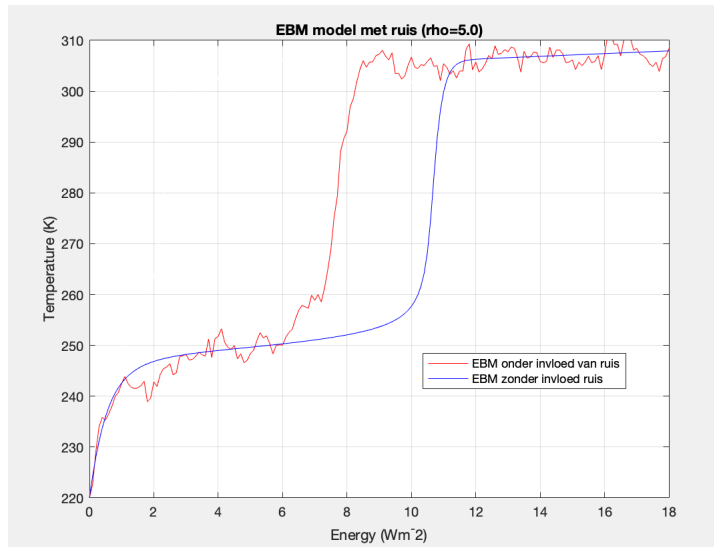
Figuur 23: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis met waarde  $\rho = 3,7$  te zien.



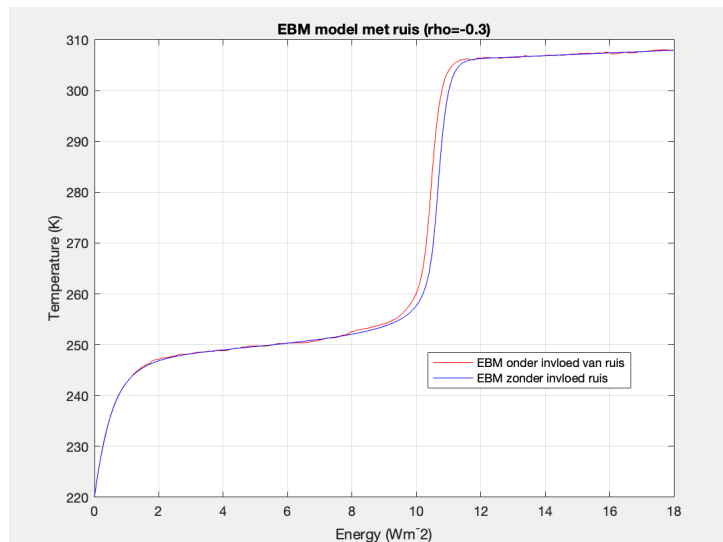
Figuur 24: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis met waarde  $\rho = 3,8$  te zien.



Figuur 25: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 3,9$  te zien.

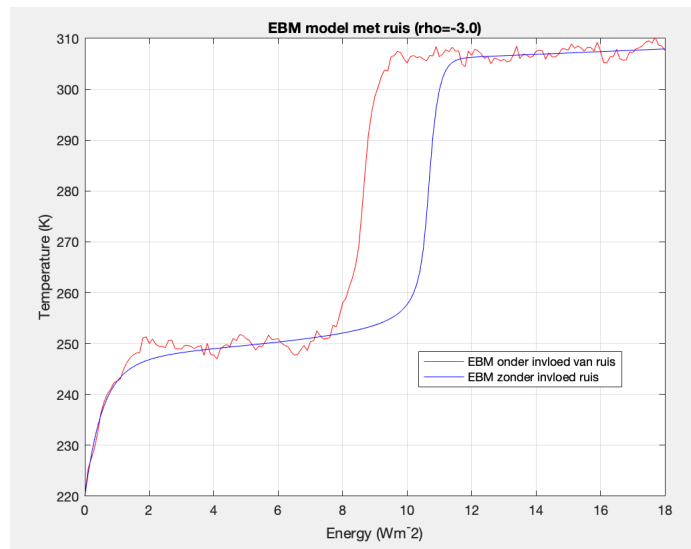


Figuur 26: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 5,0$  te zien.

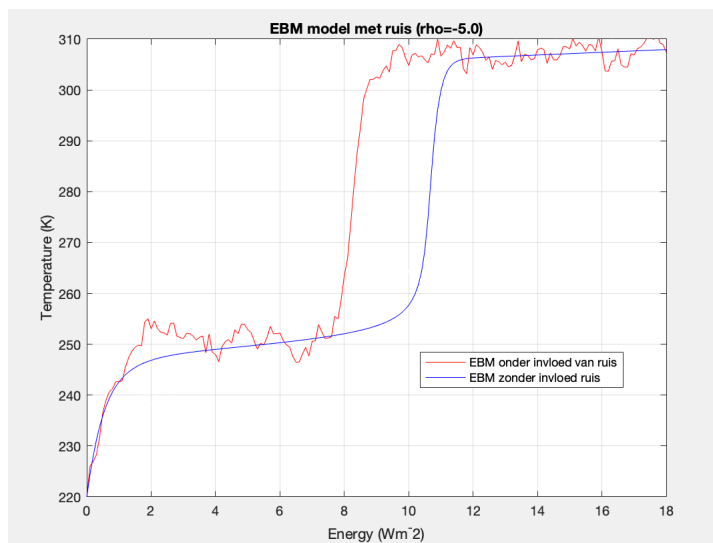


Figuur 27: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -0.3$  te zien.





