Markov-operatoren: Asymptotisch gedrag en equicontinuïteit

Denzen, M. van

Markov-operatoren: asymptotisch gedrag en equicontinuïteit

Masterscriptie bij het Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, als onderdeel ter verkrijging van de graad van

Master of Science
in
Mathematics

Auteur:
Martin van Denzen

Begeleider:
Dr. Sander C. Hille

15 juli 2021

Universiteit Leiden
Wiskunde en Natuurwetenschappen

Voorwoord

Van september 2020 tot en met juni 2021 ben ik bezig geweest met mijn masteronderzoeksproject, waar deze scriptie het resultaat van is. Ik heb ervoor gekozen om het in het Nederlands te schrijven, omdat ik het een mooie taal vind en ik wil bijdragen aan het Nederlands als wetenschapstaal. Mijn scriptie is geschreven voor mensen met 'wiskundige volwassenheid' en extra kennis in maattheorie en, in mindere mate, functionaalanalyse. Die twee onderwerpen hebben mij persoonlijk altijd aangesproken: ze zijn niet te abstract, maar toch nog 'puur'. Deze scriptie is bij uitstek geschikt voor mensen die interesse hebben om discrete Markovprocessen operatortechnisch te bekijken als dynamische systemen.

De motivatie achter het onderzoek is een artikel van Lasota, Li en Yorke. Mijn begeleider dr. Sander C. Hille vroeg zich af of de daar bewezen stellingen veralgemeniseerd konden worden. Tot op zekere hoogte kon dat inderdaad door resultaten uit ongepubliceerd werk van Maja Ziemlańska, dat zelf weer geïnspireerd is door een aantal bewijzen in een artikel van Bas Lemmens en Onno van Gaans. Maar als je iets wilt veralgemeniseren, heb je minder structuur en zijn de stellingen, als ze überhaupt nog waar zijn, moeilijker te bewijzen. Het is dan ook niet gelukt om een volledige veralgemenisering te geven. We stuiten namelijk op een probleem over topologische groepen dat we niet kunnen oplossen, in ieder geval ik niet.

Voor zover wij weten, staat er een aantal nieuwe resultaten in Hoofdstukken 3, 6 en 7. Eventueel vervolgonderzoek uitgaande van Hoofdstukken 6 en 7 is zeker mogelijk en zou bijvoorbeeld kunnen leiden tot resultaten over Markov-operatoren met meerdere ergodische maten.

Ik hoop dat de lezer vindt wat hij zoekt in mijn scriptie of plezier heeft tijdens het lezen. Of allebei natuurlijk! Schroom niet om voor eventuele vragen of opmerkingen een e-mail te sturen naar martin@vandenzen.nl.

Als laatste wil ik graag Sander Hille bedanken voor de goede en leuke begeleiding van mijn project: ik keek altijd uit naar onze wekelijkse afspraak op vrijdag!

Samenvatting

In deze scriptie staan zogenaamde Markov-operatoren centraal. Een Markov-operator is een lineaire afbeelding op de verzameling maten op een vaste ruimte die kansmaten naar kansmaten stuurt. Na een aantal technische resultaten over verschillende topologieën op de verzameling maten kijken we naar de hiërarchie van verschillende eigenschappen die een Markov-operator kan hebben. Daarna onderzoeken we naar aanleiding van een artikel van Lasota, Li en Yorke wat we kunnen zeggen in de situatie waarin er een compacte verzameling kansmaten bestaat waar elke kansmaat naartoe convergeert onder de iteraties van een Markov-operator. Als laatste richten we ons op één van de eigenschappen die een Markov-operator kan hebben: de e-eigenschap. We geven voldoende voorwaarden voor wanneer het hebben van de e-eigenschap in één punt impliceert dat de Markov-operator de e-eigenschap in meerdere punten heeft.

Inhoudsopgave

1

Inleiding

Het belangrijkste concept in deze scriptie is de Markov-operator. Er is een nauw verband tussen Markov-operatoren en overgangskernen van discrete Markovprocessen: ze geven beide het verloop van een startverdeling aan. Met Markov-operatoren is echter makkelijker te werken vanuit analytisch oogpunt. In deze scriptie beschouwen we Markov-operatoren als discrete dynamische systemen. Enkele andere onderwerpen die voorkomen, zijn maattheorie, groepentheorie en functionaalanalyse.

In de literatuur worden vaak Markov-operatoren op dichtheden bestudeerd, zoals in [21], [6] en [20]. Wij bekijken echter een algemenere versie: de Markov-operator op maten. Zie bijvoorbeeld [27], [26], [18], [15], [14] en [28].

De aanleiding van deze scriptie is het eerder genoemde artikel [20] van Lasota, Li en Yorke dat Markov-operatoren op dichtheden bekijkt. Daarin wordt bewezen dat de iteraties van dichtheden onder een Markov-operator in de limiet periodiek zijn. Daarbij wordt wel aangenomen dat er een compacte verzameling van dichtheden bestaat waar die iteraties naartoe convergeren. In de hoop dit resultaat te veralgemeniseren doen we ook voor een Markov-operator op maten de aanname dat hij een compacte *insnoerende* verzameling heeft, en kijken we wat we onder die aanname zoal kunnen bewijzen. Daarbij komt ongepubliceerd en onvoltooid werk van Maja Ziemlańska, dat zelf weer gebaseerd is op enkele bewijzen uit [22], goed van pas. Uit dat werk krijgen we namelijk onder meer impliciet de topologische structuur van de banen binnen de kleinste insnoerende verzameling van een Markov-operator: zo'n baan is homeomorf met een quotientgroep van een zogeheten compacte, monothetische groep. Wegens niet-triviale resultaten over compacte, monothetische groepen in onder andere [16] blijkt de baan homeomorf te zijn met een gesloten ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Hier is $\mathbb{T}$ de complexe eenheidscirkel met de Euclidische topologie en vermenigvuldiging als groepsstructuur. Een preciezer resultaat is misschien mogelijk door de extra eigenschappen van de insnoerende verzameling te gebruiken.

Ryszard Kukulski en Hanna Wojewódka-Ściążo kwamen in [19] met een verdere uitmelking van een in [15] gegeven bewijs. Daarop gingen wij ook kijken of er nog meer resultaten uit te halen waren. Dat bleek inderdaad zo te zijn: de in [15] gegeven constructie werkt algemener dan waar ze eerst voor werd gebruikt. Zowel in [15] als in [19] wordt zogeheten *asymptotische stabiliteit* van een Markov-operator aangenomen. Dan neem je aan dat er een maat bestaat waar elke maat onder iteratie van de Markov-operator naartoe convergeert. Dat is echter niet strikt noodzakelijk om het bewijs in [15] uit te voeren.

Alle gedefinieerde termen zijn gebaseerd op al in het Engels bestaande termen. Als van de Engelse term een vertaling naar het Nederlands te vinden was, dan werd die gebruikt. Echter, soms zijn er geen Nederlandse vertalingen vindbaar. In dat geval is de Nederlandse vertaling zo gekozen dat die zo dicht mogelijk bij de Engelse term staat. Bij iedere definitie staat de Engelse vertaling er tussen haakjes bij.

1.1 Overzicht van de scriptie

In Hoofdstuk 2 geven we de gebruikte notatie en de veelgebruikte definities die nodig zijn om de verdere hoofdstukken te begrijpen.

In Hoofdstuk 3 vergelijken we de Dudleynorm met de norm van totale variatie, hoewel Stelling 3.2.9 ook een meetbaarheidsresultaat met betrekking tot de zwakke topologie geeft voor afbeeldingen die horen bij de Jordandecompositie. In Paragraaf 3.1 zien we hoe we de totale variatie van een maat kunnen uitdrukken in termen van begrensde Lipschitz-continue functies en in termen van de Dudleynorm. In Paragraaf 3.2 bewijzen we dat evaluatie van de variatie van een maat in een Borelverzameling meetbaar is als de verzameling maten de door de Dudleynorm geïnduceerde topologie of de zwakke topologie krijgt.

In Hoofdstuk 4 verdiepen we ons in het concept van Markov-operatoren. In de literatuur wordt een scala aan eigenschappen gedefinieerd voor Markov-operatoren. In Paragraaf 4.1 geven we de hiërarchie van die eigenschappen en geven we verschillende equivalente uitspraken voor de Fellereigenschappen. In Paragraaf 4.2 bekijken we zeven voorbeelden van Markov-operatoren met hun eigenschappen. In Paragraaf 4.3 zien we hoe de twee soorten Markov-operatoren, die op maten en die op dichtheden, aan elkaar gerelateerd zijn, en geven we de Stelling uit [20] die de aanleiding was voor deze scriptie.

In Hoofdstuk 5 werken we toe naar Stelling 5.2.5, die de basis vormt voor Hoofdstuk 6. In Paragraaf 5.1 introduceren we het begrip *asymptotische compactheid* en bewijzen we er een aantal resultaten over. We doen hier voor het eerst de aanname dat er een compacte insnoerende verzameling bestaat. In Paragraaf 5.2 geven en bewijzen we de resultaten uit het ongepubliceerde werk van Maja Ziemlańska en voegen we alle tot dan toe verkregen resultaten samen in Stelling 5.2.5. In die stelling komt een groep voor, waarvan we de structuur verder onderzoeken in Paragraaf 5.3. We geven daar ook de topologische structuur van de banen in de kleinste insnoerende verzameling in termen van de eerder genoemde groep.

Hoofdstuk 6 is waarschijnlijk het belangrijkste hoofdstuk. We bekijken Stelling 5.2.5 in het licht van Markov-operatoren, ook wel Stelling 6.0.3. Laten we de kleinste compacte insnoerende verzameling van een Markov-operator als in Stelling 5.2.5 als $\mathcal{A}$ schrijven. In Paragraaf 6.1 bekijken we de structuur van $\mathcal{A}$. In het bijzonder bewijzen we dat $\mathcal{A}$ convex is, en onderzoeken we de banen in $\mathcal{A}$ onder werking van de Markov-operator. In Paragraaf 6.2 onderzoeken we wat er gebeurt als de metriek in Stelling 6.0.3 afkomt van de Dudleynorm. Bijzondere Markov-operatoren sturen een maat naar zijn beeldmaat met betrekking tot een zekere afbeelding T. In Subparagraaf 6.2.1 bewijzen we dat een dergelijke Markov-operator voldoet aan de voorwaarden voor Stelling 5.2.5 dan en slechts dan als T aan de voorwaarden voldoet. In Subparagraaf 6.2.2 bewijzen we dat Cesàrogemiddeldes naar een unieke invariante kansmaat convergeren, onder de aannames dat de bijbehorende continue Markov-operator P voldoet aan de voorwaarden van Stelling 5.2.5 en inderdaad een unieke invariante kansmaat μ^* heeft. Vervolgens bewijzen we in Subparagraaf 6.2.3 onder dezelfde aannames dat $\mu(\mathrm{supp}(\mu^*)) = 1$ voor $\mu \in \mathcal{A}$. Onder alleen de aanname van het bestaan van een unieke invariante maat laten we zien dat $P\mu(\mathrm{supp}(\mu^*)) = 1$ als $\mu(\mathrm{supp}(\mu^*)) = 1$ voor een kansmaat μ. Hier staat $\mathrm{supp}(\mu^*)$ voor de drager van μ^*. In Paragraaf 6.3 zien we wat er gebeurt als in Stelling 6.0.3 de metriek die afkomt van de norm van totale variatie wordt gekozen. Zo geven we een in [18] bewezen uitbreiding van de stelling uit het artikel [20] van Lasota, Li en Yorke. Als laatste vergelijken we in Paragraaf 6.4 de in Hoofdstuk 6 verkregen resultaten in de Dudleynorm en de norm van totale variatie.

In Hoofdstuk 7 schrijven we de in [15] gegeven constructie uit onder zo min mogelijk voorwaarden, en bewijzen we er sterke resultaten mee met betrekking tot e-*eigenschap*. Zo bewijzen we in Stelling 7.2.7 dat we voor een ergodische maat μ met betrekking tot een *reguliere* en continue Markov-operator P hebben dat P de e-eigenschap heeft in ofwel μ-bijna alle punten, ofwel in geen enkel punt.

2

Voorkennis

In dit hoofdstuk gaan we de belangrijkste voorkennis en notatie na die benodigd zijn voor de andere hoofdstukken.

2.1 Notatie

Stel dat S een topologische ruimte is, uitgerust met de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(S)$. We schrijven $\mathcal{M}(S)$ voor de reële vectorruimte van eindige getekende Borelmaten (Engels: signed measures). Deze ruimte bevat de kegel van eindige positieve maten, die aangeduid wordt met $\mathcal{M}^+(S)$. Deze verzameling bevat weer de verzameling $\mathcal{P}(S)$ van Borelkansmaten op S.
We schrijven $\mathrm{BM}(S)$ voor de verzameling begrensde en meetbare functies van S naar $\mathbb{R}$. We voorzien deze ruimte van de supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$, die haar tot een Banachruimte maakt. Verder beschouwen we $C_b(S)$, de reële vectorruimte die bestaat uit alle begrensde continue functies van S naar $\mathbb{R}$. We voorzien ook deze ruimte van de supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$, die haar tot een Banachruimte maakt.

De functie $\mathbb{1}_E : S \to \{0,1\}$ is de indicatorfunctie van $E \subseteq S$. Voor een maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$ en een functie $f \in L^1(S, \mathcal{B}(S), \mu)$, schrijven we

$$\langle \mu, f \rangle := \int_S f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Stel nu dat (S,d) een metrische ruimte is. We definiëren $\mathrm{Lip}(S,d)$ als de verzameling van alle functies $S \to \mathbb{R}$ die Lipschitz-continu zijn met betrekking tot d. Ter herinnering: een functie $f : S \to \mathbb{R}$ heet Lipschitz-continu met betrekking tot de metriek d wanneer er een $L > 0$ bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| \leq L d(x,y) \tag{2.1}$$

geldt voor iedere $x, y \in S$. Zij $f : S \to \mathbb{R}$ een Lipschitz-continue functie. Dan is

$$|f|_L = |f|_{L,d} := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x, y \in S, \ x \neq y \right\}$$

het kleinste getal $L > 0$ waarvoor Vergelijking (2.1) geldt voor iedere $x, y \in S$. We noemen $|f|_{L,d}$ de Lipschitz-constante van f met betrekking tot d. We schrijven

$$\mathrm{BL}(S) = \mathrm{BL}(S,d) := \{ f \in \mathrm{Lip}(S,d) : \|f\|_\infty < \infty \}$$

voor de verzameling van begrensde Lipschitz-continue functies en

$$\|f\|_{\mathrm{BL}} = \|f\|_{\mathrm{BL},d} := \|f\|_\infty + |f|_{L,d}, \ \|f\|_{\max} = \|f\|_{\max,d} := \max\{|f|_{L,d}, \|f\|_\infty\}$$

voor $f \in \mathrm{BL}(S,d)$. De genormeerde ruimten $(\mathrm{BL}(S), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})$ en $(\mathrm{BL}(S), \|\cdot\|_{\max})$ zijn beide Banachruimtes. In Lemma 6 in [4] wordt bewezen dat de afbeelding $\mathcal{M}(S) \to \mathrm{BL}(S)^*$ gegeven door

$$\mu \mapsto \langle \mu, \cdot \rangle$$

een inbedding is. We kunnen dus de operatornorm van de duale ruimtes $(\mathrm{BL}(S), \|\cdot\|_{\mathrm{BL}})^*$ en $(\mathrm{BL}(S), \|\cdot\|_{\max})^*$ gebruiken om $\mathcal{M}(S)$ te normeren. We schrijven voor $\mu \in \mathcal{M}(S)$:

$$\|\mu\|_{\mathrm{BL}}^* = \|\mu\|_{\mathrm{BL},d}^* := \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1} |\langle \mu, f \rangle|, \quad \|\mu\|_{\mathrm{FM}} = \|\mu\|_{\mathrm{FM},d} := \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_{\max} \leq 1} |\langle \mu, f \rangle|.$$

De norm $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$ wordt ook wel de Dudleynorm genoemd, en $\|\cdot\|_{\mathrm{FM}}$ wordt de Fortet-Mouriernorm genoemd. De normen $\|\cdot\|_{\mathrm{BL},d}^*$ en $\|\cdot\|_{\mathrm{FM},d}$ op $\mathcal{M}(S)$ zijn equivalent want voor iedere maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$ geldt er

$$\|\mu\|_{\mathrm{BL},d}^* \leq \|\mu\|_{\mathrm{FM},d} \leq 2\|\mu\|_{\mathrm{BL},d}^*.$$

We schrijven ook wel $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ voor de ruimte $\mathcal{M}(S)$ met de door $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$- of $\|\cdot\|_{\mathrm{FM}}$-geïnduceerde topologie. Op dezelfde manier is $\mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}}$ de beperking van de topologische ruimte $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ tot $\mathcal{M}^+(S)$. De afsluiting van $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ in $\mathrm{BL}(S)^*$ wordt genoteerd als $\overline{\mathcal{M}}(S)_{\mathrm{BL}}$.

De open bol met middelpunt $x \in S$ en straal $r > 0$ is

$$B_r(x) := \{y \in S : d(x,y) < r\}.$$

De gesloten bol met middelpunt $x \in S$ en straal $r > 0$ is

$$\overline{B}_r(x) := \{y \in S : d(x,y) \leq r\}.$$

De drager van een maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ wordt gegeven door

$$\mathrm{supp}(\mu) := \{x \in S : \mu(B_r(x)) > 0 \text{ voor iedere } r > 0\}.$$

Als S Pools is, zie Definitie 2.2.2, dan is de drager van een maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ de kleinste gesloten verzameling $F \subseteq S$ met $\mu(F) = \mu(S)$. De Diracmaat in $x \in S$ schrijven we als δ_x. Verder kiezen we $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ en $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$.

2.2 Definities

In deze paragraaf introduceren we de definities die we zullen gaan gebruiken.

Definitie 2.2.1 (Metriseerbaarheid)**.** Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *metriseerbaar* (Engels: *metrisable*) als er een metriek d_X op X bestaat zodanig dat de door d_X geïnduceerde topologie op X samenvalt met $\mathcal{T}$; in dat geval wordt de metriek d_X een *toelaatbare metriek* (Engels: *admissable metric*) genoemd.

Definitie 2.2.2 (Poolse ruimte)**.** Een metriseerbare topologische ruimte X heet een *Poolse ruimte* (Engels: *Polish space*) wanneer X separabel is en er een toelaatbare metriek d_X op X bestaat zodat (X, d_X) volledig is.

Definitie 2.2.3 (Topologisch equivalent)**.** Twee metrieken op een verzameling X heten *topologisch equivalent* (Engels: *topologically equivalent*) als ze dezelfde topologie op X induceren.

Zij S een topologische ruimte. Wat volgt, is de belangrijkste definitie van deze scriptie, namelijk die van de Markov-operator.

Definitie 2.2.4 (Markov-operator)**.** Een *Markov-operator op S* (Engels: *Markov operator on S*) is een afbeelding $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ met de volgende twee eigenschappen:

1. Voor elke maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ geldt $P\mu(S) = \mu(S)$;
2. Voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ en alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+(S)$ geldt $P(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) = \lambda_1 P\mu_1 + \lambda_2 P\mu_2$.

Voorbeeld 2.2.5. Zij $T : S \to S$ een meetbare afbeelding. Defineer $T_* : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ als $T_*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Dan is het makkelijk te controleren dat T_* een Markov-operator op S is. Voor $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ heet $T_*(\mu)$ de *beeldmaat van μ met betrekking tot T* (Engels: *pushforward measure of μ with respect to T*). De afbeelding T_* heet de *transport-operator* (Engels: *transfer operator*). Via standaard methoden kunnen we inzien dat voor $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ en $f \in \mathrm{BM}(S)$ geldt dat $\langle T_*\mu, f\rangle = \langle \mu, f \circ T\rangle$.

Weetje. Een interessant feitje over Andrej Andrejevitsj Markov, naar wie de term 'Markov-operator' is vernoemd, is dat zijn zoon precies dezelfde naam heeft.

