



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Beweging van vegetatiepatronen

Wolters, M.J.M.

Citation

Wolters, M. J. M. *Beweging van vegetatiepatronen*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master thesis in the Leiden University Student Repository](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4171392>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

M.J.M. Wolters

Beweging van vegetatiepatronen

Bachelorscriptie

11 februari 2019

Scriptiebegeleiders: prof.dr. A. Doelman
R. Bastiaansen MSc



Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

Beweging van vegetatiepatronen

M.J.M. Wolters

Universiteit Leiden
Mathematisch Instituut

11 februari 2019

Samenvatting

Het onderzoek naar de bewegingen van vegetatiepatronen is van grote relevantie om woestijnvorming in grote delen van de wereld tegen te gaan. Deze vegetatiepatronen bestaan uit vegetatiebanden die onder invloed van water en het terrein voortbewegen over het landschap. Deze vegetatiepulsen worden aan de hand van het extended Klausmeier model gemodelleerd. De nadruk van deze scriptie ligt op het onderzoek naar de plaatsen in het landschap waar de vegetatiepulsen stilstaan afhankelijk van de topografie van het terrein. Hierbij wordt de differentiaalvergelijking, die de snelheid van de vegetatiepulsen beschrijft, uitvoerig onderzocht. De kritieke punten van deze differentiaalvergelijking zijn precies de posities in het terrein waar de vegetatie stilstaat. Klausmeier deed onderzoek naar de bewegingen van vegetatiepulsen op een constante helling. In deze scriptie wordt het terrein beschreven door deze constante helling met daaraan lokale heuvels op gelijke afstand van elkaar toegevoegd. Dit leidt tot het ontstaan en verdwijnen van evenwichtspunten in het terrein door de toevoeging van deze heuvels. De bifurcatietheorie beschrijft hoe de parameters (die de hoogte & breedte van de heuvels en de graad van de helling beschrijven) invloed op het bewegen van de vegetatiepulsen uitoefenen. Vervolgens zullen de methode van Newton-Raphson en de methode van pseudo-arclength continuation helpen bij het vinden van de evenwichtspunten. Met behulp van bifurcatiediagrammen worden de onderlinge relaties tussen de parameters onderzocht. Hieruit blijkt een sterke afhankelijkheid tussen de helling van een terrein en de hoogte van aangebrachte lokale heuvels. Daarnaast wordt ook de relatie tussen de helling van het terrein en de 'breedte' van de heuvels beschreven. Het bifurcatiediagram blijkt sterk te veranderen indien een helling in het landschap ontbreekt. Ook het toevoegen van een tweede puls aan het domein levert nieuwe inzichten op: het aantal heuvels tussen beide vegetatiepulsen bepaalt grotendeels de mate van beïnvloeding.

Inhoudsopgave

Inleiding	1
1 Het model	3
1.1 PDV tot GDV reductie	3
1.2 De terreinfunctie	5
1.3 Bifurcatietheorie	6
1.3.1 Zadelknoop-bifurcatie (saddle-node bifurcation)	7
1.3.2 Hooivorkbifurcatie (pitchfork bifurcation)	7
2 Continuatiemethoden voor het bepalen van equilibria	8
2.1 Continuatiemethoden	8
2.2 De methode van Newton-Raphson	9
2.3 De methode van pseudo-arclength continuation	11
2.3.1 De methode van pseudo-arclength continuation toegepast	12
3 Resultaten	14
3.1 Resultaten met de methode van Newton-Raphson	15
3.2 Resultaten met de methode van pseudo-arclength continuation	16
3.3 De relatie tussen de helling en de verstoringen van het gebied	18
3.4 Invloed parameter C op het bifurcatiediagram voor parameter B	21
3.4.1 Bifurcatiediagram voor parameter B met $C = 0$	21
3.4.2 Bifurcatiediagram voor parameter B met $C \neq 0$	22
3.5 De toevoeging van een tweede vegetatiepuls	25
3.5.1 Twee vegetatiepulsen één periode uit elkaar geplaatst	26
3.5.2 Twee pulsen twee periodes uit elkaar geplaatst	28
3.5.3 Twee pulsen drie periodes uit elkaar geplaatst	29
Conclusie	31
A Appendix A	33
A.1 Afleiding van f naar de pulselocatie	33
A.2 Afleiding van f naar de parameters	34
A.2.1 Parameter A	35
A.2.2 Parameter B	36
A.2.3 Parameter C	36
A.3 Afleiding van f naar de pulselocatie voor meerdere pulsen	37
A.3.1 Afleiding van f_1 naar de pulselocaties	37
A.3.2 Afleiding van f_2 naar de pulselocaties	38
A.4 Dubbele afgeleides van f	39
A.4.1 Dubbele afleiding van f naar de pulselocatie	39
A.4.2 Afleiding van f naar de pulselocatie en naar parameters	41
A.4.3 Overige afleidingen	42
Referenties	43

Inleiding

In de afgelopen eeuwen zijn grote gebieden op aarde, voorheen volledig begroeid met vegetatie, volledig omgetoverd tot droge zandvlakten [4]. Deze overgang van vegetatierijk gebied naar woestijnlandschap, verwoestijning genaamd, gaat vaak gepaard met een verandering van het klimaat [9]. Het semi-aride klimaat¹ gaat hierbij over in een woestijnklimaat.

Het interessante aspect van deze klimaatsverandering is dat het proces van verwoestijning in fases lijkt te verlopen [4]. In eerste instantie ontstaan er gaten in het landschap. Dit zijn plaatsen waar geen vegetatie meer groeit. In deze fase is weinig aan de hand. Deze gaten kunnen snel weer verdwijnen. Dit kan komen door een jaar minder neerslag dan gemiddeld [9].

Daarentegen kan de situatie ook verslechteren en kunnen deze gaten leiden tot zandstroken. In deze fase van verwoestijning kan er gesproken worden over vegetatiestroken, aangezien vegetatie en zand elkander omringen. Deze vegetatiepatronen bewegen zich voort over de ondergrond. In principe beweegt de vegetatie zelf niet, maar doordat enerzijds vegetatie aangroeit en anderzijds vegetatie afsterft, kan zo'n vegetatiestrook zich verplaatsen [1].

Indien de lokale omstandigheden achteruit blijven gaan, zullen vegetatiestroken verdwijnen uit het landschap en zullen de zandstroken zich uitbreiden. In het ergste geval zal iedere vorm van vegetatie uitsterven en blijft een woestijnlandschap over [4]. In figuur 1 zijn enkele fases van het verwoestijningsproces weergegeven.

Actief terugplanten is een mogelijkheid om dit proces tegen te gaan. Dit is in werkelijkheid alleen mogelijk als nog voldoende water in het gebied aanwezig is en de bodemstructuur nog intact is. Daarnaast zijn de middelen hiervoor vaak beperkt en zijn de kosten hoog.

In de ecologie is dit een groot probleem waar in de nabije toekomst een oplossing voor gevonden moet worden. De grootste oorzaak van dit probleem is de invloed van de lokale bevolking, wier kudde de vegetatierijke gebieden kaal graast.

Daarnaast zijn een vermindering van de gemiddelde jaarlijkse hoeveelheid neerslag en erosie (beide in mindere mate) ook oorzaken van verwoestijning.

Het aanpakken van deze oorzaken heeft prioriteit, maar evenzo relevant is het onderzoek naar het gedrag van deze vegetatiepatronen. In deze scriptie staat het onderzoek naar het bewegingsgedrag van deze vegetatiepatronen centraal.



Figuur 1: Vegetatiepatronen in een gebied in het westen van New South Wales, Australië [6].

¹Een klimaat of plaats waar water (minder dan 508 millimeter neerslag per jaar) en vegetatie schaars zijn, maar met twee keer zoveel neerslag als in een woestijnklimaat [9].

Bovendien beïnvloeden de vegetatiestroken elkaars gedrag; de vegetatiestroken bewegen zich voort over het landschap onder invloed van de aanwezigheid van water en de topografie van het gebied. In het gebied bevinden zich, afhankelijk van de hoeveelheid water en de topografie van het terrein, kritieke punten die stabiel of instabiel kunnen zijn. Een stabiel kritiek punt is een evenwichtspunt in het gebied waar de vegetatiestroken naartoe willen bewegen en een instabiel kritiek punt is een evenwichtspunt waar de vegetatiestroken vandaan willen bewegen. In beide gevallen geldt dat de vegetatiepuls stilstaat als deze zich precies op een kritiek punt bevindt. De vegetatiepulsen proberen een stabiele positie in het landschap te vinden. Echter leven in zo'n gebied vele vegetatiestroken die alle op zoek zijn naar een stabiele evenwichtslocatie. Deze onderlinge 'strijd' kan leiden tot bewegingen van vegetatiepatronen of het vinden van nieuwe (in)stabiele evenwichtspunten [4]. In de hoofdstukken 2 en 3 zullen deze processen uitvoerig besproken worden.

Daarnaast heeft ook de topografie van het gebied een grote invloed op het gedrag van de vegetatiepatronen. In deze scriptie kan de topografie in het gebied gevarieerd worden door middel van drie parameters. Het veranderen van deze parameters zal leiden tot bewegingen van de vegetatiepatronen en het ontstaan en verdwijnen van kritieke punten in het landschap.

In hoofdstuk 1 worden de bewegingen van vegetatiepatronen in een wiskundig model gevat en worden enkele belangrijke onderwerpen en definities behandeld. Daarna worden in hoofdstuk 2 enkele oplossingsmethoden behandeld voor het vinden van evenwichtspunten binnen het model. Vervolgens worden deze methoden toegepast op het wiskundige model en de resultaten hiervan worden beschreven in hoofdstuk 3.

1 Het model

In de inleiding is het ecologische probleem van verwoestijning beschreven. Om dit proces wiskundig te kunnen interpreteren, is een wiskundig model nodig. In deze scriptie worden de interacties tussen de vegetatiepulsen in het extended Klausmeier model bekeken [8]:

$$\begin{cases} U_t &= U_{xx} + h_x U_x + h_{xx} U + a - U - UV^2 \\ V_t &= D^2 V_{xx} - mV + UV^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

Dit model is een generalisatie van het originele vegetatiemodel van Klausmeier uit 1999, die de interactie tussen vegetatie en de hoeveelheid water in een semi-aride gebied beschrijft voor een vlak en hellend terrein [1]. Het extended Klausmeier model is hieruit ontstaan door de diffusie van water aan het systeem toe te voegen. In [8] wordt de terreinfunctie h toegevoegd, die de hoogte van de ondergrond van het terrein beschrijft. Deze toevoeging zorgt ervoor dat het terrein gemodelleerd kan worden door een functie h die de topografie van het gebied beschrijft. Deze toevoegingen leveren dan uiteindelijk model (1.1) op.

In dit model staat U voor de hoeveelheid water en V voor de hoeveelheid vegetatie. Dit dynamische systeem geeft weer hoe de hoeveelheid water en vegetatie zich over de tijd verplaatsen over het gebied en hoe deze elkaar beïnvloeden.

In deze scriptie wordt dit model beschouwd in een 1-dimensionaal onbegrensd domein², d.w.z. $x \in \mathbb{R}$; parameter a beschrijft de hoeveelheid neerslag en parameter m is het sterftcijfer van de vegetatie [8]. Aangezien de diffusie van water sneller gaat dan de diffusie van vegetatie is het model singulier verstoord. Daarom is de diffusiecoëfficiënt van het water tot 1 geschaald, zodat aangenomen kan worden dat de diffusie coëfficiënt van de vegetatie D zeer klein is, d.w.z. $0 < D \ll 1$ [8]. Het reliëf van het gebied wordt beschreven door de terreinfunctie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij h_x de helling en h_{xx} de kromming van het terrein weergeeft.

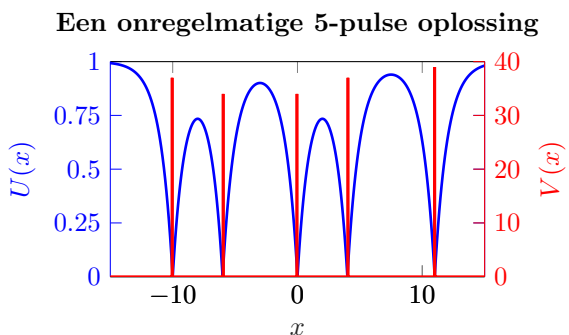
Het model toont een snede uit het landschap, d.w.z. er wordt een lijn getrokken die de vegetatiestroken snijdt. Indien alleen naar het gebied gekeken wordt dat op de lijn ligt, kan deze lijn als de x -as opgevat worden met op de y -as de hoogte van de vegetatie.

1.1 PDV tot GDV reductie

Beschouw een N -puls oplossing van het geschaalde extended Klausmeier model (1.1). Stel dat de posities van deze N vegetatiepulsen gedefinieerd worden door $P_1(t) < \dots < P_N(t)$. De posities van de N pulses staan niet vast over tijd. Dit houdt in dat ieder van deze N pulsen zich verplaatst met een tijdsafhankelijke bewegingssnelheid. Voor een puls $P_j(t)$, $1 \leq j \leq N$, wordt deze tijdsafhankelijke bewegingssnelheid beschreven door de volgende GDV:

$$\frac{dP_j}{dt} = \frac{Da^2}{6m\sqrt{m}} [U_x(P_j^+)^2 - U_x(P_j^-)^2], \quad (1.2)$$

waarbij $U_x(P_j^\pm)$ de afgeleide van de hoeveelheid water is in het punt P_j waar respectievelijk de boven- en onderlimiet naar het punt P_j genomen wordt. Dus de snelheid van de j^{de} vegetatiepuls wordt bepaald door het verschil van de kwadraten van de afgeleiden van U op de locatie van de vegetatiepuls die benaderd wordt van beide kanten [8].



Figuur 2: Vegetatiepulsen gesimuleerd m.b.v. model (1.1). In rood de posities van de vegetatiepulsen (V) en in blauw de verdeling van het water (U) over het gebied.

²Aangezien in deze scriptie ook met numerieke simulaties gewerkt wordt, is een onbegrensd domein niet altijd haalbaar. Op die momenten wordt met een begrensd domein gewerkt. Meer details hierover zijn te vinden in hoofdstuk 2.

Het is hierbij dus van belang op te merken dat P_j^+ en P_j^- uniek bepaald worden door P_j zelf voor $1 \leq j \leq N$. Dit betekent ook dat $U_x(P_j^\pm)$ uniek bepaald wordt door P_j voor $1 \leq j \leq N$, waardoor (1.2) wel degelijk een GDV is. Dit betekent ook dat de kritieke punten van vergelijking (1.2) de posities zijn waar geldt dat de bewegingssnelheid van de vegetatiepuls nul is. Ecologisch gezien zijn dit de evenwichtpunten in het woestijngebied.

GDV (1.2) vormt de kern van deze scriptie. Voordat de kritieke punten van GDV (1.2) bepaald kunnen worden, moet eerst een uitdrukking voor de U in GDV (1.2) gevonden worden. De functie U dient bepaald te worden uit de PDV (1.1).

Echter bestaat een eenvoudigere manier om de functie U te vinden. Onder enkele aannames, waarvan de belangrijkste hier kort toegelicht zullen worden, laat het extended Klausmeier model (zie (1.1)) zich reduceren tot een GDV met (naast randvoorwaarden) N extra voorwaarden voor de locatie van de N pulsen.

Voor een volledig gedetailleerde beschrijving van deze reductie kan gekeken worden naar hoofdstuk 2 uit [8]. In deze scriptie blijven de details uit en worden alleen de belangrijke aspecten van deze reductie op simpele wijze kort toegelicht.

De situatie waaruit gewerkt wordt, is geïllustreerd in figuur 2. In deze illustratie zijn meerdere pulsen zichtbaar. De rode lijn geeft de vegetatie weer en de blauwe lijn de hoeveelheid water. De rode lijn geeft een piek op de plaats waar zich een vegetatiepuls bevindt. Op deze plaatsen lopen de blauwe lijnen naar nul toe, aangezien de vegetatie het water opneemt.

Bekijk nu één puls P_j afzonderlijk, waarbij $2 \leq j \leq N - 1$ ($j = 1$ en $j = N$ zijn speciale gevallen). (Neem ter illustratie de vegetatiepuls op $x = 0$ in figuur 2.) Nu kan het gebied waarover de puls zich voortbeweegt, worden opgesplitst in drie gebieden: een binnengebied en twee buitengebieden. Het binnengebied bevat de vegetatiepuls, d.w.z. de locatie in het gebied waar vegetatie aanwezig is (ter illustratie: de rode piek op $x = 0$ in figuur 2 is het binnengebied). Het linker buitengebied horende bij vegetatiepuls P_j is het interval (P_{j-1}, P_j) en het rechter buitengebied horende bij vegetatiepuls P_j is het interval (P_j, P_{j+1}) . De twee buitengebieden samen beslaan het interval $(P_{j-1}, P_{j+1}) \setminus \{P_j\}$ (ter illustratie: het buitengebied wordt gegeven door het interval $(-7, 3) \setminus \{0\}$ in figuur 2). Aangezien aangrenzende pulsen overlappende buitengebieden hebben, bestaan er voor N vegetatiepulsen in totaal N binnengebieden en $N + 1$ buitengebieden.

Vervolgens wordt opgemerkt dat op een buitengebied geen/nauwelijks vegetatie aanwezig is, dus op de buitengebieden geldt $V \equiv 0$. Als $V \equiv 0$ geldt, dan verdwijnt de term $-UV^2$ uit de eerste vergelijking van het extended Klausmeier model en de tweede vergelijking verdwijnt in zijn totaliteit, want $V_t \equiv 0$ geldt.

Deze reductie geldt alleen op het buitengebied, maar als nu wordt aangenomen dat $\frac{m\sqrt{m}D}{a^2} \ll 1$ geldt, dan kan gegarandeerd worden dat $U(P_j) = 0$ de juiste benadering is. [8]. Dit betekent dat het binnengebied te vervangen is door twee benadering, namelijk $U(P_j^+) = 0$ en $U(P_j^-) = 0$, waarbij P_j de j -de vegetatiepuls op het gebied is.

Als laatste wordt nu opgemerkt dat de parameter a uit het stelsel geëlimineerd kan worden d.m.v. de substitutie $a\hat{U} = U$. Het resultaat van deze bewerkingen is de volgende GDV, waarbij \hat{U} weer vervangen is door U om de notatie eenvoudig te houden:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx} + h_x U_x + h_{xx} U + 1 - U, \\ U(P_{j-1}) &= 0, \\ U(P_{j+1}) &= 0, \\ U(P_j^\pm) &= 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Indien naar de meest linker vegetatiepuls (P_1) gekeken wordt, dan verandert randvoorwaarde $U(P_{j-1}) = 0$ in $U_x(-\infty) = 0$ en wordt naar de meest rechter vegetatiepuls (P_N) gekeken, dan verandert randvoorwaarde $U(P_{j+1}) = 0$ in $U_x(+\infty) = 0$.

Voor iedere vegetatiepuls P_j kan nu de bijbehorende oplossing U ófwel exact ófwel numeriek bepaald worden uit GDV (1.3) en aan de hand van deze oplossing U kunnen m.b.v. vergelijking (1.2) de kritieke punten in het gebied gevonden worden.

1.2 De terreinfunctie

In het begin van dit hoofdstuk is al kort benoemd dat de functie h , die vanaf nu de terreinfunctie genoemd wordt, het terrein waarop de vegetatiepuls zich voortbeweegt, beschrijft. Dit betekent ook dat h de oplossingen van zowel de PDV (1.1) als de GDV (1.3) beïnvloedt en daarmee de oplossingen van GDV (1.2) verandert. De keuze van de terreinfunctie is dus bepalend voor de oplossingen die verkregen zullen worden. In deze paragraaf wordt eerst kort naar een eenvoudige terreinfunctie gekeken, waarvan de eigenschappen gemakkelijk af te leiden zijn. Vervolgens wordt een terreinfunctie geïntroduceerd, die voor de rest van deze scriptie gebruikt wordt.

Naast het feit dat de functie h bepaalt wat de oplossingen van de PDV en ook de GDV is, bepaalt de functie h ook grotendeels of het mogelijk is de oplossingen voor GDV (1.3) analytisch te berekenen. In het eerste geval dat bekeken gaat worden is dat inderdaad mogelijk. Er wordt gekeken naar de terreinfunctie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto Hx$, waarbij $H \in \mathbb{R}$. De analytische oplossingen kunnen worden gevonden in hoofdstuk 2 uit [8].

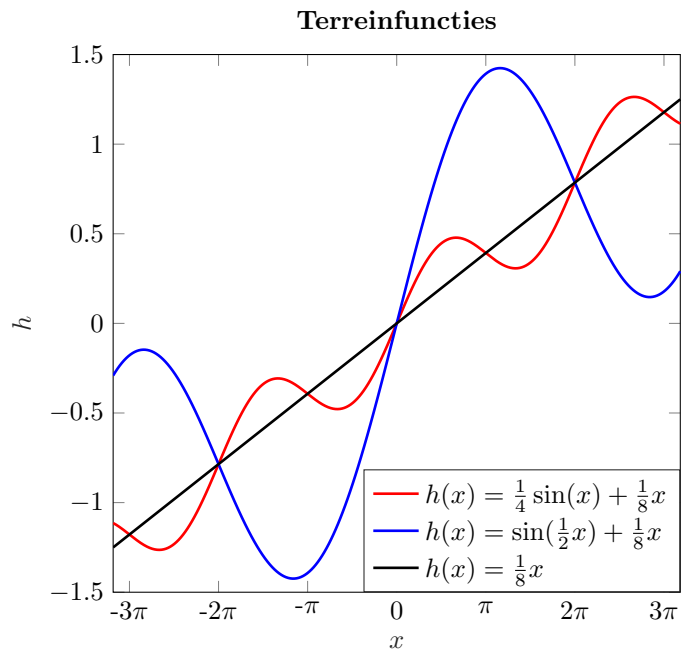
Klausmeier was de eerste die onderzoek deed naar vegetatiepulsen op een constante helling. Hierbij onderscheidde hij twee gevallen; een constante helling ($H \in \mathbb{R}_{>0}$) en een vlakke ondergrond ($H = 0$). Voor een vlakke ondergrond wordt opgemerkt dat de numerieke simulaties uit het model niet overeenkomen met wat ecologen aantreffen in werkelijkheid. Dit kan verklaard worden doordat in werkelijkheid een gebied nooit volledig vlak zal zijn en daardoor kunnen deze kleine topografische variaties leiden tot grote variaties in vegetatiedichtheid [1].

Voor $H \in \mathbb{R}_{>0}$ werd gevonden dat de vegetatiepulse de top van de heuvel toe wilde groeien. Deze heuvelopwaartse beweging is logisch te verklaren: stel dat op een constante helling één vegetatiepuls is gelocaliseerd. Indien er neerslag in het gebied valt, zal de regen heuvelafwaarts stromen. De vegetatiestroom zal het naar beneden stromende water opzuigen, oftewel de vegetatie kan door de aanwezigheid van water aangroeien aan de bovenkant. Tegelijkertijd stroomt het water aan de onderkant van de vegetatiestroom weg en wegens een gebrek aan water sterft de vegetatie aan de onderzijde van de vegetatiestroom af. Dit geeft een opwaartse beweging van de vegetatiestroom [1]. Indien het gebied waarop de pulsen leven niet begrensd is, zal de puls naar boven blijven lopen en dus nooit een evenwichtspunt vinden. (Merk hierbij wel op dat een vegetatieband zich hooguit een meter per jaar voortbeweegt.)

Nu blijkt dat de functie $h(x) = Hx$, met $H \in \mathbb{R}$ één van de weinige functies is, waarvoor dit probleem exact opgelost is. Voor generieke h bestaat geen analytische oplossing in ‘gesloten vorm’. In zo’n geval wordt de oplossing numeriek benaderd. Daarentegen is het voor een willekeurige functie h wel mogelijk naar de kritieke punten van GDV (1.2) te kijken om op deze wijze iets te kunnen zeggen over het evenwichtsgedrag.