Figuur 28: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -3,0$  te zien.



Figuur 29: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -5,0$  te zien.

### 4.3 Modelleren EBM onder invloed ruis voor het laten afnemen van de parameter $Q$

We modelleren als eerst het EBM onder invloed van nauwelijks ruis. Dit doen we voor de waarde  $\rho = 0,5$ . In figuur 30 is een plot van het EBM onder invloed van nauwelijks ruis te zien. Wat net als in het vorige systeem opvalt is dat ook hier al een kleine verspringing in zit, ondanks de maar kleine invloed van de ruis. We zien namelijk dat het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het systeem zonder ruis.

Net als in het vorige systeem is in elk van de plotten twee grafieken weergegeven. Één grafiek voor het EBM onder invloed van ruis, in het rood weergegeven, en één grafiek voor het oorspronkelijke EBM zonder invloed van ruis, in het blauw weergegeven. We bedoelen met "springen" het steile dalende gedeelte van de grafiek, want dit stelt die kritische overgang voor. Als we terugblikken in figuur 8 zien we hier de kritische overgangen van het EBM weergegeven. In dit systeem laten we de parameter  $Q$  afnemen, en beginnen we bij een hoge temperatuur, rechts bovenaan in de grafiek, en deze beweegt met de grafiek mee naar de kritische translatie, en daarna springt hij omlaag (neemt de kritische overgang omlaag) en daarna beweegt de grafiek weer mee naar links beneden. Deze vorm is ook in de plots van deze paragraaf terug te zien.

In figuur 31 laten we de ruis iets toenemen, we nemen namelijk de waarde  $\rho = 1,0$ . We zien dat de sprong van het EBM onder invloed van ruis iets eerder springt dan voor de waarde  $\rho = 0,3$ .

In de figuren 32 en 33 is te zien dat hoe groter de ruis wordt, hoe eerder het EBM systeem onder invloed van ruis springt.

We hadden ook gezien dat de ruis  $\rho$  een negatieve waarde kan aannemen, en we zijn ook nieuwsgierig naar hoe deze negatieve ruis zich gedraagt. In figuur 34 is een kleine negatieve ruis te zien. We zien hier dat het systeem onder invloed van ruis later springt dan het systeem zonder ruis. Dit is ook wel wat we verwachten, maar als we de ruis nu kleiner maken, vindt er iets opmerkelijks plaats rond de waarde  $\rho = -2,2$ . Dit zullen we nu toelichten en nader onderzoeken.

In figuur 35 zien we een negatieve ruis met de waarde  $\rho = -1,5$ . Hier zien we dat het systeem met de ruis ook nog later springt dan het systeem zonder de ruis.

Als we nu de ruis wat laten afnemen, dan krijgen we in figuur 36 voor een waarde van de ruis  $\rho = -2,2$  te zien dat beide systemen voor deze waarde

ongeveer tegelijk springen. We zien dus dat bij het afnemen van de ruis het systeem met ruis steeds eerder begint met springen, en zo dichterbij de grafiek zonder ruis komt.

Als we de ruis nog meer laten afnemen met een waarde  $\rho = 2, 8$ , dan krijgen we figuur 37. In dit figuur zien we dat het systeem met ruis eerder springt dan het systeem zonder ruis. Als we de ruis nu ook laten afnemen, zien we dat het systeem met de ruis steeds eerder begint met springen. In figuur 38, voor een waarde  $\rho = -4, 0$ , zien we dit terug. Hierin zien we dat het systeem met ruis veel eerder springt dan het systeem zonder ruis.

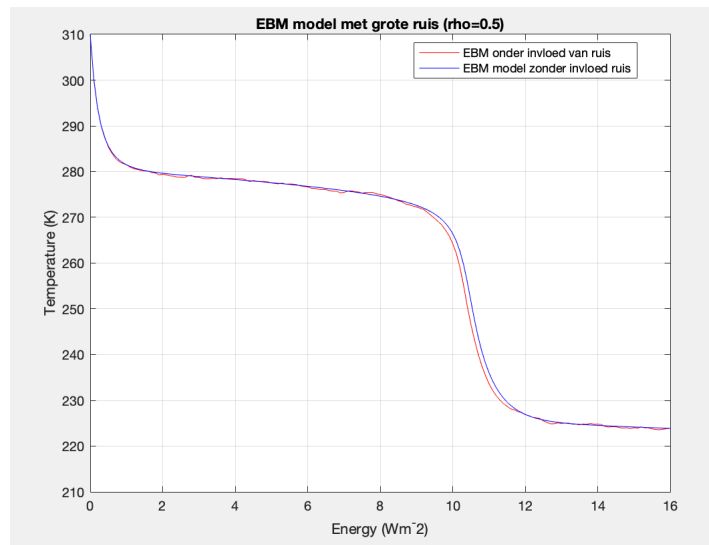
We kunnen concluderen dat als we kijken naar negatieve ruis, en deze steeds meer laten afnemen het systeem met de ruis steeds eerder begint met springen.