Definitie 2.2.6 (Variatie van een maat)**.** Schrijf μ^+ en μ^- voor het positieve respectievelijk negatieve deel van een maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Dan heet de maat $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ de *variatie van μ* (Engels: *variation of μ*). Definieer de norm $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}} : \mathcal{M}(S) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ door $\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = |\mu|(S)$. Dan heet $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ de *norm van totale variatie* (Engels: *total variation norm*). Voor $\mu \in \mathcal{M}(S)$ wordt $\|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ de *totale variatie van μ* (Engels: *total variation of μ*) genoemd.

Opmerking 2.2.7. De genormeerde vectorruimte $(\mathcal{M}(S), \|\cdot\|_{\mathrm{TV}})$ is een Banachruimte en de door die norm geïnduceerde topologische ruimte wordt in het vervolg ook wel geschreven als $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}$.

Opmerking 2.2.8. Zij $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een Markov-operator. We kunnen P uitbreiden naar een afbeelding $\widetilde{P} : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ gedefinieerd door $\widetilde{P}\mu = P\mu^+ - P\mu^-$. Dan heeft $\widetilde{P}$ de volgende twee eigenschappen:

1. Voor elke maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$ geldt $\widetilde{P}\mu(S) = \mu(S)$;
2. Voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en alle $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(S)$ geldt $\widetilde{P}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) = \lambda_1\widetilde{P}\mu_1 + \lambda_2\widetilde{P}\mu_2$.

Als er wordt gesproken over een Markov-operator $\mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ wordt de hier besproken uitbreiding van een Markov-operator $\mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ bedoeld.

Definitie 2.2.9 (Zwakke topologie)**.** De *zwakke topologie op $\mathcal{M}(S)$* (Engels: *weak topology on $\mathcal{M}(S)$*) is de topologie op $\mathcal{M}(S)$ die wordt voortgebracht door de seminormen $\{p_f : f \in C_b(S)\}$ gedefinieerd door

$$p_f(\mu) = |\langle \mu, f\rangle|, \qquad \mu \in \mathcal{M}(S), f \in C_b(S).$$

Dit is per definitie de topologie met als subbasis de collectie

$$\Big\{\{\nu \in \mathcal{M}(S) : p_f(\nu - \mu) < \varepsilon\} : \mu \in \mathcal{M}(S), f \in C_b(S), \varepsilon > 0\Big\}.$$

Het is de kleinste topologie op $\mathcal{M}(S)$ zodat de seminormen p_f en daardoor ook de afbeeldingen $\mathcal{M}(S) \to \mathbb{R} : \mu \mapsto \langle \mu, f\rangle$ continu zijn voor alle $f \in C_b(S)$. Als een net $(\mu_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}(S)$ in de zwakke topologie convergeert naar een maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$, dan zeggen we dat $(\mu_i)_{i\in I}$ *zwak convergeert naar μ* (Engels: *$(\mu_i)_{i\in I}$ converges weakly to μ*).

Per constructie convergeert een net van maten $(\mu_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}(S)$ zwak naar een maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$ dan en slechts dan als $(\langle \mu_i, f\rangle)_{i\in I}$ naar $\langle \mu, f\rangle$ convergeert voor elke $f \in C_b(S)$.

Voorbeeld 2.2.10. Laat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in S zijn die convergeert naar een punt $x \in S$. Dan convergeert $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwak naar δ_x. Neem namelijk een functie $f \in C_b(S)$. Dan hebben we

$$\lim_{n\to\infty} \langle \delta_{x_n}, f\rangle = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = \langle \delta_x, f\rangle.$$

Definitie 2.2.11 (Invariantie)**.** Zij P een Markov-operator op S. Een positieve Borel(kans)maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ heet *invariant onder P* of simpelweg *invariant* (Engels: *invariant under P* of *invariant*) als $P\mu = \mu$.

Definitie 2.2.12 (Asymptotische stabiliteit)**.** Zij P een Markov-operator op S. Dan heet P *asymptotisch stabiel* (Engels: *asymptotically stable*) als er een onder P invariante maat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ bestaat zodat $(P^n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak convergeert naar μ^* voor iedere $\mu \in \mathcal{P}(S)$.

2.2.1 Regulariteits- en equicontinuïteitseigenschappen

Van de volgende definities zijn equicontinuïteit, regulariteit, het Markov-Feller zijn en de e-eigenschap het belangrijkst. De rest wordt hoofdzakelijk gebruikt in Hoofdstuk 4, waar relaties tussen de geïntroduceerde concepten zullen worden besproken.

Definitie 2.2.13 (Equicontinuïteit)**.** Laten (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimtes zijn, en zij $\mathcal{F}$ een familie van afbeeldingen van X naar Y. Dan heet $\mathcal{F}$ *equicontinu in een punt* $x_0 \in X$ (Engels: *equicontinuous in a point* $x_0 \in X$) als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ geldt voor iedere $f \in \mathcal{F}$ wanneer $x \in X$ zó is dat $d_X(x, x_0) < \delta$. De familie $\mathcal{F}$ heet *equicontinu* (Engels: *equicontinuous*) als $\mathcal{F}$ equicontinu is in elk punt in X.

Er is een sterkere versie van equicontinuïteit, die we slechts een enkele keer gebruiken in een bewijs in Paragraaf 5.2.

Definitie 2.2.14 (Uniforme equicontinuïteit)**.** Laten (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimtes zijn, en zij $\mathcal{F}$ een familie van afbeeldingen van X naar Y. Dan heet $\mathcal{F}$ *uniform equicontinu op een verzameling* $A \subseteq X$ (Engels: *uniformly equicontinuous on a set* $A \subseteq X$) als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ geldt voor iedere $f \in \mathcal{F}$ en $x_1, x_2 \in A$ met $d_X(x_1, x_2) < \delta$.

Weer is S een topologische ruimte.

Definitie 2.2.15 (Regulariteit)**.** Een Markov-operator P op S wordt *regulier* (Engels: *regular*) genoemd als er een operator $U : \mathrm{BM}(S) \to \mathrm{BM}(S)$ bestaat zodanig dat $\langle \mu, Uf \rangle = \langle P\mu, f \rangle$ geldt voor iedere $f \in \mathrm{BM}(S)$ en $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$. Als P regulier is, is de operator U uniek bepaald door $Uf(x) = \langle P\delta_x, f \rangle$ voor $f \in \mathrm{BM}(S), x \in S$, en heet U de *duale van P* (Engels: *dual of P*).

Definitie 2.2.16 (Fellereigenschappen van een Markov-operator)**.** Een reguliere Markov-operator P op S heet *Markov-Feller* of simpelweg *Feller* (Engels: *Markov-Feller* of *Feller*) als zijn duale $C_b(S)$ naar zichzelf stuurt. De operator P heet *sterk Feller* (Engels: *strong Feller*) wanneer zijn duale $\mathrm{BM}(S)$ naar $C_b(S)$ stuurt. De Markov-operator P is *ultra-Feller* (Engels: *ultra-Feller*) als de afbeelding $x \mapsto P\delta_x$ van S naar $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}$ continu is.

Voor de rest van de paragraaf nemen we aan dat (S, d) een metrische ruimte is.

Definitie 2.2.17 (Uniforme equicontinuïteit op bollen)**.** Een Markov-operator P op S heet *uniform equicontinu op bollen* (Engels: *uniformly equicontinuous on balls*) wanneer er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $\|P^n\mu - P^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} < \varepsilon$ geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met de eigenschap dat er een $x \in S$ bestaat met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq B_\delta(x)$.

Definitie 2.2.18 (e-eigenschap en Cesàro-e-eigenschap)**.** Zij P een reguliere Markov-operator op S met duale U. Dan heeft P de e-*eigenschap* (Engels: e-*property*) als de familie $\{U^n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinu is voor elke $f \in \mathrm{BL}(S)$. De operator heeft de *Cesàro*-e-*eigenschap* (Engels: *Cesàro* e-*property*) wanneer de familie $\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinu is voor elke $f \in \mathrm{BL}(S)$.

Definitie 2.2.19 (Expansiviteit)**.** Een Markov-operator P op S heet *niet-expansief (in de* $\|\cdot\|_{\mathrm{FM},d}$*-norm)* (Engels: *non-expansive*) als

$$\|P\mu - P\nu\|_{\mathrm{FM},d} \leq \|\mu - \nu\|_{\mathrm{FM},d}$$

geldt voor alle positieve Borelmaten $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(S)$. Een analoge definitie geldt voor niet-expansief zijn in de $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL},d}$- of $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$-norm.

Definitie 2.2.20 (Spectraalkloofeigenschap)**.** Een Markov-operator P op S heeft de *spectraalkloofeigenschap* (Engels: *spectral gap property*) als er een $C > 0$ en een $\theta \in (0, 1)$ bestaan met de eigenschap dat

$$\|P^n\mu - P^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} \leq C\theta^n \|\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}}$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$.

2.3 Maatwaardige integratie

We kijken naar twee soorten maatwaardige integratie. Eerst kijken we naar de verzamelingsgewijze integraal. We gebruiken de verzamelingsgewijze integraal alleen in Paragraaf 6.1 en voor de bewijzen in Paragraaf 6.2.1. Het volgende resultaat volgt uit Proposition 3.2.3 uit [26].

Propositie 2.3.1. *Zij S en S' twee topologische ruimtes, en laat $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Zij $p : S \to \mathcal{M}(S')$ een afbeelding zodat de afbeelding $S \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x)(E)$ meetbaar is voor iedere open verzameling $E \subseteq S'$. Neem verder aan dat $\{\|p(x)\|_{\mathrm{TV}} : x \in S\} \subseteq \mathbb{R}$ begrensd is. Dan definieert*

$$\nu(E) := \int_S p(x)(E)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad E \in \mathcal{B}(S')$$

een maat $\nu \in \mathcal{M}(S')$, en voor iedere $f \in \mathrm{BM}(S')$ geldt

$$\int_{S'} f\,\mathrm{d}\nu = \int_S \langle p(x), f\rangle\,\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Definitie 2.3.2 (Verzamelingsgewijze integraal)**.** De maat ν gedefinieerd in Propositie 2.3.1 heet de *verzamelingsgewijze integraal van p met betrekking tot μ* (Engels: *set-wise integral of p with respect to μ*) en wordt geschreven als

$$\nu = \int_S p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

Lemma 2.3.3. *Zij S een topologische ruimte en $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere Markov-operator. Dan hebben we verzamelingsgewijs $P^n\mu = \int_S P^n\delta_x\,\mathrm{d}\mu(x)$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu \in \mathcal{M}(S)$.*

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Schrijf U voor de duale van P. Merk op dat de verzamelingsgewijze integraal bestaat omdat $S \ni x \mapsto P^n\delta_x(E) = U^n\mathbb{1}_E(x)$ meetbaar is voor iedere Borelverzameling E. Voor een Borelverzameling $E \subseteq S$ geldt er

$$P^n\mu(E) = \langle P^n\mu, \mathbb{1}_E\rangle = \langle \mu, U^n\mathbb{1}_E\rangle = \int_S U^n\mathbb{1}_E(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_S P^n\delta_x(E)\,\mathrm{d}\mu(x)\,. \qquad \square$$

Voor de rest van de paragraaf kijken we naar de Bochnerintegraal. We gebruiken de Bochnerintegraal alleen voor de bewijzen in Paragraaf 6.2.1 en voor het snelle Gevolg 3.2.2.

Definitie 2.3.4 (Bochnermeetbaarheid)**.** Laat (Ω, Σ, μ) een maatruimte zijn, en zij X een Banachruimte met de Borel-σ-algebra. Een afbeelding $f : \Omega \to X$ heet *(μ-)Bochnermeetbaar* (Engels: *(μ-)Bochner measurable*) als f bijna overal de puntsgewijze limiet is van een rij meetbare aftelbaar-waardige afbeeldingen. Dat wil zeggen dat er meetbare afbeeldingen $f_1, f_2, \ldots$ van Ω naar X bestaan zodat $f_n(\Omega)$ aftelbaar is voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

geldt voor μ-bijna alle $\omega \in \Omega$.

Definitie 2.3.5 (Bochnerintegraal)**.** Laat (Ω, Σ, μ) een maatruimte zijn, en zij $(X, \|\cdot\|)$ een Banachruimte met de Borel-σ-algebra. Voor $n \in \mathbb{N}$, meetbare verzamelingen $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$, en $x_1, \ldots, x_n \in X$ definiëren we de integraal van de simpele afbeelding $f = \sum_{i=1}^n x_i\mathbb{1}_{E_i} : \Omega \to X$ als

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)x_i.$$

We noemen een afbeelding $f : \Omega \to X$ *Bochnerintegreerbaar* (Engels: *Bochner integrable*) als f Bochnermeetbaar is en er een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van simpele, meetbare afbeeldingen van Ω naar X bestaat zodat

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

In dat geval wordt de *Bochnerintegraal van f* (Engels: *Bochner integral of f*) gedefinieerd door

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \, .$$

In [26], Corollary 3.2.7 om precies te zijn, wordt het volgende resultaat bewezen.

Propositie 2.3.6. *Laat S een topologische ruimte zijn en $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Zij S' een Poolse ruimte. Zij $p : S \to \mathcal{M}(S')$ een afbeelding zodat p en μ voldoen aan de voorwaarden in Propositie 2.3.1. Dan is $p : S \to \overline{\mathcal{M}}(S')_{\mathrm{BL}} \subseteq \mathrm{BL}(S')^*$ Bochnerintegreerbaar met betrekking tot μ, en de Bochnerintegraal komt overeen met de verzamelingsgewijze integraal.*

Uit Lemma 2.3.3 en Propositie 2.3.6 krijgen we het volgende.

Gevolg 2.3.7. *Zij $S = S'$ een Poolse ruimte, P een reguliere Markov-operator, $n \in \mathbb{N}_0$, en definieer $p : S \to \overline{\mathcal{M}}(S)_{\mathrm{BL}}$ door $p(x) = P^n\delta_x$. Zij $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Dan is p Bochnerintegreerbaar en geldt als verzamelingsgewijze integraal en als Bochnerintegraal dat*

$$P^n\mu = \int_S P^n\delta_x \, \mathrm{d}\mu(x) \, .$$

Meer over de Bochnerintegraal is te lezen in Chapter 3 van Part 1 in [12].

3

Verbanden tussen verschillende topologieën op de verzameling maten

In dit hoofdstuk kijken we eerst naar een formule die de totale variatie van een maat koppelt aan zijn Dudleynormen. Daarna bewijzen we de Borelmeetbaarheid in de door de Dudleynorm geïnduceerde topologie van een aantal afbeeldingen die continu zijn in de norm van totale variatie. De volgende stelling van Dudley, Theorem 18 uit [4], geeft aan dat de zwakke topologie en de door de Dudleynorm geïnduceerde topologie overeenkomen op de verzameling positieve maten.

Stelling 3.0.1. *Zij (S, d) een separabele en volledige metrische ruimte. De beperking van de zwakke topologie op $\mathcal{M}(S)$ tot $\mathcal{M}^+(S)$ komt overeen met de beperking tot $\mathcal{M}^+(S)$ van de topologie op $\mathcal{M}(S)$ gegenereerd door de equivalente normen $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL},d}$ en $\|\cdot\|_{\mathrm{FM},d}$.*

3.1 Relatie tussen de Dudleynorm en de norm van totale variatie

In deze paragraaf zien we interessante verbanden tussen de Dudleynorm en de norm van totale variatie.

Propositie 3.1.1. *Laat (S, d) een metrische ruimte zijn en zij $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Dan geldt*

$$\mu^+(S) = \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), 0\le f\le 1} \langle \mu, f\rangle, \quad \mu^-(S) = \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), -1\le f\le 0} \langle \mu, f\rangle$$

en

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty\le 1} \langle \mu, f\rangle = \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty\le 1} |\langle \mu, f\rangle|.$$

Uiteraard kunnen we ook

$$\mu^-(S) = -\inf_{f\in\mathrm{BL}(S), 0\le f\le 1} \langle \mu, f\rangle$$

schrijven.

Bewijs. Het is duidelijk dat

$$\sup_{f\in\mathrm{BL}(S), 0\le f\le 1} \langle \mu, f\rangle \le \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), 0\le f\le 1} \langle \mu^+, f\rangle \le \sup_{f\in\mathrm{BL}(S), 0\le f\le 1} \|f\|_\infty \cdot \mu^+(S) \le \mu^+(S). \tag{3.1}$$

We bewijzen nu de andere ongelijkheid. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Schrijf (P, N) voor de Hahndecompositie van μ, zodat $\mu^+ = \mu(P \cap \cdot)$ en $\mu^- = -\mu(N \cap \cdot)$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat P niet-leeg is. Omdat S metrisch is, is $|\mu|$ regulier (Engels: regular). Er bestaat dus een gesloten verzameling $F \subseteq P$ met de eigenschap dat

$$\mu(F) = |\mu|(F) \ge |\mu|(P) - \varepsilon = \mu(P) - \varepsilon.$$

Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $F \neq \varnothing$. Definieer $f_n \in \mathrm{BL}(S)$ door $f_n(x) = \big[1 - nd(x,F)\big]^+$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt $0 \leq f_n \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} f_n = \mathbb{1}_F$ puntsgewijs. Uit de gedomineerde-convergentiestelling volgt nu:

$$\begin{aligned}\sup_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle &\geq \lim_{n\to\infty} \langle \mu, f_n \rangle = \langle \mu, \mathbb{1}_F \rangle = \mu(F) \geq \mu(P) - \varepsilon \\ &= \mu^+(S) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Dit laat zien dat

$$\mu^+(S) = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle.$$

Er volgt:

$$\mu^-(S) = (-\mu)^+(S) = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle -\mu, f \rangle = -\inf_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), -1 \leq f \leq 0} \langle \mu, f \rangle.$$

Neem nu rijen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{BL}(S)$ met $0 \leq f_n \leq 1$ en $-1 \leq g_n \leq 0$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} \langle \mu, f_n \rangle = \mu^+(S)$ en $\lim_{n\to\infty} \langle \mu, g_n \rangle = \mu^-(S)$. Definieer $h_n = f_n + g_n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dan zien we dat $h_n \in \mathrm{BL}(S)$ en $\|h_n\|_\infty \leq 1$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Ook krijgen we dat

$$\lim_{n\to\infty} \langle \mu, h_n \rangle = \mu^+(S) + \mu^-(S) = \|\mu\|_{\mathrm{TV}}.$$

Een laatste berekening dat

$$\sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} \langle \mu, f \rangle \leq \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, f \rangle| \leq \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|_{\mathrm{TV}} \leq \|\mu\|_{\mathrm{TV}}$$

rondt het bewijst af. □

Opmerking 3.1.2. Voor een metrische ruimte S en een maat $\mu \in \mathcal{M}(S)$ geldt er dus

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, f \rangle| \quad \text{en} \quad \|\mu\|^*_{\mathrm{BL}} = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty + |f|_L \leq 1} |\langle \mu, f \rangle|.$$

Gevolg 3.1.3. *Laat (S,d) een metrische ruimte zijn en zij $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Schrijf $U_b(S)$ voor de verzameling van uniform continue begrensde functies van S naar $\mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\begin{aligned}\mu^+(S) &= \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in U_b(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in C_b(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle, \\ \mu^-(S) &= \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), -1 \leq f \leq 0} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in U_b(S), -1 \leq f \leq 0} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in C_b(S), -1 \leq f \leq 0} \langle \mu, f \rangle\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\|\mu\|_{\mathrm{TV}} &= \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in U_b(S), \|f\|_\infty \leq 1} \langle \mu, f \rangle = \sup_{f \in C_b(S), \|f\|_\infty \leq 1} \langle \mu, f \rangle \\ &= \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, f \rangle| = \sup_{f \in U_b(S), \|f\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, f \rangle| = \sup_{f \in C_b(S), \|f\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, f \rangle|.\end{aligned}$$

Bewijs. De ongelijkheden de ene kant op zijn duidelijk wegens Propositie 3.1.1 en de inclusies $\mathrm{BL}(S) \subseteq U_b(S) \subseteq C_b(S)$. De ongelijkheden de andere kant op verkrijgen we door berekeningen zoals die in Vergelijking (3.1). □

Definitie 3.1.4 (Half-continuïteit)**.** Zij S een topologische ruimte. Een functie $f : S \to \mathbb{R}$ heet *half-continu van boven* (Engels: *upper semi-continuous*) als $\{x \in S : f(x) < a\}$ open is voor iedere $a \in \mathbb{R}$, en f heet *half-continu van beneden* (Engels: *lower semi-continuous*) als $\{x \in S : f(x) > a\}$ open is voor iedere $a \in \mathbb{R}$.