Stel nu dat lokale heuvels worden

geïntroduceerd op de constante helling, waarbij deze heuvels zich periodiek herhalen. Indien deze lokale heuvels groot genoeg zijn, ontstaan evenwichtspunten op het terrein, die gevonden kunnen worden door de kritieke punten in GDV (1.2) te onderzoeken. Het introduceren van deze lokale periodieke heuvels kan bereikt worden door bijvoorbeeld een sinusoïde in de terreinfunctie te verwerken. Deze sinusoïde heeft dan een trendlijn in de vorm van de constante helling.



Figuur 3: Drie verschillende terreinfuncties.

In deze scriptie wordt gekeken naar de volgende terreinfunctie (zie ook figuur 3):

$$h(x) = A \sin(Bx) + Cx \quad \text{met} \quad A, B, C \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (1.4)$$

Hierin geeft parameter A de amplitude van de sinusöide weer. Op het terrein kan dit opgevat worden als de ‘hoogte’ van de lokale heuvels. Parameter B is het golfgetal van de terreinfunctie en deze waarde kan opgevat worden als de ‘breedte’ van de lokale heuvels. Dit is een omgekeerd evenredige relatie, d.w.z. des te groter de waarde van B , des te kleiner de breedte. Als laatste geldt dat parameter C de steilheid van de helling bepaalt. Merk hierbij op dat C negatief mag zijn, maar dit wegens symmetrie niks anders is dan een spiegeling $x \rightarrow -x$ en dus is het voldoende alleen naar waarden van $C \geq 0$ te kijken.

Wegens het golvende karakter van de sinusöide zullen (afhankelijk van de parameters) lokale minima en maxima bestaan. Afhankelijk van de waarden van de parameters zullen dan ook kritieke punten in (1.2) ontstaan.

Om meer informatie over het wel of niet hebben van evenwichtspunten te krijgen, worden in het grootste gedeelte van deze scriptie steeds twee parameters beschouwd als vaste constante waarden, terwijl de derde parameter beschouwd wordt als variabele. Door de parameter te variëren kan gekeken worden naar het wel of niet bestaan van evenwichtspunten in het terrein, afhankelijk van deze laatstgenoemde parameter. In hoofdstuk 2.2 en 2.3 wordt gekeken naar numerieke methoden om deze evenwichten te bepalen.

1.3 Bifurcatietheorie³

In deze paragraaf staat het begrip ‘bifurcatietheorie’ centraal. De bifurcatietheorie beschrijft hoe het evenwichtsgedrag van een dynamisch systeem verandert onder invloed van externe factoren. In het algemeen wordt gekeken naar de GDV $\dot{y} = f(y, \alpha)$, waarbij $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Hierbij is α de externe factor van het dynamische systeem.

De GDV die in deze scriptie bekeken wordt is GDV (1.2). In het bijzonder kan deze GDV geschreven worden als:

$$\dot{P}_j = \frac{Da^2}{6m\sqrt{m}} [U_x(P_j^+; A, B, C)^2 - U_x(P_j^-; A, B, C)^2]. \quad (1.5)$$

De externe factoren zijn nu parameters A , B , en C in de terreinfunctie uit paragraaf 1.2. Voor de bifurcatietheorie geldt dat de evenwichten van het dynamische systeem bepaald worden door de waarden van de parameters.

De eenvoudigste situatie waarbij deze afhankelijkheid te zien is, ontstaat als slechts één parameter wordt gevarieerd en de overige parameters een vaste waarde krijgen toegekend. In dat geval is het nog eenvoudiger om een bifurcatiediagram te maken. In een bifurcatiediagram worden de evenwichtspunten uitgezet tegen de waarde van de variabele parameter. In het diagram kan het dan voorkomen dat er een (locale) bifurcatie plaatsvindt. Een (locale) bifurcatie is een punt waarbij voor een zekere waarde van de variabele parameter een evenwicht ófwel ontstaat, ófwel verdwijnt. Er bestaan verschillende soorten bifurcaties. Voorbeelden hiervan zijn de zadelknoop-bifurcatie (saddle-node bifurcation) en de hooivorkbifurcatie (pitchfork bifurcation). Deze twee bifurcaties zullen veelvuldig voorkomen en zullen daarom verdere toelichting krijgen in de volgende twee subsecties.

³Deze paragraaf is geschreven a.d.h.v. delen uit [2].

1.3.1 Zadelknoop-bifurcatie (saddle-node bifurcation)

Bij een zadelknoop-bifurcatie ontstaat er ‘vanuit het niets’ voor een zekere waarde van een parameter α twee evenwichtspunten. De waarde van parameter α waarvoor deze evenwichtspunten ontstaan heet het bifurcatiepunt en dit punt wordt vanaf nu α_0 genoemd. Indien de parameter α voldoet aan $\alpha > \alpha_0$, dan heeft het systeem twee oplossingen, waarvan er één stabiel is en de ander instabiel. Geldt daarentegen dat $\alpha < \alpha_0$, dan heeft het systeem geen evenwichtspunten.

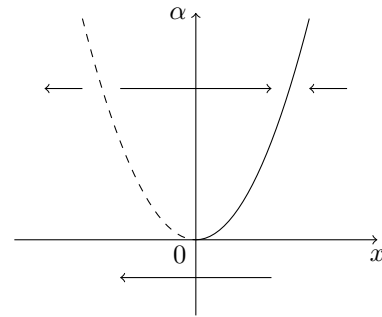
Een zadelknoop-bifurcatie kan ook ‘op zijn kop’ voorkomen. In dat geval is dit te interpreteren als het in de omgekeerde volgorde doorlopen van de bifurcatie binnen het systeem. Hierbij komen twee evenwichten, (stabiel en instabiel) samen in één punt, waarna het evenwicht verdwijnt.

- **Voorbeeld:** Als voorbeeld wordt gekeken naar het volgende dynamische systeem:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - x^2.$$

In dit dynamische systeem is α de externe factor, waarvan het bestaan van evenwichtspunten afhankelijk is. Dit systeem heeft geen evenwichten als $\alpha < 0$ geldt. Als $\alpha = 0$ geldt, dan heeft het systeem precies één evenwichtspunt. Dit punt is dus ook het bifurcatiepunt. Als laatste geldt hier dat er twee evenwichtspunten bestaan als $\alpha > 0$ geldt.

In dit eenvoudige voorbeeld zijn de evenwichten analytisch te berekenen. Het stabiele punt wordt gegeven door $x = \sqrt{\alpha}$ en het instabiele punt door $x = -\sqrt{\alpha}$. In figuur 4 is deze situatie geïllustreerd.



Figuur 4: Zadelknoop-bifurcatie voor $\dot{x} = \alpha - x^2$. De doorgetrokken lijn geeft de stabiele evenwichtspunten weer en de gestreepte lijn de instabiele. De pijlen geven de richting aan waarheen een vegetatiepuls zal bewegen.

1.3.2 Hooivorkbifurcatie (pitchfork bifurcation)

Bij een hooivorkbifurcatie ontstaan er vanuit één stabiel evenwichtspunt voor een zekere waarde van een parameter drie evenwichtspunten. Het punt waarin dit gebeurt is het bifurcatiepunt en wordt hier α_0 genoemd. Dan geldt voor $\alpha > \alpha_0$ dat er drie stationaire oplossingen ontstaan, waarvan de buitenste twee stabiel zijn en de middelste instabiel. Merk hierbij op dat de buitenste twee evenwichtspunten symmetrieën van elkaar zijn. Voor $\alpha < \alpha_0$ geldt dat er slechts één stabiele oplossing bestaat.

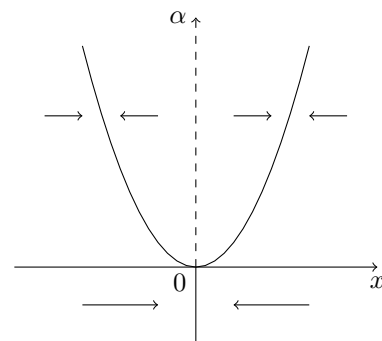
Het is ook mogelijk dat één instabiel evenwichtspunt overgaat in twee instabiele evenwichtspunten en één stabiel evenwichtspunt.

- **Voorbeeld:** Als voorbeeld wordt gekeken naar het volgende dynamische systeem:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - x^2).$$

In dit dynamische systeem is α de externe factor, waarvan het bestaan van evenwichtspunten afhankelijk is.

Voor $\alpha < 0$ heeft dit systeem één stabiel evenwichtspunt in $x = 0$. Voor $\alpha > 0$ heeft het systeem drie evenwichtspunten. De stabiele evenwichtspunten worden gegeven door $x = \pm\sqrt{\alpha}$ en het instabiele evenwicht wordt gevonden in $x = 0$. In $\alpha = 0$ wordt een bifurcatiepunt gevonden. Dit is het punt waar twee evenwichten ontstaan en één evenwicht instabiel wordt. In figuur 5 is deze situatie geïllustreerd.



Figuur 5: Hooivorkbifurcatie voor $\dot{x} = x(\alpha - x^2)$. De gestreepte lijn geeft de instabiele evenwichtspunten weer en de doorgetrokken lijnen de stabiele evenwichtspunten. De pijlen geven de richting aan waarheen een vegetatiepuls zal bewegen.

2 Continuatiemethoden voor het bepalen van equilibria

In dit hoofdstuk worden de numerieke methoden, die gebruikt worden om de evenwichtspunten te bepalen, beschreven. Het belangrijkste aspect om een bifurcatiediagram te kunnen maken is het ‘volgen’ van de evenwichtskromme. Dit proces wordt continuatie genoemd. Naast de continuatie van de evenwichtskromme is ook een methode nodig om de kritieke punten te benaderen. Dit wordt gedaan met behulp van de methode van Newton-Raphson. Het proces van continuatie en de methode van Newton-Raphson worden vervolgens gecombineerd. Deze combinatie geeft de in deze scriptie gebruikte oplosmethode voor het vinden van de equilibria: de continuatiemethode pseudo-arclength continuation. Zowel continuatie, de methode van Newton-Raphson als ook de methode van pseudo-arclength continuation worden in de rest van dit hoofdstuk behandeld.

Aangezien deze scriptie vooral een numerieke insteek heeft, kan het domein waarnaar gekeken wordt niet oneindig groot zijn. Er wordt geprobeerd een zo groot mogelijk domein te kiezen, waarbij een middenweg gezocht wordt tussen betrouwbare resultaten en minimale rekentijd. Het kiezen van een begrensde domein heeft als nadeel dat de oplossingen niet meer overeen komen met de werkelijkheid, indien de vegetatiepuls in de buurt van de randen van het domein komen. Om dit probleem te voorkomen zal de vegetatiepuls altijd een beginpositie rond het midden van het domein verkrijgen, waardoor de invloed van de begrensde randen minimaal is.

Het gevolg is dat GDV (1.3) aangepast dient te worden, alvorens deze vergelijking numeriek opgelost kan worden. Dit betekent dat de randvoorwaarden aangepast dienen te worden. In plaats van $U_x(\pm\infty) = 0$ wordt nu $U_x(\pm L) = 0$ gebruikt, met $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zo groot mogelijk. In deze scriptie neemt L de waarde $L = 20$ aan, waardoor het domein bestaat uit het interval $[-20, 20]$.

2.1 Continuatiemethoden⁴

‘Continuatiemethoden’ is een algemene naam voor een groep methoden, die middels benaderingsvergelijkingen de evenwichten van een dynamisch systeem bepalen, afhankelijk van een bifurcatieparameter. Hierbij wordt continuatie toegepast op de bifurcatieparameter. Bij alle continuatiemethoden gaat het om het vinden van de equilibriumpunten die voldoen aan een algemene functie $\frac{\partial f}{\partial x} = f(x, \alpha) = 0$. Hierbij geldt $x \in \mathbb{R}^n$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. (In deze scriptie is n bijna altijd gelijk aan 1.) Afhankelijk van parameter α geeft de vergelijking $f(x, \alpha) = 0$ precies n vergelijkingen op \mathbb{R}^{n+1} . In het algemeen definiëren deze vergelijkingen een gladde ééndimensionale kromme (een variëteit) op de ruimte \mathbb{R}^{n+1} . Het berekenen van deze evenwichtskromme geeft de afhankelijkheid tussen de evenwichtspunten en de parameter weer. Continuatiemethoden zijn methoden die deze evenwichtskromme proberen te benaderen, oftewel de kromme proberen te vinden die voldoet aan alle n vergelijkingen.

Numeriek kan een oplossing iteratief benaderd worden, d.w.z. er wordt een rij punten x_1, x_2, x_3, \dots bepaald, die gezamenlijk een kromme in de \mathbb{R}^{n+1} geven. De afstand tussen twee opeenvolgende punten bepaalt de nauwkeurigheid waarmee de kromme benaderd wordt.

Iedere continuatiemethode heeft een beginpunt nodig, die gebruikt wordt om het volgende punt te bepalen. Het belangrijkste aspect aan dit beginpunt is, dat het beginpunt de evenwichtskromme ‘dichtbij genoeg’ moet benaderen, omdat het iteratieproces anders divergeert. De convergentiestraal kan voor iedere situatie anders zijn. Daarnaast is het belangrijk een richting mee te geven aan het beginpunt, aangezien de kromme in twee richtingen bepaald kan worden.

In deze scriptie wordt de functie f gegeven door:

$$f(P) = U_x(P^+)^2 - U_x(P^-)^2, \quad (2.1)$$

waarbij P^+ in de limiet de benadering van de pulselocatie is vanaf de rechterkant en P^- vanaf de linkerkant, oftewel $U_x(P^+) = \lim_{X \downarrow P} U_x(X)$ en $U_x(P^-) = \lim_{X \uparrow P} U_x(X)$. De oplossingen U kunnen gevonden worden door stelsel (2.5) op te lossen.

⁴Deze paragraaf is geschreven a.d.h.v. delen uit [5].

Functie (2.1) beschrijft de snelheid waarmee de vegetatiepuls zich over het terrein voortbeweegt. Als de snelheid waarmee de vegetatiepuls zich over het terrein beweegt naar nul gaat, is er dus een evenwichtspunt bereikt.

De continuatie van de evenwichtskromme kan gedaan worden door de parameter handmatig te veranderen of deze door middel van een berekening aan te passen. In eerste instantie wordt de handmatige wijze beschreven. Hiervoor dient eerst een evenwichtspunt gevonden te worden. Uit GDV-simulaties van de pulselocatie van het model blijkt dat voor $A = 1$, $B = 1$ en $C = 1/8$ een evenwicht gevonden wordt. Indien nu B en C als vaste constante waarden worden beschouwd en A als de bifurcatieparameter wordt geïnterpreteerd, kan gekeken worden of er een minimale waarde van parameter A is waarvoor GDV (1.2) nog wel een evenwicht heeft; oftewel: heeft het systeem een bifurcatiepunt afhankelijk van parameter A ? En indien dit het geval is: voor welke waarde van parameter A ? (Het is hierbij nuttig te weten dat het bifurcatiediagram een zadel-knoop bifurcatie wordt.)

Aan de hand van computersimulaties is het mogelijk een bifurcatieplot te maken afhankelijk van parameter A . In deze simulaties wordt parameter A stapsgewijs kleiner gemaakt, beginnend bij een A waarvoor het systeem wel een oplossing heeft (bijvoorbeeld $A = 1$). Voor iedere waarde van A wordt met behulp van de methode van Newton-Raphson de nieuwe evenwichtslocatie benaderd. Naarmate parameter A (amplitude van de verstoringen) afneemt, gaat de terreinfunctie h steeds meer lijken op een constante helling. Van een constante helling is bekend dat deze geen evenwichtspunten heeft, dus zodra parameter A onder een zekere (onbekende) waarde komt, zeg A^* , dan zal de methode van Newton-Raphson geen evenwichtsooplossing meer vinden. Deze A^* is de parameter waarde van het bifurcatiepunt. Hier bevindt zich meteen ook het grootste nadeel van de methode van Newton-Raphson voor het vinden van de evenwichtspunten in dit systeem. Bepaal op voorhand een stapgrootte $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$ waarmee parameter A bij iedere iteratiestap wordt verkleind. Voor een bepaalde waarde van A , zeg A' , is dan nog wel een evenwichtspunt te vinden in het systeem, maar voor $A' - \Delta$ niet meer. Dit betekent dat het bifurcatiepunt voor deze situatie zich tussen deze twee waarden bevindt. Hier geldt dan $A^* \in (A', A' - \Delta)$. Echter waar deze A^* zich precies bevindt, is onbekend. Het is mogelijk om Δ nog kleiner te maken en dit zal het interval $(A', A' - \Delta)$ verkleinen, maar dan nog is de exacte waarde van het bifurcatiepunt niet bekend. Bovendien neemt ook de rekentijd van de simulatie toe bij kleinere waarden van Δ .

Nog een nadeel is dat de simulatie twee keer uitgevoerd moet worden, omdat deze methode óf de stabiele- óf de instabiele oplossingskromme volgt. Bij een zadel-knoop bifurcatie (wat het bifurcatiediagram afhankelijk van parameter A is) vormen deze twee oplossingskrommen samen het bifurcatiediagram. Voor beide zal dus een beginvoorwaarde gegeven moeten worden en voor beide zal simulatie apart de evenwichtskromme moeten bepalen.

Beide bovenstaande problemen kunnen opgelost worden door ook parameterwaarde A iteratief te berekenen. Dit zal gedaan worden in paragraaf 2.3. In de volgende paragraaf wordt de methode van Newton-Raphson beschreven, die iteratief de evenwichtspunten benadert voor gegeven parameter waarden.

2.2 De methode van Newton-Raphson

In paragraaf 1.2 is al bekend geworden dat een terreinfunctie die alleen uit een constante helling bestaat geen evenwichtspunten heeft. In die paragraaf is ook besproken dat een toevoeging van een sinusoïde aan deze constante helling, wiens amplitude groot genoeg is, leidt tot het ontstaan van evenwichtspunten in het systeem. Voor het berekenen van de posities van deze evenwichtspunten wordt de methode van Newton-Raphson gebruikt. Deze methode bepaalt voor een gegeven beginpunt de evenwichtsooplossing, mits dit beginpunt juist gekozen is. De theorie zegt dat de methode van Newton-Raphson convergeert naar het evenwichtspunt als het beginpunt dicht genoeg bij de evenwichtsooplossing ligt, oftewel als het beginpunt binnen een interval $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ zit, voor $x^* \in \mathbb{R}^n$ de exacte waarde van het evenwichtspunt en voor een $\delta \in \mathbb{R}_{>0}^n$, die voor iedere situatie anders kan zijn. Licht het beginpunt te ver van het evenwichtspunt af, dan zal de methode divergeren [3].

In deze scriptie moet naast het vinden van de juiste beginvoorwaarde ook rekening gehouden worden met de invloed van de parameters. Zoals in paragraaf 1.2 al kort is toegelicht, heeft de GDV (1.2) alleen evenwichtspunten als de parameters A , B en C goed gekozen zijn. De methode van Newton-Raphson zal dus alleen een evenwichtspunt vinden als die allereerst bestaat (dit wordt bepaald door de parameters A , B en C) en als de beginvoorwaarde van het systeem goed gekozen is.

De methode van Newton-Raphson is een iteratiemethode, die gegeven de sneleheidsfunctie $f(P)$ (zie 2.1) en zijn afgeleide $f'(P)$ met $P \in \mathbb{R}^n$, de evenwichtspunten P^* bepaalt, waarvoor $f(P^*) = 0$ geldt. Startend vanuit een initiële waarde $P_0 \in \mathbb{R}^n$ worden P_1, P_2, \dots benaderd door de volgende uitdrukking:

$$P_{n+1} = P_n - J(f(P_n))^{-1}f(P_n), \quad (2.2)$$

waarbij $J(f(P_n))$ de Jacobiaanmatrix is van $f(P_n)$.

Deze iteratiemethode (2.2) bepaalt het volgende punt aan de hand van het vorige punt. Echter de methode van Newton-Raphson blijft een benaderingsmethode; dit houdt in dat de exacte waarde P^* waarvoor $f(P^*) = 0$ niet gevonden wordt maar een benadering P' die overeenkomt met de waarde van P^* . De methode van Newton-Raphson minimaliseert de waarde van $|f(P_n)|$.

Het probleem dat zich nu voordoet, is dat de Jacobiaan $J(f)$ uit vergelijking (2.2) bepaald dient te worden. Voor $P \in \mathbb{R}$ geldt $J(f) = f'$. Het berekenen van deze afgeleide vereist enige tijd en wiskundige voorkennis over perturbatietheorie. De berekening is echter wel mogelijk en voor geïnteresseerde lezers is deze afleiding terug te vinden in appendix A.1.

Een eenvoudige manier om dit probleem te vermijden is het gebruik van de secant-methode. Bij deze methode wordt de term $f'(P_n)$ benaderd door $f'(P_n) = \frac{f(P_n) - f(P_{n-1})}{P_n - P_{n-1}}$. Ingevuld in vergelijking (2.2) wordt de benadering van het volgende punt gegeven door [3]:

$$P_{n+1} = P_n - \frac{P_n - P_{n-1}}{f(P_n) - f(P_{n-1})}f(P_n). \quad (2.3)$$

Hierbij moet wel opgemerkt worden dat in plaats van één initiële waarde (P_0) nu de eerste twee initiële waarden (P_1 & P_0) gegeven dienen te worden.

Het uitrekenen van de afgeleide heeft echter wel de voorkeur, aangezien de secant-methode een benadering voor de afgeleide gebruikt. Hierdoor zal de iteratiemethode zelf minder precies zijn en zijn wellicht meer iteratiestappen nodig om dezelfde nauwkeurigheid te behalen.

Zoals hierboven vermeld, is de afgeleide van f te vinden in appendix A.1. De uitdrukking voor f' wordt gegeven door:

$$f'(P) = 2U_x^+[U_{xx}^+ + U_{1x}^+] - 2U_x^-[U_{xx}^- + U_{1x}^-], \quad (2.4)$$

waarbij U^\pm en U_1^\pm gevonden kunnen worden door de oplossingen te bepalen van respectievelijk stelsels (2.5) en (2.6). De definitie van U^\pm kan gevonden in appendix A.1. Vanaf nu zal in deze scriptie de uitdrukking (2.4) als bekend veronderstelt worden.

$$\begin{cases} 0 & = U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U^\pm(P) & = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} 0 & = U_{1xx}^\pm + h_x U_{1x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm, \\ U_{1x}^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U_1^\pm(P) & = -U_x^\pm(P). \end{cases} \quad (2.6)$$

Let hierbij op dat de U^\pm in stelsel (2.6) de oplossing is van stelsel (2.5).

