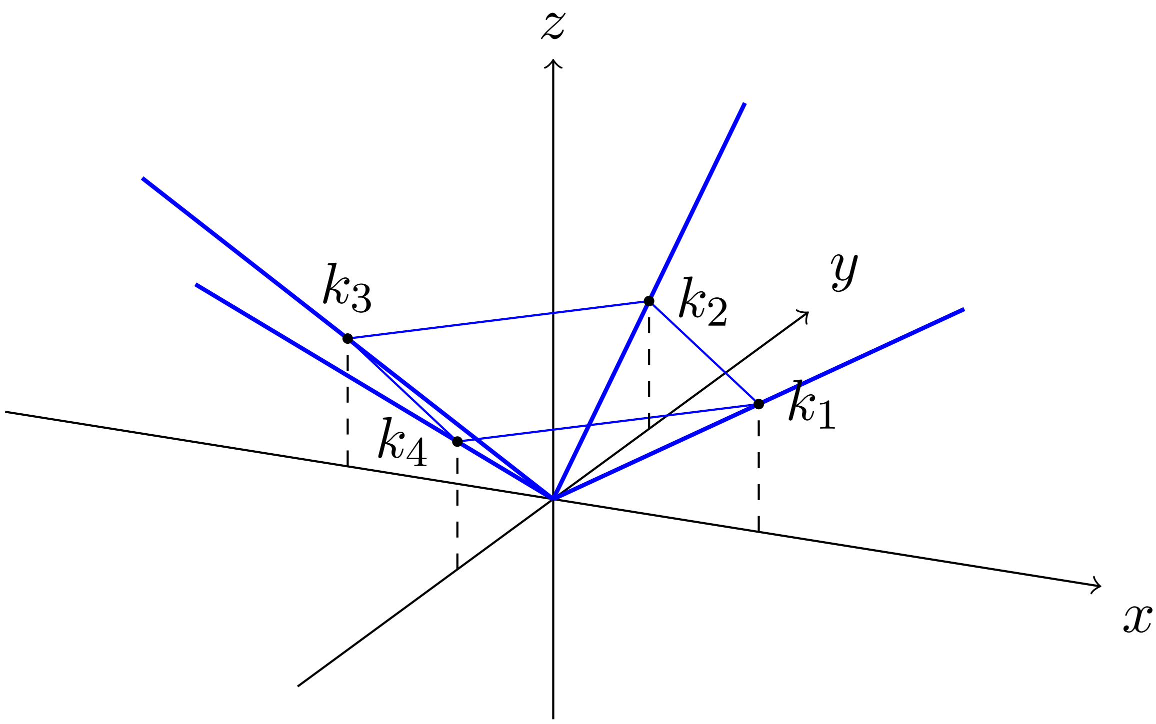
Disjuncte Projecties en de Vierstralenkegel

Roshandel, Y.

Disjuncte Projecties en de Vierstralenkegel

Bachelorscriptie

Yasmin Roshandel (s1649876)



Universiteit Leiden
Onder begeleiding van Dr.Ir. O.W. Van Gaans

8 februari 2019

Inhoudsopgave

§1 Introductie

Disjunctheid is een vast onderdeel van de theorie van Rieszruimtes, zie hiervoor bijvoorbeeld [1]. In [2] wordt disjunctheid in algemene partiëel geordende vectorruimtes gedefinieerd. In een ruimte met een polyhedrale kegel is precies bekend welke elementen disjunct zijn, zie hiervoor [3, Paragraaf 2.5].

Ruimtes van operatoren op partiëel georderde vectorruimtes zijn ook partiëel geordende vectorruimtes. In het geval van de Rieszruimte $\mathbb{R}^n$ (met de standaard ordening) is al bekend wat disjunctheid van operatoren inhoudt: twee operatoren zijn disjunct dan en slechts dan als de matrixrepresentaties ten opzichte van de standaardbasis elementsgewijs disjunct zijn.

Over de disjunctheid van operatoren van partiëel geordende vectorruimtes die geen Rieszruimte zijn is nog weinig bekend. Om deze reden beschouwen we een van de eenvoudigstse partiëel geordende vectorruimtes die niet Riesz is: $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel.

De vierstralenkegel is de polyhedrale kegel opgespannen door de vier punten k_1, k_2, k_3 en k_4 zoals gedefinieerd in (3). Hierin zoeken we naar disjuncte operatoren die $\mathbb{R}^3$ orthogonaal projecteren op een vlak of lijn, om de keuzeruimte van operatoren te beperken. We onderzoeken of er een verband is tussen de disjunctheid van twee projecties en de disjunctheid van de beelden van deze projecties. We tonen disjunctheid aan of sluiten disjunctheid uit door middel van Lemma 3.2. Dit lemma karakteriseert disjunctheid van twee operatoren met behulp van de beelden van de extreme stralen van de kegel.

§2 Voorkennis

We geven enkele definities en eigenschappen van begrippen die in het vervolg worden gebruikt. Zie ook [3, Hoofdstuk 1 en 2].

2.1 Definities en stellingen

Definitie 2.1. Een *partiëel geordende vectorruimte* X is een vectorruimte met partiële ordening $\leq$ zodanig dat voor alle $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt:

1. $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
2. $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$.

Definitie 2.2. Een partiëel geordende vectorruimte X heet een *Rieszruimte* als voor alle $x, y \in X$ het supremum van $\{x, y\}$ in X bestaat.

Merk hierbij op dat uit het bestaan van het supremum van $\{x, y\}$ in X ook het bestaan van het infimum van $\{x, y\}$ in X volgt.

Notatie 2.3. We noteren het supremum van $\{x, y\}$ met $x \vee y$, het infimum van $\{x, y\}$ met $x \wedge y$, en $|x| = x \vee (-x)$.

Definitie 2.4. Een partiëel geordende vectorruimte X heet een *pre-Rieszruimte* als voor alle $x, y, z \in X$ de inclusie $\{x + z, y + z\}^u \subseteq \{x, y\}$ impliceert dat geldt $z \geq 0$.

Merk ook op dat elke Rieszruimte ook een pre-Rieszruimte is.

Definitie 2.5. Een deelverzameling K van een vectorruimte X heet een *kegel* als geldt:

1. $x, y \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y \;\; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
2. $K \cap (-K) = \{0\}$.

Stelling 2.6. *Zij X een (reële) vectorruimte.*

(i) Zij K een kegel in X en $\leq$ de binaire relatie op X gedefinieerd door

$$x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in K. \tag{1}$$

Dan is $\leq$ een vectorruimte-ordening.

(ii) Zij $\leq$ een vectorruimte-ordening op X. Dan is de verzameling

$$K_0 := \{x \in X | 0 \leq x\} \tag{2}$$

van alle positieve elementen in X een kegel in X.

(iii) Zij K een kegel in X, $\leq$ de binaire relatie in (1) en K_0 de bijbehorende kegel in (1). Dan geldt $K = K_0$.