We zien dat het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het oorspronkelijke systeem zonder ruis, als:

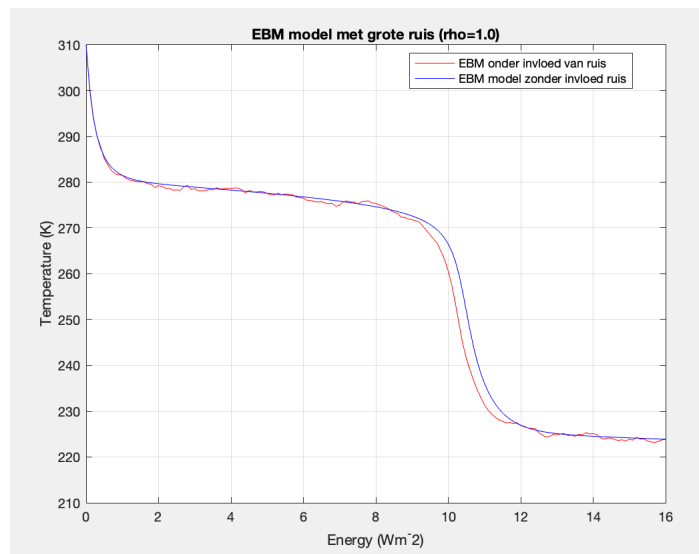
- Voor de positieve waarden: de waarde steeds groter wordt.
- Voor negatieve waarden: de waarde steeds kleiner wordt ( $\rho < -2, 2$ ).

Het systeem voor de negatieve ruis was nog wat interessanter om te bestuderen, want bij de negatieve ruis treedt er nóg een verandering op. Namelijk, dat het systeem met ruis in eerste instantie later springt dan het oorspronkelijke systeem, en vervolgens juist eerder springt dan het oorspronkelijke systeem, naarmate de ruis afneemt. Bij de positieve ruis is het zo dat naarmate de ruis toeneemt hij juist eerder begint met springen, en hier zit dus geen verschil tussen eerder en later springen dan het oorspronkelijke systeem.

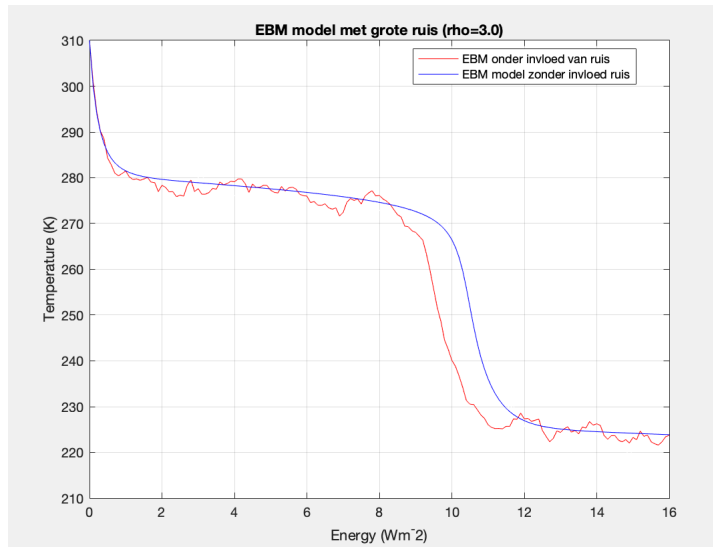
We zullen in de volgende paragraaf de systemen met elkaar vergelijken, en antwoord geven op de vragen die al in de introductie werden gesteld.



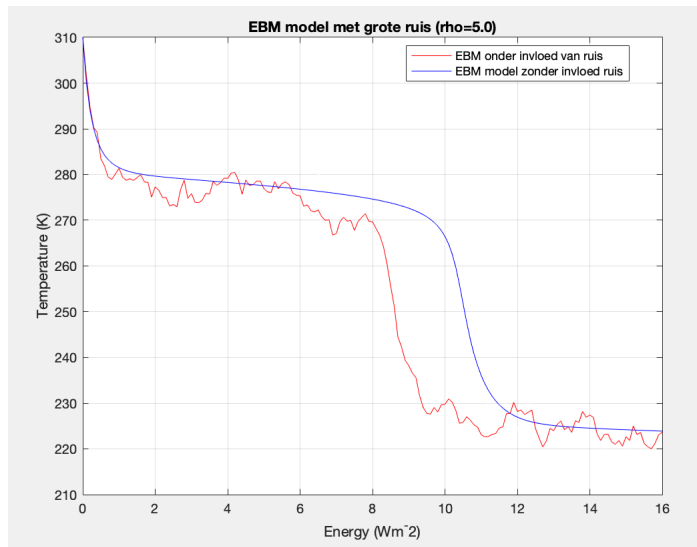
Figuur 30: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 0,5$  te zien.