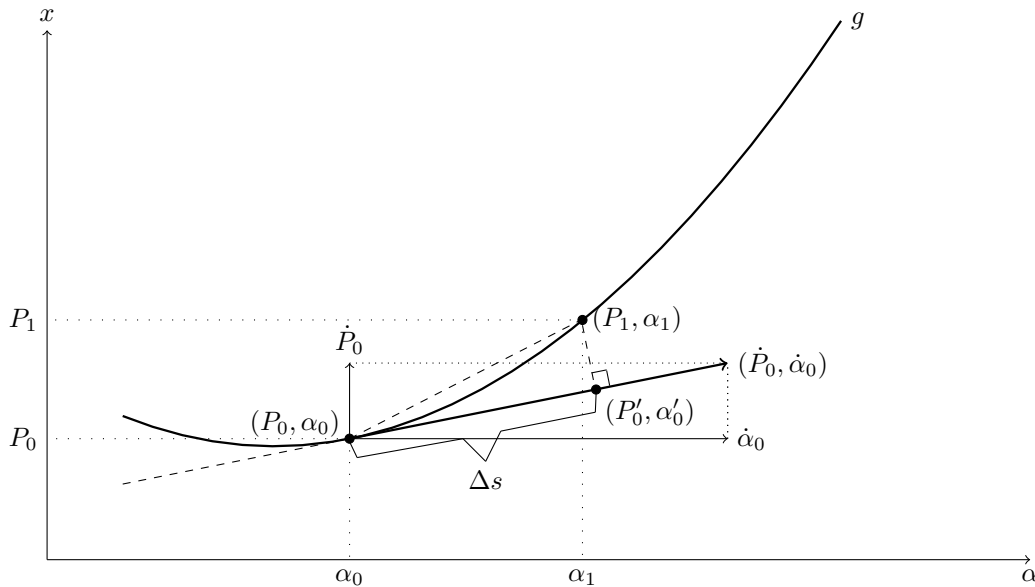
2.3 De methode van pseudo-arclength continuation⁵

De methode van pseudo-arclength continuation maakt het continuëren van een oplossingsfamilie over een variëteit mogelijk. Eerder is al opgemerkt dat de evenwichtspunten op het gebied voldoen aan:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = f(P, \alpha) = U_x(P^+, \alpha)^2 - U_x(P^-, \alpha)^2 = 0, \quad (2.7)$$

waarbij P de pulselocatie is en $\alpha \in \{A, B, C\}$ de bifurcatieparameter. Neem aan dat er een oplossing (P_0, α_0) van $f(P, \alpha) = 0$ bestaat, dan wordt dit punt gezien als het beginpunt. Bij dit beginpunt hoort een genormaliseerde richtingsvector $(\dot{P}_0, \dot{\alpha}_0)$ van de oplossingsfamilie, die de richtingen van de desbetreffende variabelen aanduiden.

Bij de methode van pseudo-arclength continuation worden twee vergelijkingen gelijktijdig opgelost. De eerste vergelijking is dezelfde vergelijking als bij de methode van Newton-Raphson: deze vergelijking zorgt ervoor dat de snelheid waarmee de puls zich voortbeweegt nog steeds nul is in het nieuwe evenwichtspunt. De tweede vergelijking hoort specifiek bij de methode van pseudo-arclength continuation. Deze vergelijking benadert de positie van het volgende punt op de evenwichtskromme. De methode is geïllustreerd in figuur 6 en werkt als volgt: vanuit het beginpunt (P_0, α_0) is de richtingsvector $(\dot{P}_0, \dot{\alpha}_0)$ bekend. Vooraf is een stapgrootte Δs gegeven. (Over het algemeen wordt de waarde van Δs zeer klein genomen, echter kunnen te kleine waarden van Δs tot numerieke fouten leiden. Daarentegen zullen te grote waarden van Δs leiden tot onnauwkeurige benaderingen of maken deze waarden de methode zelfs niet mogelijk (zie ook figuur 6).) Vervolgens wordt het beginpunt (P_0, α_0) een lengte van Δs verschoven in de richting van de richtingsvector $(\dot{P}_0, \dot{\alpha}_0)$. Dit creëert het nieuwe punt (P'_0, α'_0) . Vervolgens zoekt de methode van pseudo-arclength continuation het hypervlak dat de richtingsvector $(\dot{P}_0, \dot{\alpha}_0)$ orthogonaal snijdt in het punt (P'_0, α'_0) . Dit hypervlak snijdt niet alleen de richtingsvector, maar ook de evenwichtskromme, mits de waarde van Δs klein genoeg gekozen is. Het snijpunt van de evenwichtskromme en het hypervlak wordt het volgende punt (P_1, α_1) in het iteratieproces. Vervolgens wordt deze iteratiestap herhaald tot de gevraagde nauwkeurigheid wordt behaald. Als laatste wordt de richtingsvector bij dit nieuwe punt uitgerekend en de methode gaat verder om (P_2, α_2) te bepalen.



Figuur 6: Schematische weergave van de methode van pseudo-arclength continuation, waarbij de evenwichtskromme g iteratief wordt benaderd.

⁵Deze paragraaf is geschreven a.d.h.v. delen uit [5].

Nu het idee achter de methode duidelijk is, kan gekeken worden naar de wiskundige vergelijkingen die het proces weergeven. De methode van pseudo-arclength continuation lost de volgende vergelijkingen op om het punt (P_1, α_1) te vinden:

$$\begin{aligned} f(P_1, \alpha_1) = U_x(P_0^+, \alpha_0)^2 - U_x(P_0^-, \alpha_0)^2 &= 0, \\ \langle P_1 - P_0, \dot{P}_0 \rangle + (\alpha_1 - \alpha_0)\dot{\alpha}_0 - \Delta s &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vervolgens wordt stelsel (2.8) hergeformuleerd tot onderstaande vergelijking (2.9). In deze vergelijking is ook de Newton-Raphson iteratiestap zichtbaar. Zoals in stelsel (2.8) te zien is, moeten er twee vergelijkingen gelijktijdig opgelost worden. Dit betekent dat de functie, wier absolute waarde geminimaliseerd wordt, een matrix met twee elementen wordt. In het bijzonder houdt dit ook in dat de Jacobiaanmatrix een twee bij twee matrix wordt. In de eerste rij van deze Jacobiaanmatrix worden de afgeleiden naar de pulslocatie (f_P) en naar de parameter (f_α) van de eerste vergelijking van stelsel (2.8) teruggevonden. De tweede rij geeft de arclength voorwaarden die gevonden kunnen worden door de afgeleiden naar de pulslocatie en naar de parameter van de tweede vergelijking van stelsel (2.8) te bepalen.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_P & f_\alpha \\ \dot{P}_0 & \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_x(P_0^+, \alpha_0)^2 - U_x(P_0^-, \alpha_0)^2 \\ \langle P_1 - P_0, \dot{P}_0 \rangle + (\alpha_1 - \alpha_0)\dot{\alpha}_0 - \Delta s \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Dit iteratieproces (2.9) wordt herhaald tot de absolute waarde van de som van beide vergelijkingen (2.8) de vereiste nauwkeurigheid heeft behaald.

Vervolgens wordt de richtingsvector voor het nieuwe punt berekend door

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{\alpha}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_P & f_\alpha \\ \dot{P}_0 & \dot{\alpha}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

te bepalen en de hieruit berekende vector te normaliseren. Het normaliseren van de richtingsvector wordt gedaan zodanig dat $\|\dot{P}_1\|^2 + \dot{\alpha}_1^2 = 1$ geldt.

2.3.1 De methode van pseudo-arclength continuation toegepast

In het geval van pseudo-arclength continuation is de functie f , die gegeven is in vergelijking (2.1), niet alleen maar afhankelijk van de pulslocatie, maar ook van een parameter A , B en/of C (de parameters in de terreinfunctie (1.4)).

Doordat de functie f nu ook afhankelijk is van de parameter, dient deze parameter ook in de functie opgenomen te worden. De nieuwe functies zien er als volgt uit:

$$\begin{aligned} f(P, A) &= U_x(P^+, A)^2 - U_x(P^-, A)^2, \\ f(P, B) &= U_x(P^+, B)^2 - U_x(P^-, B)^2, \\ f(P, C) &= U_x(P^+, C)^2 - U_x(P^-, C)^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

waarbij P^+ en P^- op dezelfde wijze gedefiniëerd zijn als in vergelijking (2.1). Merk op dat de terreinfunctie nog altijd is voorzien van alle drie parameters A , B en C , maar dat nu slechts één van de drie parameters gevarieerd wordt, terwijl de andere twee parameters een vaste waarde toegerekend krijgen.

Bij de methode van Newton-Raphson is al aan bod gekomen dat de afgeleiden van de snelheidsfuncties (2.11) lastig te berekenen zijn. De methode van pseudo-arclength continuation maakt ook gebruik van deze afgeleide, maar er dient er nog één berekend te worden, aangezien de Jacobiaanmatrix meerdere afleidingen gebruikt.

Het afleiden van de snelheidsfuncties (2.11) naar de pulslocatie verandert niet ten opzichte van het berekenen van de afgeleide van de snelheidsfunctie (2.1). De parameter in snelheidsfuncties (2.11) kan hier als een constante geïnterpreteerd worden, die steeds met de functie meegegeven kan worden (zie paragraaf 2.2 voor het antwoord en appendix A.1 voor de uitwerking van deze afleiding).

De afleiding van de snelheidsfunctie naar de parameter varieert op sommige vlakken van de afleiding van de snelheidsfunctie naar de pulslocatie. De berekening van deze afleiding is na te lezen in appendix A.2. De uitdrukking voor f_α wordt gegeven door:

$$f_\alpha = 2U_{\alpha_x}^+ U_{\alpha_{1_x}}^- - 2U_{\alpha_x}^- U_{\alpha_{1_x}}^-, \quad (2.12)$$

waarbij $\alpha \in \{A, B, C\}$ geldt. Hierin kunnen U_α^\pm en $U_{\alpha_1}^\pm$ gevonden worden door respectievelijk de oplossingen van stelsels (2.13) en (2.14) te bepalen.

$$\begin{cases} 0 &= U_{\alpha_{xx}}^\pm + h_x U_{\alpha_x}^\pm + h_{xx} U_\alpha^\pm + 1 - U_\alpha^\pm, \\ U_{\alpha_x}^\pm(\pm\infty, \alpha) &= 0, \\ U_\alpha^\pm(P, \alpha) &= 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} 0 &= U_{\alpha_{1_{xx}}}^\pm + h_{0_x} U_{\alpha_{1_x}}^\pm + h_{0_{xx}} U_{\alpha_1}^\pm - U_{\alpha_1}^\pm + h_{1_x} U_{\alpha_x}^\pm + h_{1_{xx}} U_\alpha^\pm, \\ U_{1_x}^\pm(\pm\infty, \alpha) &= 0, \\ U_1^\pm(P, \alpha) &= 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

waarbij U_α in stelsel (2.14) een oplossing is van stelsel (2.13). Daarnaast is h_1 een functie die voor A , B en C anders is. De waarden van deze h_1 kunnen ook teruggevonden worden in appendix A.2. Afleidingen (2.4) en (2.12) zijn nu bekend en kunnen ingevuld worden in de Jacobiaanmatrix in vergelijking (2.9).

3 Resultaten⁶

In de vorige hoofdstukken is het wiskundige model voor het wereldwijde probleem van verwoestijning aan de orde geweest en is er gekeken naar de methode van Newton-Raphson en de continuatiemethode pseudo-arclength continuation voor het vinden van evenwichten van een vegetatiepuls. In dit hoofdstuk worden de resultaten, verkregen met de zojuist genoemde continuatiemethoden, beschreven.

Allereerst wordt het bifurcatiediagram van één vegetatiepuls afhankelijk van parameter A bepaald zonder continuatie toe te passen. De parameterwaarde wordt ‘handmatig’ stapsgewijs aangepast. Zoals in paragraaf 2.1 al beschreven werd, heeft deze methode enkele tekortkomingen. Wegens deze tekortkomingen werd de methode van pseudo-arclength continuation geïntroduceerd. Ook met deze methode wordt een bifurcatiediagram van één vegetatiepuls afhankelijk van parameter A bepaald. De twee methoden worden vervolgens met elkaar vergeleken. Daarnaast wordt ook een bifurcatiediagram van dezelfde puls afhankelijk van parameter C gemaakt.

Van parameter B is het lastiger om een bifurcatiediagram te maken en daarom is de waarde van parameter B tot dusver steeds gelijk genomen aan 1. Parameter B is de periode van de verstoring op het terrein, echter door parameter B te variëren, kan niet alleen de positie van de kritieke punten veranderen, maar ook de stabiliteit. Dit houdt in dat voor een bepaalde waarde van parameter B , zeg $B = 1$ het punt x instabiel is, terwijl deze voor een andere waarde van parameter B , zeg $B = 2$, stabiel is geworden. Deze verandering in de stabiliteit is zeer interessant en hierop wordt verder ingegaan aan het eind van dit hoofdstuk.

Vervolgens kan ook gekeken worden naar de afhankelijkheid van verscheidene parameters op elkaar. In deze scriptie worden specifiek de parameters A en C bedoeld. Er zal gekeken worden naar hoe de parameters A en C zich tot elkaar verhouden; anders geformuleerd: hoe verhouden de helling van het gebied en de amplitude van de verstoringen zich tot het wel of niet hebben van evenwichten? Daarnaast is het niet realistisch naar slechts één vegetatiepuls te kijken. In de natuur zijn grote gebieden bedekt met grote aantallen pulsen. Al deze pulsen beïnvloeden elkaars gedrag. Indien een puls wordt toegevoegd in het model, zal de eerste (al bestaande) puls beïnvloed worden en andere evenwichtspunten vinden, mits de twee pulsen dicht genoeg bij elkaar worden geplaatst. De term ‘dicht genoeg’ zal nadrukkelijk beschreven worden in dit hoofdstuk.

In de natuur worden natuurlijk veel meer dan twee pulsen aangetroffen, die allemaal op elkaar reageren. Het is dus ook zeer interessant onderzoek te doen naar meer dan twee vegetatiepulsen. Echter het is moeilijk iets te kunnen zeggen over het gedrag van één puls die beïnvloed wordt door een andere puls in de buurt. Het toevoegen van vegetatiepulsen op een gebied maakt het gedrag van één van deze vegetatiepulsen onvoorspelbaarder. Het is nog steeds mogelijk zinnige uitspraken te doen over deze pulsen, maar het gedrag van deze (beïnvloede) puls zal niet meer volledig overeen komen met het gedrag dat voorkwam bij één enkele puls. Naarmate meer vegetatiepulsen in het gebied worden toegevoegd, neemt de beïnvloeding van de pulsen op elkaar ook toe. Het gedrag van de pulsen individueel gezien, zal dan ook onvoorspelbaarder worden en het wordt steeds moeilijker nog zinnige uitspraken te doen over het gedrag van deze pulsen. Bovendien moet rekening gehouden worden met de rekentijd die het model in beslag neemt. Van één naar twee pulsen neemt de rekentijd al fors toe.

In dit hoofdstuk wordt puur naar de beïnvloeding van twee vegetatiepulsen op elkander gekeken. Hoewel dit geen realistisch beeld geeft van de natuur, helpt het de wiskunde bij het begrijpen van deze pulsegedragingen.

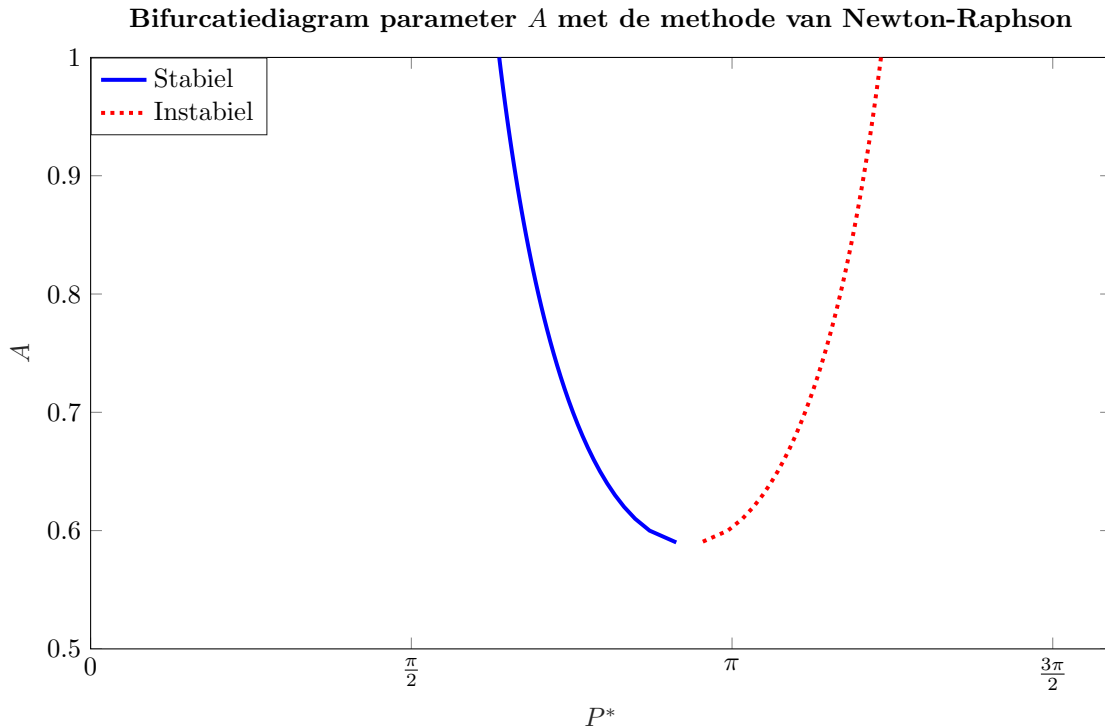
⁶De Matlab code die gebruikt is voor de simulaties in dit hoofdstuk is te vinden via [7].

3.1 Resultaten met de methode van Newton-Raphson

In paragraaf 2.2 is de methode van Newton-Raphson behandeld. Hierbij is vermeld dat het bifurcatiediagram gemaakt kan worden door de evenwichtspunten te bepalen voor vaste waarden van de parameter. Door deze parameter stapsgewijs af te laten nemen, kan de methode van Newton-Raphson toch tot uitvoering gebracht worden en wordt figuur 7 verkregen.

Indien de data bij dit diagram bekeken worden, is te zien dat de methode van Newton-Raphson een evenwicht kan vinden voor een waarde van parameter $A \geq 0.59$. Echter er wordt geen evenwicht gevonden voor $A = 0.58$. Het nadeel van deze methode (zoals beschreven in paragraaf 2.1) is dat het bifurcatiepunt voor dit bifurcatiediagram zich ergens in het interval $[0.58, 0.59]$ bevindt. Deze onduidelijkheid rond het bifurcatiepunt toont zich in het ‘gat’ aan de onderzijde van het bifurcatiediagram.

Daarnaast is ook de locatie van het bifurcatiepunt onbekend. Uit de data blijkt dat deze zich in het interval $[2.87, 2.99]$ moet bevinden. De enige conclusie die uit deze simulatie getrokken kan worden, is dat er een bifurcatiepunt (P^*, A^*) bestaat met $P^* \in [2.87, 2.99]$ en $A^* \in [0.58, 0.59]$.



Figuur 7: Bifurcatiediagram van parameter A uitgezet tegen evenwichtspunt P^* voor de terreinfunctie $h(x) = A \sin(x) + \frac{1}{8}x$ gemaakt met de methode van Newton-Raphson. In het blauw zijn de stabiele- en in het rood zijn de instabiele evenwichtspunten zichtbaar.

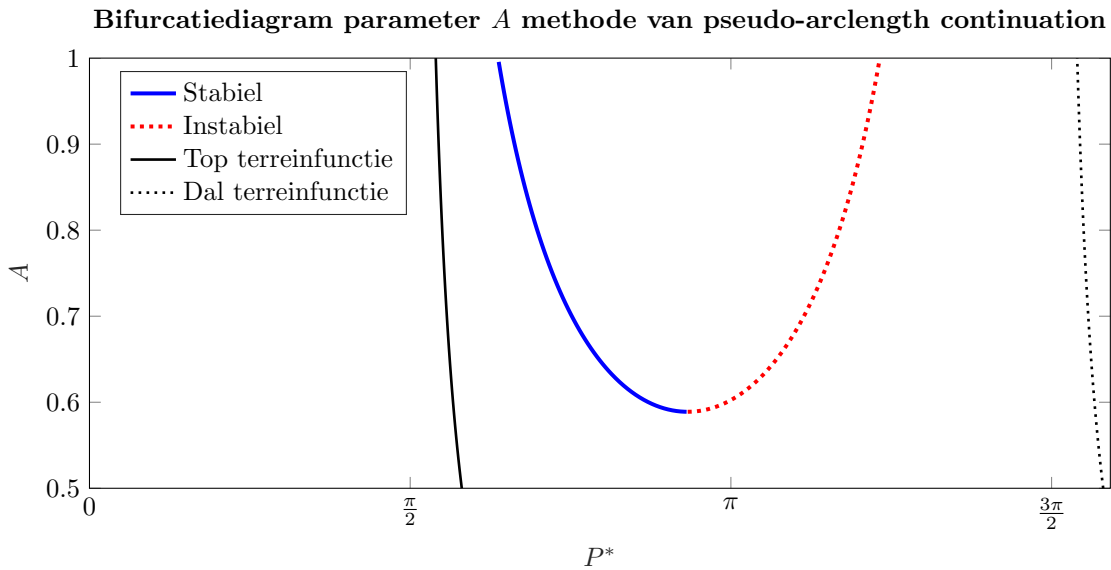
In het bifurcatiediagram worden stabiele- en instabiele evenwichtspunten getoond. De stabiliteit van een evenwichtspunt kan bepaald worden door te kijken naar de afgeleide van de snelheidsfunctie (2.4). Uit de differentiaalrekening is bekend dat een evenwichtspunt stabiel is als de afgeleide in dat punt negatief is. Evenzo is een evenwichtspunt instabiel als de afgeleide in dat punt positief is. Uit de data kan dan de stabiliteit voor ieder evenwichtspunt afgelezen worden.

De methode van Newton-Raphson werkt om evenwichtspunten te vinden voor het systeem, maar de methode hapert rondom het bifurcatiepunt. Daarom worden overige resultaten in dit hoofdstuk verkregen d.m.v. de continuatiemethode pseudo-arclength continuation, aangezien die methode de continuatie van de parameter A heeft inbegrepen.

3.2 Resultaten met de methode van pseudo-arclength continuation

De methode van Newton-Raphson leidde tot het ontstaan van een ‘gat’ in het bifurcatiediagram rondom het bifurcatiepunt. Dit kwam doordat er niet over de parameter werd gecontinueerd. Dit probleem wordt opgelost als gebruik wordt gemaakt van de methode van pseudo-arclength continuation. Deze methode loopt namelijk voor iedere iteratie een stapgrootte van Δs over de evenwichtskromme. Dit betekent dat de methode in de buurt van het bifurcatiepunt doorloopt en ook hier data genereert.

In figuur 8 is een bifurcatieplot afhankelijk van parameter A te zien voor $B = 1$ en $C = 1/8$. Hetgeen als eerste opvalt, is het doorlopen van de kromme rond het bifurcatiepunt. Er zijn geen gaten zichtbaar. Dit betekent ook dat de kromme een minimum heeft en daarmee is bij numerieke benadering de minimale waarde van de amplitude van de sinus bekend, waarvoor nog wel een evenwicht bestaat.