Notatie 2.7. Voor vectorruimtes X en Y noteren we met $\mathrm{L}(X, Y)$ de ruimte van alle lineaire operatoren van X naar Y.

We zullen ons enkel bezighouden met operatoren die een partieël geordende vectorruimte weer op zichzelf afbeeldt, oftewel in een partieël geordende vectorruimte (X, K) bekijken we

$$T \in \mathrm{L}(X, X) =: \mathrm{L}(X, K).$$

Definitie 2.8. Zij (X, K) een partieël geordende vectorruimte en $T \in \mathrm{L}(X, K)$ een lineare operator. T heet *positief* als geldt $T(K) \subseteq K$.

Opmerking 2.9. Zij K een kegel in een reële vectorruimte X die X opspant. De ruimte van operatoren $\mathrm{L}(X, K)$ is ook een partieel geordende vectorruimte, waar de ordening gegeven wordt door

$$S \leq T \Leftrightarrow T - S \text{ is positief.}$$

Notatie 2.10. Voor een partiëel geordende vectorruimte (X, K) en $x, y \in (X, K)$ schrijven wij

$$\{x, y\}^u := \{z \in X | z - x \in K \text{ en } z - y \in K\}.$$

Definitie 2.11. Zij (X, K) een partiëel geordende vectorruimte en $x, y \in X$. De elementen x en y heten *disjunct* als geldt:

$$\{x + y, -x - y\}^u = \{x - y, -x + y\}^u.$$

Propositie 2.12. *Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Als $c \geq |a + b|$ en $c \geq |a - b|$ gelden, volgt dat $c \geq |a| + |b|$ geldt.*

Als volgt definieren we een Rieszcompletering en disjunctheid van elementen in een Rieszruimte, zie ook [3, Stelling 2.4.5., Definitie 2.4.6., 1.3.1]. In het vervolg worden deze definities niet direct gebruikt, maar zijn wel nuttig om een beter algeheel inzicht te krijgen over de materie.

Definitie 2.13. Zij (X_1, K_1) en (X_2, K_2) partiëel geordende vectorruimtes, en zij $T \in \mathrm{L}(X_1, X_2)$. De operator T heet *bipositief* als voor elke $x \in X_1$ geldt $x \in K_1$ dan en slechts dan als $T(x) \in K_2$.

Definitie 2.14. Zij (X, K) een partiëel geordende vectorruimte en D een lineaire deelruimte van X. D heet *orde-dicht* als voor alle $x \in X$ geldt:

$$x = \inf\{y \in D | x \leq y\}.$$

De volgende stelling is van Van Haandel [4, Gevolg 4.9-4.11, Stelling 3.5, 3.7, 4.13].

Stelling 2.15. *Zij $(X, \leq)$ een partiëel geordende vectorruimte. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(i) X is pre-Riesz.

(ii) Er bestaat een Rieszruimte Y en bipositieve lineaire afbeelding $i : X \to Y$ zodanig dat $i[X]$ orde-dicht is in Y en Y genereert als een Rieszruimte.

Definitie 2.16. Een paar (Y, i) als beschreven in (ii) heet een *Rieszcompletering* van X.

Definitie 2.17. Zij (X, K) een Rieszruimte. Twee elementen $x, y \in X$ heten *disjunct* als geldt:

$$|x| \wedge |y| = 0.$$

Als X een lineaire deelruimte is, dan komt gelijkheid van bovengrenzen

$$\{x + y, -x - y\}^u = \{x - y, -x + y\}^u,$$

die disjunctheid aangeeft in een partiëel geordende vectorruimte (Definitie 2.11), neer op de gelijkheid $|x + y| = |x - y|$, en dit is equivalent met $|x| \wedge |y| = 0$.

2.2 Vierstralenkegel

Voor $\mathbb{R}^n$ met de standaardordening zijn twee operatoren in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ disjunct dan en slechts dan als voor hun matrix representaties $(a_{ij})_{i,j}$ en $(b_{ij})_{i,j}$ ten opzichte van de standaardbasis geldt:

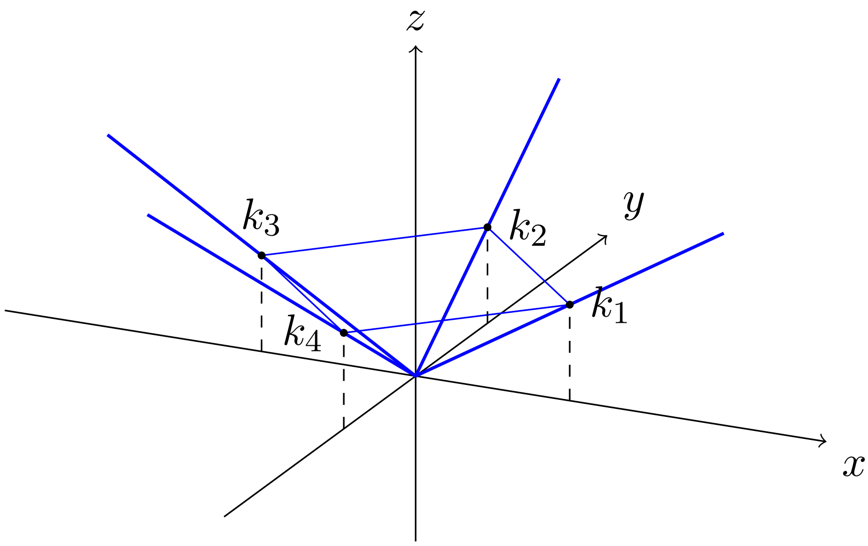
$$\forall i,j \in \{1,...,n\} : a_{ij} = 0 \text{ of } b_{ij} = 0.$$

Voor $\mathbb{R}^n$ met andere ordeningen is niets bekend over disjunctheid van operatoren. In deze scriptie doen we een poging disjunctheid van operatoren te verkennen door te kijken naar $\mathbb{R}^3$ met een ordening anders dan de standaardordening. We hebben het vraagstuk afgebakend tot één bepaalde ordening van $\mathbb{R}^3$. De pre-Rieszruimte die centraal staat in deze scriptie is $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel.

We beschouwen $(\mathbb{R}^3, K)$ met $K = \mathrm{pos}\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ en

$$k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

In het vervolg noemen we k_1, k_2, k_3, k_4 ook wel de hoekpunten van de kegel. Merk op dat elke lijn die wordt opgespannen door een van deze hoekpunten een extreme straal heet. De ruimte is weergeven in Figuur 1.



Figuur 1: $(\mathbb{R}^3, K)$ met K de vierstralenkegel (blauw)

De ruimte is geen Rieszruimte, maar wel een pre-Rieszruimte, zie hiervoor [3, Stelling 2.6.2]. Elke ruimte $\mathbb{R}^m$ met een polyhedrale kegel opgespannen met n facetten is een pre-Rieszruimte met Riesz-completering $(\mathbb{R}^n, K^\rho)$ met K^ρ een polyhedrale kegel opgespannen door n elementen. De Riescomplettering is in dit geval dus $\mathbb{R}^4$ met een polyhedrale kegel opgespannen door vier elementen.