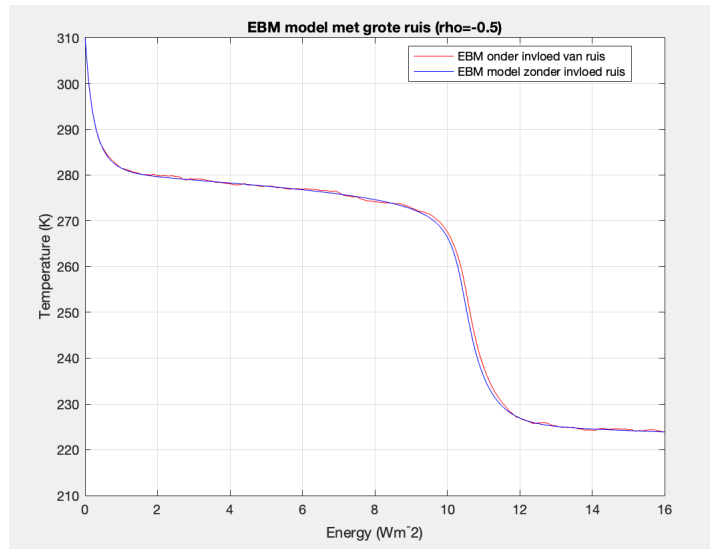
Figuur 31: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 1,0$  te zien.



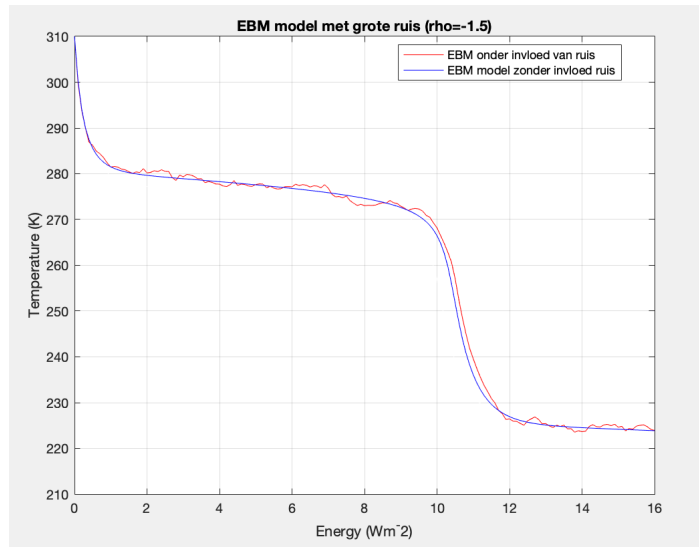
Figuur 32: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 3,0$  te zien.



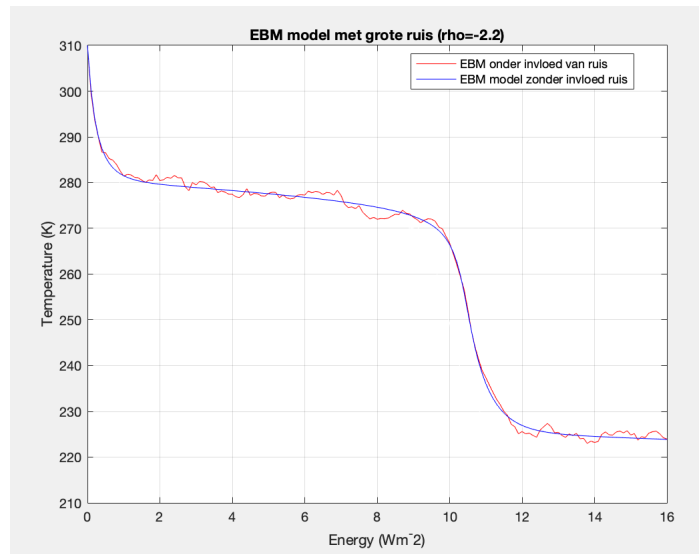
Figuur 33: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = 5,0$  te zien.



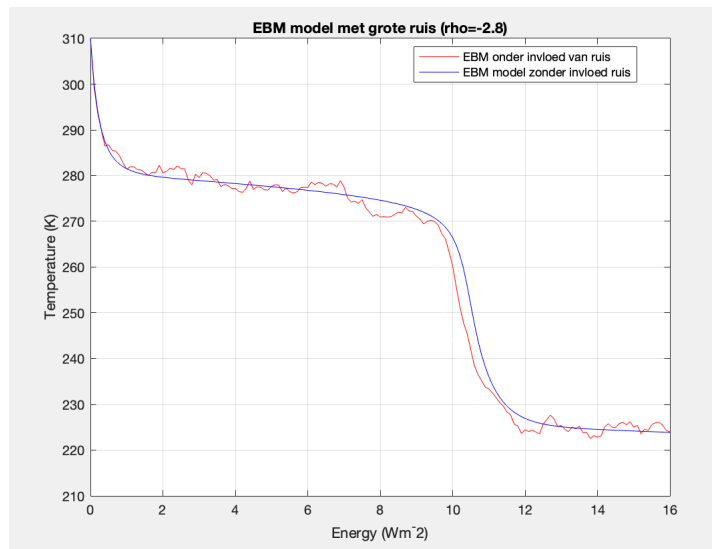
Figuur 34: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -0,5$  te zien.