Figuur 8: Bifurcatiediagram van parameter A uitgezet tegen evenwichtspunt P^ voor de terreinfunctie $h(x) = A \sin(x) + \frac{1}{8}x$ gemaakt met de methode van pseudo-arclength continuation. De kritieke A -waarde van het bifurcatiepunt wordt gegeven door $A \approx 0.5889$. In het blauw zijn de stabiele- en in het rood zijn de instabiele evenwichtspunten zichtbaar. De zwarte doorgetrokken lijn geeft de lokale top van de terreinfunctie weer en de gestippelde zwarte lijn geeft het lokale dal van de terreinfunctie weer.*

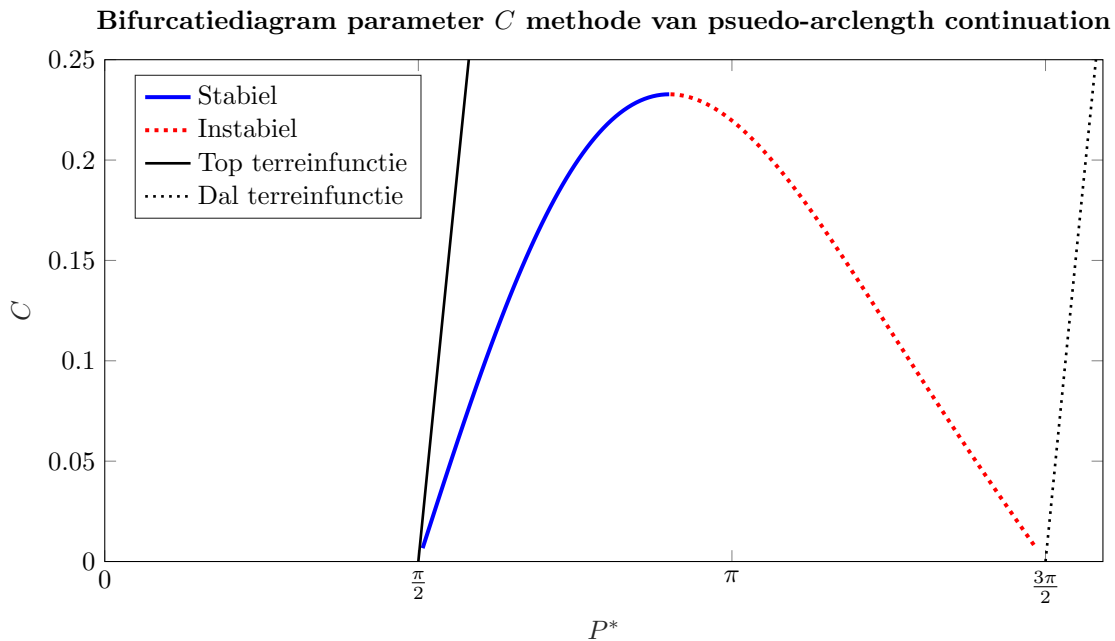
Als ook gekeken wordt naar de lokale maxima en minima van de terreinfunctie is pas goed te zien wat figuur 8 betekent. In het bifurcatiediagram is nu te zien dat hoe groter de waarde van parameter A is, hoe meer het stabiele evenwicht zich richting de top van het gebied begeeft. Tegelijkertijd is het instabiele evenwicht steeds dichterbij de plek van het dal te vinden. Het gehele bifurcatiediagram ligt meer bij de top dan bij het dal. Dit komt doordat de invloed van de constante helling ervoor zorgt dat de evenwichten aan de rechterkant van de lokale top van de sinus gevonden worden. De invloed van de amplitude zorgt voor een opwaartse beweging van de vegetatiepuls naar de lokale top van de sinus.

Worden daarentegen kleinere waarden van parameter A bekeken, dan is te zien dat de invloed van de amplitude van de sinus afneemt en de invloed van de constante helling toeneemt. De stabiele evenwichtspunten bevinden zich ook niet langer dichtbij de top van de sinus, maar meer richting het buigpunt van de sinus. Het buigpunt is in dit geval voor iedere A gegeven door $x = \pi$. Indien parameter A de kritieke A -waarde van het bifurcatiepunt aanneemt, komen de stabiele- en instabiele evenwichten dicht bij elkaar en komen ze in de buurt van het buigpunt van de sinus te liggen. Door de invloed van de constante helling is het bifurcatiepunt zelf niet in het buigpunt te vinden, maar aan de linkerkant hiervan.

De minimale waarde van parameter A waarvoor een evenwicht gevonden wordt, is $A \approx 0.5889$. (Hier geldt geen gelijkheid wegens het gebruik van de numerieke simulatie.) Wordt een simulatie van de bewegingen van de vegetatiepulsen bekeken voor waarden van parameter $A < 0.5889$, dan is te zien dat de vegetatiepuls over de toppen en dalen heuvelopwaarts beweegt. (Uiteindelijk wordt alsnog een evenwicht gevonden, maar dit komt doordat de puls te dicht bij de randen van het domein komt en is het gevolg van numerieke tekortkomingen.)

De locatie van het bifurcatiepunt wordt gevonden in $P^* \approx 2.93$. Dit punt ligt inderdaad in het interval dat in paragraaf 3.1 bepaald was.

Als voor parameter A een bifurcatiediagram gevonden kan worden, dan is dit hoogstwaarschijnlijk ook mogelijk voor parameter C . In figuur 9 wordt dit bifurcatiediagram getoond.



Figuur 9: Bifurcatiediagram van parameter C uitgezet tegen evenwichtspunt P^* voor de terreinfunctie $h(x) = \sin(x) + Cx$ gemaakt met de methode van pseudo-arclength continuation. In het blauw zijn de stabiele- en in het rood zijn de instabiele evenwichtspunten zichtbaar. De zwarte doorgetrokken lijn geeft de lokale top van de terreinfunctie weer en de gestippelde zwarte lijn geeft het lokale dal van de terreinfunctie weer.

Het bifurcatiediagram voor parameter C staat ‘op zijn kop’ ten opzichte van het bifurcatiediagram voor parameter A . Naarmate de helling van het terrein toeneemt, zal de vegetatiepuls een grotere drang naar boven ondervinden en aangezien de amplitude een vaste waarde toegekend heeft gekregen, zal de puls voor een voldoende grote waarde van parameter C geen evenwicht meer vinden. De vegetatiepuls loopt in dat geval heuvelopwaarts.

Voor parameter $A = 1$ wordt de locatie van het bifurcatiepunt gevonden in $P^* \approx 2.78$ en de parameterwaarde van het bifurcatiepunt wordt gevonden in $C \approx 0.2328$. Waarden van parameter C groter dan deze waarde vinden niet langer een evenwicht. Tevens wordt ook hier het bifurcatiepunt links van het buigpunt van de sinus aangetroffen. Dit komt wederom door de invloed van de trendlijn.

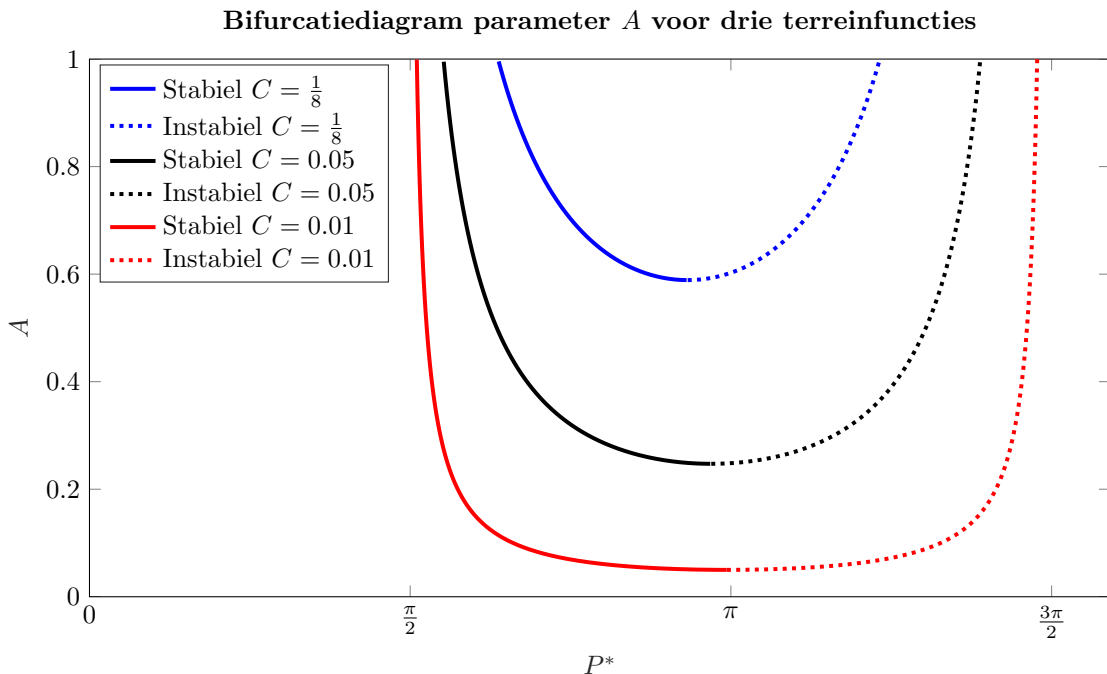
Hoe dichter de waarde van C bij nul ligt, hoe meer het stabiele evenwicht zich naar de top van de terreinfunctie begeeft en hoe meer het instabiele evenwicht zich naar het dal van de terreinfunctie begeeft. Dit komt doordat de terreinfunctie meer op een ‘gewone’ sinus gaat lijken naarmate de invloed van de trendlijn verdwijnt.

3.3 De relatie tussen de helling en de verstoringen van het gebied

In deze paragraaf wordt gekeken naar de onderlinge relatie tussen parameters A en C . Parameter A bepaalt de amplitude van de sinus in het systeem en C bepaalt de steilheid van het terrein. Beide parameters zijn behandeld in paragraaf 3.2. Intuïtief is het duidelijk dat er een relatie bestaat tussen de parameters A en C . Als parameter C toeneemt, dan zullen de verstoringen afzwakken en wordt het bifurcatiepunt bij een grotere waarde van parameter A gevonden. De vraag is hoe dit verband tussen het variëren van de helling en/of de amplitude van de sinusoiden tot uiting komt. In paragraaf 3.2 is voor een vaste waarde van parameter C afhankelijk van parameter A een bifurcatieplot gemaakt. Indien de parameters A en C met elkaar vergeleken moeten worden, dient parameter C ook te kunnen variëren.

Om een idee te krijgen hoe de kromme van de plot tussen parameter A en C eruit zal komen te zien, worden enkele bifurcatieplots afhankelijk van parameter A gemaakt, waar voor parameter C steeds een verschillende vaste waarde wordt gekozen. Hierbij kan parameter C niet gelijk aan nul gekozen worden. Dit komt doordat dan een probleem ontstaat in de numerieke simulaties; indien zowel parameter A als ook parameter C gelijk aan nul worden, wordt de terreinfunctie ook gelijk aan nul. Dit heeft als resultaat dat ieder punt in het domein een oplossing is van het model. Numeriek brengt dit dus moeilijkheden met zich mee. Dit houdt in dat de simulatie niet langer de gewilde nauwkeurigheid behaalt voor het vinden van een evenwicht. Het is dus aan te raden de parameter C een afstand $\delta \geq 0$ van de nul verwijderd te houden. Hierbij wordt geprobeerd δ zo klein mogelijk te houden om zoveel mogelijk data te verkrijgen, maar tegelijkertijd geen numerieke problemen te creëren.

Indien deze conventie wordt gevolgd, zal er altijd een bifurcatiepunt gevonden worden. In figuur 10 worden drie bifurcatieplots getoond voor verschillende vaste waarden van parameter C , namelijk $C = 0.01$, $C = 0.05$ en $C = 1/8$. Hierin is te zien dat hoe kleiner de waarde voor C is, hoe kleiner de bijbehorende bifurcatiewaarde A^* is. Uit de verhoudingen tussen de parameter A en C lijkt er een lineair verband te zijn. Merk op dat dit vermoeden slechts gebaseerd is op drie plots voor drie verschillende waarden van parameter C en dus niet significant bewijs is dat er een lineair verband bestaat.



Figuur 10: Drie bifurcatiediagrammen afhankelijk van parameter A voor drie verschillende terreinfuncties $h(x) = A \sin(x) + Cx$, met $C = 0.01$ (rood), $C = 0.05$ (zwart) en $C = 1/8$ (blauw). De doorgetrokken lijnen geven de stabiele evenwichtspunten weer en de gestippelde lijnen geven de instabiele evenwichtspunten weer.

Om het echte verband te bepalen tussen parameters A en C , zal de methode van pseudo-arclength continuation aangepast moeten worden. Hiervoor dient één punt uit één van de bifurcatieplots gevolgd te worden, oftewel er moet continuatie toegepast worden op beide parameters A en C vanuit het ene gekozen punt in het bifurcatiediagram. Het makkelijkste is nu om het bifurcatiepunt van de plot te volgen, want dit is gelijktijdig het minimum in de plot en voor dit minimum geldt $f_x = 0$. De eenvoudigste oplossing is om wederom pseudo-arclength continuation te definiëren voor drie vergelijkingen, die gelijktijdig opgelost dienen te worden. Zowel f als ook f_x moeten tegelijkertijd nul opleveren en daarnaast moet ook aan de arclength voorwaarde voldaan worden. Het gevolg hiervan is, dat de Jacobiaanmatrix nu gegeven wordt door een drie bij drie matrix, met in de eerste kolom de afgeleiden naar de pulslocatie, in de tweede en derde kolom de afleidingen naar respectievelijk parameters A en C .

De functies f en f_x evenals de Jacobiaanmatrix worden gegeven door respectievelijk vergelijkingen 3.1, 3.2 en 3.3.

$$f(P, A, C) = U_x(P^+, A, C)^2 - U_x(P^-, A, C)^2, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} f(P, A, C) &= 2U_x(P^+, A, C) [U_{xx}(P^+, A, C) + U_{1_x}(P^+, A, C)] \\ &\quad - 2U_x(P^-, A, C) [U_{xx}(P^-, A, C) + U_{1_x}(P^-, A, C)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Df(P, A, C) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P^2} f(P, A, C) & \frac{\partial}{\partial A} f(P, A, C) & \frac{\partial}{\partial C} f(P, A, C) \\ \frac{\partial}{\partial P^2} f(P, A, C) & \frac{\partial}{\partial P \partial A} f(P, A, C) & \frac{\partial}{\partial P \partial C} f(P, A, C) \\ \dot{U} & \dot{A} & \dot{C} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Voor het vinden van de Jacobiaanmatrix moeten enkele afgeleiden van f en f_x berekend worden. De afgeleiden van f zijn gegeven in voorgaande paragrafen 2.2 en 2.3. De afleidingen van f_x worden gegeven de volgende door vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial P^2} f(P, A, C) &= 2 [U_x^+ [U_{xxx}^+ + 2U_{1_{xx}}^+ + U_{1,1_x}^+] + (U_{xx}^+)^2 + 2U_{1_x}^+ U_{xx}^+ + (U_{1_x}^+)^2] \\ &\quad - 2 [U_x^- [U_{xxx}^- + 2U_{1_{xx}}^- + U_{1,1_x}^-] + (U_{xx}^-)^2 + 2U_{1_x}^- U_{xx}^- + (U_{1_x}^-)^2], \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial P \partial \alpha} f(P, A, C) &= 2 [U_{\alpha_x}^+ U_{\alpha_{1_{xx}}}^+ + U_{\alpha_{xx}}^+ U_{\alpha_{1_x}}^+ + U_{\alpha_x}^+ U_{\alpha_{1,1_x}}^+ + U_{\alpha_{1_x}}^+ U_{\alpha_{1_x}}^+] \\ &\quad - 2 [U_{\alpha_x}^- U_{\alpha_{1_{xx}}}^- + U_{\alpha_{xx}}^- U_{\alpha_{1_x}}^- + U_{\alpha_x}^- U_{\alpha_{1,1_x}}^- + U_{\alpha_{1_x}}^- U_{\alpha_{1_x}}^-], \end{aligned} \quad (3.5)$$

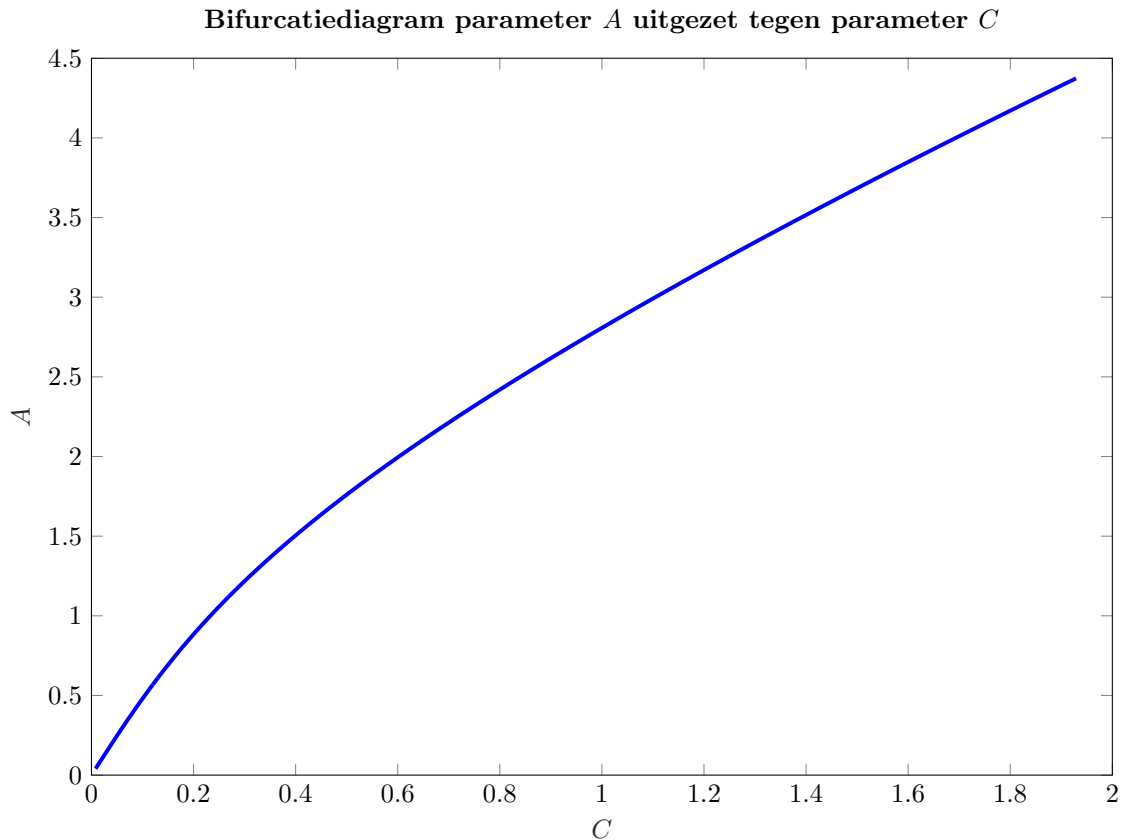
waarbij $\alpha \{A, B\}$. Hierbij geldt dat U^\pm , U_1^\pm en $U_{1,1}^\pm$ uit vergelijking (3.4) en U_α^\pm , U_{α_1} en $U_{\alpha_{1,1}}$ uit vergelijking (3.5) gevonden kunnen worden door de oplossingen te berekenen van respectievelijk stelsels (2.5), (2.6), (3.6), (2.13), (2.14) en (3.7).

$$\begin{cases} 0 &= U_{1,1_{xx}}^\pm + h_x U_{1,1_x}^\pm + h_{xx} U_{1,1}^\pm - U_{1,1}^\pm, \\ U_{1,1_x}^\pm(\pm\infty) &= 0, \\ U_{1,1}^\pm(P) &= -2U_{1_x}^\pm(P) - U_{0_{xx}}^\pm(P). \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} 0 &= U_{\alpha_{1,1_{xx}}}^\pm + h_{0_x} U_{\alpha_{1,1_x}}^\pm + h_{0_{xx}} U_{\alpha_{1,1}}^\pm - U_{\alpha_{1,1}}^\pm + 2[h_{1_x} U_{\alpha_{1_x}}^\pm + h_{1_{xx}} U_{\alpha_1}^\pm], \\ U_{\alpha_{1,1_x}}^\pm(\pm\infty) &= 0, \\ U_{\alpha_{1,1}}^\pm(P, A) &= 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

waarbij U_0^\pm en U_1^\pm in vergelijking (3.6) de oplossingen zijn van respectievelijk stelsels (2.5) en (2.6). Daarnaast zijn U_α en U_{α_1} de oplossingen van respectievelijk stelsel (2.13) en (2.14), voor $\alpha \in \{A, C\}$. De waarden van h_1 verschillen voor parameters A en C . Deze kunnen teruggevonden worden in appendix A.2. De uitwerking van deze afleiding kan teruggevonden worden in appendix A.4.

In figuur 11 is het resultaat van de simulatie van parameter A tegen parameter C uitgezet. Het vermoeden dat er een lineair verband is tussen parameters A en C lijkt niet helemaal te kloppen. De functie is stijgend, maar naarmate de parameters richting de nul gaan, buigt de functie naar beneden toe af. Uit de resultaten van de simulatie lijkt het erop dat de functie zal eindigen in de oorsprong. Eerder was al genoemd, dat als zowel parameter A als ook parameter C gelijk aan nul gekozen zouden worden, ieder punt in het domein een kritiek punt is en dat dit numeriek problemen met zich meebrengt. Echter aan de richting van de curve is te zien dat deze zich langzaam naar de oorsprong zal toebewegen.



Figuur 11: Bifurcatiediagram van de helling van de terreinfunctie uitgezet tegen de amplitude van de verstoringen.

Aangezien het minimum van het bifurcatiediagram voor parameter A is gevolgd, kan er ook gesteld worden dat voor coördinaten (A, C) die zich onder de grafiek bevinden geen evenwichtoplossingen gevonden zullen worden. Bevinden de coördinaten (A, C) zich boven de grafiek, dan bestaan de evenwichtspunten wel en deze kunnen zowel stabiel als instabiel zijn. De lijn die deze twee gebieden scheidt, bevat alle bifurcatiepunten voor de bijbehorende waarden van parameters A en C .

Intuïtief lijkt het resultaat ook op wat er verwacht zou worden. Indien de helling van het terrein toeneemt, zal de vegetatie eenvoudiger omhoog kunnen groeien, doordat meer water zal blijven hangen achter de vegetatie. Er is dus ook een grotere amplitude in de verstoring nodig (in dit geval de sinusöide), om alsnog kritieke punten op het terrein te vinden.

3.4 Invloed parameter C op het bifurcatiediagram voor parameter B

Tot op heden is nauwelijks over parameter B gesproken. Dit komt doordat het veranderen van de waarde van parameter B de situatie aanzienlijk gecompliceerder maakt. In deze paragraaf zal gekeken worden hoe parameter B de verandering van de stabiliteit teweeg brengt.

In eerste instantie wordt het model lichtelijk versimpeld door te kijken hoe het bifurcatiediagram afhankelijk van parameter B eruit ziet voor $A = 1$ en $C = 0$. Dit betekent dat de terreinfunctie gegeven wordt door $h(x) = \sin(Bx)$. De trendlijn is geëlimineerd, waardoor de terreinfunctie dus wordt gegeven door alleen een sinus met parameter B die de periode beschrijft. Omdat er nu geen helling in het model zit, ondervindt een vegetatiepuls niet langer een opwaartse drang van de helling, maar alleen nog maar een invloed van de lokale toppen en dalen van de sinus.

Met behulp van GDV-simulaties kan voor een waarde van parameter B , zeg $B = 0.125$ aangetoond worden dat de vegetatiepuls zich naar de lokale toppen van de sinus wil begeven. Dit zou betekenen dat het stabiele evenwicht zich daar bevindt. Wordt éézelfde simulatie uitgevoerd met een vegetatiepuls op de lokale top van een sinus voor $B = 2$, dan loopt de puls weg van de top. Hierbij is te zien dat de toppen van de sinus instabiele evenwichtspunten van het systeem worden, terwijl de dalen van de sinus stabiele evenwichtspunten in het systeem worden. Dit betekent dat in het interval $[0.125; 2]$ minimaal één bifurcatiepunt bestaat, die deze verandering van stabiliteit kan verklaren. Deze verandering van stabiliteit wordt uitgebreid beschreven in paragraaf 3.4.1.

Aan het eind van dit hoofdstuk wordt parameter C weer toegevoegd en wordt ook hier het bijbehorende bifurcatiediagram gevonden. Dit laatstgenoemde bifurcatieschema wordt vervolgens vergeleken met het bifurcatieschema verkregen voor $C = 0$.

Voordat het bifurcatiediagram gevormd kan worden, moet rekening gehouden worden met verschuivingen van de kritieke punten onder invloed van parameter B . Parameter B bepaalt de periode van de sinus en zodoende verschuiven de toppen en dalen van de sinus als parameter B verandert. De kritieke punten zullen automatisch ook een verschuiving ondervinden indien parameter B verandert. Het bifurcatiediagram dat wordt verkregen, moet achteraf terug getransleerd worden.