Als tussenstap voor het zoeken naar disjuncte operatoren bekijken we eerst welke elementen disjunct zijn in $(\mathbb{R}^3, K)$. Dit gaan we na met Definitie 2.11 van disjunctheid van elementen in een partiëel geordende vectorruimte. Een indirect argument wordt gegeven in [3, Voorbeeld 4.4.18].

Propositie 2.18. *Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt dat λk_1 en μk_3 disjunct zijn.*

Bewijs. Er geldt

$$\{\lambda k_1 + \mu k_3, -\lambda k_1 - \mu k_3\}^u = \{(\lambda - \mu, 0, \lambda + \mu)^T, -(\lambda - \mu, 0, \lambda + \mu)^T\}^u \tag{4}$$

en

$$\{\lambda k_1 - \mu k_3, -\lambda k_1 + \mu k_3\}^u = \{(\lambda + \mu, 0, \lambda - \mu)^T, -(\lambda + \mu, 0, \lambda - \mu)^T\}^u \tag{5}$$

We tonen eerst de inclusie $\{\lambda k_1 + \mu k_3, -\lambda k_1 - \mu k_3\}^u \subseteq \{\lambda k_1 - \mu k_3, -\lambda k_1 + \mu k_3\}^u$ aan. Zij $(x, y, z)^T \in \{\lambda k_1 + \mu k_3, -\lambda k_1 - \mu k_3\}^u$. Dan volgt

$$(x \pm (\lambda - \mu), y, z(\lambda + \mu))^T \in K$$

uit (4). Per constructie van de vierstralenkegel wordt dan aan de volgende vergelijking voldaan:

$$|x \pm (\lambda - \mu)| + |y| \leq z \pm (\lambda + \mu).$$

Uit Propositie 2.12 volgt

$$|x| \pm (\lambda - \mu) + |y| \leq z \pm (\lambda + \mu).$$

Herschrijven met de driehoeksongelijkheid geeft

$$|x \pm (\lambda + \mu)| + |y| \leq z \pm (\lambda - \mu).$$

Dus geldt $(x \pm (\lambda + \mu), y, z \pm (\lambda - \mu))^T \in K$, en door (5) ook

$$(x, y, z)^T \in \{\lambda k_1 - \mu k_3, -\lambda k_1 + \mu k_3\}^u.$$

Vervolgens tonen we de inclusie $\{\lambda k_1 + \mu k_3, -\lambda k_1 - \mu k_3\}^u \supseteq \{\lambda k_1 - \mu k_3, -\lambda k_1 + \mu k_3\}^u$ aan. Zij $(x, y, z)^T \in \{\lambda k_1 - \mu k_3, -\lambda k_1 + \mu k_3\}^u$. Dan volgt $(x \pm (\lambda + \mu), y, z \pm (\lambda - \mu))^T \in K$ uit (5), oftewel

$$|x \pm (\lambda + \mu)| + |y| \leq z \pm (\lambda - \mu).$$

Analoog als in de vorige inclusie vinden we met Propositie 2.12 en de driehoeksongelijkheid dat geldt

$$|x \pm (\lambda - \mu)| + |y| \leq z \pm (\lambda + \mu).$$

Dus we vinden dat geldt $(x \pm (\lambda - \mu), y, z(\lambda + \mu))^T \in K$, en door (4) ook

$$(x, y, z)^T \in \{\lambda k_1 + \mu k_3, -\lambda k_1 - \mu k_3\}^u.$$

Uit bovenstaande inclusies volgt dat de te bewijzen gelijkheid geldt. □

Opmerking 2.19. Uit de symmetrie van de situatie is duidelijk dat ook voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ geldt dat λk_2 en μk_4 disjunct zijn.

Naast lineaire veelvouden van overstaande hoekpunten van de kegel zijn er meer disjuncte elementen in $(\mathbb{R}^3, K)$, zie ook Paragraaf 5. We introduceren twee lijnen die door het grondvlak gaan:

$$l_1 := \{\lambda(1,1,0)^T | \lambda \in \mathbb{R}\},$$
$$l_2 := \{\lambda(-1,1,0)^T | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Propositie 2.20. *Elk element op l_1 is disjunct met elk element op l_2.*

Bewijs. Zij $a \in l_1$ en $b \in l_2$. Dan bestaan zekere $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zodanig dat geldt $a = (\lambda, \lambda, 0)^T$ en $b = (-\mu, \mu, 0)^T$. We vinden

$$\{a+b, -a-b\}^u = \{(\lambda-\mu, \lambda+\mu, 0)^T, -(\lambda-\mu, \lambda+\mu, 0)^T\}^u, \tag{6}$$

$$\{a-b, -a+b\}^u = \{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, 0)^T, -(\lambda+\mu, \lambda-\mu, 0)^T\}^u \tag{7}$$

We zullen analoog als in het bewijs van Propositie 2.18 de gelijkheid van bovenstaande verzamelingen laten zien met inclusies.

We tonen eerst de inclusie $\{a+b, -a-b\}^u \subseteq \{a-b, -a+b\}^u$ aan.
Zij $(x, y, z)^T \in \{a+b, -a-b\}^u$. Dan volgt $(x \pm (a-b), y \pm (a+b), z)^T \in K$ uit (6), oftewel

$$|x \pm (a-b)| + |y \pm (a+b)| \leq z.$$

Uit Propositie 2.12 volgt

$$|x| \pm (a-b) + |y| \pm (a+b) \leq z.$$

Met de driehoeksongelijkheid vinden we dan

$$|x \pm (a+b)| + |y \pm (a-b)| \leq z.$$

Dus geldt $(x \pm (a+b), y \pm (a-b), z)^T \in K$, oftewel $x \in \{a-b, -a+b\}^u$.

Vervolgens tonen we de inclusie $\{a+b, -a-b\}^u \supseteq \{a-b, -a+b\}^u$ aan.
Zij $(x, y, z)^T \in \{a-b, -a+b\}^u$. Dan vinden we uit (7) dat $(x \pm (a+b), y \pm (a-b), z)^T \in K$ geldt, oftewel

$$|x \pm (a+b)| + |y \pm (a-b)| \leq z.$$

Analoog als gedaan bij de andere inclusie volgt uit Propositie 2.12 en de driehoeksongelijkheid dat geldt

$$|x \pm (a-b)| + |y \pm (a+b)| \leq z.$$

Dus geldt $(x \pm (a-b), y \pm (a+b), z)^T \in K$, oftewel $x \in \{a+b, -a-b\}^u$.