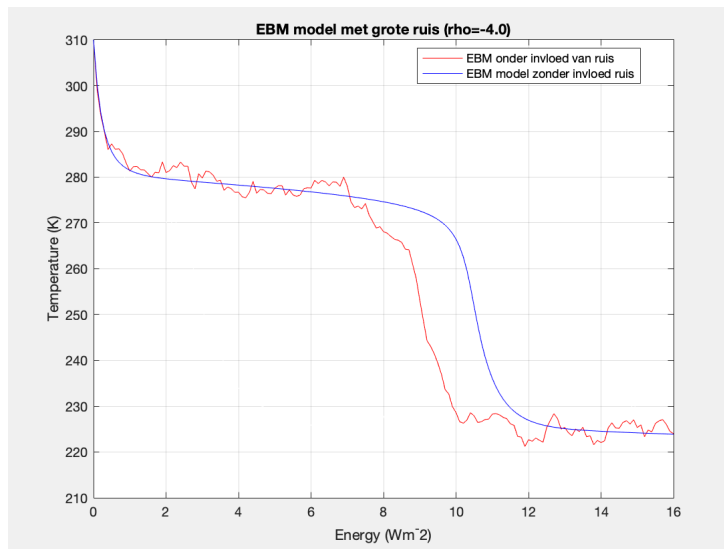
Figuur 35: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -1,5$  te zien.



Figuur 36: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -2,2$  te zien.



Figuur 37: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -2,8$  te zien.



Figuur 38: In dit figuur is het EBM onder invloed van ruis waarde  $\rho = -4,0$  te zien.



#### 4.4 Conclusie m.b.t. de invloed van ruis op het systeem

We hebben de twee systemen onderzocht, namelijk het systeem met een toenemende parameter  $Q$ , en het systeem met een afnemende parameter  $Q$ . We zien in beide systemen dat als we de ruis laten afnemen of toenemen er een verschil in het moment van springen zit.

Voor het eerste systeem, waarin we parameter  $Q$  hebben laten toenemen, zagen we dat het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het oorspronkelijke systeem als:

- 1) De waarden negatief zijn. Als we deze waarden steeds verder laten afnemen, springt het systeem onder invloed van ruis steeds eerder.
- 2) De waarden rond de 3,8 gepasseerd zijn. Als we de ruis verder laten toenemen, springt het systeem onder invloed van ruis steeds eerder.

We hebben voor het tweede systeem, waarin we de parameter  $Q$  lieten afnemen, gezien dat het systeem onder invloed van ruis eerder springt dan het oorspronkelijke systeem als:

- 1) De waarden positief zijn. Als we deze waarden steeds verder laten afnemen, springt het systeem onder invloed van ruis steeds eerder.
- 2) De waarden rond de -2,2 zijn gepasseerd. Als we de ruis verder laten afnemen, springt het systeem onder invloed van ruis steeds eerder.

De conclusie die we hieruit kunnen trekken is dat als we de ruis groot genoeg kiezen voor positieve ruis en de ruis klein genoeg kiezen voor de negatieve ruis, en deze waarden steeds groter maken, het systeem juist eerder begint met springen ten opzichte van het systeem zonder ruis. Dus hoe meer invloed de ruis krijgt op het systeem hoe eerder de kritische overgang zal plaats vinden.

We zien dus dat de hoeveelheid ruis invloed heeft op de kritische overgangen. Bij het systeem met de toenemende parameter  $Q$ , zien we bij een kleine ruis dat het systeem later springt, en bij een grote ruis eerder.

Bij een negatieve ruis zien we dat als we de waarde steeds meer laten afnemen, dat het systeem steeds eerder gaat springen. Bij het systeem met de afnemende parameter  $Q$ , zien we dat bij een grote ruis het systeem eerder springt. Bij een negatieve ruis zien we dat een groot negatief getal voor de ruis ervoor zorgt dat het systeem eerder springt en bij een kleine waarde voor een negatief getal later.

Verder willen we ook nog antwoord geven of toegevoegde ruis de stabiliteit van de evenwichtswaarden beïnvloedt. We zien dat de ruis invloed heeft op

het eerder of juist later springen van het systeem, oftewel op het eerder of juist later plaatsvinden van een kritische overgang dan in het systeem zonder ruis. Als het systeem eerder springt, dan zullen het stabiele evenwicht en instabiele evenwicht eerder samenvoegen, en verdwijnen. Dit heeft invloed op de stabiliteit van de evenwichten. We zien dat het eerder springen door invloed van ruis een niet stabiliserend effect heeft, omdat je korter in een stabiele toestand blijft. Bij het later springen zien we dat het stabiele evenwicht en het instabiele evenwicht juist later samenvoegen en verdwijnen. Later springen door invloed van ruis heeft in tegenstelling tot eerder springen dus wel een stabiliserend effect, omdat je juist langer in een stabiele toestand blijft.

Nu blijven we met de vraag zitten hoe die kritische overgang beïnvloed wordt door de eigenschappen van de ruis. Hiervoor kijken we naar de SDE van het EBM, en deze is te zien in systeem (36).