Gevolg 3.1.5. *Zij (S,d) een metrische ruimte. De functies $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mu \mapsto \mu^+(S), \mu \mapsto \mu^-(S)$ en $\mu \mapsto \|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ zijn alle half-continu van beneden. In het bijzonder zijn de drie functies Borelmeetbaar.*

Bewijs. Definieer $g : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ door $g(\mu) = \mu^+(S)$. Vanwege Propositie 3.1.1 geldt er:

$$g(\mu) = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), 0 \leq f \leq 1} \langle \mu, f \rangle, \quad \mu \in \mathcal{M}(S).$$

Schrijf $I = \{f \in \mathrm{BL}(S) : 0 \leq f \leq 1\}$. Definieer de continue functie $g_f : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ door $g_f(\mu) = \langle \mu, f \rangle$ voor $f \in I$. We hebben nu per definitie dat $g = \sup_{f \in I} g_f$. Omdat de g_f, $f \in I$, continu zijn, is g half-continu van beneden. De functie $\mu \mapsto \mu^-(S)$ is de som van g met de continue afbeelding $\mu \mapsto -\mu(S) = \langle \mu, -1 \rangle$ en is daarom ook half-continu van beneden. Net zo is de functie $\mu \mapsto \|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \mu^+(S) + \mu^-(S)$ half-continu van beneden als som van functies die half-continu van beneden zijn. □

Stelling 3.1.6. *Zij S een Poolse ruimte en schrijf $\mathcal{D}_S$ voor de verzameling van toelaatbare metrieken d op S zodat (S,d) volledig is. Er geldt:*

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{d \in \mathcal{D}_S} \|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d}.$$

Bewijs. Laat d een toelaatbare metriek op S zijn, en zij $f \in \mathrm{BL}(S,d)$ zodat $\|f\|_{\mathrm{BL},d} \leq 1$. Dan zien we dat

$$|\langle \mu, f \rangle| \leq \int_S |f| \,\mathrm{d}|\mu| \leq \int_S \|f\|_\infty \,\mathrm{d}|\mu| \leq |\mu|(S) = \|\mu\|_{\mathrm{TV}}.$$

Dit bewijst dat $\|\mu\|_{\mathrm{TV}} \geq \sup_{d \in \mathcal{D}_S} \|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d}$.

We bewijzen nu de ongelijkheid $\|\mu\|_{\mathrm{TV}} \leq \sup_{d \in \mathcal{D}_S} \|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d}$. Omdat S metriseerbaar is, bestaat er wegens Gevolg 3.1.3 een rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C_b(S)$ zodat $\|f_n\|_\infty \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \lim_{n \to \infty} \langle \mu, f_n \rangle$. Kies een metriek $d \in \mathcal{D}_S$. Definieer nu $\widetilde{f}_n := (n-1) f_n / n$ en de metriek d_n door

$$d_n(x,y) = \max\Big(d(x,y), n\big|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_n(y)\big|\Big)$$

voor $n \in \mathbb{N}$. Dan is d_n een element van $\mathcal{D}_S$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, omdat (S, d_n) dezelfde convergente rijen als (S,d) heeft wegens de continuïteit van $\widetilde{f}_n$; volledigheid van (S, d_n), $n \in \mathbb{N}$, komt van de ongelijkheid $d_n \geq d$. Ook hebben we voor iedere $n \in \mathbb{N}$ dat $\big|\widetilde{f}_n\big|_{L,d_n} \leq 1/n$ zodat $\widetilde{f}_n \in \mathrm{BL}(S, d_n)$ en $\big\|\widetilde{f}_n\big\|_{\mathrm{BL},d_n} = \big|\widetilde{f}_n\big|_{L,d_n} + \big\|\widetilde{f}_n\big\|_\infty \leq 1$. Maar dan volgt dat

$$\sup_{d \in \mathcal{D}_S} \|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d_n} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \big|\langle \mu, \widetilde{f}_n \rangle\big| \geq \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} \cdot |\langle \mu, f_n \rangle| = \|\mu\|_{\mathrm{TV}}.$$

Dit bewijst de stelling. □

Opmerking 3.1.7. Op soortgelijke wijze kunnen we voor een metriseerbare topologische ruimte X en een getekende maat $\mu \in \mathcal{M}(X)$ bewijzen dat

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \sup\{\|\mu\|^*_{\mathrm{BL},d} : d \text{ is een toelaatbare metriek op } X\}.$$

3.2 Een aantal meetbaarheidsresultaten

We werken in meerdere lemma's toe naar Stellingen 3.2.8 en 3.2.9.

Lemma 3.2.1. *Zij (S,d) een metrische ruimte. De afbeelding $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mu \mapsto \langle \mu, f \rangle$ is Borelmeetbaar voor iedere begrensde en Borelmeetbare functie $f : S \to \mathbb{R}$. In het bijzonder is de afbeelding $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mu \mapsto \mu(E) = \langle \mu, \mathbb{1}_E \rangle$ meetbaar voor alle Borelverzamelingen $E \subseteq S$. Hier krijgt $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ de Borel-σ-algebra.*

Bewijs. We gebruiken de functionale versie van de monotone-klassenstelling, zie bijvoorbeeld Theorem 2.12.9(i) in [2]. We nemen

$$\mathcal{H} = \{f \text{ begrensd en meetbaar} : \mu \mapsto \langle \mu, f\rangle \text{ is meetbaar}\},$$

een deelverzameling van de verzameling functies van S naar $\mathbb{R}$, en $\mathcal{H}_0 = \mathrm{BL}(S)$. Omdat $\mu \mapsto \langle \mu, f\rangle$ continu is voor $f \in \mathrm{BL}(S)$, volgt dat $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$. We vinden dan ook dat $1 \in \mathcal{H}$. Definieer voor $f \in \mathrm{BM}(S)$ de functie $F_f : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ door $F_f(\mu) = \langle \mu, f\rangle$. Het is duidelijk dat $\mathcal{H}$ een vectorruimte is. Om te bewijzen dat $\mathcal{H}$ gesloten is in de genormeerde vectorruimte van begrensde functies met norm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$, nemen we een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ en een begrensde functie $f : S \to \mathbb{R}$ zodat $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dan ligt f in $\mathrm{BM}(S)$. Omdat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform begrensd is, convergeert $(F_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ puntsgewijs naar F_f wegens de gedomineerde-convergentiestelling. Dus F_f is meetbaar, oftewel $f \in \mathcal{H}$. Kies nu een stijgende, uniform begrensde rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ van niet-negatieve functies, en laat $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ puntsgewijs. Dan hebben we weer dat $f \in \mathrm{BM}(S)$ en dat $F_{f_n} \to F_f$ puntsgewijs door de gedomineerde-convergentiestelling. Dus F_f is meetbaar en $f \in \mathcal{H}$. Het is duidelijk dat $\mathcal{H}_0$ gesloten is onder vermenigvuldiging. Dus $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}_0$ voldoen aan (i) van Theorem 2.12.9 uit [2]. Hieruit volgt dat $\mathcal{H}$ alle begrensde functies bevat die meetbaar zijn met betrekking tot de kleinste σ-algebra $\mathcal{E}$ over S zodat elke $f \in \mathcal{H}_0$ $\mathcal{E}$-meetbaar is. Duidelijk is dat $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(S)$. Neem $B \subseteq S$ open. Dan zit de functie $f : S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \min(d(x, B^c), 1)$ in $\mathcal{H}_0$. Maar dan geldt er dat

$$B = f^{-1}((0, 1]) \in \mathcal{E}.$$

Dus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(S)$ bevat alle open verzamelingen. We concluderen dat $\mathcal{E} = \mathcal{B}(S)$ en dat $\mu \mapsto \langle \mu, f\rangle$ meetbaar is voor iedere begrensde en Borelmeetbare functie $f : S \to \mathbb{R}$. □

Gevolg 3.2.2. *Voor een Poolse ruimte S is de identiteit $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \overline{\mathcal{M}}(S)_{\mathrm{BL}}$ Bochnermeetbaar.*

Bewijs. Dit volgt direct uit Proposition 3.2.4 in [26]. □

We brengen de volgende definitie in herinnering, en we werken vervolgens met Lemma's 3.2.4, 3.2.5 en 3.2.6 toe naar Stelling 3.2.8.

Definitie 3.2.3 (Algebra)**.** Een *algebra op een verzameling* Ω (Engels: *algebra on a set* Ω) is een familie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van Ω zodat $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ voor alle $A \in \mathcal{A}$ en $A \cup B \in \mathcal{A}$ voor alle $A, B \in \mathcal{A}$.

Lemma 3.2.4. *Zij (S, d) een separabele metrische ruimte en laat $D \subseteq S$ een aftelbare verzameling zijn die dicht ligt in S. Dan is de aftelbare familie*

$$\mathcal{F} = \{B_r(x) : x \in D, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

van deelverzamelingen van S een basis voor de topologie op S. Verder genereert $\mathcal{F}$ de Borel-σ-algebra van S, dat wil zeggen dat $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(S)$.

Bewijs. We bewijzen eerst dat $\mathcal{F}$ een basis is voor de topologie van S. Zij $U \subseteq S$ open. Kies voor iedere $y \in U$ een $\varepsilon_y > 0$ zodat $B_{\varepsilon_y}(y) \subseteq U$ en een $x_y \in D$ zodat $d(x_y, y) < \varepsilon_y/3$. Dan geldt dat $y \in B_{\varepsilon_y/2}(x_y) \subseteq B_{\varepsilon_y}(y) \subseteq U$ voor alle $y \in U$. Definieer

$$D' = \{x \in D : \text{er is een } y \in U \text{ zodat } x_y = x\}.$$

Kies voor elke $x \in D'$ een stijgende rij $(r_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ van strikt positieve rationale getallen zodat $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \sup\{\varepsilon_y/2 : y \in U, x_y = x\}$. We zien nu:

$$U = \bigcup_{y\in U} B_{\varepsilon_y/2}(x_y) = \bigcup_{x\in D'} \bigcup_{y\in U, x_y = x} B_{\varepsilon_y/2}(x) = \bigcup_{x\in D'} B_{\sup\{\varepsilon_y/2 : y\in U, x_y = x\}}(x) = \bigcup_{x\in D'} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n(x)}(x).$$

Dit bewijst dat $\mathcal{F}$ inderdaad een basis vormt voor de topologie op S. Dus $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}(S)$ bevat alle open verzamelingen. Het volgt dat $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(S)$. □

Lemma 3.2.5. *Zij (S,d) een niet-lege separabele metrische ruimte. Laat $D \subseteq S$ een aftelbare verzameling zijn die dicht ligt in S. Neem*

$$\mathcal{F} = \{B_r(x) : x \in D, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

en laat $\mathcal{A}$ de aftelbare algebra zijn die door $\mathcal{F}$ gegenereerd wordt. Dan geldt voor iedere $\mu \in \mathcal{M}(S)$ en $E \in \mathcal{B}(S)$ dat $\mu^+(E) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A \cap E)$.

Bewijs. Zij $E \in \mathcal{B}(S)$ en $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Laat (P,N) een Hahndecompositie voor μ zijn. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat $(E, d|_E)$ metrisch is, is $|\mu|$ beperkt tot $\mathcal{B}(E)$ regulier (Engels: regular). Er bestaat dus een rij $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van open verzamelingen in S om $P \cap E \in \mathcal{B}(E)$ heen zodat $\lim_{n\to\infty} |\mu|(O_n \cap E) = |\mu|(P \cap E)$. Aan beide kanten van de vergelijking $\mu(P \cap E)$ aftrekken geeft $-\mu\big((O_n \cap E) \setminus (P \cap E)\big) \to 0$, zodat $\mu(O_n \cap E) \to \mu(P \cap E)$. Kies $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|\mu(O_n \cap E) - \mu(P \cap E)| < \varepsilon/2$. Wegens Lemma 3.2.4 bestaan er $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ met de eigenschap dat $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = O_n$. In het bijzonder hebben we $\lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap E\Big) = \mu(O_n \cap E)$. Kies $k \in \mathbb{N}$ zodat met $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{A}$ geldt dat $|\mu(A \cap E) - \mu(O_n \cap E)| < \varepsilon/2$. Dan vinden we met de driehoeksongelijkheid dat $|\mu(A \cap E) - \mu(P \cap E)| < \varepsilon$. Maar dan krijgen we: $\mu(P \cap E) \leq \mu(A \cap E) + \varepsilon$. Gezien $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was, volgt er dat $\mu(P \cap E) \leq \sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A \cap E)$. Omdat $\sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A \cap E) \leq \mu(P \cap E)$, zien we dat $\mu^+(E) = \mu(P \cap E) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A \cap E)$. $\square$

Lemma 3.2.6. *Zij (S,d) een separabele metrische ruimte. Voor elke $E \in \mathcal{B}(S)$ zijn de functies $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gegeven door $\mu \mapsto \mu^+(E)$, $\mu \mapsto \mu^-(E)$ en $\mu \mapsto |\mu|(E)$ alle Borelmeetbaar.*

Bewijs. Als S leeg is, is de uitspraak triviaal. Neem dus aan dat $S \neq \varnothing$. Kies $E \in \mathcal{B}(S)$ vast. Wegens Lemma 3.2.5 is er een aftelbare algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(S)$ op S met de eigenschap dat $\mu^+(E) = \sup_{A\in\mathcal{A}} \mu(A \cap E)$ geldt voor alle $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Definieer de verzameling $\mathcal{A}'$ door $\mathcal{A}' = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{B}(S)$. Het volgt dat $\mu^+(E) = \sup_{A\in\mathcal{A}'} \mu(A)$ voor alle $\mu \in \mathcal{M}(S)$. Definieer voor $A \in \mathcal{A}'$ de afbeelding $F_A : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ door $F_A(\mu) = \mu(A)$ en definieer $F : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ door $F(\mu) = \mu^+(E)$. Dan is F_A meetbaar voor elke $A \in \mathcal{A}'$ wegens Lemma 3.2.1. Omdat $\mathcal{A}'$ aftelbaar is, zien we nu dat $F = \sup_{A\in\mathcal{A}'} F_A$ ook meetbaar is. De functie $\mu \mapsto \mu^-(E)$ is als som van de meetbare functies $\mu \mapsto \mu^+(E)$ en $\mu \mapsto -\mu(E)$ ook meetbaar. En net zo is de functie $\mu \mapsto |\mu|(E)$ als som van de meetbare functies $\mu \mapsto \mu^+(E)$ en $\mu \mapsto \mu^-(E)$ ook meetbaar. $\square$

Opmerking 3.2.7. Gevolg 3.1.5 geeft zelfs dat de functies van Lemma 3.2.6 half-continu van beneden zijn als $E = S$. In het algemeen zijn ze echter niet half-continu van beneden. Neem bijvoorbeeld $S = [0,1]$, $E = \{0\}$ en de rij maten $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dan hebben we $\mu_n^+(E) \leq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Echter,

$$\Big(\lim_{n\to\infty} \mu_n\Big)^+(E) = (\delta_0)^+(E) = 1 > 0.$$

Dus $\{\mu \in \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} : \mu^+(E) \leq 0\}$ is niet gesloten, waaruit volgt dat $\{\mu \in \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} : \mu^+(E) > 0\}$ niet open is. We concluderen dat $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R} : \mu \mapsto \mu^+(E)$ niet half-continu van beneden is.

Stelling 3.2.8. *Zij (S,d) een separabele metrische ruimte en $f : S \to \mathbb{R}$ een begrensde meetbare functie. Dan zijn de functies $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gegeven door $\mu \mapsto \langle \mu^+, f\rangle$, $\mu \mapsto \langle \mu^-, f\rangle$ en $\mu \mapsto \langle |\mu|, f\rangle$ alle Borelmeetbaar. In het bijzonder zijn voor elke $E \in \mathcal{B}(S)$ de functies $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gegeven door $\mu \mapsto \mu^+(E)$, $\mu \mapsto \mu^-(E)$ en $\mu \mapsto |\mu|(E)$ Borelmeetbaar.*

Bewijs. De laatste uitspraak is exact Lemma 3.2.6. Definieer $F_g : \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ voor $g \in \mathrm{BM}(S)$ door $F_g(\mu) = \langle \mu^+, g\rangle$. We bewijzen dat F_f meetbaar is via de standaard machinerie. Als f een indicatorfunctie is, dan is het duidelijk dat F_f meetbaar is door Lemma 3.2.6. Meetbaarheid in het geval dat f een simpele functie is, volgt nu eenvoudig aangezien een lineaire combinatie van meetbare functies weer meetbaar is. Stel nu dat $f \geq 0$. Neem een stijgende rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van niet-negatieve simpele functies zodat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ puntsgewijs. Dan hebben we $F_f = \lim_{n\to\infty} F_{f_n}$

puntsgewijs door de monotone-convergentiestelling. Maar de F_{f_n}, $n \in \mathbb{N}$, zijn meetbaar, dus F_f is ook meetbaar. Voor willekeurige begrensde meetbare $f : S \to \mathbb{R}$ is het nu duidelijk dat $F_f = F_{f^+} - F_{f^-}$ meetbaar is. Nu zien we ook dat de functie $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mu \mapsto \langle \mu^-, f\rangle$ als som van de meetbare functie $\mu \mapsto \langle \mu^+, f\rangle$ met de wegens Lemma 3.2.1 meetbare functie $\mu \mapsto -\langle \mu, f\rangle$ meetbaar is. Dus $\mu \mapsto \langle |\mu|, f\rangle$ is meetbaar, omdat het de som is van de meetbare functies $\mu \mapsto \langle \mu^+, f\rangle$ en $\mu \mapsto \langle \mu^+, f\rangle$. □

Stelling 3.2.9. *Zij (S, d) een separabele metrische ruimte en $f : S \to \mathbb{R}$ een begrensde meetbare functie. Schrijf $\mathcal{M}(S)_w$ voor de topologische ruimte $\mathcal{M}(S)$ met de zwakke topologie. Dan zijn de functies $\mathcal{M}(S)_w \to \mathbb{R}$ gegeven door $\mu \mapsto \langle \mu^+, f\rangle$, $\mu \mapsto \langle \mu^-, f\rangle$ en $\mu \mapsto \langle |\mu|, f\rangle$ alle Borelmeetbaar. In het bijzonder zijn voor elke $E \in \mathcal{B}(S)$ de functies $\mathcal{M}(S)_w \to \mathbb{R}$ gegeven door $\mu \mapsto \mu^+(E)$, $\mu \mapsto \mu^-(E)$ en $\mu \mapsto |\mu|(E)$ Borelmeetbaar.*

Bewijs (schets). Lemma 3.2.1 geldt ook als we $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ vervangen door $\mathcal{M}(S)_w$: het bewijs gaat op dezelfde manier met de verzameling $\mathcal{H}_0 = C_b(S)$ in plaats van $\mathrm{BL}(S)$. Lemma 3.2.6 is dan ook waar als we $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ vervangen door $\mathcal{M}(S)_w$. Het bewijs is vrijwel hetzelfde, met als enige verschil dat we het net genoemde resultaat gebruiken op de plek in het bewijs waar Lemma 3.2.1 wordt gebruikt. Nu volgt de stelling via hetzelfde bewijs als dat van Stelling 3.2.8. □

4

Verdieping in het concept van Markov-operatoren

In dit hoofdstuk zien we verbanden tussen verschillende eigenschappen van Markov-operatoren zoals geïntroduceerd in Paragraaf 2.2.1 en geven we voorbeelden. Als laatste kijken we in Paragraaf 4.3 naar Markov-operatoren op dichtheden, de soort Markov-operatoren die in bijvoorbeeld [20] wordt gebruikt.

Eerst geven we een aantal resultaten over maten in het algemeen die handig zullen zijn in het vervolg. De portmanteaustelling, zie Theorem 8.2.3 in [2], geeft een karakterisatie voor zwakke convergentie.

Stelling 4.0.1 (Portmanteaustelling)**.** *Stel dat S een metrische ruimte is. Zij $(\mu_i)_{i\in I}$ een net in $\mathcal{P}(S)$ en $\mu \in \mathcal{P}(S)$. Dan zijn equivalent:*

1. *$(\mu_i)_{i\in I}$ convergeert zwak naar μ;*
2. *Voor elke gesloten verzameling $F \subseteq S$ geldt $\limsup_i \mu_i(F) \leq \mu(F)$;*
3. *Voor elke open verzameling $U \subseteq S$ geldt $\liminf_i \mu_i(U) \geq \mu(U)$.*

Wanneer μ en de μ_i, $i \in I$, eindige positieve maten zijn met $\lim_i \mu_i(S) = \mu(S)$, dan zijn 1., 2. en 3. nog steeds equivalent.