Uit bovenstaande inclusies volgt dat de te bewijzen gelijkheid geldt. □

Lineaire combinaties van overstaande hoekpunten zijn dus disjunct, en elementen uit l_1 met die uit l_2. Dit zijn ook de enige disjuncte elementen in $(\mathbb{R}^3, K)$, zie hiervoor [3, Voorbeeld 4.4.18].

§3 Relatie tussen disjunctheid van operatoren en hun beelden

In deze paragraaf beschouwen we $\mathbb{R}^n$ met als kegel K een algemene polyhedrale kegel, in tegenstelling tot andere paragrafen, waar we K standaard als de vierstralenkegel kiezen.

Propositie 3.1. *Zij (X, K) een partiëel geordende vectorruimte zo dat K de ruimte X opspant en $S, T \in L(X, K)$ lineare operatoren. V en W zijn disjunct dan en slechts dan als voor alle $U \in L(X, K)$ geldt*

$$\begin{bmatrix} (U+V+W)(K) \subseteq K \\ (U-V-W)(K) \subseteq K \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (U+V-W)(K) \subseteq K \\ (U-V+W)(K) \subseteq K \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Bewijs. De ruimte $(\mathrm{L}(X,K), \mathrm{L}_+(X,K))$ is ook een partiëel geordende vectorruimte, volgens Opmerking 2.9 ($T \in \mathrm{L}_+(X,K)$ als geldt $T(K) \subseteq K$). Dan zijn $S, T \in \mathrm{L}(X,K)$ per definitie disjunct dan en slechts dan als geldt

$$\{S+T, -S-T\}^u = \{S-T, -S+T\}^u.$$

Dit is equivalent met

$$\left\{ U \in \mathrm{L}(X,K) \,\middle|\, \begin{matrix} U+S+T \in \mathrm{L}_+(X,K) \\ U-S-T \in \mathrm{L}_+(X,K) \end{matrix} \right\} = \left\{ U \in \mathrm{L}(X,K) \,\middle|\, \begin{matrix} U+S-T \in \mathrm{L}_+(X,K) \\ U-S+T \in \mathrm{L}_+(X,K) \end{matrix} \right\}.$$

Aan de hand van de definitie van positiviteit van operatoren is bovenstaande equivalent met: Voor alle $U \in \mathrm{L}(X,K)$ geldt

$$\begin{bmatrix} (U+V+W)(K) \subseteq K \\ (U-V-W)(K) \subseteq K \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (U+V-W)(K) \subseteq K \\ (U-V+W)(K) \subseteq K \end{bmatrix}.$$

□

Lemma 3.2. *Zij $X = \mathbb{R}^n$ met een polyhedrale kegel K opgespannen door $k_1, ..., k_n \in K, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, en $V, W \in L(X, K)$ lineaire operatoren. V en W zijn disjunct dan en slechts dan als voor alle $U \in L(X, K)$ het volgende geldt:*

$$\begin{bmatrix} (U+V+W)(k_i) \in K, \\ (U-V-W)(k_i) \in K, \\ \forall i \in \{1, ..., n\}. \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (U+V-W)(k_i) \in K, \\ (U-V+W)(k_i) \in K, \\ \forall i \in \{1, ..., n\}. \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Bewijs. We zullen dit bewijzen met Propositie 3.1.

($\Leftarrow$) Stel dat voor alle $U \in \mathrm{L}(X,K)$, en $i \in \{1, ..., n\}$ het volgende geldt

$$\begin{bmatrix} (U+V+W)(k_i) \in K \\ (U-V-W)(k_i) \in K \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (U+V-W)(k_i) \in K \\ (U-V+W)(k_i) \in K \end{bmatrix}.$$

Zij $U \in \mathrm{L}(X,K)$ zodanig dat geldt:

$$(U+V+W)(K) \subseteq K \text{ en } (U-V-W)(K) \subseteq K.$$

Dan geldt in het bijzonder voor deze U:

$$(U+V+W)(k_i) \in K \text{ en } (U-V-W)(k_i) \in K.$$

Per aanname volgt voor deze U:

$$(U+V-W)(k_i) \in K \text{ en } (U-V+W)(k_i) \in K.$$

Zij $x \in K$ willekeurig gegeven. Dan kunnen we x schrijven als positieve lineare combinatie van de hoekpunten van de kegel: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i$ voor $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wanneer we $U + V - W$ op x laten werken krijgen we door lineariteit van de operatoren:

$$(U + V - W)(x) = (U + V - W)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{(U + V - W)(k_i)}_{\in K} \in K.$$

Aangezien $x \in K$ willekeurig is volgt hieruit dat geldt $(U + V - W)(K) \subseteq K$. Analoog volgt uit de lineariteit van $U - V + W$ dat geldt $(U - V + W)(K) \subseteq K$. Omdat $U \in \mathrm{L}(X, K)$ willekeurig is vinden we dat de volgende implicatie geldt:

$$\begin{bmatrix} (U + V + W)(K) \subseteq K \\ (U - V - W)(K) \subseteq K \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (U + V - W)(K) \subseteq K \\ (U - V + W)(K) \subseteq K \end{bmatrix}$$

voor alle $U \in \mathrm{L}(X, K)$. Merk op dat de implicatie in tegengestelde richting op precies analoge wijze kan worden bewezen. We vinden dat de $\Leftrightarrow$-relatie uit Propositie 3.1 geldt, dus V en W zijn disjunct.

($\Rightarrow$) Stel dat V en W disjunct zijn. Uit Propositie 3.1 volgt dat de $\Leftrightarrow$-relatie (8) geldt voor alle $U \in \mathrm{L}(X, K)$. Zij $U \in \mathrm{L}(X, K)$ zodanig dat geldt

$$\begin{bmatrix} (U + V + W)(k_i) \in K \\ (U - V - W)(k_i) \in K \end{bmatrix}$$

voor alle $i \in \{1, ..., n\}$. Uit lineariteit van $U + V + W$ en $U - V - W$ volgt (op dezelfde manier als net is gedaan voor $U + V - W$ en $U - V + W$) dat geldt:

$$(U + V + W)(K) \subseteq K \text{ en } (U - V - W)(K) \subseteq K.$$

Aangezien V en W disjunct zijn, volgt uit Propositie 3.1 dat geldt

$$(U + V - W)(K) \subseteq K \text{ en } (U - V + W)(K) \subseteq K,$$

en in het bijzonder

$$(U + V - W)(k_i) \in K \text{ en } (U - V + W)(k_i) \in K, \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Omdat $U \in \mathrm{L}(X, K)$ willekeurig is vinden we dat de volgende implicatie geldt:

$$\begin{bmatrix} (U + V + W)(k_i) \in K \\ (U - V - W)(k_i) \in K \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (U + V - W)(k_i) \in K \\ (U - V + W)(k_i) \in K \end{bmatrix}$$

voor alle $U \in \mathrm{L}(X, K)$.