We hebben dat de vergelijking  $\frac{dT}{dt}$  groter of juist kleiner wordt door de toegevoegde ruis  $\rho$  aan dit systeem. In het oorspronkelijke systeem is er geen ruis, dus geldt  $\rho = 0$ . Verder is van het systeem een stochastische differentiaal vergelijking gemaakt, dit houdt in dat het een random proces is, en je ziet ook bij grotere ruis dat het systeem meer heen en weer gaat schommelen. Maar doordat de ruis ook de evenwichten beïnvloedt zou het systeem ook gevoeliger zijn om juist eerder of later te springen dan het oorspronkelijke systeem.

We hebben gezien, door ruis toe te voegen aan het systeem, dat ruis de evenwichten beïnvloedt, en dus ook de kritische overgangen. Het blijft daarentegen lastig om te bepalen wanneer zo'n kritische overgang daadwerkelijk plaatsvindt, omdat een kleine verandering in ruis al voor het eerder of juist later springen zorgt. Oftewel deze systemen blijven erg gevoelig. We zullen in de discussie verder bespreken wat voor onnauwkeurigheden we hebben bij het simuleren van het EBM systeem onder invloed van ruis.

## 5 Conclusie en Samenvatting

In dit project hebben we dus gekeken naar het Energy Balance Model (EBM). Dit model geeft de gemiddelde temperatuur van het aardoppervlak aan, en wordt gegeven in vergelijking (6).

We hebben gezien dat als we in dit systeem de zonneconstante veranderen, ofwel de parameter  $Q$  in de vergelijking, er een bifurcatie plaatsvindt.

We zagen dat als we het systeem in normaalvorm zetten, door middel van het toepassen van een Taylorreeks voor het onderste evenwicht, dat er een zadelpuntbifurcatie voorkomt. Maar we zagen dat dit laatste ook het geval was, wanneer we een Taylorreeks toepasten op het bovenste evenwicht.

We hebben in het bifurcatiediagram van dit model gezien (figuur 8), dat er kritische overgangen plaatsvinden. Namelijk van een warme aarde zoals tegenwoordig hebben naar een ijsaarde, en andersom. Deze kritische overgangen zijn onomkeerbaar, en zeer ongewenst/onprettig. Deze kritische overgangen zijn wiskundig te begrijpen, als we het EBM omzetten in een slow-fast systeem. We krijgen dan snelle en langzame deelsystemen, zoals deze te zien zijn in de vergelijkingen 22 en 23.

We kunnen dan hier het critical manifold  $C_0$  bepalen, zie vergelijking 34, en vervolgens gaan we de dynamica bepalen. We zien dat de dynamica op het critical manifold zelf langzaam is maar de dynamica daarbuiten snel.

Maar dit is niet de werkelijke dynamica van het EBM systeem, want dat is van het slow manifold  $C_\epsilon$ . Met behulp van de stelling van Fenichel vinden we dat de dynamica op het slow manifold hetzelfde is als die op het critical manifold, mits het critical manifold normaal hyperbolisch is en  $\epsilon$  voldoende klein.

We hebben echter twee punten op het systeem die niet normaal-hyperbolisch zijn. Dus alles op het slow manifold heeft dezelfde dynamica als op het critical manifold, op de twee normaal-hyperbolische punten na. Deze twee normaal-hyperbolische punten zijn zadelpuntbifurcaties, vanwege de zadelpuntbifurcatie normaalvorm. We hebben in het algemeen de dynamica van een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm beschreven in de figuren 16 en 17, en de dynamica hiervan is hetzelfde voor de zadelpuntbifurcaties op het EBM. We hebben nu de dynamica op het EBM bepaald, en deze zijn te vinden in figuur 18 en 19, net als de dynamica rond de zadelpuntbifurcaties zoals in figuur 17.

De kritische overgangen in het EBM worden veroorzaakt door de twee zadel-

puntbifurcaties. Deze zorgen ervoor dat het stabiele en instabiele evenwicht samensmelten, en vervolgens verdwijnen. We hadden drie evenwichten, en houden nu alleen één van de stabiele evenwichten over. Op het slow manifold is de stroming langzaam, maar als er een zadelpuntbifurcatie optreedt, beweegt de stroming van het slow manifold af. Eenmaal van het slow manifold af verandert de langzame stroming in een snelle stroming. De stroming gaat zo snel mogelijk naar het enig overgebleven evenwicht, en dit is met een snelle stroming, tot de stroming het evenwicht bereikt, en zich dan bevindt op het slow manifold. Vandaar dat er een kritische translatie optreedt, en de sprong wordt veroorzaakt door met een snelle stroming zo snel mogelijk naar het enig overgebleven evenwicht te bewegen.

Ten slotte hebben we door middel van ruis toevoegen aan het systeem, gezien dat ruis wel dergelijk invloed heeft op de evenwichtstoestanden van het systeem en op het eerder of later springen van het systeem.