De volgende stelling is Theorem 3.2 uit [14].

Stelling 4.0.2. *Stel dat (S, d) een volledige en separabele metrische ruimte is. Laat $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(S)$ een rij zijn met $\sup_n \|\mu_n\|_{\mathrm{TV}} < \infty$. Als de rij $(\langle \mu_n, f\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$ convergeert, dan bestaat er een $\mu \in \mathcal{M}(S)$ zodanig dat $\|\mu_n - \mu\|^*_{\mathrm{BL}} \to 0$ als $n \to \infty$.*

Het volgende resultaat is Lemma 2.3.6 uit [26] en zullen we vaak in voorbeelden gebruiken.

Lemma 4.0.3. *Als (S, d) een metrische ruimte is, dan geldt*

$$\|\delta_x - \delta_y\|^*_{\mathrm{BL},d} = \frac{2d(x, y)}{2 + d(x, y)} \leq \min(2, d(x, y))$$

voor alle $x, y \in S$.

4.1 Regulariteitseigenschappen van Markov-operatoren

Lemma 4.1.1. *Zij U de duale van een reguliere Markov-operator P op een topologische ruimte S. Dan is U een lineaire operator op $(\mathrm{BM}(S), \|\cdot\|_\infty)$, en geldt $\|U\|_\infty = 1$ voor de operatornorm $\|U\|_\infty$ van U. Daarenboven is U positief, dat wil zeggen: voor alle niet-negatieve functies $f \in \mathrm{BM}(S)$ hebben we $Uf \geq 0$.*

Bewijs. Voor iedere $f, g \in \mathrm{BM}(S)$ en $a, b \in \mathbb{R}$ en $x \in S$ geldt

$$U(af+bg)(x) = \langle \delta_x, U(af+bg)\rangle = \langle P\delta_x, af+bg\rangle = a\langle P\delta_x, f\rangle + b\langle P\delta_x, g\rangle = aUf(x) + bUg(x).$$

Dit bewijst dat U lineair is. Verder geldt er voor iedere $f \in \mathrm{BM}(S)$:

$$\begin{aligned}\|Uf\|_\infty &= \sup_{x\in S} |Uf(x)| = \sup_{x\in S} |\langle \delta_x, Uf\rangle| = \sup_{x\in S} |\langle P\delta_x, f\rangle| \\ &= \sup_{x\in S} \left| \int_X f \,\mathrm{d}P\delta_x \right| \leq \sup_{x\in S} \int_X |f| \,\mathrm{d}P\delta_x \\ &\leq \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Dit laat zien dat U hoogstens norm 1 heeft. Daarnaast hebben we $\mathbb{1}_S \in \mathrm{BM}(S)$ en $\|\mathbb{1}_S\|_\infty = 1$, maar ook

$$\|U\mathbb{1}_S\|_\infty = \sup_{x\in S} |U\mathbb{1}_S(x)| = \sup_{x\in S} |\langle P\delta_x, \mathbb{1}_S\rangle| = \sup_{x\in S} \left| \int_S \mathbb{1}_S \,\mathrm{d}P\delta_x \right| = 1.$$

Dit bewijst dat $\|U\|_\infty = 1$. Als laatste hebben we voor $f \in \mathrm{BM}(S)$ niet-negatief dat

$$Uf(x) = \langle P\delta_x, f\rangle \geq 0, \quad x \in S.$$

Dit bewijst de laatste eigenschap van U. □

We herinneren aan Definitie 3.1.4 voor de definitie van half-continuïteit. Wat volgt is een aantal equivalente karakterisaties voor de verschillende Fellereigenschappen van een Markov-operator.

Propositie 4.1.2. *Stel dat S een separabele en volledige metrische ruimte is, en laat $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere Markov-operator zijn met duale U. Dan zijn equivalent:*

1. *P is Feller;*
2. *Voor iedere $f \in C_b(S)$ is de functie $S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle$ ook continu en begrensd;*
3. *De afbeelding $S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x$ is continu;*
4. *De afbeelding $x \mapsto P\delta_x(O)$ van S naar $\mathbb{R}$ is half-continu van beneden voor iedere open verzameling $O \subseteq S$;*
5. *$P : \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}}$ is continu;*
6. *De afbeelding $x \mapsto P\delta_x(C)$ van S naar $\mathbb{R}$ is half-continu van boven voor iedere gesloten verzameling $C \subseteq S$;*
7. *Voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$ is de functie $S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle$ een element van $C_b(S)$;*
8. *U beeldt $\mathrm{BL}(S)$ af in $C_b(S)$.*

Bewijs.

1. $\iff$ 2. Duidelijk wegens de gelijkheid $\langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, Uf\rangle = Uf(x)$ voor $x \in S$ en $f \in C_b(S)$.

1. $\implies$ 5. Stel dat P Feller is. Neem een rij maten $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}^+(S)$ en een maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ zodat $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ in $\mathrm{BL}(S)^*$. Wegens Stelling 3.0.1 geldt dat $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ook zwak convergeert naar μ. Maar ook geldt voor elke functie $f \in C_b(S)$ dat $Uf \in C_b(S)$, zodat:

$$\lim_{n\to\infty} \langle P\mu_n - P\mu, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n - \mu, Uf\rangle = 0.$$

Dus $(P\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert zwak naar $P\mu$. Stelling 3.0.1 geeft ons nu dat $\lim_{n\to\infty} P\mu_n = P\mu$ ook geldt in $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$. In andere woorden, $P : \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}}$ is continu.

5. $\implies$ 3. De afbeelding $F : S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ gedefinieerd door $F(x) = \delta_x$ is continu wegens Lemma 4.0.3. Nu is de afbeelding $S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}}$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x$ simpelweg de samenstelling van de twee afbeeldingen P en F. Als $P : \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathcal{M}^+(S)_{\mathrm{BL}}$ continu is, dan is $x \mapsto P\delta_x$ dus ook continu.

3. $\implies$ 4. Neem aan dat $x \mapsto P\delta_x$ continu is in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm. Zij $a \in \mathbb{R}$, en zij $O \subseteq S$ een open verzameling. We moeten bewijzen dat $A = \{x \in S : P\delta_x(O) \leq a\}$ gesloten is. Laat daartoe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in A zijn met $x_n \to x$ voor een zekere $x \in S$. Dan geldt per aanname dat $\lim_{n\to\infty} P\delta_{x_n} = P\delta_x$ geldt in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm, en daarmee geldt het ook in de zwakke topologie. Maar dan volgt uit de portmanteaustelling dat $P\delta_x(O) \leq \liminf_n P\delta_{x_n}(O) \leq a$. Dus x is een element van A, wat bewijst dat A gesloten is.

4. $\implies$ 6. Duidelijk uit de waarneming dat $1 - f$ half-continu van boven is als f, en daarmee ook $f - 1$, half-continu van beneden is.

6. $\implies$ 2. Stel dat de afbeelding $x \mapsto P\delta_x(C)$ half-continu van boven is voor iedere gesloten verzameling $C \subseteq S$. Kies $x_0 \in S$ en een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $x_n \to x_0$. Zij $C \subseteq S$ gesloten, en zij $\varepsilon > 0$. Dan is $\{x \in S : P\delta_x(C) < P\delta_{x_0}(C) + \varepsilon\} \ni x_0$ open. Er bestaat dus een open omgeving U van x_0 met $P\delta_x(C) < P\delta_{x_0}(C) + \varepsilon$ voor alle $x \in U$. Er volgt dat

$$\limsup_n P\delta_{x_n}(C) \leq P\delta_{x_0}(C) + \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was, zien we hieruit dat $\limsup_n P\delta_{x_n}(C) \leq P\delta_{x_0}(C)$. Uit de portmanteaustelling volgt dat $(P\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwak naar $P\delta_{x_0}$ convergeert. In andere woorden: voor iedere $f \in C_b(S)$ hebben we $\lim_{n\to\infty}\langle P\delta_{x_n}, f\rangle = \langle P\delta_{x_0}, f\rangle$. Omdat $x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle$ sowieso begrensd is door $\|f\|_\infty$ voor $f \in C_b(S)$, zijn we klaar.

2. $\implies$ 7. Duidelijk.

7. $\implies$ 8. Duidelijk wegens de gelijkheid $\langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, Uf\rangle = Uf(x)$ voor $x \in S$ en $f \in \mathrm{BL}(S)$.

8. $\implies$ 1. Neem aan dat $U(\mathrm{BL}(S)) \subseteq C_b(S)$. Kies $x \in S$ en een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met limiet x willkeurig. Voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$ convergeert de rij

$$\big(\langle P\delta_{x_n}, f\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\langle \delta_{x_n}, Uf\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(Uf(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

naar $Uf(x) = \langle P\delta_x, f\rangle$ per aanname. Verder hebben we $\sup_n \|P\delta_{x_n}\|_{\mathrm{TV}} = 1 < \infty$, dus Stelling 4.0.2 geeft ons een maat $\nu \in \mathcal{M}(S)$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} \|P\delta_{x_n} - \nu\|_{\mathrm{BL}}^* = 0$. We vinden voor elke $f \in \mathrm{BL}(S)$ dat

$$\langle P\delta_x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P\delta_{x_n}, f\rangle = \langle \nu, f\rangle.$$

Dus $\|\nu - P\delta_x\|_{\mathrm{BL}}^* = 0$ en $\nu = P\delta_x$. Dus $\lim_{n\to\infty} P\delta_{x_n} = P\delta_x$ in de Dudleynorm. Wegens Stelling 3.0.1 geldt de convergentie ook in de zwakke topologie. Daarom krijgen we nu voor iedere $f \in C_b(S)$:

$$\lim_{n\to\infty} Uf(x_n) = \lim_{n\to\infty} \langle \delta_{x_n}, Uf\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P\delta_{x_n}, f\rangle = \langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, Uf\rangle = Uf(x).$$

Dus U stuurt $C_b(S)$ naar zichzelf. □

Propositie 4.1.3. *Stel dat S een topologische ruimte is, en laat $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere Markov-operator zijn met duale U. Dan zijn equivalent:*

1. *P is sterk Feller;*
2. *Voor iedere $f \in \mathrm{BM}(S)$ is de functie $S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle$ continu en begrensd;*
3. *De afbeelding $S \to \mathcal{M}(S)$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x$ is continu als $\mathcal{M}(S)$ de topologie krijgt die wordt gedefinieerd door de familie seminormen $\{p_f : f \in \mathrm{BM}(S)\}$ zoals in Definitie 2.2.9, waar we $C_b(S)$ door $\mathrm{BM}(S)$ vervangen;*
4. *Voor iedere Borelverzameling $E \subseteq S$ is de afbeelding $S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x(E)$ continu.*

Bewijs.

1. $\iff$ 2. Duidelijk wegens de gelijkheid $\langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, Uf\rangle = Uf(x)$ voor $x \in S$ en $f \in \mathrm{BM}(S)$.

2. $\implies$ 3. Duidelijk.

3. $\implies$ 4. Neem aan dat 3. waar is en zij $E \in \mathcal{B}(S)$. Per constructie van de in 3. gedefinieerde topologie is de afbeelding $F : \mathcal{M}(S) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(\mu) = \langle \mu, \mathbb{1}_E\rangle = \mu(E)$ continu met betrekking tot die topologie vanwege $\mathbb{1}_E \in \mathrm{BM}(S)$. In het bijzonder is de samenstelling van F met de continu veronderstelde afbeelding $S \to \mathcal{M}(S) : x \mapsto P\delta_x$ continu.

4. $\implies$ 1. Stel dat de afbeelding $S \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x(E) = U\mathbb{1}_E(x)$ continu is voor elke Borelverzameling $E \subseteq S$. We hebben dus dat $U\mathbb{1}_E$ continu is voor iedere Borelverzameling $E \subseteq S$. Hieruit vinden we dat Uf continu is voor alle simpele functies f op S. Zij $f \in \mathrm{BM}(S)$. Wegens Lemma 2.1.8 uit [2] bestaat er een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van simpele functies die uniform naar f convergeert. Dan volgt:

$$\lim_{n\to\infty} \|Uf_n - Uf\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Dus $(Uf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een rij continue functies die uniform naar $Uf \in \mathrm{BM}(S)$ convergeert. We concluderen: $Uf \in C_b(S)$. Dit bewijst dat P sterk Feller is. □

Propositie 4.1.4. *Laat P een reguliere Markov-operator op een metrische ruimte (S, d) zijn met duale U. Dan zijn equivalent:*

1. *P is ultra-Feller;*
2. *De familie $\{x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle : f \in \mathrm{BM}(S), \|f\|_\infty \leq 1\}$ van afbeeldingen van S naar $\mathbb{R}$ is equicontinu;*
3. *De afbeelding $S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}$ gedefinieerd door $x \mapsto P\delta_x$ is continu;*
4. *De familie $\{x \mapsto P\delta_x(E) : E \in \mathcal{B}(S)\}$ van afbeeldingen van S naar $\mathbb{R}$ is equicontinu.*

Bewijs.

1. $\iff$ 3. Dit is waar per definitie.

1. $\implies$ 2. Stel dat P ultra-Feller is. Zij $x_0 \in S$. Kies $\delta > 0$ zodat $\|P\delta_x - P\delta_{x_0}\|_{\mathrm{TV}} < \varepsilon$ wanneer $d(x, x_0) < \delta$. Dan geldt voor iedere $x \in S$ met $d(x, x_0) < \delta$, en voor iedere $f \in \mathrm{BM}(S)$ met $\|f\|_\infty \leq 1$ dat

$$|\langle P\delta_x, f\rangle - \langle P\delta_{x_n}, f\rangle| = |\langle P\delta_x - P\delta_{x_n}, f\rangle| \leq \|P\delta_x - P\delta_{x_n}\|_{\mathrm{TV}} \cdot \|f\|_\infty \leq \|P\delta_x - P\delta_{x_n}\|_{\mathrm{TV}} < \varepsilon.$$

2. $\implies$ 4. Dit volgt uit het feit dat

$$\{x \mapsto P\delta_x(E) : E \in \mathcal{B}(S)\} = \{x \mapsto \langle P\delta_x, \mathbb{1}_E\rangle : E \in \mathcal{B}(S)\}$$

een deelverzameling is van $\{x \mapsto \langle P\delta_x, f\rangle : f \in \mathrm{BM}(S), \|f\|_\infty \leq 1\}$.

4. $\implies$ 1. Als $\{x \mapsto P\delta_x(E) : E \in \mathcal{B}(S)\}$ equicontinu is, dan geldt voor iedere $x_0 \in S$ dat

$$\lim_{x\to x_0} \|P\delta_x - P\delta_{x_0}\|_{\mathrm{TV}} \leq \lim_{x\to x_0} 2 \sup_{E\in\mathcal{B}(S)} |P\delta_x(E) - P\delta_{x_0}(E)| = 0. \qquad \square$$

Opmerking 4.1.5. Merk de gelijkenissen op van de punten 1., 2., 3. en 4. tussen de Proposities 4.1.2, 4.1.3 en 4.1.4.

De volgende stelling is Theorem 1.6.6 uit [8].

Stelling 4.1.6. *Stel dat S een Poolse ruimte is. Het product van twee Markov-operatoren op S die sterk Feller zijn, is ultra-Feller.*

Zoals de benaming doet vermoeden is de eigenschap ultra-Feller sterker dan de eigenschap sterk Feller, die zelf weer sterker is dan de eigenschap Feller. Dit zien we onder andere terug in Propositie 4.1.7.

Propositie 4.1.7. *Stel dat (S, d) een separabele en volledige metrische ruimte is. Zij P een reguliere Markov-operator op S met duale U. Dan geldt:*

1. *Als P ultra-Feller is, dan is P sterk Feller;*
2. *Als P sterk Feller is, dan heeft P de* e*-eigenschap;*
3. *Als P de* e*-eigenschap heeft, dan heeft P de Cesàro-*e*-eigenschap;*
4. *Als P de Cesàro-*e*-eigenschap heeft, dan is P Feller.*

Bewijs.

1. Dit volgt direct uit Proposities 4.1.3 en 4.1.4.
2. Stel nu dat P sterk Feller is. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$, en kies $x_0 \in S$ willekeurig. We moeten bewijzen dat $\{U^n f\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ equicontinu is in x_0. Als $f = 0$, dan zijn we klaar, dus neem aan dat $f \neq 0$. Zij $\varepsilon > 0$. Neem $\delta_1 > 0$ zó, dat $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$ geldt wanneer $d(x, x_0) < \delta_1$. Wegens $Uf \in C_b(S)$ kunnen we verder $\delta_2 > 0$ zó kiezen, dat $|Uf(x) - Uf(x_0)| < \varepsilon/3$ geldt wanneer $d(x, x_0) < \delta_2$. Uit Stelling 4.1.6 volgt dat $P^2 = PP$ ultra-Feller is. Dus de afbeelding $S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}$ gedefinieerd door $x \mapsto P^2\delta_x$ is continu. Er bestaat dus een $\delta_3 > 0$ zodat $\|P^2\delta_x - P^2\delta_{x_0}\|_{\mathrm{TV}} < \varepsilon/(3\|f\|_\infty)$ geldt wanneer $d(x, x_0) < \delta_3$. Definieer $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Dan geldt voor iedere $x \in S$ met $d(x, x_0) < \delta$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$ dat

$$\begin{aligned}
|U^n f(x) - U^n f(x_0)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |Uf(x) - Uf(x_0)| + \sup_{n\geq 2} |U^n f(x) - U^n f(x_0)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{n\geq 2} |\langle \delta_x - \delta_{x_0}, U^n f\rangle| \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{n\geq 0} |\langle P^2\delta_x - P^2\delta_{x_0}, U^n f\rangle| \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{n\geq 0} \left| \int U^n f \,\mathrm{d}\big(P^2\delta_x - P^2\delta_{x_0}\big) \right| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{n\geq 0} \|U^n f\|_\infty \cdot \|P^2\delta_x - P^2\delta_{x_0}\|_{\mathrm{TV}} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sup_{n\geq 0} \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{3\|f\|_\infty} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dit bewijst dat P de e-eigenschap heeft.

3. Duidelijk.

4. Stel als laatste dat P de Cesàro-e-eigenschap heeft. Dan is Uf een continue en begrensde functie voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$. Uit Propositie 4.1.2 volgt dat P Markov-Feller is. □

In zekere zin is de Cesàro-e-eigenschap de zwakste tot nu toe gedefinieerde equicontinuïteitseigenschap van een reguliere Markov-operator.

Propositie 4.1.8. *Stel dat (S, d) een separabele en volledige metrische ruimte is. Zij $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere Markov-operator. Dan zijn de volgende uitspraken waar:*

1. *Als P niet-expansief is, dan is P uniform equicontinu op bollen;*

2. *Als P uniform equicontinu op bollen is, dan heeft P de* e*-eigenschap.*

3. *Als P de spectraalkloofeigenschap heeft, dan heeft P de* e*-eigenschap;*

Bewijs.

1. Neem aan dat P niet-expansief is. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon/4$. Laten $x_0 \in S$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq B_\delta(x_0)$ willekeurig gekozen zijn. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ met $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$. Dan geldt $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ voor alle $x \in B_\delta(x_0)$. Dus
$$\begin{aligned}|\langle \mu - \delta_{x_0}, f\rangle| &= \left|\int_S f(x) - f(x_0)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| = \left|\int_{B_\delta(x_0)} f(x) - f(x_0)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_\delta(x_0)} \delta\,\mathrm{d}\mu(x) = \delta \\ &= \varepsilon/4.\end{aligned}$$
Het volgt dat $\|\mu - \delta_{x_0}\|^*_{\mathrm{BL}} \leq \varepsilon/4$. Net zo vinden we $\|\nu - \delta_{x_0}\|^*_{\mathrm{BL}} \leq \varepsilon/4$, zodat $\|\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}} \leq \varepsilon/2$. Nu krijgen we voor $n \in \mathbb{N}$:
$$\|P^n\mu - P^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} \leq \|P^n\mu - P^n\nu\|_{\mathrm{FM}} \leq \|\mu - \nu\|_{\mathrm{FM}} \leq 2\|\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}} \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Neem nu aan dat P uniform equicontinu op bollen is. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ niet-nul en neem $x_0 \in S$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies vervolgens $\delta > 0$ zodat $\|P^n\mu - P^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} < \varepsilon/\|f\|_{\mathrm{BL}}$ geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq B_\delta(x_0)$. Dan geldt voor $x \in S$ met $d(x, x_0) < \delta$ en voor $n \in \mathbb{N}$ dat
$$|U^nf(x) - U^nf(x_0)| = |\langle P^n\delta_x - P^n\delta_{x_0}, f\rangle| \leq \|f\|_{\mathrm{BL}} \cdot \|P^n\delta_x - P^n\delta_{x_0}\|^*_{\mathrm{BL}} < \|f\|_{\mathrm{BL}} \cdot \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathrm{BL}}} = \varepsilon.$$
Dus P heeft de e-eigenschap.