Op analoge wijze kunnen we ook de implicatie in tegengestelde richting bewijzen. Hiermee vinden we de $\Leftrightarrow$-relatie zoals in het te bewijzen lemma. $\square$

§4 Projecties op vlakken

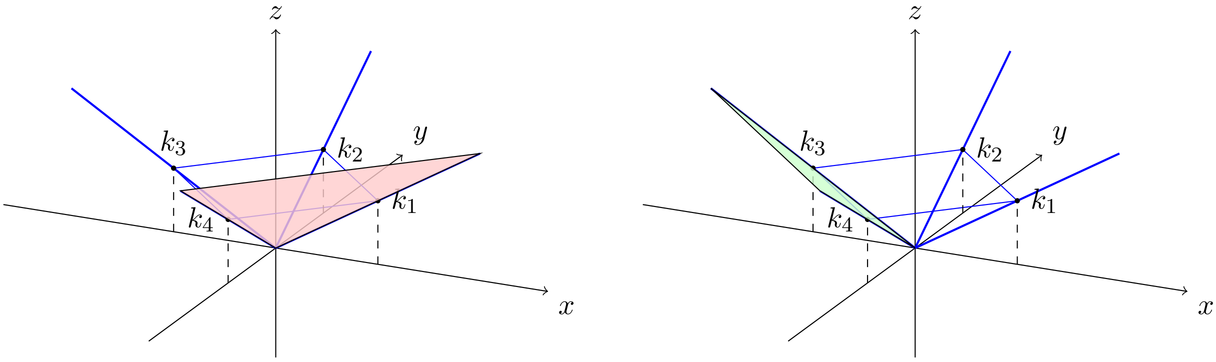
We bekijken de vierstralenkegel K in $\mathbb{R}^3$ zoals beschreven in (3). Met behulp van Lemma 3.2 zullen we bepalen of sommige paren van operatoren disjunct zijn. De methode is uitgebreid uitgewerkt in het bewijs van Stelling 5.1. In andere gevallen zijn tussenstappen weggelaten om overzicht te behouden.

Om een eerste beeld te vormen van wat voor projecties disjunct zijn beginnen we met projecties op vlakken. We richten ons op de projecties op aanliggende randen van de vierstralenkegel. Gegeven hierover is dat extreme stralen opgespannen door overstaande hoekpunten disjunct zijn, maar die door aanliggende hoekpunten niet.

Beschouw de vlakken

$$V_{1,4} := \{\lambda k_1 + \mu k_4 | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \text{ en } V_{3,4} := \{\lambda k_3 + \mu k_4 | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

opgespannen door hoekpunten van de kegel. De vlakken zijn weergeven in Figuur 2.



Figuur 2: $(\mathbb{R}^3, K)$ met vlak $V_{1,4}$ (rood) en vlak $V_{3,4}$ (groen)

Propositie 4.1. *De orthogonale projecties op vlakken $V_{1,4}$ respectievelijk $V_{3,4}$ zijn niet disjunct.*

Bewijs. Zij $S, T \in L(\mathbb{R}^3, K)$ de orthogonale projecties op $V_{1,4}$ respectievelijk $V_{3,4}$.

Dan geldt

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z)^T,$$
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)^T.$$

Zij $U \in L(X, K)$ een operator zodanig dat geldt

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1x + u_2y + u_3z \\ u_4x + u_5y + u_6z \\ u_7x + u_8y + u_9z \end{pmatrix} \tag{10}$$

voor $u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., 9\}$.

We redeneren op analoge wijze als onderbouwd in het bewijs van Stelling 5.1, waar de methode uitgebreid is toegelicht. Aan de hand van Lemma 3.2 zijn S en T disjunct dan en slechts dan als onderstaande equivalentierelatie geldt voor alle $U \in L(\mathbb{R}^3, K)$:

$$
\left.\begin{aligned}
&|u_3+u_1+\tfrac{4}{3}|+|u_6+u_4-\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_7+\tfrac{4}{3} &(11)\\
&|u_3+u_1-\tfrac{4}{3}|+|u_6+u_4+\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_7-\tfrac{4}{3} &(12)\\
&|u_3+u_2|+|u_6+u_5+\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_8+\tfrac{2}{3} &(13)\\
&|u_3+u_2|+|u_6+u_5-\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_8-\tfrac{2}{3} &(14)\\
&|u_3-u_1-\tfrac{4}{3}|+|u_6-u_4-\tfrac{2}{3}| \le u_9-u_7+\tfrac{4}{3} &(15)\\
&|u_3-u_1+\tfrac{4}{3}|+|u_6-u_4+\tfrac{2}{3}| \le u_9-u_7-\tfrac{4}{3} &(16)\\
&|u_3-u_2|+|u_6-u_5-2| \le u_9-u_8+2 &(17)\\
&|u_3-u_2|+|u_6-u_5+2| \le u_9-u_8-2 &(18)
\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}
&|u_3+u_1-\tfrac{2}{3}|+|u_6+u_4-\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_7-\tfrac{2}{3} &(19)\\
&|u_3+u_1+\tfrac{2}{3}|+|u_6+u_4+\tfrac{2}{3}| \le u_9+u_7+\tfrac{2}{3} &(20)\\
&|u_3+u_2-\tfrac{4}{3}|+|u_6+u_5| \le u_9+u_8 &(21)\\
&|u_3+u_2+\tfrac{4}{3}|+|u_6+u_5| \le u_9+u_8 &(22)\\
&|u_3-u_1-\tfrac{2}{3}|+|u_6-u_4+\tfrac{2}{3}| \le u_9-u_7+\tfrac{2}{3} &(23)\\
&|u_3-u_1+\tfrac{2}{3}|+|u_6-u_4-\tfrac{2}{3}| \le u_9-u_7-\tfrac{2}{3} &(24)\\
&|u_3-u_2|+|u_6-u_5| \le u_9-u_8 &(25)\\
&|u_3-u_2|+|u_6-u_5| \le u_9-u_8 &(26)
\end{aligned}\right.
$$

Kies de operator $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, U(x, y, z)^T = (0, 0, y + 2z)^T$. Dit geeft de waarden $u_i = 0$ voor alle $i \in \{1, ..., 7\}, u_8 = 1, u_9 = 2$. Deze waarden voldoen aan de vergelijkingen (19),(20),...,(26); dus aan de rechterzijde van de equivalentierelatie wordt voldaan. Vergelijking (18) invullen geeft echter

$$0 + 2 \le 2 - 1 - 2,$$

oftewel aan de linkerzijde van de equivalentie wordt niet voldaan met de gekozen U. Dus S en T zijn niet disjunct. $\square$

Merk op dat de orthogonale projecties op vlakken $V_{1,4}$ en $V_{3,4}$ positief zijn.