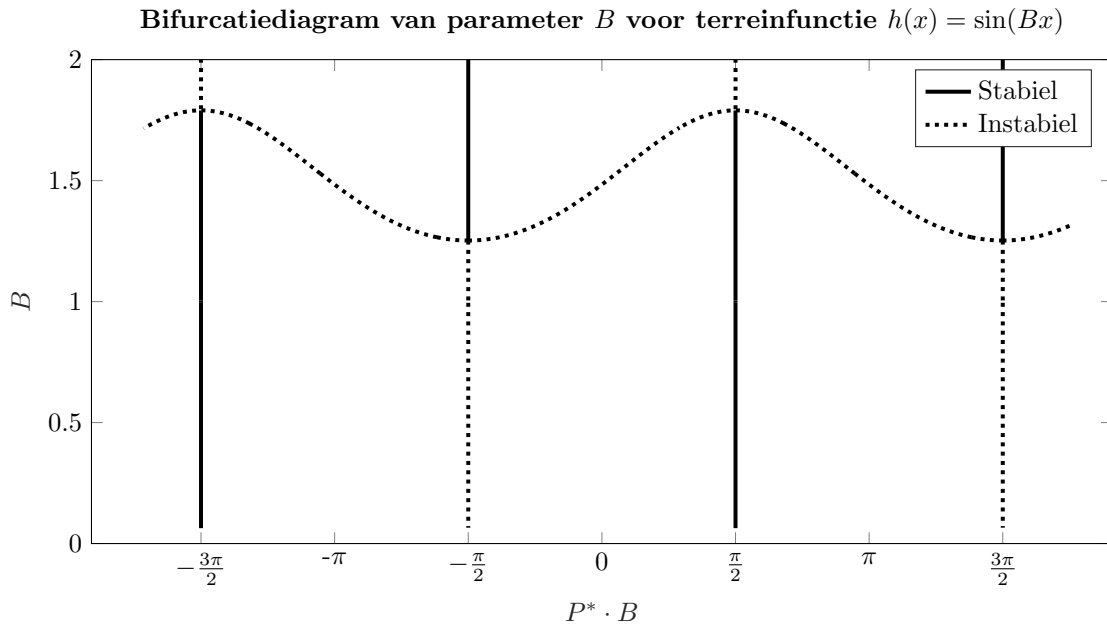
Om te voorkomen dat de kritieke punten zover uiteenlopen dat de randen de resultaten gaan beïnvloeden, wordt een ‘trucje’ toegepast. Aangezien de kritieke punten zich in de buurt van de lokale toppen en dalen van de sinus bevinden, kan de sinus zó getransleerd worden dat de top van de sinus op de y -as ligt. De kritieke punten dicht in de buurt van deze top liggen automatisch ook dicht in de buurt van de $x = 0$. Hierdoor wordt de invloed door het veranderen van de waarde van parameter B verzwakt en zullen de resultaten minder snel hinder van de randen ondervinden. Op dezelfde manier kan de sinus zó getransleerd worden dat een lokaal dal op de y -as ligt. Achteraf dienen alle resultaten terug getransleerd te worden naar hun oorspronkelijke positie. De invloed van parameter B zelf zal later uit het bifurcatiediagram verwijderd worden door de positie van de evenwichtspunten te vermenigvuldigen met de desbetreffende waarde van parameter B zelf.

3.4.1 Bifurcatiediagram voor parameter B met $C = 0$

Allereerst wordt gekeken naar de terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx)$ en wordt hiervan het bifurcatiediagram (figuur 12) bepaald. Zoals al eerder is vermeld, is te zien dat voor $0 < B < 1.25$, de vegetatiepuls zich voortbeweegt als verwacht. De vegetatiepuls wil heuvelopwaarts bewegen. Aangezien er geen trendlijn bestaat in de vorm van een constante helling, beweegt de vegetatiepuls naar de dichtstbijzijnde top van de sinus. Het stabiele evenwicht bevindt zich op de top en het instabiele evenwicht in het dal. In figuur 12 is anderhalve periode van de sinus in beeld gebracht, maar door de periodiciteit van de sinus is ook de structuur van dit diagram bekend voor het gehele domein. (Dit resultaat blijft gelijk indien de randen worden verwijderd en het domein heel \mathbb{R} is.)

In figuur 12 zijn meerdere hooivorkbifurcaties zichtbaar. De hooivorkbifurcaties in $x = -\frac{\pi}{2}$ en $x = \frac{3\pi}{2}$ zijn van dezelfde vorm als in paragraaf 1.3.2 beschreven staat. De bifurcaties in $x = -\frac{3\pi}{2}$ en $x = \frac{\pi}{2}$ zijn ook hooivorkbifurcaties, maar dan gespiegeld over een horizontale as.

De stabiliteit van de kritieke punten slaat bij twee bepaalde waarden om. Twee maal komt hier een hooivorkbifurcatie voor. Als eerste slaat de stabiliteit van de kritieke punten rond de dalen van de sinus om bij $B \approx 1.2525$. De tweede keer dat de stabiliteit van de kritieke punten omslaat, is rond de toppen van de sinus bij $B \approx 1.7925$.



Figuur 12: Bifurcatiediagram voor parameter B met terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx)$. De doorgetrokken lijnen geven de stabiele evenwichtspunten weer en de gestippelde lijnen geven de instabiele evenwichtspunten weer.

Vervolgens bestaat er een interval $[1.2525, 1.7925]$ waarin zowel de toppen als de dalen van de sinus stabiele evenwichtspunten vertonen. De instabiele evenwichtspunten zijn in het gebied tussen de toppen en de dalen terug te vinden. Hoe dichterbij één van de omslagpunten ligt, hoe dichterbij het instabiele evenwicht bij het desbetreffende stabiele evenwichtspunt ligt. Een waarde van parameter B kleiner gelijk 1.2525 geeft een stabiel evenwicht op de top en een instabiel evenwicht in het dal, daarentegen geeft een waarde van parameter B groter gelijk 1.7925 een stabiel evenwicht in het dal en een instabiel evenwicht op de top.

De reden waarom de stabiliteit verandert, is te verklaren d.m.v. de steilheid van de toppen en dalen. Grote waarden van parameter B geven een kleine periode, terwijl kleine waarden van parameter B een grote periode geven. Voor grote waarden van B wordt de periode dus kleiner en dit betekent dat de toppen en dalen van de sinus dichterbij elkaar komen te liggen. De amplitude van de sinus blijft gelijk, dus de helling van de sinus wordt steiler naar de toppen en dalen toe. De helling wordt zelfs zo steil dat de vegetatiepuls niet meer naar boven kan groeien en een nieuw evenwicht vindt in het dal.

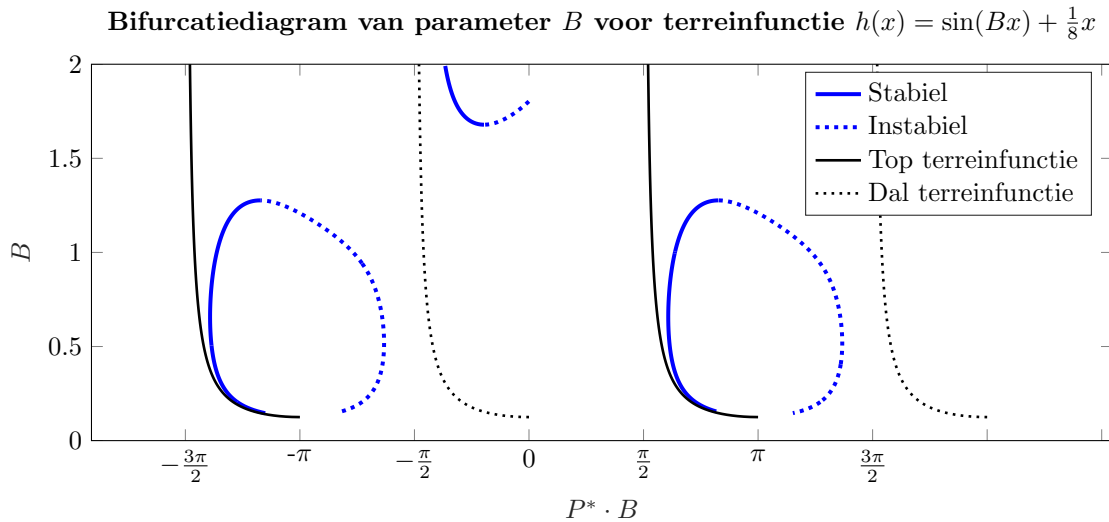
3.4.2 Bifurcatiediagram voor parameter B met $C \neq 0$

In de vorige paragraaf is het bifurcatiediagram voor een terreinfunctie bestaande uit een sinus, met daarin één parameter die de periode regelt, bekeken. Bij deze terreinfunctie was de trendlijn in de vorm van een constante helling verwijderd om de situatie eenvoudiger te maken. In deze paragraaf wordt de helling weer teruggebracht en wordt voor enkele verschillende waarden van parameter C gekeken naar het bifurcatiediagram.

Door de toevoeging van de helling aan de terreinfunctie, verdwijnt de symmetrie die de sinus bezit. Die symmetrie was ook zichtbaar in het bifurcatiediagram voor $C = 0$. De verwachting is nu dat deze symmetrie ook in het bifurcatiediagram doorbroken zal worden. De hooivorkbifurcaties die zichtbaar waren in het bifurcatiediagram vallen uit elkaar in zadelknoop-bifurcaties. De vier lijnen die bij de hooivorkbifurcatie in een bifurcatiepunt bij elkaar komen, zullen zich gaan splitsen in twee groepen van ieders twee naast elkaar gelegen lijnen.

Eén van deze groepen bevat twee instabiele evenwichtskrommen, terwijl de andere groep één stabiele en één instabiele evenwichtskromme bevat. De groep met twee evenwichtskrommen van verschillende stabiliteit vormt het bifurcatiepunt van een zadelknoop-bifurcatie. De andere groep met de twee evenwichtskrommen van gelijke stabiliteit, zal één doorlopende evenwichtskromme vormen. Welke lijnen tot de zelfde groep gaan behoren is afhankelijk van het teken van parameter C .

Allereerst wordt gekeken naar de terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx) + Cx$, waarbij C de veelgebruikte waarde $C = \frac{1}{8}$ toegekend krijgt. Het bifurcatiediagram wordt hieronder in figuur 13 gegeven.

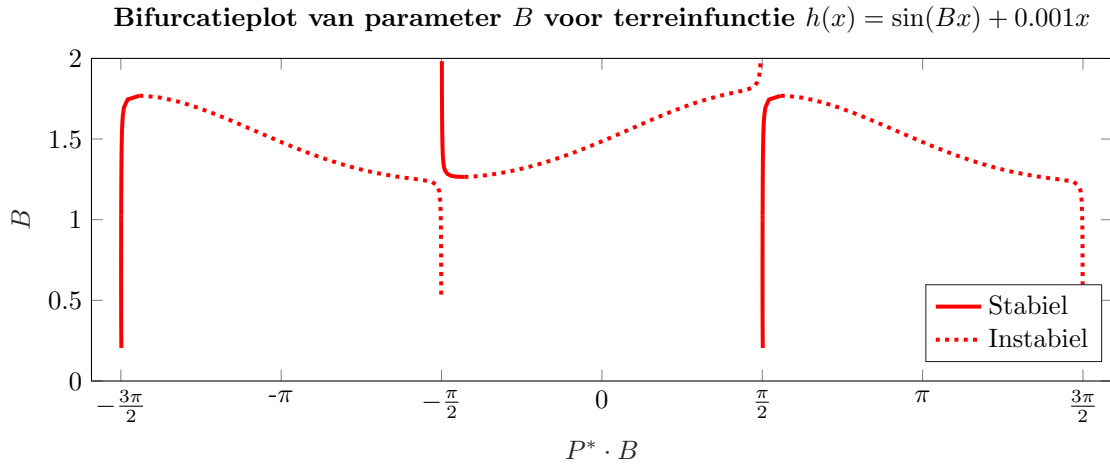


Figuur 13: Bifurcatiediagram voor parameter B voor terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx) + \frac{1}{8}x$. De doorgetrokken blauwe lijn geeft de stabiele evenwichtspunten weer en de gestippelde blauwe lijn staat voor de instabiele evenwichten. De zwarte doorgetrokken lijn geeft de lokale toppen van de terreinfunctie weer en de gestippelde zwarte lijn toont de lokale dalen van de terreinfunctie.

In figuur 13 zijn zwarte lijnen zichtbaar. Deze lijnen geven de locaties van de lokale toppen en de dalen van de terreinfunctie weer, waarbij de doorgetrokken lijnen de toppen weergeven en de gestippelde lijnen de dalen. In dit bifurcatieschema is goed te zien dat de vegetatiepuls naar een top wil voor waarden van B , met $\frac{1}{8} < B < 1.25$. Aan de ene kant wil de puls heuvelopwaarts bewegen, maar tegelijkertijd wil de puls ook naar de lokale top van de verstoring toe. Dit is te zien aan het feit dat de vegetatiepuls het stabiele evenwicht iets aan de rechterkant van de lokale toppen vindt. Tegelijkertijd zorgt dit ervoor dat de afstand tussen de locatie van de top en het stabiele evenwicht kleiner is dan de afstand tussen het instabiele evenwicht en de locatie van het dal. Voor waarden van $B \downarrow 0$ is het lastig iets te kunnen zeggen. Als B een waarde in de buurt van de nul aanneemt, zal ook de waarde van de terreinfunctie naar nul gaan. Het gevolg hiervan is dat ieder punt in het systeem een evenwichtspunt wordt. Numeriek levert dit problemen op waardoor de simulatie vastloopt. Bij $B = \frac{1}{8}$ vindt de simulatie nog wel een evenwichtspunt en om betrouwbare resultaten te krijgen, is besloten hier de simulatie op te laten houden. Om toch iets te kunnen zeggen voor $B \in [0, \frac{1}{8})$ kan een GDV-simulatie gedaan worden voor een vast gekozen waarde $B \in [0, \frac{1}{8})$.

In dit bifurcatiediagram is geen spoor van een hooivorkbifurcatie meer zichtbaar. Er zijn alleen drie zadelknoop-bifurcaties zichtbaar. De onderste twee vinden hun bifurcatiepunt in $B \approx 1.2766$ en de bovenste in $B \approx 1.6787$. Wat hier opvalt t.o.v. het bifurcatiediagram voor $C = 0$ is dat er een interval $(1.2766, 1.6787)$ bestaat waarin geen evenwicht bestaat. Indien de vegetatiepuls dus op een terrein met een periode B leeft, met $B \in (1.2766, 1.6787)$, dan zal de vegetatiepuls geen evenwichtstoestand vinden, maar met de constante helling mee heuvelopwaarts lopen. Hier is uit numerieke simulaties zichtbaar dat de vegetatiepuls zich over de toppen en dalen van de sinus heen beweegt. (Uiteindelijk vindt de vegetatiepuls een evenwichtspunt, maar dit komt door de invloed van de randen.)

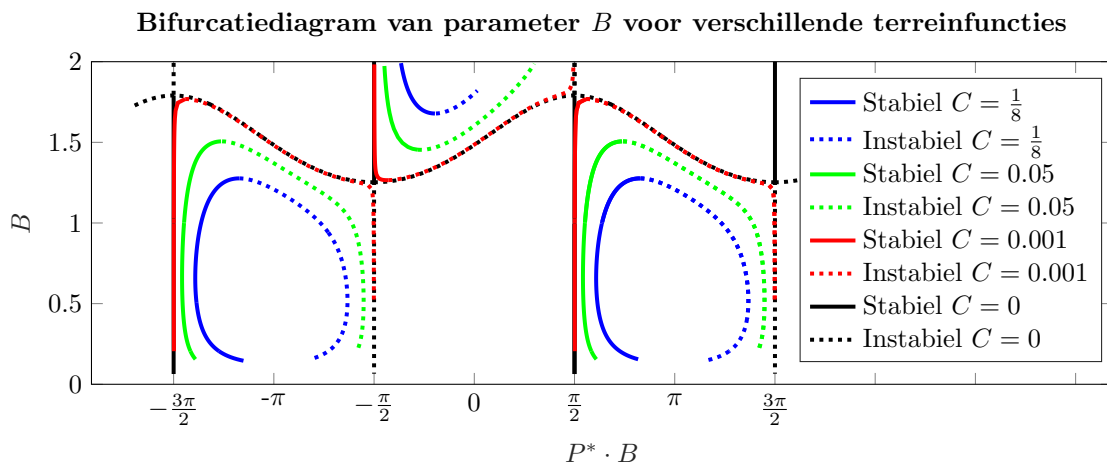
Tot dusver zijn twee terreinfuncties behandeld, wier bifurcatiediagrammen niet veel op elkaar lijken. De vraag is nu hoe deze twee terreinfuncties zich tot elkaar verhouden. Indien een nieuwe terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx) + Cx$ met $C \in (0, \frac{1}{8})$ wordt bekeken, wordt een beter beeld van de verhoudingen tussen beide diagrammen verkregen. Hierbij geeft een waarde van parameter C dichter bij nul meer duidelijkheid over de situatie dan een waarde C in de buurt van $\frac{1}{8}$. Hier wordt gekozen voor $C = 0.001$ en het bijbehorende bifurcatiediagram wordt weergegeven door figuur 14.



Figuur 14: Bifurcatiediagram voor parameter B voor terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx) + 0.001x$. De doorgetrokken rode lijn staat voor de stabiele evenwichtspunten en de gestippelde rode lijn beschrijft de instabiele evenwichtspunten. De zwarte doorgetrokken lijn geeft de lokale toppen van de terreinfunctie weer en de gestippelde zwarte lijn toont de lokale dalen van de terreinfunctie.

Figuur 14 komt in hoge mate overeen met het bifurcatiediagram voor $C = 0$, echter het grootste verschil is dat hier geen hooivorkbifurcaties aangetroffen worden. In dit bifurcatiediagram is goed te zien hoe de hooivorkbifurcatie wordt opgesplitst in een zadelknoop-bifurcatie en een instabiele evenwichtskromme.

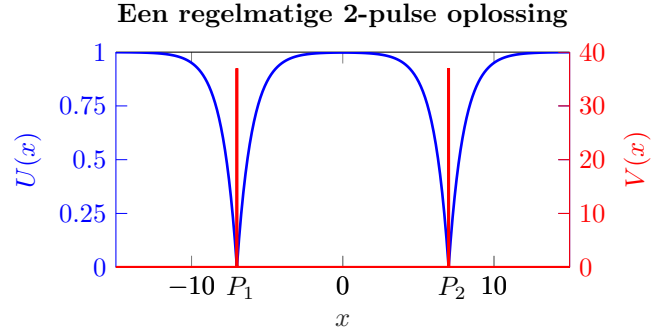
Worden alle behandelde terreinfuncties $h(x) = \sin(Bx) + Cx$, met $C = 0$, $C = 0.001$, $C = \frac{1}{8}$ en één extra tussenliggende waarde $C = 0.05$ samen in hetzelfde diagram geplott (zie figuur 15), dan is de invloed van de constante helling (parameter C) op het bifurcatiediagram duidelijk zichtbaar.



Figuur 15: Bifurcatiediagram voor parameter B voor terreinfunctie $h(x) = \sin(Bx) + Cx$, met $C = 0$ (zwart), $C = 0.001$ (rood), $C = 0.05$ (groen) en $C = \frac{1}{8}$ (blauw). De doorgetrokken lijnen staan voor de stabiele evenwichtspunten en de gestippelde lijnen geven de instabiele evenwichtspunten weer.

3.5 De toevoeging van een tweede vegetatiepuls

In paragraaf 3.2 is een bifurcatiediagram voor parameter A met één vegetatiepuls gegeven. In deze paragraaf zal een extra vegetatiepuls toegevoegd worden. Het toevoegen van een extra vegetatiepuls op het terrein zal de reactie tussen twee pulsen onderling blootleggen, maar voordat het zover is, zal deze puls eerst aan het model toegevoegd moeten worden. Net als voor één vegetatiepuls wordt ook hier gebruik gemaakt van de methode van pseudo-arclength continuation. In paragraaf 3.3 is al besproken dat het toevoegen van een extra voorwaarde leidt tot extra rij en kolom in de Jacobiaanmatrix. Ook hier zullen drie vergelijkingen tegelijkertijd opgelost moeten worden. In het geval van twee vegetatiepulsen is er niet meer één snelheidsfunctie die de gehele situatie beschrijft. Er zijn nu twee snelheidsfuncties die ieder hun eigen puls beschrijven. De functies worden gegeven door vergelijkingen (3.8) en (3.9), die het gedrag van respectievelijk de eerste- en de tweede vegetatiepuls beschrijven.



Figuur 16: Illustratie van twee vegetatiepulsen op een gebied.

$$f_1(P_1, P_2, A) = U_x(P_1^+, P_2^+, A)^2 - U_x(P_1^-, A)^2. \quad (3.8)$$

$$f_2(P_1, P_2, A) = U_x(P_2^+, A)^2 - U_x(P_1^-, P_2^-, A)^2. \quad (3.9)$$

Met behulp van figuur 16 zal duidelijk worden hoe de functies in elkaar steken. De functie f_1 beschrijft de situatie rondom de eerste puls P_1 . Deze functie is gedefiniëerd op $(-\infty, P_2)$. De functie f_2 beschrijft de situatie rondom de tweede puls P_2 . Deze functie is gedefiniëerd op (P_1, ∞) . De oplossing van U in vergelijking (3.8) kan gevonden worden door stelsel (3.12) op te lossen. De oplossing van U in vergelijking (3.9) gaat op gelijke wijze en voor de geïnteresseerde lezer is deze uitwerking te vinden in appendix A.3. Bij deze afleidingen spelen vooral de randvoorwaarden een belangrijke rol.

De Jacobiaanmatrix wordt nu gegeven door:

$$Df(P_1, P_2, A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} f_1(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial P_2} f_1(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial A} f_1(P_1, P_2, A) \\ \frac{\partial}{\partial P_1} f_2(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial P_2} f_2(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial A} f_2(P_1, P_2, A) \\ \frac{\partial}{\partial P_1} U & \frac{\partial}{\partial P_2} U & \dot{A} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Deze Jacobiaanmatrix bevat enkele afgeleiden die berekend dienen te worden. De afgeleiden van de twee snelheidsfuncties naar de parameter A blijven dezelfde als de afgeleide naar de parameter van f voor één puls. De afgeleiden die voor zowel f_1 als ook f_2 nog berekend dienen te worden zijn de afleidingen naar de eerste puls en naar de tweede puls. Deze afleiding van f_1 naar de eerste puls wordt gegeven door:

$$\frac{\partial}{\partial P_1} f_1(P_1, P_2, A) = 2U_x^+[U_{xx}^+ + U_{1x}^+] - 2U_x^-[U_{xx}^- + U_{1x}^-]. \quad (3.11)$$

Hierbij kunnen U^\pm en U_1^\pm gevonden worden door respectievelijk stelsels (3.12) en (3.13) op te lossen.