3. Stel nu dat P de spectraalkloofeigenschap heeft, en kies $C > 0$ en $\theta \in (0, 1)$ zodat $\|P^n\mu - P^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} < C\theta^n\|\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}}$ geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$. Dan geldt voor $x_0 \in S$:
$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} |U^nf(x) - U^nf(x_0)| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle P^n\delta_x - P^n\delta_{x_0}, f\rangle| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} C\theta^n\|\delta_x - \delta_{x_0}\|^*_{\mathrm{BL}} \cdot \|f\|_{\mathrm{BL}} \\ &\leq C\|\delta_x - \delta_{x_0}\|^*_{\mathrm{BL}}\|f\|_{\mathrm{BL}} = C\frac{2d(x, x_0)}{2 + d(x, x_0)}\|f\|_{\mathrm{BL}} \xrightarrow{x \to x_0} 0.\end{aligned}$$
Er volgt dat $\{U^nf : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is, dus P heeft de e-eigenschap. □

4.2 Voorbeelden van Markov-operatoren

In deze paragraaf zien we zeven voorbeelden van Markov-operatoren.

Voorbeeld 4.2.1. We bekijken eerst vijf korte voorbeelden.

1. Niet iedere Markov-operator is regulier. Dit concrete voorbeeld komt uit [26]. Neem $S = [0,1]$ met de Euclidische metriek en laat λ de Lebesgue-maat op $[0,1]$ zijn. Wegens de decompositiestelling van Lebesgue bestaat er voor iedere maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ een unieke decompositie $\mu = \mu_a + \mu_s$ met $\mu_a \ll \lambda$ en $\mu_s \perp \lambda$. Definieer $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ door
$$P\mu = \mu_a(S)\lambda + \mu_s.$$
Het is makkelijk te controleren dat P een Markov-operator is. Echter, P is niet regulier. Neem namelijk een kansmaat $\mu \in \mathcal{P}(S)$, verschillend van λ, die absoluut continu is ten opzichte van λ. Kies $E \in \mathcal{B}(S)$ zodat $\mu(E) \neq \lambda(E)$. Voor $x \in S$ geldt $P\delta_x = \delta_x$. Nu volgt: als P regulier is met duale U, dan hebben we
$$\begin{aligned} P\mu(E) = \lambda(E) \neq \mu(E) &= \int \delta_x(E)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int P\delta_x(E)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int U\mathbb{1}_E(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int \mathbb{1}_E(x)\,\mathrm{d}P\mu(x) = P\mu(E). \end{aligned}$$
Dit is een tegenspraak, dus P is niet regulier. De operator P is in het algemeen niet ultra-Feller omdat voor $x \neq y$ in S geldt dat $\|P\delta_x - P\delta_y\|_{\mathrm{TV}} = \|\delta_x - \delta_y\|_{\mathrm{TV}} = 2$.

2. Zij S een metrische ruimte. De identiteit I op $\mathcal{M}^+(S)$ is Markov-Feller, want zijn duale U is de identiteit op $\mathrm{BM}(S)$. Hieruit zien we ook dat I in het algemeen niet sterk Feller is. Voor $x \neq y$ in S hebben we $\|\delta_x - \delta_y\|_{\mathrm{TV}} = 2$, dus de afbeelding $x \mapsto P\delta_x : S \to \mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}$ is niet continu als S een ophopingspunt heeft. In dat geval is de identiteit op $\mathcal{M}^+(S)$ dus niet ultra-Feller.
De families $\{U^n f : n \in \mathbb{N}\}, \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f : n \in \mathbb{N}\right\} = \{f\}$ zijn equicontinu in elk punt voor elke functie $f \in \mathrm{BL}(S)$, dus I heeft de e-eigenschap en de Cesàro-e-eigenschap. Om te zien dat I equicontinu op bollen is, kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta := \varepsilon/2$, en laat $x \in S$. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ met $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$. Dan geldt $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) < \delta$ voor $y \in B_\delta(x)$. Er volgt voor $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq B_\delta(x)$ dat
$$\begin{aligned} \langle I^n\mu - I^n\nu, f\rangle &= \int_{B_\delta(x)} f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) - \int_{B_\delta(x)} f(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &\leq \int_{B_\delta(x)} f(x) + \delta\,\mathrm{d}\mu(y) - \int_{B_\delta(x)} f(x) - \delta\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &= 2\delta \end{aligned}$$
en op soortgelijke wijze $\langle I^n\mu - I^n\nu, f\rangle > -2\delta$, waaruit volgt dat $|\langle I^n\mu - I^n\nu, f\rangle| < 2\delta = \varepsilon$ en $\|I^n\mu - I^n\nu\|^*_{\mathrm{BL}} \leq \varepsilon$. Dus I is uniform equicontinu op bollen.
Het is duidelijk dat I niet-expansief is, en dat I niet de spectraalkloofeigenschap heeft wanneer S minstens twee punten heeft.

3. Zij S een metrische ruimte. Voor $T : S \to S$ met $T \equiv s \in S$ is de transport-operator T_* van T Feller, sterk Feller en ultra-Feller. Uit Voorbeeld 2.2.5 weten we al dat $U : f \mapsto f \circ T \equiv f(s)$ de duale van T_* is. De duale voert $\mathrm{BM}(S)$ in $C_b(S)$ over en daarom is T_* Markov-Feller en sterk Feller. Verder kunnen we zien dat $x \mapsto T_*\delta_x = \delta_s$ continu is in de $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$-norm, waaruit volgt dat T_* inderdaad ook ultra-Feller is.
Merk op dat $\{U^n f : n \in \mathbb{N}\}, \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \{f, x \mapsto f(s)\}$ beide equicontinu

zijn, waaruit volgt dat T_* de (Cesàro)-e-eigenschap heeft. Zij $\varepsilon > 0$. Voor elke $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ volgt:

$$\|T_*^n\mu - T_*^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* = \|\delta_s - \delta_s\|_{\mathrm{BL}}^* = 0 < \varepsilon.$$

Hieruit krijgen we dat T_* uniform equicontinu op bollen is.
Voor twee maten $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(S)$ hebben we ook

$$\|T_*\mu - T_*\nu\|_{\mathrm{FM}} = \|\mu(S)\delta_s - \nu(S)\delta_s\|_{\mathrm{FM}} = |\mu(S) - \nu(S)| \leq \|\mu - \nu\|_{\mathrm{FM}}.$$

We zien dus dat T_* niet-expansief is. Voor een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ en twee kansmaten $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ geldt er

$$\|T_*^n\mu - T_*^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* = \|\delta_s - \delta_s\|_{\mathrm{BL}}^* = 0 \leq (1/2)^n\|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*,$$

dus T_* heeft de spectraalkloofeigenschap.

4. Niet iedere reguliere Markov-operator is Markov-Feller. Beschouw bijvoorbeeld de transport-operator T_* voor een niet-continue meetbare afbeelding $T : S \to S$, met $S \subseteq \mathbb{R}$. Dan is T_* wel regulier, met duale $f \mapsto f \circ T$, maar niet Feller, want de continue identieit op S wordt door de duale van T_* gestuurd naar de niet-continue afbeelding T. Uit Proposities 4.1.7 en 4.1.8 zien we dat hieruit volgt dat T_* niet de (Cesàro)-e-eigenschap heeft, niet sterk Feller of ultra-Feller is, en ook niet equicontinu op bollen is en dat T_* niet niet-expansief is of de spectraalkloofeigenschap heeft.

5. Neem $S = [0,1]$ en laat λ de Lebesgue-maat op $[0,1]$ zijn. Definieer $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ door $P\mu = \mu/2 + \mu(S)\lambda/2$. Het is makkelijk om te controleren dat P inderdaad een Markov-operator is. Ook zien we voor $n \in \mathbb{N}$ en $\mu \in \mathcal{P}(S)$ dat $P^n\mu = 2^{-n}\mu + (1 - 2^{-n})\lambda$. Voor $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ vinden we dus:

$$\|P^n\mu - P^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* = \|2^{-n}\mu - 2^{-n}\nu\|_{\mathrm{BL}}^* = 2^{-n}\|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*.$$

Er volgt dat P niet-expansief is, en dat P de spectraalkloofeigenschap heeft. Merk op dat de duale U van P gegeven wordt door

$$Uf(x) = \langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x/2 + \lambda/2, f\rangle = f(x)/2 + \int f \,\mathrm{d}\lambda\,/2.$$

In het bijzonder is P regulier en Markov-Feller, maar niet sterk Feller of ultra-Feller. Uit Proposities 4.1.7 en 4.1.8 zien we dat P uniform equicontinu op bollen is en dat P de (Cesàro)-e-eigenschap heeft.

Voorbeeld 4.2.2. Wat volgt, is een uitgewerkt niet-triviaal voorbeeld van een Markov-operator met de spectraalkloofeigenschap. Zij $\theta \in (0,1)$. Neem $z \in (1, (3-\theta)/2]$. Definieer $S = [0,1] \cup \{z\}$ en geef S de standaardmetriek. Schrijf $\mu_1 = \mu(\cdot \cap [0,1])$ voor $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$. Definieer $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ door

$$P(\mu) = P(\mu_1 + a\delta_z) = \theta\mu_1 + \mu_1([0,1])(1-\theta)\delta_0 + a\delta_1, \quad \text{waar } a = \mu(\{z\}).$$

Merk op dat P Markov-Feller is met duale $U : \mathrm{BM}(S) \to \mathrm{BM}(S)$ gedefinieerd door

$$Uf(x) = \begin{cases} f(1) & \text{als } x = z; \\ \theta f(x) + (1-\theta)f(0) & \text{als } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dan is P niet niet-expansief in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm, want

$$\begin{aligned}\|P\delta_z - P\delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* &= \|\delta_1 - \theta\delta_1 - (1-\theta)\delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* = (1-\theta)\|\delta_1 - \delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* = (1-\theta)\cdot\frac{2}{3} > \frac{2(z-1)}{2+(z-1)} \\ &= \|\delta_z - \delta_1\|_{\mathrm{BL}}^*.\end{aligned}$$

Echter, P heeft wel de spectraalkloofeigenschap. We gaan namelijk laten zien dat er een $C > 0$ bestaat zodanig dat

$$\|P^n\mu - P^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* \leq C\theta^n \|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*, \qquad \mu, \nu \in \mathcal{P}(S), n \in \mathbb{N}.$$

Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ met $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$. Het is duidelijk dat Uf begrensd is door 1. We laten zien dat Uf Lipschitz-continu is met Lipschitz-constante $|Uf|_L \leq 2/(z-1)$. Neem $x, y \in S$. Als x en y in $[0,1]$ zitten, dan volgt dat

$$|Uf(x) - Uf(y)| = \theta|f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y| \leq \frac{2}{z-1}|x - y|.$$

Als $x \in [0,1]$ en $y = z$, dan hebben we:

$$|Uf(x) - Uf(y)| = |\theta f(x) + (1-\theta)f(0) - f(1)| \leq 2 = \frac{2}{|x-z|}|x - y| \leq \frac{2}{z-1}|x - y|.$$

Dus

$$\|Uf\|_{\mathrm{BL}} = \|Uf\|_\infty + |Uf|_L \leq 1 + \frac{2}{z-1} = \frac{z+1}{z-1}.$$

Het volgt dat er een $C > 0$ bestaat zodat

$$\|P\mu - P\nu\|_{\mathrm{BL}}^* \leq C\theta\|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*$$

geldt voor alle $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$. We kunnen bijvoorbeeld $C = (z+1)/(z-1) \cdot \theta^{-1}$ nemen, want dan krijgen we voor $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$:

$$\|P\mu - P\nu\|_{\mathrm{BL}}^* = \sup_{f \in \mathrm{BL}(S), \|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1} C\theta \left| \left\langle \mu - \nu, \frac{z-1}{z+1} Uf \right\rangle \right| \leq C\theta \|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*.$$

We zijn dus klaar als we bewijzen dat

$$\|P^{n+1}\mu - P^{n+1}\nu\|_{\mathrm{BL}}^* \leq \theta^n \|P\mu - P\nu\|_{\mathrm{BL}}^*, \qquad \mu, \nu \in \mathcal{P}(S), n \in \mathbb{N}.$$

Omdat de drager van $P\mu$ voor elke maat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ bevat is in $[0,1]$, voldoet het om te bewijzen dat

$$\|P^n\mu - P^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* \leq \theta^n \|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*$$

geldt voor $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq [0,1]$. Neem dus $n \in \mathbb{N}$ en $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq [0,1]$. We hebben $P\mu = \theta\mu + (1-\theta)\delta_0$. Het volgt dat

$$\begin{aligned}\|P^n\mu - P^n\nu\|_{\mathrm{BL}}^* &= \|P^{n-1}(\theta\mu + (1-\theta)\delta_0) - P^{n-1}(\theta\nu + (1-\theta)\delta_0)\|_{\mathrm{BL}}^* = \theta\|P^{n-1}\mu - P^{n-1}\nu\|_{\mathrm{BL}}^* \\ &= \theta^n \|\mu - \nu\|_{\mathrm{BL}}^*.\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.2.3. Dit voorbeeld is van Klaudiusz Czudek en staat in [15]. Neem

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

met de standaardmetriek en laat $T : S \to S$ gegeven worden door

$$T(0) = T(1) = 0 \quad \text{en} \quad T(1/n) = 1/(n-1) \text{ voor } n \geq 2.$$

Dan is de transport-operator T_* asymptotisch stabiel met invariante maat $\mu^* = \delta_0$, maar heeft T_* niet de e-eigenschap. Merk op dat μ^* inderdaad een onder T_* invariante maat is, want voor $A \in \mathcal{B}(S)$ hebben we

$$T_*\delta_0(A) = \delta_0(T^{-1}(A)) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \in T^{-1}(A); \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 = T(0) \in A; \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} = \delta_0(A).$$

De duale U van T_* wordt gegeven door

$$Uf(x) = f(T(x)) = \begin{cases} f(0) & \text{als } x = 0, 1; \\ f\left(\frac{1}{n-1}\right) & \text{als } x = \frac{1}{n} \text{ voor zekere } n \geq 2. \end{cases}$$

Merk op dat P dus Markov-Feller is. We zien met behulp van inductie dat

$$U^k f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{als } x \in \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\right\}; \\ f\left(\frac{1}{n-k}\right) & \text{als } x = \frac{1}{n} \text{ voor zekere } n \geq k+1, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Om te bewijzen dat T_* asymptotisch stabiel is, kiezen we $f \in C_b(S)$ niet-nul en $\mu \in \mathcal{P}(S)$ en bewijzen we dat $\langle P^n\mu, f\rangle \to \langle \delta_0, f\rangle = f(0)$. Zij $\varepsilon > 0$. Definieer $a_n := \mu(\{1/n\})$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_0 = \mu(\{0\})$, zodat

$$\mu = a_0\delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{1/n}.$$

Omdat μ een kansmaat is, moet er gelden dat $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Dit staat ons toe om een $N \in \mathbb{N}$ te kiezen zodanig dat

$$1 - a_0 - \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < \varepsilon/(2\|f\|_\infty).$$

Nu berekenen we voor $k \geq N$:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle P^k\mu, f\right\rangle - f(0)\right| &= \left|\left\langle a_0\delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\delta_{1/n}, U^k f\right\rangle - f(0)\right| \\ &= \left|a_0 U^k f(0) + \sum_{n=1}^{N} a_n U^k f\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n U^k f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| \\ &= \left|a_0 f(0) + \sum_{n=1}^{N} a_n f(0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n U^k f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| \\ &\leq |f(0)|\left(1 - a_0 - \sum_{n=1}^{N} a_n\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left|U^k f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

We concluderen dat $\lim_{n\to\infty}\langle P^n\mu, f\rangle = \langle\delta_0, f\rangle$. Dat bewijst dat T_* asymptotisch stabiel is met invariante maat δ_0.

Om te bewijzen dat T_* niet de e-eigenschap heeft, laten we zien dat $\{U^n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ niet equicontinu is in 0 voor $f \in \mathrm{BL}(S)$ gedefinieerd door $f(s) = s$. We hebben namelijk voor iedere $\delta > 0$ een $k \in \mathbb{N}$ met $|1/k - 0| < \delta$ zodat:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(1/k) - U^n f(0)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(1/k)| = |f(1)| = 1.$$

Dit bewijst dat $\{U^n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ niet equicontinu is in 0, waaruit volgt dat T_* niet de e-eigenschap heeft.

Dit voorbeeld is belangrijk omdat asymptotische stabiliteit het hebben van de e-eigenschap impliceert onder een aantal zwakke aannames, zoals de aanname dat het inwendige van $\mathrm{supp}(\mu^*)$ niet-leeg is. Zie hiervoor Gevolg 7.2.3 of Hoofdstuk 7 in het algemeen.

4.3 Markov-operatoren op dichtheden

De aanleiding van de komende Hoofdstukken 5 en 6 is het artikel 'Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators' van Lasota, Li en Yorke [20]. We proberen de resultaten van dat artikel in Hoofdstuk 6 te generaliseren naar bijvoorbeeld Markov-operatoren waar de verzameling van eindige getekende maten de Dudleynorm krijgt. In het artikel wordt gesproken over Markov-operatoren op dichtheden.

Definitie 4.3.1 (Markov-operator op dichtheden)**.** Zij (X, Σ, μ) een maatruimte, waar μ een σ-eindige, niet-negatieve maat is. Een lineaire operator $P : L^1(X, \Sigma, \mu) \to L^1(X, \Sigma, \mu)$ wordt een *Markov-operator op dichtheden op* X (Engels: *Markov operator on densities on* X) genoemd als de volgende twee eigenschappen gelden voor elke $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ met $f \geq 0$:

1. $Pf \geq 0$;
2. $\|Pf\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$.

Opmerking 4.3.2. Eigenschap 2. in Definitie 4.3.1 geeft voor $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ dat

$$\|Pf\|_{L^1} = \|P(f^+) - P(f^-)\|_{L^1} \leq \|P(f^+)\|_{L^1} + \|P(f^-)\|_{L^1} = \|f^+\|_{L^1} + \|f^-\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}.$$

Voor meer informatie over Markov-operatoren op dichtheden, zie [21] of [6]. Markov-operatoren zijn in zekere zin uitbreidingen van Markov-operatoren op dichtheden.

Lemma 4.3.3. *Zij S een topologische ruimte, $\nu \in \mathcal{P}(S)$ en $L^1_m(\nu) := \{\mu \in \mathcal{M}(S) : \mu \ll \nu\}$. Dan zijn de vectorruimtes $L^1(\nu) = L^1(S, \mathcal{B}(S), \nu)$ en $L^1_m(\nu)$ isometrisch isomorf via de afbeelding*

$$L^1(\nu) \to L^1_m(\nu) : f \mapsto \left(A \mapsto \int_A f \,\mathrm{d}\nu\right).$$

Hier rusten we $L^1_m(\nu)$ uit met de norm van totale variatie.