We zagen dat het toenemen van de ruis de evenwichten beïnvloedde, omdat het stabiele evenwicht en onstabiele evenwicht juist eerder of juist later samensmolten. Als de evenwichten eerder samensmelten, betekent het dat we eerder springen. Er is in dat geval sprake van een kortere stabiele toestand, en dus een niet stabiliserend effect. Als de evenwichten later samensmelten, dan springen we later. We zijn dan langer in een stabiele toestand, en er is in dat geval wel sprake van een stabiliserend effect.

Verder zagen we dat het systeem eerder springt als de ruis in het systeem groot is, en bij een kleinere ruis juist later springt. Preciezer gezegd: voor het systeem waarin we de parameter  $Q$  laten toenemen, springt het systeem eerder bij een negatieve ruis en een ruis groter dan  $\rho \approx 3.8$ . Deze waarden groter maken (dus negatieve waarden steeds kleiner en positieve waarden groter) geeft dat het systeem steeds eerder gaat springen. Voor het systeem waarin we de parameter  $Q$  lieten afnemen, zagen we dat bij positieve waarden en een waarden kleiner dan  $\rho \approx -2,2$  dat het systeem eerder springt. Deze waarden groter maken (de negatieve waarden steeds kleiner en positieve waarden groter) geeft dat het systeem steeds eerder gaat springen.

We hebben gezien dat bij het toenemen van de ruis het systeem eerder zal springen, maar juist bij het laag houden van de ruis het systeem juist later springt. We hebben gezien dat het systeem erg gevoelig is en dat het daarom lastig is om precies vast te stellen wanneer er een kritische overgang plaatsvindt.

## 6 Discussie

In dit project zijn er nog een aantal punten die we graag ter discussie zouden willen stellen.

Als eerste hebben we de verstoorde omgeving van het EBM bepaald rond het onderste evenwichtpunt  $T_3^*$ . We komen hier uit op een ander verstoord gebied dan het verstoord gebied van de zadelpuntbifurcatie in normaalvorm (bepaald in paragraaf 3.5). Beide zijn wel zadelpuntbifurcaties in normaalvorm, maar we komen bij beide op een andere verstoorde omgeving uit. Het zou kunnen dat er een onnauwkeurigheid zit in de berekening bij het bepalen van de verstoorde omgeving in paragraaf 3.6. We hebben namelijk gekozen voor  $\alpha(T) = 0,7$  omdat  $T < 250K$  in plaats van vergelijking (3), omdat hier een tanh functie in voorkomt, en dit analytisch te complex werd om op te lossen. Dit kan misschien voor een kleine onnauwkeurigheid in de berekening hebben gezorgd.

Als tweede hebben we voor de dynamica van de zadelpuntbifurcaties van het EBM gebruik gemaakt van de zadelpuntbifurcaties in normaalvorm, zoals in het boek *Multiple Time Scale Dynamics* van Kuehn. Hierin is in figuur 17 de baan bij een zadelpuntbifurcatie bepaald. We hadden er ook voor kunnen kiezen om de baan expliciet op te lossen zoals gedaan is in het boek van Kuehn. Hier wordt de baan expliciet bepaald met behulp van stelling 5.4.2 en met behulp van de oplossing van de Ricatti-vergelijking. We hadden er in dit project ook voor kunnen kiezen om dit expliciet te berekenen voor het EBM systeem, maar we hebben dit achterwege gelaten omdat dit in principe niet nodig is omdat in beide gevallen om een zadelpuntbifurcatie in normaalvorm gaat.

Tenslotte willen we nog de simulaties uit hoofdstuk 4 bespreken. We hebben gezien dat ruis een random proces is, hetgeen betekent dat de resultaten van iedere simulatie verschillend kunnen zijn. Deze onnauwkeurigheid hadden we kunnen oplossen door heel veel simulaties toe te passen; dit heet ook wel een ensemble. Na deze vele simulaties had hierop de statistiek kunnen worden toegepast. Dit was wellicht nauwkeuriger geweest. Dit geldt ook voor het bepalen van de stukken waarin het omslagpunt plaatsvindt met eerder of later springen, omdat dit is bepaald door middel van één plot van het moment dat ze tegelijkertijd springen. Hier kan wel een decimale onnauwkeurigheid in zijn gekomen.

## Referenties

- [1] Snowball Earth figuur voorblad:  
Chris Butler  
<https://www.nytimes.com/2019/12/02/science/snowball-earth-ice-age.html>
- [2] H.Kaper and H.Engler, *Mathematics and Climate*, SIAM (2013), ISBN:9781611972610.
- [3] F.Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer(1985), 2nd edition, ISBN:9783540609346.
- [4] Dictaat:  
<https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/profiles/read/lect3-43144.pdf>
- [5] J.D. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (2008), ISBN: 9780898718232.
- [6] Actualiteit Oceaanstromingen:  
<https://nos.nl/artikel/2370427-zwakste-golfstroom-in-1000-jaar-maar-nog-geen-day-after-tomorrow.html>
- [7] H.Engler,H.G.Kaper,T.J.Kaper and T.Vo, *Dynamical systems analysis of the Maasch-Saltzman model for glacial cycles*, Elsevier B.V.(2017).
- [8] C.Kuehn, *Multiple Time Scale Dynamics*, Springer (2015), ISBN:9783319123158
- [9] Y.A Kuznetsov, J.E. Marsden, L.Sirovich, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3th edition, New York, Springer(2004).
- [10] Voorkennis over Taylor reeksen:  
R.A. Adams, C. Essex, *Calculus: a complete course*, 8th edition, Toronto, Pearson (2013).
- [11] E.C.Lawrence, *An introduction to stochastic differential equations*, Providence, Rhode Island : American Mathematical Society(2013), ISBN: 1-4704-1612-3
- [12] Matlabcode:  
<https://nl.mathworks.com/help/finance/sde.htmlsdeexample1>
- [13] Matlabcode:  
<https://nl.mathworks.com/help/finance/sde.simulate.htmlsimulateexample1>