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^-(-\infty) &= 0, \\ U^+(P_2) &= 0, \\ U^\pm(P_1) &= 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} 0 &= U_{1xx}^\pm + h_x U_{1x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm, \\ U_{1x}^-(-\infty) &= 0, \\ U_1^+(P_2) &= 0, \\ U_1^\pm(P_1) &= -U_{0x}^\pm(P_1). \end{cases} \quad (3.13)$$

De afleiding van f_2 naar de tweede puls wordt gegeven door:

$$\frac{\partial}{\partial P_2} f_1(P_1, P_2) = 2U_x^+(P_1, P_2)U_{1_x}^+(P_1, P_2), \quad (3.14)$$

waarbij U^\pm en U_1^\pm gevonden kunnen worden door respectievelijk stelsels (3.12) en (3.15) op te lossen.

$$\begin{cases} 0 &= U_{1_{xx}}^\pm + h_x U_{1_x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm, \\ U_{1_x}^-(-\infty) &= 0, \\ U_1^+(P_2) &= -U_x^+(P_2), \\ U_1^\pm(P_1) &= 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

De afleidingen van f_2 naar zowel de eerste- als ook de tweede puls worden gegeven door:

$$\frac{\partial}{\partial P_1} f_2(P_1, P_2, A) = -2U_x^- U_{1_x}^-, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_2} f_2(P_1, P_2, A) = 2U_x^+[U_{xx}^+ + U_{1_x}^+] - 2U_x^-[U_{xx}^- + U_{1_x}^-]. \quad (3.17)$$

De oplossingen voor deze afgeleiden kunnen op gelijke wijze gevonden worden. Alle hierboven beschreven afleidingen en de uitwerkingen hiervan kunnen teruggevonden worden in appendix A.3. De verwachting is dat het toevoegen van een extra vegetatiepuls leidt tot het vinden van nieuwe evenwichtspunten in het systeem. Dit zal komen door de invloed die beide pulsen op elkaar uitoefenen. Uit de simulaties volgt dat de mate van invloed die op elkaar wordt uitgeoefend, afhangt van de onderlinge afstand. Om dit in beeld te brengen, zullen drie simulaties besproken worden. Bij deze drie simulaties worden drie verschillende onderlinge afstanden bekeken. In de eerste simulatie zullen de twee vegetatiepulsen één periode van de sinus uit elkaar geplaatst worden, in de tweede simulatie twee periodes en in de laatste simulatie drie periodes.

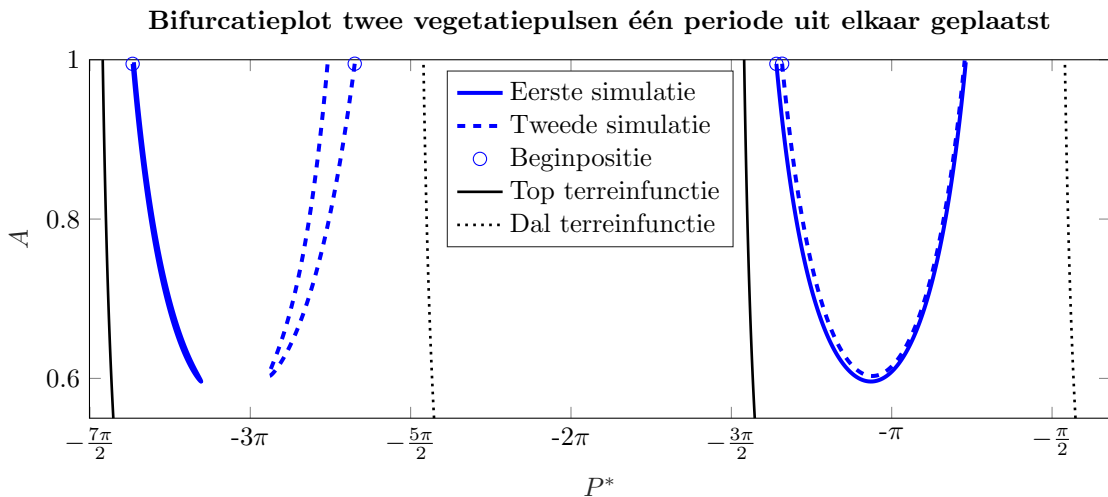
Bij alle drie simulaties dient een startpositie meegegeven te worden aan alle twee pulsen. Voordat een startpositie bepaald wordt, moet eerst duidelijk zijn waar op het gebied de pulsen komen te staan. Hierbij dient rekening gehouden te worden met het feit dat in de laatste simulatie, de randen zo min mogelijk invloed hebben op de resultaten. De twee pulsen moeten zoveel mogelijk in het midden van het domein liggen. Voor de derde simulatie worden de beginposities rond de toppen bij $x = -3\pi$ en $x = 3\pi$ gekozen. De precieze keuze voor de beginposities wordt in de volgende alinea beschreven. Vervolgens dient één van de twee vegetatiepulsen één periode dichterbij geplaatst te worden en voor de eerste simulatie dient nog een keer één puls één periode dichterbij geplaatst te worden. Uit de simulaties zal blijken dat de linker puls de meest interessante puls is en om deze het beste te kunnen vergelijken voor alle drie simulaties wordt deze positie vast gehouden. Voor de eerste simulatie worden de beginposities rond de toppen gegeven door $x = -3\pi$ en $x = \pi$ en voor de tweede simulatie door $x = -3\pi$ en $x = -\pi$.

De beginpositie zelf wordt bepaald door de situatie met slechts één van beide pulsen te bekijken en hiervan de beginpositie rond de zoiest bepaalde positie te berekenen. Dit wordt gedaan voor beide pulsen. Deze twee beginposities vormen vervolgens samen de beginposities voor de simulatie met twee vegetatiepulsen. De exacte beginposities voor iedere simulatie worden beschreven in onderstaande deelparagrafen.

3.5.1 Twee vegetatiepulsen één periode uit elkaar geplaatst

Indien de twee pulsen slechts één periode uit elkaar geplaatst worden, is de invloed op het evenwichtsgedrag van de pulsen groot. Hierbij moet opgemerkt worden dat de puls die op de laagste lokale top geplaatst is (in deze scriptie de linker pulse) het meest verandert onder invloed van de ander puls (in deze scriptie de rechter pulse). Dit komt door de invloed die de constante helling (parameter C) op de pulsen uitoefent. Door de constante helling hebben beide pulsen een drang heuvelopwaarts te bewegen. De bovenste vegetatiepuls (rechter pulse) kan dan heuvelopwaarts bewegen zonder door een andere puls tegengehouden te worden. Hier ontstaat dezelfde situatie als voor één puls, echter wordt de puls licht naar boven gedrukt door de linker vegetatiepuls, maar

deze opwaartse stimulans zal de evenwichtspunten van de rechterpuls niet te veel verstoren⁷. Daarentegen wordt de opwaartse drang van de linker vegetatiepuls afgeremd. Dit komt doordat de rechter puls een evenwicht heeft gevonden en de linker puls zich hieraan moet ‘aanpassen’. Daarnaast wordt ook het bifurcatiepunt van de beide pulsen beïnvloed. In figuur 17 is te zien dat het bifurcatiepunt van de rechterpuls voorkomt dat de linkerpuls zijn bifurcatiepunt bereikt. Aangezien de linkerpuls zijn bifurcatiepunt niet bereikt, zullen twee simulaties uitgevoerd moeten worden. Op dezelfde manier als in paragraaf 3.1 zullen beide evenwichtskrommen van de linker puls bepaald moeten worden. Merk hierbij op dat niet langer gesproken kan worden over de stabiele- en de instabiele evenwichtskromme. Dit komt doordat de stabiliteit als geheel beschouwd moet worden. (Hierover later meer.)



Figuur 17: Bifurcatiediagram voor parameter A voor twee vegetatiepulsen één periode uit elkaar. De blauwe lijnen geven de evenwichtskrommen weer. De zwarte doorgetrokken- en gestreepte lijnen geven respectievelijk de toppen en dalen van de terreinfunctie weer.

Voor de twee simulaties dienen de beginposities van de linker vegetatiepuls bepaald te worden. De beginpositie van de rechterpuls kan dezelfde blijven. (Het veranderen van deze laatstgenoemde beginpositie geeft geen nieuwe evenwichtskrommen, maar verandert alleen de richting waarmee de evenwichtskrommen bepaald worden.) De twee simulaties krijgen als beginposities $x = -10.57$ & $x = -4.28$ en $x = -8.69$ & $x = -4.28$ mee (aangegeven met de cirkels in figuur 17).

Deze twee simulaties samen geven het bifurcatiediagram in figuur 17. Met de doorgetrokken blauwe lijn worden de twee evenwichtskrommen gegeven met beginposities $x = -10.57$ en $x = -2.41$ en de gestreepte blauwe lijn geeft de twee evenwichtskrommen berekend aan de hand van beginposities $x = -8.69$ en $x = -2.41$.

Zojuist werd de stabiliteit benoemd. Ook hier kan de stabiliteit bepaald worden, echter dit betekent nu iets anders. De stabiliteit die bepaald wordt, geeft niet langer de stabiliteit voor iedere puls afzonderlijk, maar geeft de stabiliteit van de gehele configuratie.

De stabiliteit wordt ook niet langer weergegeven door het teken van de afgeleide $f'(P)$. Aangezien er twee vegetatiepulsen zijn en dus ook twee snelheidsfuncties, wordt de stabiliteit van de configuratie gegeven door de eigenwaarden van de volgende matrix te berekenen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} f_1(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial P_2} f_1(P_1, P_2, A) \\ \frac{\partial}{\partial P_1} f_2(P_1, P_2, A) & \frac{\partial}{\partial P_2} f_2(P_1, P_2, A) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

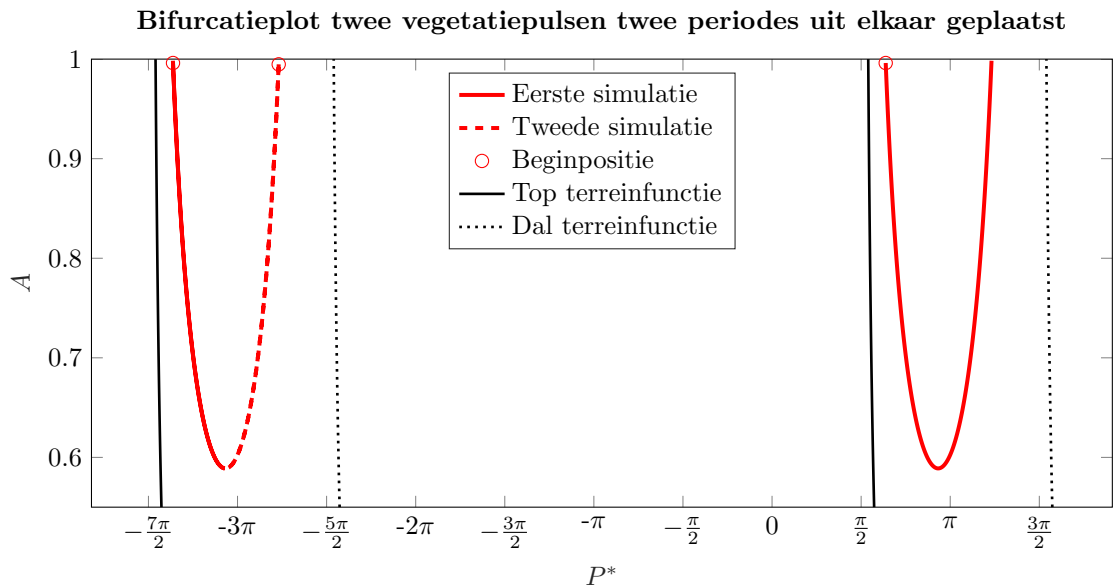
⁷Dit is de situatie voor de hier gekozen parameterwaarden. De beïnvloeding van de pulsen op elkaar is sterk afhankelijk van de gegeven begin- en parameterwaarden

De twee eigenwaarden samen geven de stabiliteit van de configuratie. Voor iedere iteratiestap kunnen de eigenwaarden berekend worden. Voor de eerste simulatie zijn beide eigenwaarden negatief (knooppunt) voor iedere iteratiestap tot de iteratiestap die het bifurcatiepunt berekent. Daarna wisselt één van de twee eigenwaarden van teken en wordt deze positief (zadelpunt). Voor de tweede simulatie is één eigenwaarde positief, terwijl de andere negatief is (zadelpunt). In het bifurcatiepunt wisselt de negatieve eigenwaarde van teken en wordt deze positief (knooppunt).

Over de instabiele evenwichtskromme is zelfs nog meer te zeggen. Deze evenwichtskromme bepaalt waar de vegetatiepuls heen bewegen. Indien de linker vegetatiepuls aan de linkerkant van de linker instabiele evenwichtskromme wordt geplaatst en de rechter vegetatiepuls een beginpositie $x = -\pi$ meekrijgt, dan bewegen beide vegetatiepulsen naar de in figuur 17 aangegeven stabiele evenwichtsposities. Wordt echter de linker vegetatiepuls rechts van de linker evenwichtskromme geplaatst en krijgt de rechter vegetatiepuls dezelfde beginpositie mee, dan willen beide pulsen naar de rechter stabiele evenwichtskromme. Het gevolg hiervan (blijkt uit simulaties waarbij de puls zich over de tijd verplaatst) is dat de linker vegetatiepuls zijn stabiele evenwichtspunt vindt op de rechter stabiele evenwichtskromme. De rechter vegetatiepuls wordt gedwongen zijn stabiele evenwicht één periode verder te zoeken.

3.5.2 Twee pulsen twee periodes uit elkaar geplaatst

Worden de twee vegetatiepulsen één periode verder uit elkaar geplaatst, dan neemt de invloed van de twee pulsen op elkaar af. De beginposities worden gegeven door $x = -10.57$ & $x = 2.00$ en $x = -8.69$ & $x = 2.00$. In figuur 18 is het resultaat van deze simulaties zichtbaar.



Figuur 18: Bifurcatiediagram voor parameter A voor twee vegetatiepulsen één periode uit elkaar. De rode lijnen geven de evenwichtskrommen weer. De zwarte doorgetrokken- en gestreepte lijnen geven respectievelijk de toppen en dalen van de terreinfunctie weer.

Hierbij is het lastig te zien wat het bifurcatiediagram voorstelt. Dit komt doordat bepaalde evenwichtskrommen elkaar overlappen. Zo liggen de twee evenwichtskrommen die de rechterpuls beschrijven over elkaar heen. Dit betekent dat de invloed van de linker puls zodanig is afgenomen dat deze de evenwichtspositie van de rechter vegetatiepuls niet/nauwelijk aantast. De linker vegetatiepuls ondervindt meer invloed van de rechter puls. Net als bij het bifurcatiediagram in de vorige paragraaf loopt een evenwichtskromme van de linker puls naar beneden richting het bifurcatiepunt en loopt die in dit geval via dezelfde evenwichtskromme terug naar boven. Waar in de vorige

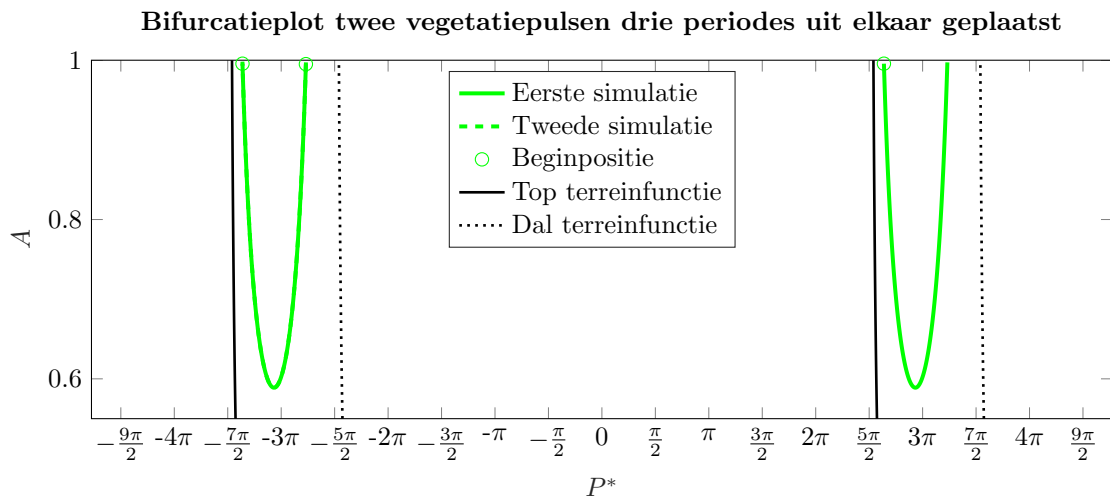
paragraaf nog een ‘bochtje’ zichtbaar was, waarmee dit gebeurde, is dit bochtje nu niet langer met het blote oog waarneembaar. De evenwichtskromme loopt in elk geval niet door, zoals de rechter puls doet. Er is ook nog een interval $(-9.6492, -9.6245)$ tussen de twee evenwichtskrommen waar geen evenwicht gevonden wordt.

De stabiliteit van de configuratie kan op dezelfde wijze bepaald worden als in de vorige paragraaf. In dit geval worden dezelfde eigenwaarden gevonden en blijft ook de stabiliteit van de configuratie gelijk.

3.5.3 Twee pulsen drie periodes uit elkaar geplaatst

Als laatste wordt de situatie bekeken waar de vegetatiepuls drie periodes uit elkaar geplaatst zijn. De invloed van de pulsen op elkaar is nu nog minder als in de vorige twee situaties. De beginposities worden nu gegeven door $x = -10.57$ & $x = 8.28$ en $x = -8.69$ & $x = 8.28$. In figuur 19 is het resultaat van deze simulatie zichtbaar.

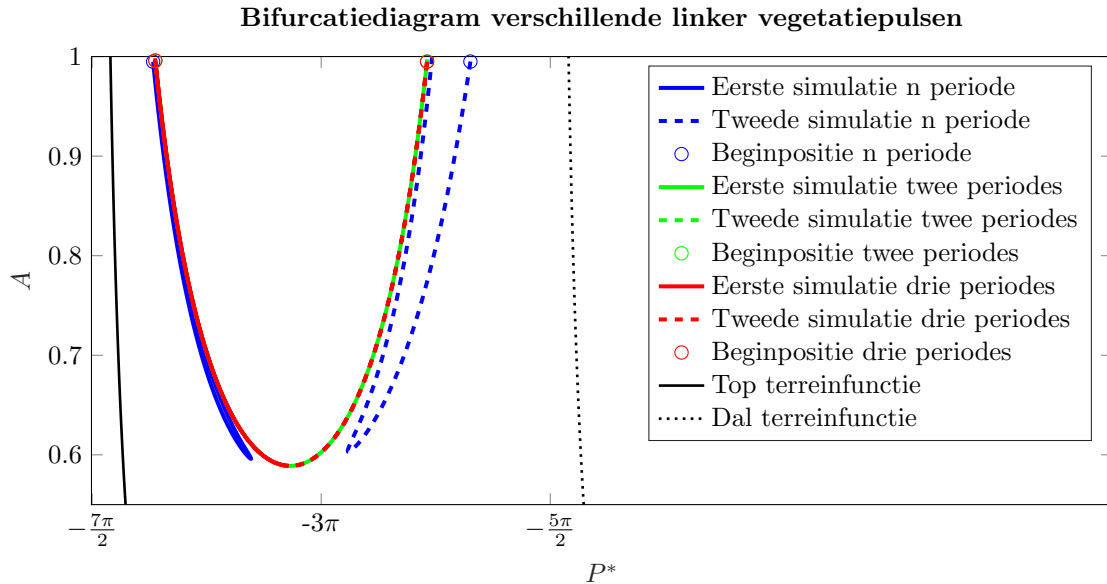
Ook hier lopen de evenwichtskrommen over elkaar heen, waardoor de resultaten lastig te interpreteren zijn. Wederom worden de evenwichtskrommen voor de rechter vegetatiepuls amper aangetast. In deze situatie waarbij drie periodes van de sinus tussen de beide vegetatiepuls zitten, wordt ook de invloed van de rechter vegetatiepuls op de linker vegetatiepuls minder. In dit geval is de invloed zo laag dat ook de linker vegetatiepuls zijn bifurcatiepunt bereikt en dus doorloopt. Hierbij is de vraag of de linker vegetatiepuls echt doorloopt óf dat dit een numerieke fout is. Dit laatste zou kunnen komen door een te grote stapgrootte Δs , die ervoor zorgt dat ‘over het gat gesprongen wordt’.



Figuur 19: Bifurcatiediagram voor parameter A voor twee vegetatiepuls drie periode uit elkaar. De groene lijnen geven de evenwichtskrommen weer. De zwarte doorgetrokken- en gestreepte lijnen geven respectievelijk de toppen en dalen van de terreinfunctie weer.

Betreffende de stabiliteit van de configuratie wordt opnieuw naar de eigenwaarden gekeken. Hier geldt nu dat de eigenwaarden voor iedere iteratiestap hetzelfde teken hebben. Hiermee wordt bedoeld dat tot het bifurcatiepunt beide eigenwaarde stabiel zijn en na het bifurcatiepunt beide instabiel. Deze gehele configuratie is dus voor iedere iteratiestap een knooppunt. Echter is niet duidelijk of deze configuratie werkelijk voor iedere iteratiestap een knooppunt is, of dat de eerder besproken eventuele numerieke fout ervoor zorgt dat de hier besproken stabiliteit van de configuratie onjuist is.

Om nu goed de drie situaties met elkaar te kunnen vergelijken, worden alle drie simulaties in hetzelfde bifurcatiediagram geplot. Voorheen is al benoemd dat de linker puls voor alle drie simulaties meer beïnvloed wordt dan de rechter vegetatiepuls. Aangezien deze linker vegetatiepuls dus interessanter is, wordt alleen gekeken naar het bifurcatiediagram dat alle drie linker vegetatiepulsen uit de simulaties bevat. In figuur 20 is dit bifurcatiediagram zichtbaar.



Figuur 20: Bifurcatiediagram voor parameter A van de linker vegetatiepuls op verschillende periodes van de bijbehorende rechter puls. De zwarte doorgetrokken- en gestreepte lijnen geven respectievelijk de toppen en dalen van de terreinfunctie weer.

In dit figuur is duidelijk zichtbaar dat de invloed tussen de vegetatiepulsen kleiner wordt naarmate de afstand tussen de vegetatiepulsen toeneemt. Vooral het verschil tussen de evenwichtskrommen met de volgende puls op één periode afstand en de evenwichtskrommen met de volgende puls op twee periodes afstand is visueel goed te zien. Nu blijkt dat eerstgenoemde zijn evenwichtspunten meer naar de toppen en de dalen vindt, terwijl de evenwichtspunten van laatstgenoemde overeenkomen met de evenwichtskromme waarbij de volgende puls op drie periodes afstand staat. Indien de evenwichtskromme uit figuur 8 ook geplot wordt in figuur 20 (getransleerd naar de juiste periode) dan valt deze over de evenwichtskrommen, gemaakt in de tweede en derde simulatie, heen. Voor twee periodes tussen de twee vegetatiepulsen werd het bifurcatiepunt van de linker vegetatiepuls niet bereikt en is er nog wel degelijk invloed vanuit de rechter vegetatiepuls. De linker vegetatiepuls die drie periodes van de rechter vegetatiepuls afstond, liep wel door. Dit betekent dat een onderlinge afstand van drie periodes tussen de vegetatiepulsen ertoe leidt, dat de invloed van de pulsen op elkaar verwaarloosbaar klein wordt.

Conclusie

In deze scriptie is het bewegingsgedrag van vegetatiepatronen onderzocht. Deze vegetatiebanden bewegen onder invloed van de aanwezige hoeveelheid water over het gebied heen. De vegetatie die toegang tot water heeft, kan aangroeien, terwijl de vegetatie die dit niet heeft, afsterft. Naast de waterbeschikbaarheid heeft ook de topografie van het gebied een grote invloed op de bewegingen van vegetatiepatronen. In deze scriptie is onderzoek gedaan naar een terreinfunctie gegeven door $h(x) = A \sin(Bx) + Cx$.

Het beschrijven van deze bewegingen werd gemodelleerd door middel van het extended Klausmeier model. Vervolgens wordt uitgelegd hoe deze PDV gereduceerd kan worden tot een GDV aan de hand van [8]. Het bewegingsgedrag van de vegetatiepatronen kan beschreven worden met de GDV:

$$\frac{dP_j}{dt} = \frac{Da^2}{6m\sqrt{m}} [U_x(P_j^+)^2 - U_x(P_j^-)^2].$$

Deze GDV beschrijft de snelheid waarmee de vegetatiepuls zich over het landschap voortbeweegt. In deze scriptie is het voornaamste doel geweest om de evenwichtslocaties van deze GDV te bestuderen afhankelijk van de parameters A , B en C in de terreinfunctie. Dit wordt gedaan vanuit de bifurcatietheorie. Om de evenwichtskrommen afhankelijk van de parameters in beeld te brengen worden bifurcatiediagrammen geïntroduceerd. Deze diagrammen zetten de evenwichtslocaties uit tegen de bijbehorende parameterwaarden.