§5 Projecties op lijnen

In paragraaf 4 hebben we projecties naar vlakken van de vierstralenkegel bekeken. Alhoewel de vlakken werden opgespannen door disjuncte lijnen, zijn de vlakken niet disjunct. De enige disjuncte verzamelingen in $(\mathbb{R}^3, K)$ zijn de lijnen opgespannen door hoekpunten van de kegel, evenals l_1 en l_2. Dit zijn allemaal lijnen, dus de volgende logische stap is om enkel naar projecties op lijnen te kijken. We bekijken projecties op de extreme stralen, op l_1 en l_2, en op de coördinaatassen.

5.1 Projecties op aanliggende extreme stralen

We beginnen met het bestuderen van lijnprojecties op extreme stralen opgespannen door aanliggende hoekpunten van de kegel. De aanliggende hoekpunten k_3 en k_4 zijn niet disjunct, dus we vermoeden dat de lijnprojecties op de lijnen opgespannen door k_3 en k_4 ook niet disjunct zijn.

Stelling 5.1. *De orthogonale lijnprojecties op lijnen opgespannen door k_3 respectievelijk k_4 zijn niet disjunct.*

Bewijs. Zij $P, Q \in L(\mathbb{R}^3, K)$ de orthogonale projecties op lijnen opgespannen door k_3 respectievelijk k_4.

Dan geldt

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x - z, 0, -x + z)^T, \tag{27}$$

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(0, y - z, -y + z)^T. \tag{28}$$

Zij $U \in L(X, K)$ een operator zodanig dat geldt

$$U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1x + u_2y + u_3z \\ u_4x + u_5y + u_6z \\ u_7x + u_8y + u_9z \end{pmatrix} \tag{29}$$

voor $u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., 9\}$.

Bekijk dan de projecties $U + P + Q$, $U - P - Q$, $U + P - Q$, $U - P + Q$. De operatoren uitschrijven geeft het volgende:

$$(U \pm P \pm Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1 \pm \frac{1}{2})x & +u_2y & +(u_3 \mp \frac{1}{2})z \\ u_4x & +(u_5 \pm \frac{1}{2})y & +(u_6 \mp \frac{1}{2})z \\ (u_7 \mp \frac{1}{2})x & +(u_8 \mp \frac{1}{2})y & +(u_9 \pm 1)z \end{pmatrix}$$
$$(U \pm P \mp Q)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1 \pm \frac{1}{2})x & +u_2y & +(u_3 \mp \frac{1}{2})z \\ u_4x & +(u_5 \mp \frac{1}{2})y & +(u_6 \pm \frac{1}{2})z \\ (u_7 \mp \frac{1}{2})x & +(u_8 \pm \frac{1}{2})y & +u_9z \end{pmatrix}$$

Aan de hand van Lemma 3.2 geldt: P en Q zijn disjunct dan en slechts dan als de equivalentierelatie

$$(U{+}P{+}Q)(k_i) \in K \text{ en } (U{+}P{+}Q)(k_i) \in K \quad \Leftrightarrow \quad (U{+}P{+}Q)(k_i) \in K \text{ en } (U{+}P{+}Q)(k_i) \in K \tag{30}$$

geldt.

Aangezien voor $(x,y,z)^T \in K$ per definitie van de vierstralenkegel $|x|+|y| \leq |z|$ geldt, kunnen we de equivalentierelatie (30) herschrijven als het volgende:

$$
\begin{array}{lll}
|u_3+u_1|+|u_6+u_4-\frac{1}{2}| \leq u_9+u_7+\frac{1}{2} \quad (31) & & |u_3+u_1|+|u_6+u_4+\frac{1}{2}| \leq u_9+u_7-\frac{1}{2} \quad (39) \\
|u_3+u_1|+|u_6+u_4+\frac{1}{2}| \leq u_9+u_7-\frac{1}{2} \quad (32) & & |u_3+u_1|+|u_6+u_4-\frac{1}{2}| \leq u_9+u_7+\frac{1}{2} \quad (40) \\
|u_3+u_2-\frac{1}{2}|+|u_6+u_5| \leq u_9+u_8+\frac{1}{2} \quad (33) & & |u_3+u_2-\frac{1}{2}|+|u_6+u_5| \leq u_9+u_8+\frac{1}{2} \quad (41) \\
|u_3+u_2+\frac{1}{2}|+|u_6+u_5| \leq u_9+u_8-\frac{1}{2} \quad (34) & \Leftrightarrow & |u_3+u_2+\frac{1}{2}|+|u_6+u_5| \leq u_9+u_8-\frac{1}{2} \quad (42) \\
|u_3-u_1-1|+|u_6-u_4-\frac{1}{2}| \leq u_9-u_7-\frac{3}{2} \quad (35) & & |u_3-u_1-1|+|u_6-u_4+\frac{1}{2}| \leq u_9-u_7+\frac{1}{2} \quad (43) \\
|u_3-u_1+1|+|u_6-u_4+\frac{1}{2}| \leq u_9-u_7+\frac{3}{2} \quad (36) & & |u_3-u_1+1|+|u_6-u_4-\frac{1}{2}| \leq u_9-u_7-\frac{1}{2} \quad (44) \\
|u_3-u_2-\frac{1}{2}|+|u_6-u_5-1| \leq u_9-u_8+\frac{3}{2} \quad (37) & & |u_3-u_2-\frac{1}{2}|+|u_6-u_5+1| \leq u_9-u_8-\frac{1}{2} \quad (45) \\
|u_3-u_2+\frac{1}{2}|+|u_6-u_5+1| \leq u_9-u_8-\frac{3}{2} \quad (38) & & |u_3-u_2+\frac{1}{2}|+|u_6-u_5-1| \leq u_9-u_8+\frac{1}{2} \quad (46)
\end{array}
$$

Merk op dat deze relatie moet gelden voor alle $U \in \mathrm{L}(X,K)$. Beschouw de operator

$$U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, U(x,y,z)^T = (0,0,x+3z)^T.$$

Voor deze U vinden we dat aan vergelijkingen (39), (40), ..., (46) wordt voldaan, en dat aan vergelijking (35) niet wordt voldaan:

$$|u_3-u_1-1|+|u_6-u_4+\frac{1}{2}| = 1+\frac{1}{2} > 3-1-\frac{3}{2} = u_9-u_7+\frac{1}{2}.$$

Dus P en Q zijn niet disjunct. $\square$

Merk op dat de orthogonale lijnprojecties op lijnen opgespannen door k_3 en k_4 positief zijn.

5.2 Projecties op overstaande extreme stralen

De overstaande hoekpunten k_1 en k_3 zijn wel disjunct, dus we verwachten dat de projecties op de extreme stralen opgespannen door k_1 en k_3 ook disjunct zijn.