## 7 Appendix I

Matlab code voor het EBM onderinvloed van ruis voor het laten toenemen van de parameter  $Q$ : [12], [13]

```
clear all;
close all;

%Variabelen en constante EBM model:
Q_0=342;           %beginwaarde paramter Q (Q=rho*t+Q_0)
epsilon = 0.6;     %broeikaseffecten
sigma = 5.67*10.^(-8); %Stefan-constante
rho = 0.3;         %gekozen ruis

%SDE object maken voor EBM onderinvloed ruis rho:
F = @(t,T) (1-(0.5-0.2*tanh((T-265)/10)))*(1.5*t + Q_0*1.2)- ...
    (epsilon*sigma*T.^4); %EBM
G = @(t,T) rho;         %ruis (rho)
obj1 = sde(F,G,'StartState',220);

%SDE object maken voor EBM niet onderinvloed van ruis:
A = @(t,T) (1-(0.5-0.2*tanh((T-265)/10)))*(1.5*t + Q_0*1.2)- ...
    (epsilon*sigma*T.^4); %EBM
B = @(t,T) 0;          %geen ruis (waarde nul)
obj2 = sde(A,B,'StartState',220);

%Periode:
nPeriods = 310;
dt = 1/10;
Tp = nPeriods * dt;
P = nPeriods * dt;

%Kleine simulatie 2 paden voor EBM onderinvloed van ruis rho:
rng('default')
[X,Tp] = simulate(obj1,220,'DeltaTime', dt, 'nTrials', 2);

%Kleine simulatie 2 paden voor EBM niet onderinvloed van ruis:
rng('default')
[Y,P] = simulate(obj2,220,'DeltaTime', dt, 'nTrials', 2);

%Plot:
```

```
plot(Tp, X(:,:,1), 'white', Tp, X(:,:,2), 'red')
grid on
hold on
plot(P, Y(:,:,1), 'white', P, Y(:,:,2), color='blue')
xlabel('Energy (Wm^-2)'), ylabel('Temperature (K)'), ...
title('EBM model met ruis (rho=0.3)')
legend({' 'EBM onder invloed van ruis', ' ', ...
       'EBM zonder invloed ruis'}, 'Location', 'Best')
axis([0,18,220,310])
```



**Matlab code voor het EBM onderinvloed van ruis voor het laten afnemen van de parameter  $Q$ : [12], [13]**

```
clear all;
close all;

%Variabelen en constante EBM model:
Q_0=342;           %beginwaarde paramter Q (Q=rho*t+Q_0)
epsilon = 0.6;     %broeikaseffecten
sigma = 5.67*10.^(-8); %Stefan-constante
rho = 0.5;        %gekozen ruis

%SDE object maken voor EBM onderinvloed ruis rho:
F = @(t,T) (1-(0.5-0.2*tanh((T-265)/10)))*(-1.5*t + Q_0*0.9)-...
    (epsilon*sigma*T.^4); %EBM
G = @(t,T) rho;       %ruis (rho)
obj1 = sde(F,G,'StartState',310);

%SDE object maken voor EBM niet onderinvloed van ruis:
A = @(t,T) (1-(0.5-0.2*tanh((T-265)/10)))*(-1.5*t + Q_0*0.9)- ...
    (epsilon*sigma*T.^4); %EBM
B = @(t,T) 0;        %geen ruis (waarde nul)
obj2 = sde(A,B,'StartState',310);

%Periode:
nPeriods = 310;
dt = 1/10;
Tp = nPeriods *dt;
P = nPeriods *dt;

%Kleine simulatie 2 paden voor EBM onderinvloed van ruis rho:
rng('default')
[X,Tp] = simulate(obj1,310,'DeltaTime', dt, 'nTrials', 2);

%Kleine simulatie 2 paden voor EBM niet onderinvloed van ruis:
rng('default')
[Y,P] = simulate(obj2,310,'DeltaTime', dt, 'nTrials', 2);

%Plot:
plot(Tp, X(:,:,1), 'white', Tp, X(:,:,2), 'red')
grid on
```

```
hold on
plot(P, Y(:,:,1),'white', P, Y(:,:,2), color='blue')
xlabel('Energy (Wm^-2)'), ylabel('Temperature (K)'), ...
title('EBM model met grote ruis (rho=0.5)')
legend({' 'EBM onder invloed van ruis', ' ', ...
       'EBM model zonder invloed ruis'}, 'Location', 'Best')
axis([0,16,210,310]);
```