Bewijs. Wegens de stelling van Radon-Nikodym is de gegeven afbeelding bijectief. Zij $f \in L^1(\nu)$, en definieer $\mu \in L^1_m(\nu)$ door $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu$. Dan hebben we

$$\mu^+(S) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{B}(S)\} = \int_S f \mathbb{1}_{\{f>0\}} \,\mathrm{d}\nu \quad \text{en} \quad \mu^-(S) = \int_S -f \mathbb{1}_{\{f<0\}} \,\mathrm{d}\nu,$$

zodat

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \mu^+(S) + \mu^-(S) = \int_S f \mathbb{1}_{\{f>0\}} \,\mathrm{d}\nu + \int_S -f \mathbb{1}_{\{f<0\}} \,\mathrm{d}\nu = \int_S |f| \,\mathrm{d}\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Dit bewijst dat de afbeelding inderdaad een isometrie is. □

Propositie 4.3.4. *Zij S een topologische ruimte en $\nu \in \mathcal{P}(S)$. Laat $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een Markov-operator zijn en breid hem uit naar een lineaire afbeelding $\widetilde{P} : \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(S)$ door $\widetilde{P}(\mu) = P(\mu^+) - P(\mu^-)$. Als $P\nu \ll \nu$, dan is de beperking van $\widetilde{P}$ tot $L^1_m(\nu) = \{\mu \in \mathcal{M}(S) : \mu \ll \nu\}$ gezien als afbeelding op $L^1(S, \mathcal{B}(S), \nu)$ een Markov-operator op dichtheden op S.*

Bewijs. Stel dat $P\nu \ll \nu$. Schrijf $L^1(\nu) = L^1(S, \mathcal{B}(S), \nu)$ en noem $P' : L^1(\nu) \to L^1(\nu)$ de beperking van $\widetilde{P}$ tot $L^1_m(\nu) = \{\mu \in \mathcal{M}(S) : \mu \ll \nu\}$ gezien als afbeelding op $L^1(\nu)$. Een codomein van P' is inderdaad $L^1(\nu)$ wegens Corollary 4.3.3 uit [26]. Het is duidelijk dat P' linear is. Laat nu $f \in L^1(\nu)$ niet-negatief. Definieer $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ door $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\nu$. Dan volgt: $P'f = \frac{\mathrm{d}P\mu}{\mathrm{d}\nu}$. Maar $P\mu \in \mathcal{M}^+(S)$, zodat $P'f \geq 0$. Verder geldt er wegens Lemma 4.3.3 dat

$$\|P'f\|_{L^1} = \left\|\frac{\mathrm{d}P\mu}{\mathrm{d}\nu}\right\|_{L^1} = \|P\mu\|_{\mathrm{TV}} = P\mu(S) = \mu(S) = \int_S f \,\mathrm{d}\nu = \|f\|_{L^1}.$$

Dit bewijst dat P' inderdaad een Markov-operator op dichtheden op S is. □

Het volgende resultaat is Theorem 1.1 uit [20].

Stelling 4.3.5. *Beschouw de L^1-ruimte $L^1(X, \Sigma, \mu)$ voor een σ-eindige positieve maat μ op een een meetbare ruimte (X, Σ). Schrijf $\| \cdot \|$ voor de L^1-norm op $L^1(X, \Sigma, \mu)$. Zij P een Markov-operator op dichtheden op X. Neem aan dat er een compacte verzameling $F \subseteq L^1(X, \Sigma, \mu)$ bestaat zodat $\lim_{n\to\infty} \inf_{g\in F} \|P^n f - g\| = 0$ geldt voor alle $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ met $f \geq 0$ en $\|f\| = 1$. Dan bestaan er niet-negatieve functies $g_1, \ldots, g_r$ van norm 1 en begrensde lineaire functionalen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r : L^1(X, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}$ zodanig dat*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^n \left(f - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f) g_i \right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| P^n f - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(f) g_{\alpha^n(i)} \right\| = 0, \qquad f \in L^1(X, \Sigma, \mu),$$

voor een zekere permutatie α van $\{1, \ldots, r\}$ met $Pg_i = g_{\alpha(i)}$ voor $i = 1, \ldots, r$.

Een Markov-operator op dichtheden P als in Stelling 4.3.5 heet asymptotisch periodiek, omdat $P^n f$ voor elke $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ in de limiet periodiek is met orde gelijk aan de orde van α. Het bewijs van Stelling 4.3.5 voor het geval $\mu(X) < \infty$ en $P1 = 1$ gaat via zogenaamde *atoms* in de algebra van *nice sets*, waarvan wordt bewezen dat er maar eindig veel zijn. Daaruit wordt dan verkregen dat er ook slechts eindig veel $g_1, \ldots, g_r$ nodig zijn in Stelling 4.3.5. Merk met behulp van Propositie 4.3.4 de gelijkenis op van de aanname in Stelling 4.3.5 en de eerste van de twee aannames in Stelling 6.0.3. Komorník en Thomas hebben Stelling 4.3.5 uitgebreid naar een stelling over Markov-operatoren, zie bijvoorbeeld [18] en Stelling 6.3.6.

5

Insnoering in equicontinue discrete dynamische systemen

De iteraties van Markov-operatoren kunnen gezien worden als discrete dynamische systemen op de ruimte van kansmaten, positieve maten, of zelfs getekende maten. In dit hoofdstuk bekijken we de asymptotiek van algemene discrete dynamische systemen, waarbij we telkens de twee aannames als in Propositie 5.1.6 zullen doen. In Hoofdstuk 6 spitsen we onze aandacht toe op Markov-operatoren. Zoals gezegd in Paragraaf 4.3 zijn Hoofdstukken 5 en 6 gebaseerd op het artikel [20] van Lasota, Li en Yorke, waar wordt gewerkt met asymptotische periodiciteit. In Hoofdstukken 5 en 6 werken we met het begrip asymptotische compactheid, zie Definitie 5.1.1, dat we zien als een andere vorm van asymptotisch gedrag.

In Paragrafen 5.1 en 5.2 werken we toe naar een van de belangrijkste stellingen van deze scriptie: Stelling 5.2.5. In die stelling komt een zogenoemde compacte, metriseerbare, topologische groep voor. We onderzoeken dergelijke groepen in Paragraaf 5.3.

Voor een verzameling S en een afbeelding $\varphi : S \to S$ hanteren we soms de schrijfwijze $\varphi^n := \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ voor de n-voudige samenstelling van φ, en $\varphi x := \varphi(x)$, waar $n \in \mathbb{N}$ en $x \in S$. Dat doen we enerzijds om alvast de vergelijking met groepswerkingen te maken, en anderzijds om een teveel aan haakjes te voorkomen.

5.1 Asymptotische compactheid

In deze paragraaf definiëren we wat asymptotische compactheid betekent en bewijzen we er drie resultaten over. Het begrip komt uit de dynamischesysteemtheorie, zie bijvoorbeeld Section 2.3.1 uit [24].

Definitie 5.1.1 (Asymptotische compactheid)**.** Zij (S, d) een metrische ruimte en laat $\varphi : S \to S$ een afbeelding zijn. Dan heet φ *asymptotisch compact op een verzameling* $E \subseteq S$ (Engels: *asymptotically compact on* E) wanneer de rij $(\varphi^{m_n} x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij heeft voor iedere twee rijen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E en $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ met $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$.

Voorbeeld 5.1.2. Het is niet zo dat asymptotische periodiciteit asymptotische compactheid impliceert. Hier vatten we asymptotische periodiciteit op als in Stelling 4.3.5. Beschouw bijvoorbeeld het half-oneindige interval $S = [0, \infty)$ met de standaardmetriek samen met de afbeelding $\varphi : S \to S$ die we definiëren door $\varphi(x) = x/2$. Dan hebben we $\lim_{n\to\infty} \varphi^n x = 0$ voor alle $x \in S$. In het bijzonder is φ asymptotisch periodiek. Echter, φ is niet asymptotisch compact op S, want voor $x_n = 4^n$ en $m_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, zien we dat $(\varphi^{m_n} x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij heeft. Wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass is φ wel asymptotisch compact op iedere begrensde verzameling $E \subseteq S$.

Definitie 5.1.3 (Insnoerende verzameling)**.** Zij (S,d) een metrische ruimte en $\varphi : S \to S$ een afbeelding. Een verzameling $K \subseteq S$ heet een *insnoerende verzameling voor* φ (Engels: *constrictive set for* φ) als $\lim_{n\to\infty} d(\varphi^n x, K) = 0$ geldt voor elke $x \in S$.

Definitie 5.1.4 (Kuratowskimaat van niet-compactheid)**.** Laat S een metrische ruimte zijn en zij $E \subseteq S$. De *Kuratowskimaat van niet-compactheid van* E (Engels: *Kuratowski measure of noncompactness of* E) wordt geschreven als $\kappa(E)$ en is gedefinieerd als

$$\kappa(E) := \inf\{d : E \text{ wordt overdekt door eindig veel verzamelingen met diameter kleiner dan } d\},$$

waar $\inf \varnothing := \infty$.

De volgende propositie is één kant van de discrete versie van Proposition 7.4.6 in [13]. Omdat dat document niet publiekelijk beschikbaar is, wordt het lemma hier voor de volledigheid nogmaals bewezen.

Propositie 5.1.5. *Zij* (S,d) *een volledige metrische ruimte en* $\varphi : S \to S$ *een afbeelding. Laat* $E \subseteq S$ *en veronderstel dat*

$$\lim_{k\to\infty} \kappa\left(\bigcup_{n\geq k} \varphi^n(E)\right) = 0.$$

Dan is φ *asymptotisch compact op* E.

Bewijs. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat E niet-leeg is. Kies een rij natuurlijke getallen $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $m_n \to \infty$ als $n \to \infty$, en een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$. Definieer $y_n := \varphi^{m_n}(x_n)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Er bestaat een $k_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\kappa\left(\bigcup_{n\geq k_0} \varphi^n(E)\right)$ eindig is. Het volgt dat $\bigcup_{n\geq k_0} \varphi^n(E)$ begrensd is. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $m_1 \geq k_0$ en dat $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niet-dalend is. Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ de verzameling

$$E_n := \overline{\bigcup_{k\geq n} \varphi^k(E)}.$$

Dan zijn de E_n, $n \in \mathbb{N}$, niet-leeg, gesloten en begrensd voor $n \geq m_1$. Verder is $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dalend, dat wil zeggen dat $E_{n+1} \subseteq E_n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bovendien hebben we $y_n \in E_{m_n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en

$$\kappa(E_n) = \kappa\left(\bigcup_{k\geq n} \varphi^k(E)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

wegens Lemma 22.2(4) in [24]. Lemma 22.2(6) in [24] geeft nu het bestaan van een convergente deelrij $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ van $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Propositie 5.1.6. *Laat* (S,d) *een volledige metrische ruimte zijn en zij* $\varphi : S \to S$ *een afbeelding. Neem verder de volgende twee uitspraken aan.*

1. *Er bestaat een compacte insnoerende verzameling* $K \subseteq S$ *voor* φ*;*
2. *De verzameling van afbeeldingen* $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ *is equicontinu in elk punt van* K*.*

Dan is φ *asymptotisch compact op* K*. Is* φ *continu op* S*, dan is* $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ *equicontinu op* S*.*

Bewijs. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat S niet-leeg is. Vanwege Propositie 5.1.5 voldoet het voor asymptotische compactheid om te bewijzen dat $\lim_{k\to\infty} \kappa\left(\bigcup_{n\geq k} \varphi^n(K)\right) = 0$. Merk op dat $\kappa\left(\bigcup_{n\geq k} \varphi^n(K)\right)$ daalt in k. Het voldoet daarom te bewijzen dat voor iedere $r > 0$ geldt dat $\kappa\left(\bigcup_{n\geq N} \varphi^n(K)\right) \leq 4r$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$. Zij hiertoe $r > 0$. Omdat $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$

equicontinu is in elk punt van K, bestaat er voor elk punt $x \in K$ een straal $0 < \delta(x) < r$ zodanig dat $d(\varphi^n x, \varphi^n y) < r/2$ voor iedere $y \in S$ met $d(x,y) < \delta(x)$ en $n \in \mathbb{N}$. Nu is $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in K\}$ een open overdekking van K. Wegens compactheid bestaan er $l \in \mathbb{N}$ en $x_1, \ldots, x_l \in K$ zodat $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{\delta(x_i)}(x_i)$. Kies vervolgens $N \in \mathbb{N}$ zodat $d(\varphi^n x_i, K) < r/2$ geldt voor $i = 1, \ldots, l$ en $n \geq N$. Neem nu $x \in K$ willekeurig. Kies $i \in \{1, \ldots, l\}$ zodat $d(x, x_i) < \delta(x_i)$. Dan volgt voor $n \geq N$ dat

$$d(\varphi^n x, K) \leq d(\varphi^n x, \varphi^n x_i) + d(\varphi^n x_i, K) < r/2 + r/2 = r.$$

Zij $n \geq N$. Dan bestaat er een $y \in K$ zodat $d(\varphi^n x, y) < r$. Er bestaat ook een $j \in \{1, \ldots, l\}$ met $d(x_j, y) < \delta(x_j) < r$. Dus $d(\varphi^n x, x_j) < 2r$. Het volgt dat $\bigcup_{n \geq N} \varphi^n(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{2r}(x_i)$. Dus $\kappa\Big(\bigcup_{n \geq N} \varphi^n(K)\Big) \leq 4r$.

Neem nu aan dat φ continu is op S. Zij $x \in S$ gegeven en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies voor iedere $z \in K$ een $\delta(z) > 0$ zodat $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} d(\varphi^n y, \varphi^n z) < \varepsilon/2$ geldt voor alle $y \in S$ met $d(y,z) < 3\delta(z)$. Gebruikmakend van de compactheid van K mogen we $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, \ldots, x_n \in K$ kiezen zodat $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\delta(x_i)}(x_i)$. Definieer $\delta := \min_{1 \leq i \leq n} \delta(x_i)$. Neem $N \in \mathbb{N}$ zodat $d(\varphi^N x, K) < \delta$. Dan is er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ zodat $\varphi^N x \in B_{2\delta(x_i)}(x_i)$. Wegens equicontinuïteit hebben we $d(\varphi^{N+m} x, \varphi^m x_i) < \varepsilon/2$ voor iedere $m \in \mathbb{N}_0$. Kies nu $\delta' > 0$ zodat $d(\varphi^j x, \varphi^j y) < \min(\varepsilon, \delta(x_i))$ voor $j = 1, \ldots, N$ en $y \in S$ met $d(x,y) < \delta'$. Laat $y \in S$ met $d(x,y) < \delta'$. Dan volgt direct dat $d(\varphi^j x, \varphi^j y) < \varepsilon$ voor $j = 1, \ldots, N-1$. We hebben $\varphi^N y \in B_{3\delta(x_i)}(x_i)$. Dus voor iedere $m \in \mathbb{N}_0$ geldt er

$$d\big(\varphi^{m+N} y, \varphi^{m+N} x\big) \leq d\big(\varphi^{m+N} y, \varphi^m x_i\big) + d\big(\varphi^{m+N} x, \varphi^m x_i\big) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dus $d(\varphi^m y, \varphi^m x) < \varepsilon$ voor iedere $m \in \mathbb{N}$. Het volgt dat $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is in x. □

Opmerking 5.1.7. Propositie 5.1.6 geeft een criterium voor het aantonen van de equicontinuïteit van de verzameling iteraties van een continue afbeelding op een volledige metrische ruimte.

Het volgende resultaat is gebaseerd op Lemma 23.1(2) uit [24].

Lemma 5.1.8. *Laat (S,d) een metrische ruimte zijn en zij $\varphi : S \to S$ een afbeelding. Neem aan dat φ asymptotisch compact is op een verzameling $E \subseteq S$. Dan is de ω-limietverzameling*

$$\omega(E) := \{x \in S : \textit{er bestaan } (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E \textit{ zodat } n_k \to \infty \textit{ en } \varphi^{n_k} x_k \to x\}$$

compact en er geldt $\varphi(\omega(E)) = \omega(E)$. Verder trekt $\omega(E)$ de verzameling E uniform aan, dat wil zeggen $\sup_{x \in E} d(\varphi^n x, \omega(E)) = \sup_{x \in E} \inf_{y \in \omega(E)} d(\varphi^n x, y) \to 0$ als $n \to \infty$. Als E niet-leeg is, dan is $\omega(E)$ ook niet-leeg.

Bewijs. Het feit dat $\omega(E)$ niet-leeg is als E niet-leeg is, is een direct gevolg van de definitie van asymptotische compactheid. Om compactheid te bewijzen, kies een rij $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\omega(E)$. Wegens de definitie van $\omega(E)$ bestaan er voor elke $n \geq 1$ een $u_n \in E$ en een $m_n \geq n$ zodat $d(v_n, \varphi^{m_n} u_n) \leq 1/n$. Asymptotische compactheid geeft ons deelrijen $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ en $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zodat $v := \lim_{k \to \infty} \varphi^{m_{n_k}} u_{n_k}$ bestaat. Per definitie geldt $v \in \omega(E)$. Dan hebben we duidelijk $\lim_{k \to \infty} v_{n_k} = v \in \omega(E)$, dus $\omega(E)$ is (rij)compact. Het is duidelijk uit de definitie van $\omega(E)$ dat $\varphi(\omega(E)) = \omega(E)$.

Om te bewijzen dat $\omega(E)$ de verzameling E uniform aantrekt, nemen we aan dat $\omega(E)$ de verzameling E niet uniform aantrekt. Dan is er een zekere $\varepsilon > 0$ zodat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $d(\varphi^{m_n} x_n, \omega(E)) > \varepsilon$ voor zekere $x_n \in E$ en $m_n \geq n$. Asymptotische compactheid geeft nu deelrijen $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ en $(m_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ zodat $(\varphi^{m_{n_k}} x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergeert in S. Maar dan zit $x := \lim_{k \to \infty} \varphi^{m_{n_k}} x_{n_k}$ in $\omega(E)$, dus in het bijzonder geldt er $\varepsilon \leq \limsup_{k \to \infty} d(\varphi^{m_{n_k}} x_{n_k}, \omega(E)) = 0$. Dit is een tegenspraak, dus $\omega(E)$ trekt E wel uniform aan. □

5.2 Isometrieën op compacte verzamelingen

Stelling 5.2.1 en Gevolg 5.2.4 zijn gebaseerd op onvoltooid en ongepubliceerd werk van Maja Ziemlańska, dat zelf weer geïnspireerd is door een aantal bewijzen in [22]. Voor topologische ruimtes $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ schrijven we $C(\mathcal{A},\mathcal{B})$ voor de verzameling continue afbeeldingen van $\mathcal{A}$ naar $\mathcal{B}$. Is $\mathcal{A}$ compact en is d een metriek op $\mathcal{B}$, dan definiëren we de supremum-metriek d_∞ op $C(\mathcal{A},\mathcal{B})$ door $d_\infty(\varphi,\psi)=\sup_{x\in\mathcal{A}} d(\varphi(x),\psi(x))$.

Stelling 5.2.1. *Laat $(\mathcal{A},d)$ een compacte metrische ruimte zijn en zij $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ een surjectieve afbeelding zodanig dat $\{\varphi^n : n\in\mathbb{N}\}$ equicontinu is op $\mathcal{A}$. De afsluiting van $\{\varphi^n : n\in\mathbb{N}\}$ in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),d_\infty)$ is compact en bestaat uit surjectieve afbeeldingen. Is* Id *de identiteit op $\mathcal{A}$, dan is er een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty}\varphi^{n_k}=\mathrm{Id}$ met betrekking tot d_∞. Bovendien geldt voor de met d topologisch equivalente metriek $d_\mathcal{A}$ op $\mathcal{A}$ gedefinieerd door $d_\mathcal{A}(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}_0} d(\varphi^n x,\varphi^n y)$ dat $\varphi:(\mathcal{A},d_\mathcal{A})\to(\mathcal{A},d_\mathcal{A})$ een isometrie is.*

Bewijs. We laten zien dat d en $d_\mathcal{A}$ topologisch equivalent zijn. Laat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathcal{A}$ zijn. Stel dat $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ geldt in $(\mathcal{A},d_\mathcal{A})$ voor een zekere $x\in\mathcal{A}$. Merk op dat

$$d(x_n,x)\le d_\mathcal{A}(x_n,x)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Stel omgekeerd dat $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ geldt in $(\mathcal{A},d)$ voor een zekere $x\in\mathcal{A}$. Zij $\varepsilon>0$. Vanwege equicontinuïteit bestaat er een $\delta>0$ zodat $d(\varphi^k x,\varphi^k y)<\varepsilon/2$ geldt voor $k\in\mathbb{N}_0$ wanneer $d(x,y)<\delta$. Verder is er een $N\in\mathbb{N}$ met $d(x_n,x)<\delta$ voor elke $n\ge N$. Maar dan hebben we voor $n\ge N$ dat

$$d_\mathcal{A}(x_n,x)=\sup_{k\in\mathbb{N}_0} d\Big(\varphi^k x_n,\varphi^k x\Big)\le\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Dus $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ in $(\mathcal{A},d_\mathcal{A})$. Dit bewijst dat d en $d_\mathcal{A}$ inderdaad topologisch equivalent zijn.