De evenwichtspunten zelf worden numeriek benaderd. Voor iedere iteratiestap wordt met de methode van Newton-Raphson de evenwichtslocatie bepaald. Vervolgens wordt ook de continuatie van de parameter meegenomen om de evenwichtskrommen te kunnen benaderen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de continuatiemethode pseudo-arclength continuation.

Aan de hand van deze theorie is onderzoek gedaan naar het bewegingsgedrag van de vegetatiepatronen. Hierbij is eerst onderzoek gedaan naar de evenwichtoplossingen van één vegetatiepuls onder invloed van één parameter. Voor zowel parameter A (amplitude van de sinus) als parameter C (hoek constante helling) blijkt uit het bifurcatiediagram dat de evenwichtskromme zich meer aan die kant van de lokale top bevindt waar de helling toeneemt. Het bestaan van evenwichtspunten is sterk afhankelijk van de twee parameters A en C .

Deze twee parameters zorgen voor het bestaan van lokale toppen en dalen. Indien deze bestaan, kan in de dalen water blijven staan, waardoor de vegetatiepuls een evenwichtstoestand richting de lokale top kan vinden. Het heuvelachtige landschap kan een ‘reservoir’ voor water creëren in de dalen, waardoor vegetatiepulsen posities in het landschap zullen vinden waarbij ze voorzien zijn van water, zonder zich hiervoor verder te verplaatsen.

Indien deze twee parameters tegen elkaar worden uitgezet in een grafiek, wordt de onderlinge relatie tussen beide parameters duidelijk. De lijn in deze grafiek geeft de grens weer waar nog net wel een evenwichtspunt bestaat voor waarden van parameters A en C . Voor kleine waarden van parameter C is de bijbehorende waarde van parameter A klein en voor grote waarden van parameter C is de bijbehorende waarde van parameter A groot. Echter is aan de vorm van de grafiek in figuur 11 te zien dat deze relatie niet lineair is. De vorm van de grafiek doet eerder denken aan een wortelfunctie. Uit de simulaties blijkt dat de verstoringen in de trant van sinus-vormige heuvels relatief groot moeten zijn, willen evenwichtspunten in het gebied bestaan.

Ook dit kan verklaard worden door de hoeveelheid water in het gebied in acht te nemen. In een gebied met een grote helling maar kleine amplitude van de heuvel kan het water niet vastgehouden worden en stroomt het heuvelafwaarts. Hierdoor blijft geen water bewaard en zijn er geen evenwichtspunten in het systeem te vinden. Zoals het bifurcatiediagram ook uitwijst, is hier een relatief grote amplitude van de verstoringen nodig om evenwichtspunten in het landschap aan te treffen.

Wordt parameter B (periode van de sinus) in acht genomen dan blijkt voor $C = 0$ een hooivorkbifurcatie te bestaan, die uiteenvalt in een zadelknoop-bifurcatie indien parameter $C \neq 0$ wordt gekozen. Voor zeer kleine waarden van parameter C wordt de overgang tussen hooivorkbifurcatie en zadelknoop-bifurcatie duidelijk in beeld gebracht. Voor $C = 0$ zijn de toppen van de sinus stabiele evenwichtspunten. Wordt C ongelijk nul gekozen, dan schuift het evenwicht weg van de top onder invloed van de helling van het gebied.

Als laatste is onderzoek gedaan naar de invloed van een extra vegetatiepuls. Hier blijkt dat de onderlinge invloed van twee pulsen op elkaar sterk afhankelijk is van de onderlinge afstand. De vegetatiepuls die zich het meest heuvelopwaarts bevindt, wordt het minst beïnvloed van de twee. Bovendien is de invloed van de pulsen op elkaar nauwelijks waarneembaar zodra een afstand van drie periodes tussen de twee vegetatiepulsen bestaat.

In een vervolgonderzoek zou gekeken kunnen worden naar de afhankelijkheid van de parameters op elkaar voor twee (of meer) vegetatiepulsen. Komen de resultaten overeen met de resultaten voor één vegetatiepuls?

Daarnaast kan het interessant zijn onderzoek te doen naar de invloed van twee vegetatiepulsen op elkaar voor verschillende waarden van parameter B (periode van de sinus). Door de waarde van parameter B groter te maken, wordt de periode van de sinus kleiner. Komt het dan nog steeds voor dat twee vegetatiepulsen op twee aangrenzende toppen evenwichtspunten vinden, of wordt de invloed op elkaar zo groot dat één van de vegetatiepulsen wordt 'gedwongen' één periode (of meer) op te schuiven?

In figuur 15 is te zien dat er een instabiel evenwicht bestaat tussen twee stabiele evenwichtspunten op de toppen van de twee aangrenzende lokale heuvels voor een geschikte waarde van parameter B . Indien op dit gebied drie pulsen worden geplaatst op de drie zojuist genoemde evenwichtspunten, dan zullen geen verschuivingen plaatsvinden, maar wat gebeurt op het moment dat de derde vegetatiepuls naast het instabiele evenwicht wordt geplaatst i.p.v. erop? Gaat één van de aangrenzende vegetatiepulsen zich verplaatsen en zo ja, welke? Of bestaat een situatie waarbij een vegetatiepuls zich onder invloed van naastgelegen vegetatiepulsen naar een instabiel evenwichtspunten verplaatst?

A Appendix A

In deze appendix worden de uitdrukkingen voor alle gebruikte afgeleiden, wier resultaten toegepast worden bij de methode van Newton-Raphson en pseudo-arclength continuation (respectievelijk paragrafen 2.2 en 2.3), behandeld.

A.1 Afleiding van f naar de pulslocatie

In paragraaf 2.2 wordt geschreven over het bepalen van de afgeleide van vergelijking (2.1). Deze vergelijking wordt gegeven door:

$$f(P) = U_x(P^+)^2 - U_x(P^-)^2, \quad (\text{A.1})$$

waarbij $U(P^\pm)$ de oplossing is van differentiaalvergelijking (1.3). In deze appendix wordt de afgeleide van $f(P)$ naar de locatie van de pulse berekend.

Allereerst wordt $f'(P)$ m.b.v. de kettingregel zover mogelijk uitgeschreven.

$$f'(P) = \frac{\partial}{\partial P} f(P) = 2U_x(P^+) \frac{\partial}{\partial P} U_x(P^+) - 2U_x(P^-) \frac{\partial}{\partial P} U_x(P^-). \quad (\text{A.2})$$

In deze uitdrukking kunnen $U(P^+)$ en $U(P^-)$ bepaald worden uit differentiaalvergelijking (1.3). De termen die nog niet direct bepaald kunnen worden zijn $\frac{\partial}{\partial P} U_x(P^+)$ en $\frac{\partial}{\partial P} U_x(P^-)$. Deze twee termen zullen eerst verder uitgewerkt moeten worden. Aangezien $\frac{\partial}{\partial P} U_x(P^+)$ en $\frac{\partial}{\partial P} U_x(P^-)$ op dezelfde manier berekend worden, wordt dit in één keer gedaan door de notatie $\frac{\partial}{\partial P} U_x(P^\pm)$ te gebruiken.

Eerder zijn in paragraaf 1.1 de binnengebieden en buitengebieden beschreven. Hier werd gesteld dat voor één vegetatiepulse, twee buitengebieden bestaan. Deze buitengebieden komen nu terug in de vorm van U . Zelf is U gedefiniëerd op heel \mathbb{R} m.u.v. de pulslocatie. Om twee buitengebieden te creëren wordt U opgesplitst in twee delen: U^+ die het water beschrijft op (P, ∞) en U^- die het water beschrijft op $(-\infty, P)$. Merk hierbij op dat U^+ en U^- samen hetzelfde gebied beschrijven als U zelf.

Daarnaast hoeft P niet langer gespecificeerd te worden, aangezien $P^+ = \lim_{x \downarrow P} x$ leeft in het gebied (P, ∞) . Indien er dus gesproken wordt over $U^+(P)$ gaat het altijd over $U^+(P^+)$. Voor P^- geldt eenzelfde beredenering.

Nu kan $f'(P)$ geschreven worden als:

$$f'(P) = 2U_x^+(P) \frac{\partial}{\partial P} U_x^+(P) - 2U_x^-(P) \frac{\partial}{\partial P} U_x^-(P). \quad (\text{A.3})$$

Vervolgens geldt dat U^\pm een oplossing is van:

$$\begin{cases} 0 & = U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U^\pm(P) & = 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Deze differentiaalvergelijking is dezelfde als differentiaalvergelijking (1.3), maar dan voor het geval dat één pulse op het gebied leeft.

Vervolgens wordt de definitie van de afgeleide gebruikt om $\frac{\partial}{\partial P} U_x^\pm(P)$ uit te werken:

$$\frac{\partial}{\partial P} U_x^\pm(P) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_x^\pm(P + \alpha) - U_x^\pm(P)}{\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Merk hierbij op dat eigenlijk geldt dat $\lim_{\alpha \downarrow 0}$ voor U^+ en $\lim_{\alpha \uparrow 0}$ voor U^- . Om toch allebei tegelijk te berekenen noteren we dit kortweg met $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$.

De uitdrukking $U^\pm(P + \alpha)$ in vergelijking (A.5) is nu de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} 0 & = U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U^\pm(P + \alpha) & = 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Onder invloed van een verandering van de waarde van P zal ook de vorm van de functie U^\pm veranderen. Deze kleine perturbatie van de functie f kan bijgehouden worden door een reguliere expansie toe te passen op de oplossing U^\pm van probleem (A.6) [5]:

$$U^\pm = U_0^\pm + \alpha U_1^\pm + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.7})$$

Daarna kunnen de randvoorwaarden via de Taylor approximatie gevonden worden:

$$0 = U^\pm(P) + \alpha \frac{\partial}{\partial P} U^\pm(P) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.8})$$

Worden deze expansies ((A.7) en (A.8)) toegepast op probleem (A.6), dan vloeit hier het volgende nieuwe probleem uit voort:

$$\begin{cases} 0 &= U_{0xx}^\pm + h_x U_{0x}^\pm + h_{xx} U_0^\pm + 1 - U_0^\pm + \alpha [U_{1xx}^\pm + h_x U_{1x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm] + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ 0 &= U_{0x}^\pm(\pm\infty) + \alpha U_{1x}^\pm(\pm\infty), \\ 0 &= U_0^\pm + \alpha [U_{0x}^\pm + U_1^\pm] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Probleem (A.9) kan opgeplitst worden in twee eenvoudigere problemen, één van $\mathcal{O}(1)$ (zie (A.4)) en één van $\mathcal{O}(\alpha)$ (zie (A.10)), waarbij U_0^\pm een oplossing is van probleem (A.4) en U_1^\pm een oplossing is van het volgende probleem:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) &= 0, \\ U^\pm(P) &= -U_{0x}^\pm(P), \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

waarbij de U_0^\pm die voorkomt in probleem (A.10) wederom een oplossing is van probleem (A.4). Nu alle tussenstappen gemaakt zijn, kan vergelijking (A.5) verder uitgewerkt worden. Wederom gebruikmakende van de reguliere expansie en de Taylor approximatie volgt hieruit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} U_x^\pm &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_x^\pm(P + \alpha) - U_x^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0xx}^\pm(P + \alpha) + \alpha U_{1xx}^\pm(P + \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0xx}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0xx}^\pm(P) + \alpha [U_{0xx}^\pm(P) + U_{1xx}^\pm(P)] + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0xx}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{0xx}^\pm(P) + U_{1xx}^\pm(P) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{0xx}^\pm(P) + U_{1xx}^\pm(P), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

waarbij de reguliere expansie wordt toegepast in de tweede gelijkheid en de Taylor approximatie bij de derde. Uiteindelijk geeft dit nu een uitdrukking voor vergelijking (A.2):

$$f'(P) = 2U_x^+ [U_{xx}^+ + U_{1x}^+] - 2U_x^- [U_{xx}^- + U_{1x}^-], \quad (\text{A.12})$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.4) en U_1^\pm de oplossing van probleem (A.10).

A.2 Afleiding van f naar de parameters

In deze appendix wordt gekeken naar de afleidingen van f naar de parameters. In paragraaf 2.3.1 komen deze afgeleiden voor het eerst naar voren. Vervolgens worden ze in paragrafen 3.2 en 3.5 toegepast. (In paragraaf 3.3 komen ook afleidingen van f voor die zowel naar de pulslocatie gaan als ook naar de parameter. Deze afleidingen worden behandeld in appendix A.4.2.)

A.2.1 Parameter A

In principe blijft de methode uit appendix A.1 dezelfde, echter er is nu een extra parameter aanwezig. De vergelijking voor f wordt nu gegeven door:

$$f(P, A) = U_x^+(P, A)^2 - U_x^-(P, A)^2. \quad (\text{A.13})$$

De afleiding van deze f naar A gaat als volgt:

$$\frac{\partial}{\partial A} f(P, A) = 2U_x^+(P, A) \frac{\partial}{\partial A} U_x^+(P, A) - 2U_x^-(P, A) \frac{\partial}{\partial A} U_x^-(P, A), \quad (\text{A.14})$$

waarbij U^\pm een oplossing is van:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty, A) &= 0, \\ U^\pm(P, A) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

De definitie van de afgeleide wordt toegepast op $\frac{\partial}{\partial A} U_x^\pm(P, A)$:

$$\frac{\partial}{\partial A} U_x^\pm(P, A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_x^\pm(P, A + \alpha) - U_x^\pm(P, A)}{\alpha}. \quad (\text{A.16})$$

Nu is $U^\pm(P + \alpha)$ een oplossing van:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty, A) &= 0, \\ U^\pm(P, A + \alpha) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Op deze U^\pm wordt de reguliere expansie toegepast, net als in vergelijkingen (A.7). De Taylor approximatie hoeft hier niet toegepast te worden op U^\pm , aangezien U^\pm niet afhankelijk is van parameter A .

Daarnaast is het hier ook nodig de reguliere expansie toe te passen op de terreinfunctie h , aangezien h ook verandert als parameter A verandert. Deze perturbatie in de terreinfunctie kan verholpen worden m.b.v. een reguliere expansie. Voor de terreinfunctie h geldt:

$$h = h_0 + \alpha h_1 + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.18})$$

Wordt voor h de in deze scriptie gebruikte terreinfunctie ingevuld, dan krijgt deze reguliere expansie de volgende vorm:

$$(A + \alpha) \sin(Bx) + Cx = A \sin(Bx) + Cx + \alpha \sin(Bx). \quad (\text{A.19})$$

Wordt deze nieuwe expansie op h samen met de twee expansies op U^\pm ingevuld in probleem (A.17), dan vloeit hier het volgende nieuwe probleem uit voort:

$$\begin{cases} 0 &= U_{0xx}^\pm + (h_{0x} U_0^\pm)_x + 1 - U_0^\pm + \alpha [U_{1xx}^\pm + (h_{0x} U_1^\pm)_x - U_1^\pm] + \alpha [(h_{1x} U_0^\pm)_x] + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ 0 &= U_{0x}^\pm(\pm\infty, A) + \alpha U_{1x}^\pm(\pm\infty, A), \\ 0 &= U_0^\pm(P, A) + \alpha U_1^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Probleem (A.20) kan opgeplitst worden in twee eenvoudigere problemen, één van $\mathcal{O}(1)$ (zie (A.15)) en één van $\mathcal{O}(\alpha)$ (zie (A.21)), waarbij U_0^\pm een oplossing is van probleem (A.15) en U_1^\pm een oplossing is van probleem (A.21).

$$\begin{cases} 0 &= U_{1xx}^\pm + h_{0x} U_{1x}^\pm + h_{0xx} U_1^\pm - U_1^\pm + h_{1x} U_{0x}^\pm + h_{1xx} U_0^\pm, \\ U_{1x}^\pm(\pm\infty, A) &= 0, \\ U_1^\pm(P, A) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Binnen differentiaalvergelijking (A.21) geldt m.b.v. vergelijking (A.19), dat h_{1x} en h_{1xx} gegeven worden door $h_{1x} = B \cos(Bx)$ en $h_{1xx} = -B^2 \sin(Bx)$. Bovendien is U_0^\pm nu een functie, wier

waarden berekend worden door differentiaalvergelijking (A.15) op te lossen. Uiteindelijk volgt nu, gebruik makende van de reguliere expansie, dat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial A}U_x^\pm(P, A) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_x^\pm(P, A + \alpha) - U_x^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0_x}^\pm(P, A) + \alpha U_{1_x}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0_x}^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{1_x}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{1_x}^\pm(P, A).\end{aligned}\tag{A.22}$$

Nu volgt hieruit dat de afgeleide van f naar de parameter A gelijk is aan:

$$\frac{\partial}{\partial A}f(P, A) = 2U_x^+(P, A)U_{1_x}^+(P, A) - 2U_x^-(P, A)U_{1_x}^-(P, A),\tag{A.23}$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.15) en $U_{1_x}^\pm$ de oplossing is van probleem (A.21).

A.2.2 Parameter B

Dezelfde procedure als in appendix A.2.1 kan ook gebruikt worden voor het geval dat de afleiding naar parameter B bepaald dient te worden. De methode wijkt op een paar punten af van de procedure in appendix A.2.1 wegens het afleiden naar een andere parameter. Aangezien de reguliere expansie nu wordt toegepast op parameter B geldt het volgende:

$$A \sin((B + \alpha)x) + Cx = A \sin(Bx + \alpha x) + Cx.\tag{A.24}$$

Met gebruik van de Taylor approximatie geldt nu:

$$A \sin(Bx + \alpha x) + Cx = A \sin(Bx) + Cx + \alpha Ax \cos(Bx) + \mathcal{O}(\alpha^2)\tag{A.25}$$

Dit heeft tot gevolg dat de interpretatie van differentiaalvergelijking (A.21) ook een verandering ondervindt, namelijk $h_{1_x} = A \cos(Bx) - ABx \sin(Bx)$ en $h_{1_{xx}} = -2AB \sin(Bx) - AB^2x \cos(Bx)$. De afgeleide van f naar de parameter B is dus gelijk aan:

$$\frac{\partial}{\partial A}f(P, B) = 2U_x^+(P, B)U_{1_x}^+(P, B) - 2U_x^-(P, B)U_{1_x}^-(P, B),\tag{A.26}$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.15) en $U_{1_x}^\pm$ de oplossing is van probleem (A.21), met hierin $h_{1_x} = A \cos(Bx) - ABx \sin(Bx)$ en $h_{1_{xx}} = -2AB \sin(Bx) - AB^2x \cos(Bx)$.

A.2.3 Parameter C

Indien de procedure in appendix A.2.1 gebruikt wordt, maar parameter C wordt ingevuld op de plaats waar parameter A staat, dan blijft de methode hetzelfde. Er zijn een paar kleine verschillen. Het eerste verschil zit in vergelijking (A.19). Aangezien de reguliere expansie nu naar de parameter C gaat, geldt er:

$$A \sin(Bx) + (C + \alpha)x = A \sin(Bx) + Cx + \alpha x.\tag{A.27}$$

Dit betekent dat de interpretatie van probleem (A.21) ook licht verandert, namelijk: $h_{1_x} = 1$ en $h_{1_{xx}} = 0$. Probleem (A.21) kan nu hergeformuleerd worden tot:

$$\begin{cases} 0 &= U_{1_{xx}}^\pm + h_x U_{1_x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm + U_{0_x}^\pm, \\ U_{1_x}^\pm(\pm\infty, C) &= 0, \\ U_1^\pm(P, C) &= 0, \end{cases}\tag{A.28}$$

waarbij U_0^\pm een functie is, wier waarden bepaald worden d.m.v. probleem (A.15).

De afgeleide van f naar de parameter C is dus gelijk aan:

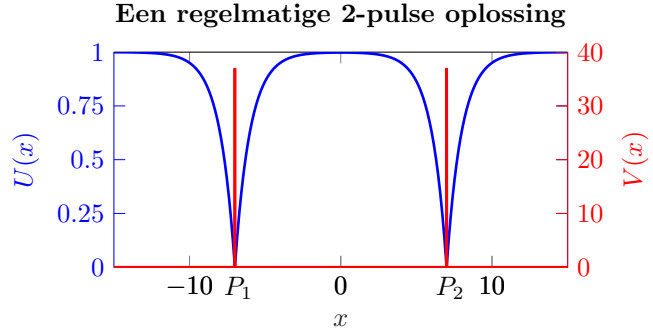
$$\frac{\partial}{\partial A}f(P, C) = 2U_x^+(P, C)U_{1_x}^+(P, C) - 2U_x^-(P, C)U_{1_x}^-(P, C),\tag{A.29}$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.15) en U_1^\pm de oplossing is van probleem (A.28).

A.3 Afleiding van f naar de pulselocatie voor meerdere pulsen

In paragraaf 3.5 wordt gekeken naar een situatie waarbij zich meerdere pulsen op het terrein voortbewegen. Voor de Jacobiaan moeten meerdere afleidingen bekend zijn, die in deze appendix uitgewerkt worden.

In paragraaf A.1 is de afleiding van f naar de pulselocatie voor één vegetatiepuls bepaald. Dit is ook mogelijk indien meerdere pulsen op een terrein aanwezig zijn. In deze appendix worden de afleidingen van deze functies uitgewerkt in het geval er twee pulsen zijn. Hierbij worden de triviale delen die behandeld zijn in appendix A.1 weggelaten en op de belangrijkste verschillen ingegaan.



Figuur 21: Illustratie van twee vegetatiepulsen op een gebied.

A.3.1 Afleiding van f_1 naar de pulselocaties

Zoals in paragraaf 3.5 vergelijking (3.8) te zien is, wordt f_1 (nu zonder parameter A) gegeven door

$$f_1(P_1, P_2) = U_x^+(P_1, P_2)^2 - U_x^-(P_1)^2. \quad (\text{A.30})$$

De functie f_1 beschrijft het pulsegedrag van P_1 , oftewel f_1 beschrijft het gebied $(-\infty, P_2) \setminus \{P_1\}$. Dit betekent dat (rand)voorwaarden opgelegd moeten worden op $U_x^-(-\infty)$, $U_x^\pm(P_1)$ en $U_x^+(P_2)$ (zie ook figuur 21).

Dit betekent dat U^\pm oplossingen zijn van een andere differentiaalvergelijking die aan bovenstaande voorwaarden moet voldoen. Nu geldt dat U^\pm de oplossing is van:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^-(-\infty) &= 0, \\ U_x^+(P_2) &= 0, \\ U_x^\pm(P_1) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Van f_1 zijn de afleidingen naar de eerste en de tweede pulselocatie gevraagd.

Allereerst wordt gekeken naar de afleiding van f_1 naar de eerste pulselocatie. Indien de reguliere- en de Taylor expansie hierop toegepast worden ((A.7) en (A.8)), volgt hieruit dat $\frac{\partial}{\partial P_1} f_1$ als oplossing

$$\frac{\partial}{\partial P_1} f_1(P_1, P_2) = 2U_x^+(P_1, P_2)[U_{xx}^+(P_1, P_2) + U_{1x}^+(P_1, P_2)] - 2U_x^-(P_1)[U_{xx}^-(P_1) + U_{1x}^-(P_1)] \quad (\text{A.32})$$

heeft, waarbij U^\pm de oplossing is van (A.31) en U_1^\pm de oplossing is van (A.33).

$$\begin{cases} 0 &= U_{1xx}^\pm + h_x U_{1x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm, \\ U_{1x}^-(-\infty) &= 0, \\ U_{1x}^+(P_2) &= 0, \\ U_1^\pm(P_1) &= -U_{0x}^\pm(P_1). \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Waarbij de U_0^\pm die voorkomt in probleem (A.33) wederom een oplossing is van probleem (A.31).