Stelling 5.2. *De orthogonale lijnprojecties op lijnen opgespannen door k_1 respectievelijk k_3 zijn disjunct.*

Bewijs. Zij $P, R \in L(X, K)$ de orthogonale lijnprojecties op lijnen opgespannen door k_3 respectievelijk k_1. Dan is P gelijk gedefinieerd als in (27) in het bewijs van Stelling 5.1, en R als het volgende:

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x+z, 0, x+z)^T. \tag{47}$$

Zij $U \in L(X, K)$ een operator zodanig dat deze voldoet aan (29). Evenals in het bewijs van Stelling 5.1 is onderbouwd, geldt dat P en R disjunct zijn dan en slechts dan als de volgende equivalentierelatie geldt:

$$\begin{array}{rlcrl}
|u_3+u_1+1| + |u_6+u_4| \leq u_9+u_7+1 & (48) & & |u_3+u_1-1| + |u_6+u_4| \leq u_9+u_7-1 & (56) \\
|u_3+u_1-1| + |u_6+u_4| \leq u_9+u_7-1 & (49) & & |u_3+u_1+1| + |u_6+u_4| \leq u_9+u_7+1 & (57) \\
|u_3+u_2| + |u_6+u_5| \leq u_9+u_8+1 & (50) & & |u_3+u_2-1| + |u_6+u_5| \leq u_9+u_8 & (58) \\
|u_3+u_2| + |u_6+u_5| \leq u_9+u_8-1 & (51) & \Leftrightarrow & |u_3+u_2+1| + |u_6+u_5| \leq u_9+u_8 & (59) \\
|u_3-u_1-1| + |u_6-u_4| \leq u_9-u_7+1 & (52) & & |u_3-u_1-1| + |u_6-u_4| \leq u_9-u_7+1 & (60) \\
|u_3-u_1+1| + |u_6-u_4| \leq u_9-u_7-1 & (53) & & |u_3-u_1+1| + |u_6-u_4| \leq u_9-u_7-1 & (61) \\
|u_3-u_2| + |u_6-u_5| \leq u_9-u_8+1 & (54) & & |u_3-u_2-1| + |u_6-u_5+1| \leq u_9-u_8 & (62) \\
|u_3-u_2| + |u_6-u_5| \leq u_9-u_8-1 & (55) & & |u_3-u_2+1| + |u_6-u_5-1| \leq u_9-u_8 & (63)
\end{array}$$

Merk op dat deze relatie moet gelden voor alle $U \in \mathrm{L}(X, K)$. Merk op dat de ongelijkheid (48) identiek is aan (57), (49) aan (56), (52) aan (60), en ook (53) aan (61).

Uit de driehoeksongelijkheid volgen de implicaties [(51) $\Rightarrow$ (58) en (59)] en [(55) $\Rightarrow$ (62) en (63)].

Uit de ongelijkheden (58) en (59) volgt met Propositie 2.12 dat geldt:

$$|u_3+u_2| + 1 + |u_6+u_5| \leq u_9+u_8.$$

Uit deze ongelijkheid volgen (50) en (51) direct. Analoog volgt de implicatie [(62) en (63) $\Rightarrow$ (54) en (55)] uit Propositie 2.12.

Dus de equivalentierelatie geldt, en P en R zijn disjunct. $\square$

Merk op dat de orthogonale lijnprojectie op de lijn opgespannen door k_3 ook positief is.

5.3 Projecties op lijnen door grondvlak

Gevonden is nu dat projecties op lijnen opgespannen door disjuncte hoekpunten wel disjunct zijn, en niet wanneer de hoekpunten niet disjunct zijn. Een logische volgende stap is om andere projecties met disjuncte beelden te bekijken. De enige andere disjuncte elementen in $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel zijn de lijnen l_1 en l_2.

Stelling 5.3. *De orthogonale lijnprojecties op l_1 respectievelijk l_2 zijn disjunct.*

Bewijs. Zij $P, Q \in L(X, K)$ de orthogonale lijnprojecties op l_1 en l_2 respectievelijk.

Dan geldt

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x+y, x+y, 0)^T,$$
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x-y, -x+y, 0)^T.$$

Zij $U \in L(X, K)$ een operator die voldoet aan (29). Analoog met de onderbouwing in het bewijs van Stelling 5.1 geldt dat P en Q disjunct zijn dan en slechts dan als de volgende equivalentierelatie geldt:

$$\begin{array}{lcl}
|u_3+u_1+1|+|u_6+u_4| \le u_9+u_7 \quad (64) & & |u_3+u_1|+|u_6+u_4+1| \le u_9+u_7 \quad (72) \\
|u_3+u_1-1|+|u_6+u_4| \le u_9+u_7 \quad (65) & & |u_3+u_1|+|u_6+u_4-1| \le u_9+u_7 \quad (73) \\
|u_3+u_2|+|u_6+u_5+1| \le u_9+u_8 \quad (66) & & |u_3+u_2+1|+|u_6+u_5| \le u_9+u_8 \quad (74) \\
|u_3+u_2|+|u_6+u_5-1| \le u_9+u_8 \quad (67) & \Leftrightarrow & |u_3+u_2-1|+|u_6+u_5| \le u_9+u_8 \quad (75) \\
|u_3-u_1-1|+|u_6-u_4| \le u_9-u_7 \quad (68) & & |u_3-u_1|+|u_6-u_4-1| \le u_9-u_7 \quad (76) \\
|u_3-u_1+1|+|u_6-u_4| \le u_9-u_7 \quad (69) & & |u_3-u_1|+|u_6-u_4+1| \le u_9-u_7 \quad (77) \\
|u_3-u_2|+|u_6-u_5-1| \le u_9-u_8 \quad (70) & & |u_3-u_2+1|+|u_6-u_5| \le u_9-u_8 \quad (78) \\
|u_3-u_2|+|u_6-u_5+1| \le u_9-u_8 \quad (71) & & |u_3-u_2-1|+|u_6-u_5| \le u_9-u_8 \quad (79)
\end{array}$$

Met Propositie 2.12 en de driehoeksongelijkheid zijn deze ongelijkheden duidelijk equivalent aan elkaar. De relatie geldt, dus P en Q zijn disjunct. $\square$

Merk op dat de orthogonale lijnprojecties op l_1 en l_2 niet positief zijn.

5.4 Projecties op coördinaatassen

We hebben gezien dat lijnprojecties met disjuncte beelden ook disjunct zijn in de vierstralenkegel. Ook in het triviale geval is het beeld van de nuloperator disjunct met het beeld van elke andere operator, en elke operator is ook disjunct met de nuloperator. We bekijken of disjunctheid van de beelden noodzakelijk is voor disjunctheid van de operatoren.

Merk hierbij op dat elk element op de x-as ongelijk aan nul niet disjunct is met een niet-nul element op de y-as.

Stelling 5.4. *De orthogonale lijnprojecties op de x-as respectievelijk y-as zijn disjunct.*

Bewijs. We beschouwen de lijnprojecties $P, Q \in L(X, K)$ op de coördinaatassen van de x-as en y-as respectievelijk.

Dan geldt

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, 0, 0)^T,$$
$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, y, 0)^T.$$

Zij $U \in L(X, K)$ een operator die voldoet aan (29).