Door een veralgemeniseerde stelling van Arzelà-Ascoli, zie bijvoorbeeld Theorem 47.1 in [23], weten we dat de afsluiting van $\{\varphi^n : n\in\mathbb{N}\}$ in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),d_\infty)$ compact is.

Merk op dat $\{\varphi^k : k\in\mathbb{N}_0\}$ equicontinu is op de compacte verzameling $\mathcal{A}$, waaruit volgt dat $\{\varphi^k : k\in\mathbb{N}_0\}$ uniform equicontinu is op $\mathcal{A}$. Een gevolg hiervan is dat de metriek $d_{\mathcal{A},\infty}$ op $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$ gedefinieerd door $d_{\mathcal{A},\infty}(f,g)=\sup_{x\in\mathcal{A}} d_\mathcal{A}(f(x),g(x))$ topologisch equivalent is met d_∞. Neem namelijk een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$ die in de metriek d_∞ convergeert naar een zekere afbeelding $f\in C(\mathcal{A},\mathcal{A})$. Zij $\varepsilon>0$. Kies $\delta>0$ zó dat $d(\varphi^k x,\varphi^k y)<\varepsilon/2$ voor iedere $k\in\mathbb{N}_0$ en $x,y\in\mathcal{A}$ met $d(x,y)<\delta$. Neem $N\in\mathbb{N}$ zodanig dat $d(f_n(x),f(x))<\delta$ geldt voor iedere $x\in\mathcal{A}$ en $n\ge N$. Het volgt voor $n\ge N$ dat

$$d_{\mathcal{A},\infty}(f_n,f)=\sup_{x\in\mathcal{A}}\sup_{k\in\mathbb{N}_0} d\Big(\varphi^k f_n(x),\varphi^k f(x)\Big)\le\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Met andere woorden: $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ met betrekking tot de metriek $d_{\mathcal{A},\infty}$. Andersom is het door de ongelijkheid $d_\infty\le d_{\mathcal{A},\infty}$ duidelijk dat een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naar f convergeert in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),d_\infty)$ als hij met betrekking tot $d_{\mathcal{A},\infty}$ naar f convergeert.

We gaan nu bewijzen dat de afsluiting van $\{\varphi^n : n\in\mathbb{N}_0\}$, in d_∞ of $d_{\mathcal{A},\infty}$, uit surjecties bestaat. Neem een stijgend rijtje natuurlijke getallen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, en stel dat $\lim_{k\to\infty}\varphi^{n_k}=f$ in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),d_\infty)$ voor een zekere $f\in C(\mathcal{A},\mathcal{A})$. Kies $y\in\mathcal{A}$ willekeurig. Omdat φ^n surjectief is voor iedere $n\in\mathbb{N}_0$, kunnen we een rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ vinden zodat $\varphi^{n_k}x_k=y$ voor iedere $k\in\mathbb{N}$. Wegens compactheid bestaat er een deelrij $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ die convergeert in $(\mathcal{A},d_\mathcal{A})$ naar, zeg, $x\in\mathcal{A}$. Maar dan hebben we:

$$d_\mathcal{A}(f(x),y)=\lim_{l\to\infty}d_\mathcal{A}(\varphi^{n_{k_l}}x,\varphi^{n_{k_l}}x_{k_l})\le\lim_{l\to\infty}d_\mathcal{A}(x,x_{k_l})=0.$$

Dus $f(x)=y$ en f is surjectief.

Schrijf Id voor de identiteit op $\mathcal{A}$. Laat $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een stijgende rij natuurlijke getallen zijn zodat $g = \lim_{i\to\infty} \varphi^{m_i}$ bestaat in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}), d_\infty)$. Dit is mogelijk want de afsluiting van $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ is compact. Neem nu $i(1) := 1$, $n'_1 := m_1$ en definieer voor $j \in \mathbb{N}$ inductief

$$i(j+1) := \min\{i \in \mathbb{N} : i > i(j), m_i - n'_j \geq j\}, n'_{j+1} := m_{i(j+1)}.$$

Dan geldt er $n'_{j+1} - n'_j \geq j$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ en is $(n'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ een deelrij van $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$. De afsluiting van $\left\{\varphi^{n'_{j+1}-n'_j} : j \in \mathbb{N}\right\}$ is compact. Er bestaat dus een deelrij $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zodat $f = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n'_{j_k+1}-n'_{j_k}}$ bestaat met betrekking tot d_∞. Zij $y \in \mathcal{A}$. We weten al dat g surjectief is, dus er bestaat een $x \in \mathcal{A}$ met $g(x) = y$. Dan volgt uit uniforme convergentie dat

$$y = g(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n'_{j_k+1}} x = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n'_{j_k+1}-n'_{j_k}} \left(\varphi^{n'_{j_k}} x\right) = f(g(x)) = f(y).$$

Dus $f = \mathrm{Id}$, en $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} := \left(n'_{j_k+1} - n'_{j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ is een stijgende rij natuurlijke getallen met

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n'_{j_k+1}-n'_{j_k}} = \mathrm{Id}$$

in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}), d_\infty)$.

Nu kunnen we eenvoudig bewijzen dat φ isometrisch is ten opzichte van $d_\mathcal{A}$. Neem een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = \mathrm{Id}$ met betrekking tot d_∞. Dan geldt $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} x = x$ in $(\mathcal{A}, d_\mathcal{A})$ voor elke $x \in \mathcal{A}$. Er volgt voor $x, y \in \mathcal{A}$:

$$d_\mathcal{A}(x,y) = \lim_{k\to\infty} d_\mathcal{A}(\varphi^{n_k}x, \varphi^{n_k}y) \leq d_\mathcal{A}(\varphi x, \varphi y) \leq d_\mathcal{A}(x,y),$$

en daarmee $d_\mathcal{A}(\varphi x, \varphi y) = d_\mathcal{A}(x,y)$. Met andere woorden: φ is een isometrie met betrekking tot de metriek $d_\mathcal{A}$. □

Voor het volgende resultaat hebben we de notie van een zogenaamde topologische groep nodig.

Definitie 5.2.2 (Topologische groep)**.** Een groep G met een topologie wordt een *topologische groep* (Engels: *topological group*) genoemd als de productafbeelding $G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$ en de inversie $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ continu zijn. Hier wordt $G \times G$ uitgerust met de producttopologie.

Lemma 5.2.3. *Zij $(\mathcal{A}, d)$ een compacte metrische ruimte en schrijf G voor de groep van homeomorfismes van $\mathcal{A}$ naar $\mathcal{A}$ met samenstelling als groepsoperatie. Geef G de topologie die wordt geïnduceerd door de supremummetriek d_∞. Dan is G een topologische groep.*

Bewijs. Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectievelijk $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, een rij homeomorfismes $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ die uniform convergeert naar f, respectievelijk g. Dan convergeert $(f_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform naar $f \circ g$. Dit bewijst dat de productafbeelding $G \times G \to G$ continu is. We bewijzen nu dat $\lim_{n\to\infty} f_n^{-1} = f^{-1}$ uniform om te bewijzen dat de inversie continu is. Voor $n \in \mathbb{N}$ vinden we:

$$d_\infty(f_n^{-1}, f^{-1}) = \sup_{x\in\mathcal{A}} d\big(f_n^{-1}(x), f^{-1}(x)\big) = \sup_{x\in\mathcal{A}} d\big(x, f^{-1}(f_n(x))\big).$$

Het is duidelijk dat deze laatste term naar 0 gaat als $n \to \infty$, omdat $(f^{-1} \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform naar $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, de identiteit op $\mathcal{A}$, convergeert. □

Gevolg 5.2.4. *Laat $(\mathcal{A}, d)$ een compacte metrische ruimte zijn en zij $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ een surjectieve afbeelding zodanig dat $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is op $\mathcal{A}$. Zij G de afsluiting van $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}), d_\infty)$. Dan is G een compacte en abelse topologische groep met samenstelling als groepsoperatie die bestaat uit isometrische homeomorfismen voor de metriek $d_\mathcal{A}$ uit Stelling 5.2.1.*

Bewijs. Uit Stelling 5.2.1 krijgen we dat G uit surjecties bestaat en dat G compact is. Ook krijgen we dat φ een isometrie is voor $d_{\mathcal{A}}$. Neem nu $f \in G$ en een stijgend rijtje $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zodat $f = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}$ in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}), d_\infty)$. Dan geldt $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} x = f(x)$ in $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ voor elke $x \in \mathcal{A}$. Er volgt voor $x, y \in \mathcal{A}$:

$$d_{\mathcal{A}}(f(x), f(y)) = \lim_{k\to\infty} d_{\mathcal{A}}(\varphi^{n_k} x, \varphi^{n_k} y) = d_{\mathcal{A}}(x, y).$$

Dus f is ook een isometrie. Het volgt dat $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ een isometrische bijectie is voor $d_{\mathcal{A}}$. Omdat $\mathcal{A}$ compact is, volgt direct dat f een homeomorfimse is. De verzameling G bestaat daarom uit isometrische homeomorfismes voor de metriek $d_{\mathcal{A}}$.

We hoeven nu alleen nog maar te bewijzen dat G een abelse topologische groep is. Eerst laten we zien dat G een groep is. Voor $N \in \mathbb{N}$ en een rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen hebben we, als $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}$ bestaat, dat $\varphi^N \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{N+n_k} \in G$. Voor $f \in G$ hebben we dus $\varphi^N f \in G$ voor elke $N \in \mathbb{N}$. Voor $f \in G$ en een rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zodat $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}$ bestaat, volgt er nu:

$$\left(\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}\right) f = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} f \in G.$$

Dus G is gesloten onder samenstelling. Volgens Stelling 5.2.1 is er een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = \mathrm{Id}$. Dan volgt dat

$$\varphi^{-1} = \varphi^{-1} \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k - 1} \in G.$$

Omdat G gesloten is onder samenstelling hebben we ook $\varphi^{-N} = (\varphi^{-1})^N \in G$. Beschouw de topologische groep G' van homeomorfismen $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ met de door d_∞ geïnduceerde topologie. Wegens Lemma 5.2.3 is G' inderdaad een topologische groep, dus inverteren is continu. Het volgt dus voor een element $f = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}$ in G dat

$$f^{-1} = \lim_{k\to\infty} (\varphi^{n_k})^{-1} = \lim_{k\to\infty} \varphi^{-n_k} \in G.$$

Dus G is ook gesloten onder het nemen van inversen. We concluderen dat G een ondergroep is van G'. Het volgt dat G zelf een topologische groep is.

Als laatste laten we zien dat G abels is. Neem $f = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}$ en $g = \lim_{l\to\infty} \varphi^{m_l}$ in G. Voor $N \in \mathbb{N}$ hebben we

$$\varphi^N g = \varphi^N \lim_{l\to\infty} \varphi^{m_l} = \lim_{l\to\infty} \varphi^N \varphi^{m_l} = \lim_{l\to\infty} \varphi^{m_l} \varphi^N = g\varphi^N.$$

Er volgt dat

$$fg = \left(\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k}\right) g = \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} g = \lim_{k\to\infty} g\varphi^{n_k} = g \lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} = gf.$$

Dit rondt het bewijs af. □

We kunnen Propositie 5.1.6, Lemma 5.1.8, Stelling 5.2.1 en Gevolg 5.2.4 combineren.

Stelling 5.2.5. *Laat (S, d) een volledige metrische ruimte zijn en zij $\varphi : S \to S$ een afbeelding. Neem verder de volgende twee uitspraken aan.*

1. *Er bestaat een compacte insnoerende verzameling $K \subseteq S$ voor φ;*

2. *De verzameling van afbeeldingen $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu in elk punt van K.*

Dan geldt het volgende. Als φ continu is op S, dan is $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op S. Ook is φ asymptotisch compact op K. Dus de ω-limietverzameling

$$\omega(K) := \{x \in S : \text{er bestaan } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \text{ zodat } n_k \to \infty \text{ en } \varphi^{n_k} x_k \to x\} \subseteq K$$

is compact en er geldt $\varphi(\omega(K)) = \omega(K)$. Verder trekt $\mathcal{A} := \omega(K)$ de verzameling K uniform aan, dat wil zeggen $\sup_{x\in K} d(\varphi^n x, \mathcal{A}) = \sup_{x\in K} \inf_{y\in\mathcal{A}} d(\varphi^n x, y) \to 0$ als $n \to \infty$. Ook geldt dat $d(\varphi^n x, \mathcal{A}) \to 0$ als $n \to \infty$ voor iedere $x \in S$. Daarenboven heeft de met d topologisch equivalente metriek $d_{\mathcal{A}}$ op $\mathcal{A}$ gedefinieerd door $d_{\mathcal{A}}(x,y) := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} d(\varphi^n x, \varphi^n y)$ de eigenschap dat φ als afbeelding van $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ naar $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ isometrisch is. De afbeelding $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is dus een homeomorfisme. Bovendien is de afsluiting G van $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ als deelverzameling van $(C(\mathcal{A}, \mathcal{A}), d_\infty)$ een compacte en abelse topologische groep met samenstelling als groepsoperatie die bestaat uit isometrische homeomorfismen voor de metriek $d_{\mathcal{A}}$. Als S niet-leeg is, is $\mathcal{A}$ ook niet-leeg.

Bewijs. We hoeven alleen nog maar te bewijzen dat $\omega(K)$ daadwerkelijk een deelverzameling is van K en dat $\omega(K)$ een insnoerende verzameling is voor φ. Zij $\varepsilon > 0$. Neem voor iedere $x \in K$ een $\delta(x) > 0$ zodat voor alle $y \in S$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $d(\varphi^n x, \varphi^n y) < \varepsilon$ wanneer $d(x,y) < \delta(x)$. Hier gebruiken we de equicontinuïteit op K. Wegens compactheid zijn er dan een $m \in \mathbb{N}$ en elementen $x_1, \ldots, x_m \in K$ zodat $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B_{\delta(x_i)}(x_i)$.

Kies $y_0 \in \omega(K)$ willekeurig. Neem een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen en een rij $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K zodat $\lim_{k\to\infty} \varphi^{n_k} y_k = y_0$. Laat $N \in \mathbb{N}$ zó zijn, dat $d(\varphi^n x_i, K) < \varepsilon$ voor $n \geq N$ en $i = 1, \ldots, m$. Zij $k \in \mathbb{N}$ zodat $n_k \geq N$ en $d(y_0, \varphi^{n_k} y_k) < \varepsilon$. Kies $i \in \{1, \ldots, m\}$ zodanig dat $d(y_k, x_i) < \delta(x_i)$. Er volgt dat

$$d(y_0, K) \leq d(y_0, \varphi^{n_k} y_k) + d(\varphi^{n_k} y_k, \varphi^{n_k} x_i) + d(\varphi^{n_k} x_i, K) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, concluderen we dat $d(y_0, K) = 0$ en $y_0 \in K$.

Kies nu $x \in S$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodat $\varphi^N x \in \bigcup_{i=1}^m B_{\delta(x_i)}(x_i)$ en neem $i \in \{1, \ldots, m\}$ zó dat $\varphi^N x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$. Er volgt dat

$$\limsup_{n\to\infty} d(\varphi^n x, \mathcal{A}) = \limsup_{n\to\infty} d(\varphi^{N+n} x, \mathcal{A}) \leq \limsup_{n\to\infty} d(\varphi^{N+n} x, \varphi^n x_i) + d(\varphi^n x_i, \mathcal{A}) \leq \varepsilon + 0 = \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ wilekeurig gekozen is, concluderen we dat $\lim_{n\to\infty} d(\varphi^n x, \mathcal{A}) = 0$. $\square$

Opmerking 5.2.6. De verzameling $\mathcal{A}$ in Stelling 5.2.5 is de kleinste verzameling K zodat nog steeds aan de twee genoemde voorwaarden wordt voldaan. Daarom noemen we $\mathcal{A}$ in het vervolg ook wel de kleinste insnoerende verzameling voor φ.

5.3 Structuur van compacte, metriseerbare, abelse, monothetische groepen

In Stelling 5.2.5 komt een topologische groep voor met verscheidene eigenschappen. In deze paragraaf onderzoeken we wat er gezegd kan worden over de structuur van een dergelijke groep. Alle resultaten gelden ook voor de groep G als in Stelling 5.2.5. Voor een groepselement g schrijven we $\langle g \rangle = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ voor de groep voortgebracht door g.

Definitie 5.3.1 (Monothetisch)**.** Een topologische groep G heet *monothetisch* (Engels: *monothetic*) als er een groepselement $g \in G$ bestaat met de eigenschap dat $G = \overline{\langle g \rangle}$.

Als duidelijk is uit het bijvoeglijk naamwoord bij het woord 'groep' dat de groep een topologische groep moet zijn, zullen we het woord 'topologische' soms weglaten. In bovenstaande terminologie gaan we dus de structuur bekijken van compacte, metriseerbare, abelse, monothetische groepen. Feitelijk is het woord 'abels' overbodig, omdat monothetische groepen altijd abels zijn.

De natuurlijke definitie van het isomorf zijn van twee topologische groepen is als volgt.

Definitie 5.3.2 (Isomorfe topologische groepen)**.** Twee topologische groepen G en H heten *isomorf als topologische groepen* (Engels: *isomorphic as topological groups*) wanneer er een groepsisomorfisme tussen G en H bestaat dat ook een homeomorfisme is.

Lemma 5.3.3. *Zij G een topologische groep en laat $H \subseteq G$ een gesloten normale ondergroep zijn. Dan is G/H met de quotiënttopologie een Haudorff topologische groep. Als G compact is, dan is G/H ook compact.*

Bewijs. Het is duidelijk dat G/H een topologische groep is. Laat $q : G \to G/H$ de quotiëntafbeelding zijn. Dan geldt er dat $q^{-1}(\{H\}) = H$ gesloten is. Dus $\{H\} \subseteq G/H$ is gesloten. Nu is de diagonaal $\Delta = \{(g, g) : g \in G/H\}$ het inverse beeld van $\{H\}$ onder de continue afbeelding $G/H \times G/H \to G/H : (g, h) \mapsto gh^{-1}$. Dus Δ is gesloten, en het volgt dat G/H Hausdorff is. Als G compact is, dan is G/H, het bereik van de continue afbeelding q, ook compact. $\square$

Het volgende resultaat is een deel van Theorem 8.45 in [16].

Stelling 5.3.4. *Zij G een compacte, metriseerbare, abelse groep. Dan is G als topologische groep isomorf met een gesloten ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Hier is $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ de cirkelgroep met de deelruimtetopologie van $\mathbb{C}$ en krijgt $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ de producttopologie.*

In lijn met de groep uit Stelling 5.2.5 nemen we voor de rest van de paragraaf aan dat G een compacte, metriseerbare, abelse, monothetische groep is. Neem $g \in G$ zodat $G = \overline{\langle g \rangle}$.