Vervolgens kan ook de afleiding van f_1 naar de tweede pulselocatie berekend worden. Opvallend is nu, dat de U^- in vergelijking (A.30) onafhankelijk is van P_2 , wat resulteert in het nul zijn van deze afgeleide. De afgeleide van f_1 naar de tweede pulselocatie is in dit geval hetzelfde als $U_x^+(P_1, P_2)^2$ afleiden naar de tweede pulselocatie. In dit geval wordt alleen de reguliere expansie toegepast. Hiermee verdwijnt de U_{0xx}^+ term (zie ook vergelijking (A.11)). Dan volgt dat $\frac{\partial}{\partial P_2} f_1$ als oplossing

$$\frac{\partial}{\partial P_2} f_1(P_1, P_2) = 2U_x^+(P_1, P_2)U_{1x}^+(P_1, P_2) \quad (\text{A.34})$$

heeft, waarbij U^+ de oplossing is van (A.31) en U_1^+ de oplossing is van (A.35).

$$\begin{cases} 0 &= U_{1_{xx}}^\pm + h_x U_{1_x}^\pm + h_{xx} U_1^\pm - U_1^\pm, \\ U_{1_x}^-(-\infty) &= 0, \\ U_1^+(P_2) &= -U_{0_x}^+(P_2), \\ U_1^\pm(P_1) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

Waarbij de U_0^\pm die voorkomt in probleem (A.35) wederom een oplossing is van probleem (A.31).

A.3.2 Afleiding van f_2 naar de pulselocaties

De afleiding van f_2 naar zowel de eerste als ook de tweede pulselocatie gaat analoog aan de appendix A.3.1. De afgeleide naar de eerste pulselocatie is:

$$\frac{\partial}{\partial P_1} f_2(P_1, P_2) = -2U_x^-(P_1, P_2)U_{1_x}^-(P_1, P_2), \quad (\text{A.36})$$

met U^- de oplossing van (A.37) en U_1^- de oplossing van (A.38).

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^+(+\infty) &= 0, \\ U^-(P_1) &= 0, \\ U^\pm(P_2) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^+(+\infty) &= 0, \\ U^-(P_1) &= -U_{0_x}^-(P_1), \\ U^\pm(P_2) &= 0. \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

Waarbij de U_0^\pm die voorkomt in probleem (A.38) wederom een oplossing is van probleem (A.37).

Vervolgens wordt de afgeleide naar de tweede pulselocatie gegeven door:

$$\frac{\partial}{\partial P_2} f_2(P_1, P_2) = 2U_x^+(P_2)[U_{xx}^+(P_2) + U_{1_x}^+(P_2)] - 2U_x^-(P_1, P_2)[U_{xx}^-(P_1, P_2) + U_{1_x}^-(P_1, P_2)], \quad (\text{A.39})$$

waarbij U^\pm gegeven wordt als oplossing van (A.37) en U_1^\pm als oplossing van (A.40).

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm + 1 - U^\pm, \\ U_x^+(+\infty) &= 0, \\ U^-(P_1) &= 0, \\ U^\pm(P_2) &= -U_{0_x}^\pm(P_2). \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Waarbij de U_0^\pm die voorkomt in probleem (A.40) wederom een oplossing is van probleem (A.37).

A.4 Dubbele afgeleides van f

In deze appendix zullen de afleidingen van f' (berekend in paragraaf A.1) naar de pulslocatie of naar de parameters A of C bepaald worden. Het resultaat van deze afleidingen wordt gebruikt in paragraaf 3.3, waarbij de uitdrukkingen noodzakelijk zijn om de Jacobiaan te bepalen. De afleiding van f' naar de parameter B is niet nodig in deze scriptie, maar is eenvoudig te vinden door deze appendix en appendix A.2.2 te combineren.

A.4.1 Dubbele afleiding van f naar de pulslocatie

I.p.v. de functie f tweemaal af te leiden naar de pulslocatie is het ook mogelijk de functie f' uit paragraaf A.1 éénmaal af te leiden naar de pulslocatie. Dit is precies wat in deze paragraaf gedaan wordt. De afleiding van de afgeleide is meer werk, maar gaat via dezelfde methode als die in paragraaf A.1 wordt toegepast. Herinner dat $f'(P)$ gegeven werd door:

$$f'(P) = 2U_x^+(P)[U_{xx}^+(P) + U_{1_x}^+(P)] - 2U_x^-(P)[U_{xx}^-(P) + U_{1_x}^-(P)], \quad (\text{A.41})$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.4) en $U_{1_x}^\pm$ de oplossing is van probleem (A.10). Voor het berekenen van de tweede afgeleide wordt de afgeleide van f' genomen en deze wordt eerst zover mogelijk uitgeschreven m.b.v. de kettingregel (het argument P wordt hier weggelaten i.v.m. de benodigde ruimte):

$$\begin{aligned} f''(P) &= \frac{\partial}{\partial P} f'(P) = \frac{\partial}{\partial P} [2U_x^+ [U_{xx}^+ + U_{1_x}^+] - 2U_x^- [U_{xx}^- + U_{1_x}^-]] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial P} [U_x^+ U_{xx}^+ + U_x^+ U_{1_x}^+] - 2 \frac{\partial}{\partial P} [U_x^- U_{xx}^- + U_x^- U_{1_x}^-] \\ &= 2 \left[U_x^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_{xx}^+] + U_{xx}^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_x^+] + U_x^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_{1_x}^+] + U_{1_x}^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_x^+] \right] \\ &\quad - 2 \left[U_x^- \frac{\partial}{\partial P} [U_{xx}^-] + U_{xx}^- \frac{\partial}{\partial P} [U_x^-] + U_x^- \frac{\partial}{\partial P} [U_{1_x}^-] + U_{1_x}^- \frac{\partial}{\partial P} [U_x^-] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Allereerst wordt nu opgemerkt dat $\frac{\partial}{\partial P} U_x^\pm$ al berekend is in appendix A.1 in vergelijking (A.11) en deze is dus al bekend. Daarentegen dienen $\frac{\partial}{\partial P} U_{xx}^\pm$ en $\frac{\partial}{\partial P} U_{1_x}^\pm$ volgens dezelfde procedure als in appendix A.1 uitgerekend te worden, te beginnen met $\frac{\partial}{\partial P} U_{xx}^\pm$. De definitie van de afgeleide wordt gebruikt en er volgt:

$$\frac{\partial}{\partial P} U_{xx}^\pm(P) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{xx}^\pm(P + \alpha) - U_{xx}^\pm(P)}{\alpha}. \quad (\text{A.43})$$

$U^\pm(P, A + \alpha)$ is nu de oplossing van probleem (A.6) uit appendix (A.1). M.b.v. de reguliere- en de Taylor expansie vloeit hier nu probleem (A.9) uit voort, die opgesplitst kan worden in probleem (A.4) van $\mathcal{O}(1)$ en probleem (A.10) van $\mathcal{O}(\alpha)$. Vervolgens kan nu een uitdrukking voor $\frac{\partial}{\partial P} U_{xx}^\pm(P)$ gevonden worden, gebruik makende van de reguliere- en de Taylor expansie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} U_{xx}^\pm(P) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{xx}^\pm(P + \alpha) - U_{xx}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0_{xx}}^\pm(P + \alpha) + \alpha U_{1_{xx}}^\pm(P + \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0_{xx}}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0_{xx}}^\pm(P) + \alpha [U_{0_{xxx}}^\pm(P) + U_{1_{xx}}^\pm(P)] + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0_{xx}}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{0_{xx}}^\pm(P) + U_{1_{xx}}^\pm(P) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{0_{xx}}^\pm(P) + U_{1_{xx}}^\pm(P), \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Vervolgens dient $\frac{\partial}{\partial P} U_{1_x}^\pm$ nog berekend te worden. De definitie van de afgeleide geeft de eerste stap:

$$\frac{\partial}{\partial P} U_{1_x}^\pm(P) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1_x}^\pm(P + \alpha) - U_{1_x}^\pm(P)}{\alpha}. \quad (\text{A.45})$$

$U_1^\pm(P + \alpha)$ is nu de oplossing van:

$$\begin{cases} 0 & = U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U^\pm(P + \alpha) & = -U_{0x}^\pm(P + \alpha), \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

waarbij de $U_0^\pm(P + \alpha)$ uit probleem (A.46) de oplossing is van probleem (A.6). Worden hierop de reguliere- en de Taylor expansie toegepast, dan volgt het volgende nieuwe probleem:

$$\begin{cases} 0 & = U_{1,0xx}^\pm + (h_x U_{1,0}^\pm)_x - U_{1,0}^\pm + \alpha[U_{1,1xx}^\pm + (h_x U_{1,1}^\pm)_x - U_{1,1}^\pm] + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ 0 & = U_{1,0x}^\pm(\pm\infty) + \alpha U_{1,1x}^\pm(\pm\infty), \\ 0 & = U_{1,0}^\pm(P) + U_{0x}^\pm(P) + \alpha[U_{1,0x}^\pm(P) + U_{1,1}^\pm(P) + U_{0xx}^\pm(P) + U_{1x}^\pm(P)] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Probleem (A.47) splitst zich op in twee deelproblemen, één van $\mathcal{O}(1)$ (zie (A.10)) en één van $\mathcal{O}(\alpha)$ (zie (A.48)). Hierbij zijn $U_{1,0}^\pm$ en $U_{1,1}^\pm$ uit differentiaalvergelijking (A.47) oplossingen van respectievelijk problemen (A.10) en (A.48).

$$\begin{cases} 0 & = U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm - U^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty) & = 0, \\ U^\pm(P) & = -2U_{1x}^\pm(P) - U_{0xx}^\pm(P). \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

Hierbij moet opgemerkt worden dat $U_{1,0}^\pm$ en $U_{1,1}^\pm$ dezelfde oplossingen zijn en daarmee gelijk zijn aan elkaar. De $U_{1,1}^\pm$ en U_{0x}^\pm die voorkomen in probleem (A.48) zijn de oplossingen van respectievelijk probleem (A.10) en probleem (A.4).

Als laatste wordt nu de uitdrukking $\frac{\partial}{\partial P} U_{1x}^\pm(P)$ uitgewerkt, gebruik makende van de reguliere- en de Taylor expansie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} U_{1x}^\pm(P) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1x}^\pm(P + \alpha) - U_{1x}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1,0x}^\pm(P + \alpha) + \alpha U_{1,1x}^\pm(P + \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{1,0x}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1,0x}^\pm(P) + \alpha[U_{1,0xx}^\pm(P) + U_{1,1x}^\pm(P)] + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{1,0x}^\pm(P)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{1,0xx}^\pm(P) + U_{1,1x}^\pm(P) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{1,0xx}^\pm(P) + U_{1,1x}^\pm(P), \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Hetgeen berekend diende te worden, was de dubbele afleiding van f naar de pulslocatie. Alle details zijn nu behandeld en moeten alleen nog gecombineerd worden om het eindresultaat te verkrijgen. Het resultaat van vergelijking A.11, van vergelijking (A.44) en van vergelijking (A.49) worden nu ingevuld in vergelijking (A.41) en hieruit volgt (zonder argument):

$$\begin{aligned} f''(P) &= 2 \left[U_x^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_{xx}^+] + U_{xx}^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_x^+] + U_x^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_{1x}^+] + U_{1x}^+ \frac{\partial}{\partial P} [U_x^+] \right] \\ &\quad - 2 \left[U_x^- \frac{\partial}{\partial P} [U_{xx}^-] + U_{xx}^- \frac{\partial}{\partial P} [U_x^-] + U_x^- \frac{\partial}{\partial P} [U_{1x}^-] + U_{1x}^- \frac{\partial}{\partial P} [U_x^-] \right], \\ &= 2 [U_x^+ [U_{xxx}^+ + U_{1xx}^+] + U_{xx}^+ [U_{xx}^+ + U_{1x}^+] + U_x^+ [U_{1xx}^+ + U_{1,1x}^+] + U_{1x}^+ [U_{xx}^+ + U_{1x}^+]] \\ &\quad - 2 [U_x^- [U_{xxx}^- + U_{1xx}^-] + U_{xx}^- [U_{xx}^- + U_{1x}^-] + U_x^- [U_{1xx}^- + U_{1,1x}^-] + U_{1x}^- [U_{xx}^- + U_{1x}^-]], \\ &= 2 [U_x^+ [U_{xxx}^+ + 2U_{1xx}^+ + U_{1,1x}^+] + (U_{xx}^+)^2 + 2U_{1x}^+ U_{xx}^+ + (U_{1x}^+)^2] \\ &\quad - 2 [U_x^- [U_{xxx}^- + 2U_{1xx}^- + U_{1,1x}^-] + (U_{xx}^-)^2 + 2U_{1x}^- U_{xx}^- + (U_{1x}^-)^2], \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

waarbij U^\pm de oplossing is van probleem (A.4), U_1^\pm de oplossing is van probleem (A.10) en $U_{1,1}^\pm$ de oplossing is van probleem (A.48).

A.4.2 Afleiding van f naar de pulselocatie en naar parameters

Hieronder zal alleen de afleiding van f naar de pulselocatie en naar parameter A behandeld worden. De uitdrukking voor de afleiding van f naar de pulselocatie en naar parameter B of C kan verkregen worden door het resultaat hieronder (voor parameter A) te combineren met het resultaat van appendices A.2.2 en A.2.3.

De afleiding van f naar de pulselocatie is al uitgevoerd in appendix A.1. Deze werd gegeven door:

$$f'(P, A) = 2U_x^+(P, A)[U_{xx}^+(P, A) + U_{1_x}^+(P, A)] - 2U_x^-(P, A)[U_{xx}^-(P, A) + U_{1_x}^-(P, A)], \quad (\text{A.51})$$

waarbij U^\pm de oplossing is van differentiaalvergelijking (A.4) en U_1^\pm de oplossing is van differentiaalvergelijking (A.10).

Resterend is het uitvoeren van een afleiding naar de parameter A toegepast op deze $f'(P, A)$. Alereerst wordt de afleiding van f' naar A uitgeschreven m.b.v. de kettingregel (wederom wordt het argument weggelaten wegens ruimtegebrek):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} f'(P, A) &= \frac{\partial}{\partial A} [2U_x^+ [U_{xx}^+ + U_{1_x}^+] - 2U_x^- [U_{xx}^- + U_{1_x}^-]] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial A} [U_x^+ U_{xx}^+ + U_x^+ U_{1_x}^+] - 2 \frac{\partial}{\partial A} [U_x^- U_{xx}^- + U_x^- U_{1_x}^-] \\ &= 2 \left[U_x^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_{xx}^+] + U_{xx}^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_x^+] + U_x^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_{1_x}^+] + U_{1_x}^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_x^+] \right] \\ &\quad - 2 \left[U_x^- \frac{\partial}{\partial A} [U_{xx}^-] + U_{xx}^- \frac{\partial}{\partial A} [U_x^-] + U_x^- \frac{\partial}{\partial A} [U_{1_x}^-] + U_{1_x}^- \frac{\partial}{\partial A} [U_x^-] \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Ten tweede wordt opgemerkt dat $\frac{\partial}{\partial A} U_x^\pm$ al berekend is in appendix A in vergelijking (A.22) en deze waarde dus bekend is. Daarentegen moeten de termen $\frac{\partial}{\partial A} U_{xx}^\pm$ en $\frac{\partial}{\partial A} U_{1_x}^\pm$ nog berekend worden. Dit gebeurt middels dezelfde methode als in appendix A.1. Als eerste wordt $\frac{\partial}{\partial A} U_{xx}^\pm$ bepaald. De definitie van de afgeleide wordt gebruikt en er volgt:

$$\frac{\partial}{\partial A} U_{xx}^\pm(P, A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{xx}^\pm(P, A + \alpha) - U_{xx}^\pm(P, A)}{\alpha}. \quad (\text{A.53})$$

Hierin is $U^\pm(P, A + \alpha)$ de oplossing van differentiaalvergelijking (A.17) uit appendix A. Op deze differentiaalvergelijking worden de reguliere expansie en de Taylor approximatie ((A.7) en (A.8)) toegepast. Daarnaast wordt de reguliere expansie ook toegepast op de terreinfunctie h (A.18), aangezien h ook de parameter A bevat. Indien alle expansies worden uitgevoerd volgt differentiaalvergelijking (A.20) hieruit. Deze differentiaalvergelijking kan op zijn beurt weer opgesplitst worden in een differentiaalvergelijking van $\mathcal{O}(1)$ (A.15) en een differentiaalvergelijking van $\mathcal{O}(\alpha)$ (A.21).

Vervolgens volgt nu, gebruik makende van de reguliere expansie, dat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} U_{xx}^\pm(P, A) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{xx}^\pm(P, A + \alpha) - U_{xx}^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{0_{xx}}^\pm(P, A) + \alpha U_{1_{xx}}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{0_{xx}}^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{1_{xx}}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{1_{xx}}^\pm(P, A), \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Vervolgens wordt $\frac{\partial}{\partial A} U_{1_x}^\pm$ berekend. De definitie van de afgeleide geeft:

$$\frac{\partial}{\partial A} U_{1_x}^\pm(P, A) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1_x}^\pm(P, A + \alpha) - U_{1_x}^\pm(P, A)}{\alpha}. \quad (\text{A.55})$$

U_1^\pm is nu de oplossing van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_x U_x^\pm + h_{xx} U^\pm - U^\pm + h_{1_x} U_{0_x}^\pm + h_{1_{xx}} U_0^\pm, \\ U_x^\pm(\pm\infty, A) &= 0, \\ U^\pm(P, A + \alpha) &= 0, \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

waarbij U_0^\pm de functie is, wier waarden berekend kunnen worden m.b.v. differentiaalvergelijking (A.15). Daarnaast geldt dat $h_{1_x} = B \cos(Bx)$ en $h_{1_{xx}} = -B^2 \sin(Bx)$.

Vervolgens worden hierop de reguliere- en de Taylor expansie toegepast. Merk hierbij op dat h_1 een functie is die niet langer van parameter A afhangt, oftewel, hierop hoeft geen expansie toegepast te worden. Op h zelf wordt wel wederom de reguliere expansie toegepast. Worden alle expansies achtereenvolgens op differentiaalvergelijking (A.56) toegepast, dan ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} 0 &= U_{1,0_{xx}}^\pm + (h_x U_{1,0}^\pm)_x - U_{1,0}^\pm + (h_{1_x} U_0^\pm)_x + \alpha[U_{1,1_{xx}}^\pm + (h_x U_{1,1}^\pm)_x - U_{1,1}^\pm] + 2\alpha(h_{1_x} U_1^\pm)_x, \\ 0 &= U_{1,0_x}^\pm(\pm\infty, A) + \alpha U_{1,1_x}^\pm(\pm\infty, A), \\ 0 &= U_{1,0}^\pm(P, A) + \alpha U_{1,1}^\pm(P, A), \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

Deze differentiaalvergelijking (A.57) splitst zich op in twee differentiaalvergelijkingen; één van $\mathcal{O}(1)$ (zie (A.21)) en één van $\mathcal{O}(\alpha)$ (zie (A.58)). Hierbij zijn $U_{1,0}^\pm$ en $U_{1,1}^\pm$ uit differentiaalvergelijking (A.57) respectievelijk oplossingen van differentiaalvergelijkingen (A.21) en (A.58). Daarnaast zijn U_0^\pm en U_1^\pm functies, waarvan de oplossing bepaald kan worden door respectievelijk de oplossingen van differentiaalvergelijkingen (A.15) en (A.21) te bepalen.

$$\begin{cases} 0 &= U_{xx}^\pm + h_{0_x} U_x^\pm + h_{0_{xx}} U^\pm - U^\pm + 2[h_{1_x} U_{1_x}^\pm + h_{1_{xx}} U_1^\pm], \\ U_x^\pm(\pm\infty) &= 0, \\ U^\pm(P, A) &= 0, \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Hierin is U_1^\pm een functie, die bepaald kan worden door differentiaalvergelijking (A.21) op te lossen. h_{1_x} en $h_{1_{xx}}$ worden in deze scriptie gegeven door $h_{1_x} = B \cos(Bx)$ en $h_{1_{xx}} = -B^2 \sin(Bx)$. Als laatste kan nu de uitdrukking $\frac{\partial}{\partial A} U_{1_x}^\pm$ uitgewerkt worden m.b.v. de reguliere expansie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial P} U_{1_x}^\pm(A) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1_x}^\pm(P, A + \alpha) - U_{1_x}^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{U_{1,0_x}^\pm(P, A) + \alpha U_{1,1_x}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha^2) - U_{1,0_x}^\pm(P, A)}{\alpha}, \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} [U_{1,1_x}^\pm(P, A) + \mathcal{O}(\alpha)], \\ &= U_{1,1_x}^\pm(P, A), \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Nu zijn alle benodigdheden om $\frac{\partial}{\partial A} f'(P, A)$ te berekenen bekend. Om tot het eindresultaat te komen, worden vergelijkingen (A.52), (A.54) en (A.59) gecombineerd. Dit geeft de volgende uitdrukking (wederom zonder argument):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} f'(P, A) &= 2 \left[U_x^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_{xx}^+] + U_{xx}^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_x^+] + U_x^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_{1_x}^+] + U_{1_x}^+ \frac{\partial}{\partial A} [U_x^+] \right] \\ &\quad - 2 \left[U_x^- \frac{\partial}{\partial A} [U_{xx}^-] + U_{xx}^- \frac{\partial}{\partial A} [U_x^-] + U_x^- \frac{\partial}{\partial A} [U_{1_x}^-] + U_{1_x}^- \frac{\partial}{\partial A} [U_x^-] \right], \\ &= 2 [U_x^+ U_{1_{xx}}^+ + U_{xx}^+ U_{1_x}^+ + U_x^+ U_{1,1_x}^+ + U_{1_x}^+ U_{1_x}^+] \\ &\quad - 2 [U_x^- U_{1_{xx}}^- + U_{xx}^- U_{1_x}^- + U_x^- U_{1,1_x}^- + U_{1_x}^- U_{1_x}^-], \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

waarbij U^\pm de oplossing is van differentiaalvergelijking (A.15), U_1^\pm de oplossing is van differentiaalvergelijking (A.21) en $U_{1,1}^\pm$ de oplossing is van differentiaalvergelijking (A.58).

A.4.3 Overige afleidingen

Alle overige afleidingen die voorkomen in deze scriptie, kunnen gevonden worden door afleidingen uit deze appendix met elkaar te combineren.

Referenties

- [1] Klausmeier C. A. Regular and irregular patterns in semiarid vegetation. *Science*, 284(5421):1826–1828, 1999.
- [2] Kuznetsov Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112. 1998.
- [3] Vuik C. Van Kan J. Van Beek P. Vermeulen F. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Delft Academic Press / VSSD, second edition, 2015.
- [4] Doelman A. Rademacher J. Siero E. Eppinga M. Rietkerk M. Siteur K. Hek G. Klimaatsverandering, verwoestijning en biljart. *NAW*, 5/14(3):200–204, 2013.
- [5] Holmes M. H. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, second edition, 2013.
- [6] Dunkerley D. L. *Vegetation mosaics of arid western new south wales, australia: Considerations of their origin and persistence. In Patterns of Land Degradation in Drylands: Understanding Self-Organised Ecogeomorphic Systems*. Springer, 2014.
- [7] Wolters M. J. M. Bachelorscriptie website. <http://mwoltershuppel.wixsite.com/scriptie>, 2018. Verkregen: 11 februari 2019.
- [8] Bastiaansen R. and Doelman A. The dynamics of disappearing pulses in a singularly perturbed reaction-diffusion system with parameters that vary in time and space. *ArXiv e-prints 1802.02737*, February 2018.
- [9] Fensholt R., Langanke T., Rasmussen K., Reenberg A., Prince S. D., Tucker C., Scholes R. J., Bao Le Q., Bondeau A., Eastman R., Epstein H., Gaughan A. E., Hellden U., Mbow C., Olsson L., Paruelo J., Schweitzer C., Seaquist J., and Wessels K. Greenness in semi-arid areas across the globe 1981-2007 an earth observing satellite based analysis of trends and drivers. *Remote Sensing of Environment*, 121:144–158, 2012.