Analoog met de onderbouwing in het bewijs van Stelling 5.1 kunnen we Lemma 3.2 uitwerken tot onderstaande uitspraak.

P en Q disjunct zijn dan en slechts dan als de volgende equivalentierelatie geldt:

$$\begin{array}{ll}
|u_3 + u_1 + 1| + |u_6 + u_4| \le u_9 + u_7 \quad (80) & \\
|u_3 + u_1 - 1| + |u_6 + u_4| \le u_9 + u_7 \quad (81) & \\
|u_3 + u_2| + |u_6 + u_5 + 1| \le u_9 + u_8 \quad (82) & \\
|u_3 + u_2| + |u_6 + u_5 - 1| \le u_9 + u_8 \quad (83) & \\
|u_3 - u_1 - 1| + |u_6 - u_4| \le u_9 - u_7 \quad (84) & \\
|u_3 - u_1 + 1| + |u_6 - u_4| \le u_9 - u_7 \quad (85) & \\
|u_3 - u_2| + |u_6 - u_5 - 1| \le u_9 - u_8 \quad (86) & \\
|u_3 - u_2| + |u_6 - u_5 + 1| \le u_9 - u_8 \quad (87) &
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{ll}
|u_3 + u_1 + 1| + |u_6 + u_4| \le u_9 + u_7 \quad (88) & \\
|u_3 + u_1 - 1| + |u_6 + u_4| \le u_9 + u_7 \quad (89) & \\
|u_3 + u_2| + |u_6 + u_5 - 1| \le u_9 + u_8 \quad (90) & \\
|u_3 + u_2| + |u_6 + u_5 + 1| \le u_9 + u_8 \quad (91) & \\
|u_3 - u_1 - 1| + |u_6 - u_4| \le u_9 - u_7 \quad (92) & \\
|u_3 - u_1 + 1| + |u_6 - u_4| \le u_9 - u_7 \quad (93) & \\
|u_3 - u_2| + |u_6 - u_5 + 1| \le u_9 - u_8 \quad (94) & \\
|u_3 - u_2| + |u_6 - u_5 - 1| \le u_9 - u_8 \quad (95) &
\end{array}$$

Dit zijn dezelfde twee groepen ongelijkheden; het is triviaal dat de equivalentierelatie geldt. P en Q zijn disjunct. □

Disjunctheid van de beelden van lijnprojecties is dus niet noodzakelijk voor de disjunctheid van de lijnprojecties.

Merk op dat de orthogonale lijnprojecties op de x-as en de y-as niet positief zijn.

Relatie disjunctheid operatoren en disjunctheid beelden

Er zijn voor verschillende orthogonale projecties nagegaan of deze disjunct zijn. Hierbij hebben we gevonden dat orthogonale projecties op

- lijnen opgespannen door overstaande hoekpunten
- de lijnen l_1 en l_2
- de coördinaatassen

disjunct zijn. Hierbij is bekend uit Proposities 2.18 en 2.20 dat lijnen opgespannen door overstaande hoekpunten disjunct zijn, evenals de lijnen l_1 en l_2. Uit Paragraaf 2.2 weten we zelfs dat dit de enige disjuncte elementen in $(\mathbb{R}^3, K)$ zijn. In het bijzonder zijn de coördinaatassen niet disjunct.

Hieruit kunnen we concluderen dat in $(\mathbb{R}^3, K)$ orthogonale projecties op disjuncte beelden disjunct zijn. Echter geldt niet dat alle disjuncte orthogonale projecties disjuncte beelden hebben.

§6 Discussie

Zoals eerder benoemd is er nog weinig onderzoek gedaan naar disjunctheid van operatoren in pre-Rieszruimtes. Deze scriptie maakt een klein begin aan dit onderzoek door disjuncte projecties in $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel te bepalen. Dit laat nog veel opties open voor verder onderzoek. Men kan bijvoorbeeld andere pre-Rieszruimtes bekijken, maar ook resultaten uit deze scriptie algemeniseren.

Een belangrijk resultaat is dat voor projectieafbeeldingen waarvan hun beelden disjunct zijn volgt dat ze zelf onderling als operatoren ook disjunct zijn in $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel. Dit wekt het vermoeden dat het verband tussen disjunctheid projectieafbeeldingen en disjunctheid beelden geldt voor ruimtes met polyhedrale kegels in het algemeen. Ook is interessant om naar andere pre-Rieszruimtes te kijken, zoals $\mathbb{R}^3$ met de cirkelkegel. In deze ruimte zijn er namelijk geen niet-triviale elementen die disjunct zijn. Het is dus nog volledig onbekend welke projectieafbeeldingen in deze ruimte disjunct zijn.

De methode waarop disjunctheid van operatoren wordt nagegaan biedt ook opties tot verder onderzoek, in het bijzonder Lemma 3.2. In dit lemma wordt disjunctheid in verband gebracht met equivalentierelatie (9), waarin enkel de beelden van de hoekpunten van de kegel worden geevalueerd. In het vervolg kan Lemma 3.2 mogelijk worden aangepast op ruimtes met andere kegels dan polyhedrale, bijvoorbeeld $\mathbb{R}^3$ met de cirkelkegel. Waarschijnlijk hoeft men voor disjunctheid van operatoren in $\mathbb{R}^3$ met de cirkelkegel alleen de elementen op de rand van de kegel na te gaan.

Alhoewel onderzoek naar de disjunctheid van operatoren in pre-Rieszruimtes vrij beperkt is, is er meer bekend over de disjuctheid van operatoren in Rieszruimtes. In [4] is bewezen dat elke pre-Rieszruimte een deelruimte is van een bepaalde Rieszruimte (zie Stelling 2.15) en een Rieszcompletering kan worden geconstrueerd van de pre-Rieszruimte naar de Rieszruimte. Een logische vraag is of de kennis over disjunctheid van operatoren in Rieszruimtes nog kan worden gebruikt voor het vinden van disjuncte operatoren in de Pre-Rieszruimtes door middel van een Rieszcompletering. Als vervolgonderzoek kan bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^3$ met de vierstralenkegel de Rieszcompletering naar $\mathbb{R}^4$ worden geconstrueerd en bekeken worden of er disjuncte operatoren in $\mathbb{R}^4$ bestaan waarvan die operatoren beperkt tot $\mathbb{R}^3$ de projecties zijn die we gevonden hebben in deze scriptie.

Referenties

[1] C. D. Aliprantis en O. Burkinshaw. *Positive Operators.* Academic Press, Londen, 1985.

[2] A. Kalauch en O. W. van Gaans. Disjointness in partially ordered vector spaces. *Positivity*, 10(3):573–589, September 2006.

[3] A. Kalauch en O. W. van Gaans. *Pre-Riesz Spaces.* De Gruyter, Berlin, 2018.

[4] M. B. J. G. van Haandel. *Completions in Riesz space theory.* PhD thesis, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1993.