Stelling 5.3.5. *Schrijf G_0 voor de samenhangscomponent van de eenheid in G. Dan is G homeomorf met $G_0 \times G/G_0$. De groep G/G_0 is eindig of homeomorf met $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Ook is G/G_0 monothetisch vanwege $\overline{\langle gG_0 \rangle} = G/G_0$. Als G/G_0 eindig is, is G/G_0 cyclisch met voortbrenger gG_0. Verder is G_0 een compacte en samenhangende topologische groep. Hier krijgt G/G_0 de quotiënttopologie en $\{0, 1\}$ de discrete topologie en krijgen $G_0 \times G/G_0$ en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de producttopologie.*

Bewijs. Merk als eerste op dat G_0 inderdaad een groep is, zie bijvoorbeeld Theorem 7.1 uit [11]. De eerste uitspraak volgt uit Corollary 10.38 uit [16]. Het is duidelijk dat G_0 compact is, omdat het een gesloten deelverzameling is van de compacte groep G. We krijgen uit Theorem 7.3 uit [11] dat G/G_0 totaal onsamenhangend en Hausdorff is. Wegens resultaat 8.14(b) uit [11] is G/G_0 metriseerbaar. Merk ook op dat G/G_0 compact is. Uit Theorems 3.5 en 9.15 uit [11] volgt nu dat G/G_0 homeomorf is met $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ als G/G_0 oneindig is. Dat komt omdat de kardinaliteit van G/G_0 hoogstens die van G is, die op zijn beurt hoogstens die van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, ofwel die van $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, is. Neem $[g] := gG_0 \in G/G_0$. Merk op dat

$$\overline{\langle [g] \rangle} \supseteq \bigcup_{h \in \overline{\langle g \rangle}} hG_0 = G/G_0.$$

Dus $\overline{\langle [g] \rangle} = G/G_0$. Stel nu dat G/G_0 eindig is. Dan is G/G_0 discreet en vinden we:

$$\langle [g] \rangle = \overline{\langle [g] \rangle} = G/G_0.$$

We concluderen dat $[g]$ de groep G/G_0 voortbrengt. $\square$

Neem voor de rest van de paragraaf aan dat G werkt op een metrische ruimte $(\mathcal{A}, d)$ zodat de afbeelding $G \to \mathcal{A} : g \mapsto gx$ continu is voor elke $x \in \mathcal{A}$. Merk op dat dit ook geval is in de situatie van Stelling 5.2.5. Voor $x \in \mathcal{A}$ schrijven we $\overline{\mathcal{O}}_x := Gx$ voor de baan van x onder de werking van G. Merk op dat Gx gesloten is voor alle $x \in \mathcal{A}$, zie bijvoorbeeld Propositie 5.3.6. We schrijven alsnog het streepje boven de $\mathcal{O}_x$, omdat we later, zoals in Paragraaf 6.1, ook banen zullen zien die niet gesloten zijn. Kies nu $x \in \mathcal{A}$ vast en schrijf $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ voor de stabilisator van x in G.

Propositie 5.3.6. *De baan $\overline{\mathcal{O}}_x$ van x is homeomorf met G/G_x, waarbij G/G_x wordt uitgerust met de quotiënttopologie. Daarenboven is G/G_x als topologische groep isomorf met een gesloten ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Uiteraard is $\overline{\mathcal{O}}_x$ dan homeomorf met diezelfde gesloten ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.*

Bewijs. Definieer $F : G \to \overline{\mathcal{O}}_x$ door $F(g) = gx$. Dan is F continu per aanname. Voor $g, g' \in G_x$ geldt er $F(g) = x = F(g')$. Het volgt dat er een unieke continue afbeelding $\widetilde{F} : G/G_x \to \overline{\mathcal{O}}_x$ bestaat zodanig dat $\widetilde{F}(gG_x) = F(g)$ voor iedere $g \in G$. De topologische ruimte G/G_x is compact, aangezien het het bereik is van de continue afbeelding $G \to G/G_x$. Bijectiviteit van $\widetilde{F}$ is duidelijk. Het volgt dat $\widetilde{F}$ een homeomorfisme is.

Merk op dat $G/G_x \cong \overline{\mathcal{O}}_x$ metriseerbaar is. Nu volgt uit Stelling 5.3.4 dat G/G_x als topologische groep isomorf is aan een ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. □

Gevolg 5.3.7. *Schrijf G_0' voor de samenhangscomponent van de eenheid G_x in G/G_x. Dan is G/G_x homeomorf met $G_0' \times (G/G_x)/G_0'$. De groep $(G/G_x)/G_0'$ is eindig of homeomorf met $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Verder is G_0' een compacte en samenhangende topologische groep. Hier krijgt $(G/G_x)/G_0'$ de quotiënttopologie, $\{0,1\}$ de discrete topologie en krijgen $G_0' \times (G/G_x)/G_0'$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de producttopologie.*

Bewijs. In het licht van Stelling 5.3.5 samen met de compactheid van G/G_x is het voldoende om te bewijzen dat G/G_x metriseerbaar is. Maar dat is duidelijk uit Propositie 5.3.6. □

Gevolg 5.3.8. *Zij $H \in \{\overline{\mathcal{O}}_x, G/G_x, G\}$. Dan is H eindig of van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ en zijn twee samenhangscomponenten van H homeomorf.*

Bewijs. De laatste uitspraak is duidelijk wegens Theorem 7.2 uit [11] en Propositie 5.3.6. Zij H een van de drie genoemde groepen. Dan is H vanwege Stelling 5.3.5, Propositie 5.3.6 en Gevolg 5.3.7 homeomorf met het product van een groep van eindige kardinaliteit of kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ met een samenhangende, compacte, metriseerbare, abelse groep H_0. Wegens Stelling 5.3.4 is H_0 homeomorf met een ondergroep van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Definieer voor $i \in \mathbb{N}$ de projectie $P_i : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{T}$ op de $i$de cirkel. Dan is P_i continu voor elke $i \in \mathbb{N}$. Dus $P_i(H_0)$ is een samenhangende deelverzameling van $\mathbb{T}$ voor elke $i \in \mathbb{N}$. Er volgt voor $i \in \mathbb{N}$ dat $P_i(H_0)$ ofwel uit één element, ofwel uit $2^{\aleph_0}$ elementen bestaat. Dus H_0 is de triviale groep of van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$. Hieruit vinden we dat H eindig of van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ is. □

Opmerking 5.3.9. Het bewijs van Gevolg 5.3.8 maakt geen gebruik van de continuümhypothese.

Van Stelling 5.3.4 weten we dat de groepen die we in deze paragraaf beschouwen een ondergroep zijn van $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. In de meer beperkende situatie van Stelling 5.2.5 is het a priori mogelijk dat de daar genoemde groep G in alle gevallen een ondergroep is van $\mathbb{T}^N$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$. Dat is echter niet het geval, zoals het volgende voorbeeld laat zien.

Voorbeeld 5.3.10. Zij p_n het $n$de priemgetal voor $n \in \mathbb{N}$. Definieer voor een priemgetal p de verzameling

$$\mathbb{T}_p := \left\{ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/p} : k = 0, \dots, p-1 \right\}$$

en laat $S = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{p_n}$, uitgerust met de producttopologie. Dan is S compact en metriseerbaar via de metriek $d : S \times S \to \mathbb{R}$ die gegeven wordt door

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Beschouw de afbeelding $\varphi : S \to S$ die gedefinieerd wordt door

$$\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/p_n} a_n \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dan is φ een isometrie en daarmee is $\{\varphi^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op S. We zitten dus in de situatie van Stelling 5.2.5. We nemen dan ook haar notatie over. We hebben $\mathcal{A} = S$. Verder is de groep $G = \overline{\langle\varphi\rangle}$ de verzameling van alle $\psi : S \to S$ met de eigenschap dat er voor alle $n \in \mathbb{N}$ een $k_n \in \{0, 1, \ldots, p_n - 1\}$ bestaat zodanig dat

$$P_{p_n} \circ \psi \circ \widetilde{P}_{p_n} = \Big(z \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k_n / p_n} z\Big).$$

Hier is $P_{p_n} : S \to \mathbb{T}_{p_n}$ de projectie en $\widetilde{P}_{p_n} : \mathbb{T}_{p_n} \to S$ de kanonieke inbedding $z \mapsto (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ met

$$a_k = \begin{cases} z & \text{als } k = n; \\ 1 & \text{als } k \neq n, \end{cases}$$

voor $n \in \mathbb{N}$. In wat minder formele taal: G bestaat uit alle afbeeldingen $\psi : S \to S$ die beperkt tot $\mathbb{T}_p$ een rotatie zijn voor ieder priemgetal p. Maar dan zien we dat er een bijectieve isometrie tussen $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_{p_n}$ en G bestaat.

6

Asymptotiek van Markov-operatoren met insnoering

Na resultaten over algemene dynamische systemen in Hoofdstuk 5 kijken we in dit hoodstuk specifiek naar Markov-operatoren. Het hoofdstuk draait volledig om de Markov-operatorversie van Stelling 5.2.5, Stelling 6.0.3. In Paragraaf 6.1 bekijken we wat we kunnen zeggen over de structuur van de verzameling $\mathcal{A}$ als in Stelling 6.0.3 in het algemeen. In het bijzonder kijken we naar de banen in $\mathcal{A}$. Vervolgens kijken we in Paragraaf 6.2 wat er gebeurt als de metriek uit Stelling 6.0.3 afkomt van de Dudleynorm. Zo karakteriseren we in Subparagraaf 6.2.1 wanneer een transport-operator voldoet aan de voorwaarden van Stelling 6.0.3. Ook bewijzen we in de korte Subparagraaf 6.2.2 onder de aannames van Stelling 6.0.3 en het bestaan van een unieke invariante kansmaat μ^* dat de Cesàrogemiddeldes van elke maat naar μ^* convergeren. Onder diezelfde aannames laten we in Subparagraaf 6.2.3 zien dat de verzameling kansmaten die gedragen worden door $\mathrm{supp}(\mu^*)$ P-invariant is en dat alle maten in $\mathcal{A}$ door $\mathrm{supp}(\mu^*)$ gedragen worden. In Paragraaf 6.3 bekijken we Stelling 6.0.3 in het licht van de norm van totale variatie. Als laatste vergelijken we in Paragraaf 6.4 de resultaten rondom Stelling 6.0.3 in de Dudleynorm met die in de norm van totale variatie.

Eerst volgt een motiverend voorbeeld over asymptotisch gedrag van Markov-operatoren.

Voorbeeld 6.0.1. Laat $S = [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$ met de Euclidische metriek. Beschouw de transport-operator $T_* : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ die geïnduceerd wordt door de afbeelding $T : S \to S$ gegeven door

$$T(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{als } x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{als } x \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Dan is T_* een reguliere Markov-operator. Merk op dat voor $x \in S$ geldt dat $T_*\delta_x = \delta_{T(x)}$. We zien dus direct dat $T_*(\delta_0) = \delta_1$ en $T_*(\delta_1) = \delta_0$. Hieruit zien we dat T_* periodiek gedrag vertoont.

We gaan eerst na welke regulariteits- en equicontinuïteitseigenschappen T_* heeft. Het is makkelijk in te zien dat T Lipschitz-continu is met Lipschitz-constante $|T|_L = 3/2$. Verder zijn de restricties $T^2 : [0, 1/4] \to [0, 1/4]$ en $T^2 : [3/4, 1] \to [3/4, 1]$ Lipschitz-continu met Lipschitz-constante $1/4$. We zien met inductie voor $n \in \mathbb{N}_0$ dat

$$T^{2n}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2^{2n}} & \text{als } x \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{2^{2n}-1+x}{2^{2n}} & \text{als } x \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

We laten zien dat T_* equicontinu op bollen is. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \min(\varepsilon/15, 1/3)$. Laat $\mu, \nu \in \mathcal{P}(S)$ kansmaten zijn met $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq B_\delta(x)$ voor een zekere $x \in S$. Kies $f \in \mathrm{BL}(S)$ met $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$. Voor $n \in \mathbb{N}_0$ is $f \circ T^{2n}$ Lipschitz-continu op $B_\delta(x)$ met Lipschitz-constante hoogstens 2^{-2n}, en is $f \circ T^{2n+1} = (f \circ T) \circ T^{2n}$ Lipschitz-continu op $B_\delta(x)$ met Lipschitz-constante hoogstens

$3/2 \cdot 2^{-2n}$. We krijgen dus voor $n \in \mathbb{N}_0$ dat

$$\begin{aligned}\left|\langle \mu, f \circ T^{2n}\rangle - f(T^{2n}(x))\right| &= \left|\int_{B_\delta(x)} f(T^{2n}(y)) - f(T^{2n}(x))\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x)} |f(T^{2n}(y)) - f(T^{2n}(x))|\,\mathrm{d}\mu(y) \leq \int_{B_\delta(x)} 2^{-2n}|y-x|\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq \delta 2^{-2n} \leq \delta < \frac{\varepsilon}{5}.\end{aligned}$$

Op dezelfde manier zien we voor $n \in \mathbb{N}_0$ dat $\left|\langle \mu, f \circ T^{2n+1}\rangle - f(T^{2n+1}(x))\right| \leq 3/2\delta < \varepsilon/5$. Deze formules gelden natuurlijk ook voor de maat ν. Dus voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ gelden de afschattingen

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \mu, f \circ T^{2n}\right\rangle - \left\langle \nu, f \circ T^{2n}\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle \mu, f \circ T^{2n}\right\rangle - f\left(T^{2n}(x)\right)\right| + \left|\left\langle \nu, f \circ T^{2n}\right\rangle - f\left(T^{2n}(x)\right)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{2\varepsilon}{5},\end{aligned}$$

en $\left|\left\langle \mu, f \circ T^{2n+1}\right\rangle - \left\langle \nu, f \circ T^{2n+1}\right\rangle\right| \leq 2\varepsilon/5$. Daarom hebben we

$$\begin{aligned}\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\langle T_*^n \mu, f\rangle - \langle T_*^n \nu, f\rangle| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\langle \mu, f \circ T^{2n}\rangle - \langle \nu, f \circ T^{2n}\rangle| + |\langle \mu, f \circ T^{2n+1}\rangle - \langle \nu, f \circ T^{2n+1}\rangle| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.\end{aligned}$$

Omdat $f \in \mathrm{BL}(S)$ met $\|f\|_{\mathrm{BL}} \leq 1$ willekeurig was, concluderen we dat $\|T_*^n \mu - T_*^n \nu\|_{\mathrm{BL}}^* \leq 4\varepsilon/5 < \varepsilon$ geldt voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Dit bewijst dat T_* equicontinu op bollen is.

Uit Propositie 4.1.8 volgt nu dat T_* de e-eigenschap heeft. We zien dat T_* niet niet-expansief is, want

$$\|T_*\delta_{1/4} - T_*\delta_{3/4}\|_{\mathrm{FM}} = \|\delta_{7/8} - \delta_{1/8}\|_{\mathrm{FM}} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \|\delta_{1/4} - \delta_{3/4}\|_{\mathrm{FM}}.$$

Hier gebruiken we het resultaat in de Remark na Lemma 2.3.6 in [26], dat zegt dat $\|\delta_x - \delta_y\|_{\mathrm{FM}} = \min(d(x,y), 2)$ geldt voor $x, y \in S$. Uit $T_*\delta_0 = \delta_1$ en $T_*\delta_1 = \delta_0$ is het duidelijk dat T_* niet de spectraalkloofeigenschap heeft. Uit Propositie 4.1.7 krijgen we dat T_* de Cesàro-e-eigenschap heeft, en dat T_* Markov-Feller is. Echter T_* is niet sterk Feller, want de meetbare functie $\mathbb{1}_{\{0\}} : S \to \mathbb{R}$ wordt door de duale van T_* gestuurd naar de niet-continue functie $\mathbb{1}_{\{1\}} : S \to \mathbb{R}$. Volgens Propositie 4.1.7 is T_* dus ook niet ultra-Feller.

We gaan nu kijken naar het asymptotische gedrag van T_*. Zij $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$. We claimen dat er getallen $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat

$$\lim_{n\to\infty} \|T_*^n \mu - a_0 \delta_{\alpha^n(0)} - a_1 \delta_{\alpha^n(1)}\|_{\mathrm{BL}}^* = 0, \tag{6.1}$$

waar $\alpha : \{0,1\} \to \{0,1\}$ gedefinieerd is door $\alpha(0) = 1$ en $\alpha(1) = 0$. In de limiet als $n \to \infty$ wisselt $T_*^n \mu$ dus tussen $a_0\delta_0 + a_1\delta_1$ en $a_0\delta_1 + a_1\delta_0$. Dat is wat bedoeld wordt met asymptotische periodiciteit. We nemen $a_0 = \mu([0, 1/4])$ en $a_1 = \mu([3/4, 1])$. Om Vergelijking (6.1) te bewijzen volstaat het om te bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty} \|T_*^{2n}\mu - a_0\delta_0 - a_1\delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* = 0,$$

omdat T_* continu is in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm. Definieer $\mu_0 := \mu(\cdot \cap [0, 1/4])$ en $\mu_1 := \mu(\cdot \cap [3/4, 1])$. Om Vergelijking (6.1) te bewijzen is het genoeg om te laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \|T_*^{2n}\mu_0 - a_0\delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \|T_*^{2n}\mu_1 - a_1\delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* = 0.$$

Omdat beide limieten soortgelijk berekend worden, bewijzen we nu alleen $\lim_{n\to\infty} \|T_*^{2n}\mu_1 - a_1\delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* = 0$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $\mu_1 \in \mathcal{P}(S)$ en dat $a_1 = 1$. We vinden voor alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$T_*^{2n}\mu_1\left(\left[1 - 2^{-2n}, 1\right]\right) = \left\langle T_*^{2n}\mu_1, \mathbb{1}_{[1-2^{-2n},1]}\right\rangle = \left\langle \mu_1, \mathbb{1}_{[1-2^{-2n},1]} \circ T^{2n}\right\rangle = \left\langle \mu_1, \mathbb{1}_{[3/4,1]}\right\rangle = 1.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Omdat T_* equicontinu op bollen is, bestaat er een $\delta > 0$ zodat

$$\|T_*^{2n}\mu_1 - \delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* = \|T_*^{2n-2N}T_*^{2N}\mu_1 - T_*^{2n-2N}\delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* < \varepsilon$$

geldt voor iedere $N \in \mathbb{N}$ en $n \geq N$ met $\operatorname{supp}(T_*^{2N}\mu_1) \subseteq B_\delta(1)$. Wegens de redenatie hierboven bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat $\operatorname{supp}(T_*^{2N}\mu_1) \subseteq [1-2^{-2N}, 1] \subseteq B_\delta(1)$. We concluderen dat we $\|T_*^{2n}\mu_1 - \delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* < \varepsilon$ hebben voor iedere $n \geq N$. Dus $\lim_{n\to\infty} \|T_*^{2n}\mu_1 - \delta_1\|_{\mathrm{BL}}^* = 0$.

Een gevolg van het asymptotisch periodieke gedrag van T_* is dat er slechts één invariante kansmaat is. Namelijk, stel dat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ invariant is onder T_*. Dan hebben we wegens Vergelijking (6.1) dat $\mu = a_0\delta_0 + a_1\delta_1$ met $a_0 = \mu([0,1/4])$ en $a_1 = \mu([3/4,1])$. Maar T_* toepassen op beide kanten geeft $\mu = a_0\delta_1 + a_1\delta_0$. Er volgt dat $a_0 = a_1 = 1/2$ en dat $\mu = \delta_0/2 + \delta_1/2$. Nu, $\delta_0/2 + \delta_1/2$ is een invariante kansmaat, dus $\delta_0/2 + \delta_1/2$ is de unieke invariante kansmaat.

Schrijf $T_*^{(n)}\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_*^k\mu$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$. Zij $x \in S$. We laten zien dat $\lim_{n\to\infty} T_*^{(n)}\delta_x = \delta_0/2 + \delta_1/2$ in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm. We bekijken alleen het geval $x \in [0,1/4]$. Het voldoet wegens continuïteit van T_* om te laten zien dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \|T_*^{2k}\delta_x - \delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* = 0$. Hiertoe berekenen we:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \|T_*^{2k}\delta_x - \delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \|\delta_{T^{2k}(x)} - \delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \|\delta_{2^{-2k}x} - \delta_0\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor} \frac{x}{2^{2k}} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2x}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dus inderdaad krijgen we $\lim_{n\to\infty} T_*^{(n)}\delta_x = \delta_0/2 + \delta_1/2$.

Opmerking 6.0.2. Merk op dat de afbeelding T in Voorbeeld 6.0.1 asymptotisch compact is op de samenhangende verzameling $B = [0,1/4]$, maar dat de ω-limietverzameling $\omega(B) = \{0,1\}$ niet samenhangend is. Dit is wel het geval in zogenaamde sterk continue dynamische systemen, zie Lemma 23.6(1) in [24].

Schrijven we Stelling 5.2.5 in termen van Markov-operatoren, dan krijgen we het volgende.

Stelling 6.0.3. *Laat S een topologische ruimte zijn en zij ρ een metriek op een convexe verzameling $M \subseteq \mathcal{P}(S)$ zodat (M,ρ) volledig is. Neem verder de volgende twee uitspraken aan voor een afbeelding $P : M \to M$ met de eigenschap dat $P(t\mu + (1-t)\nu) = tP(\mu) + (1-t)P(\nu)$ geldt voor $t \in [0,1]$ en $\mu, \nu \in M$.*

1. *Er bestaat een compacte insnoerende verzameling $K \subseteq M$ voor P;*
2. *De verzameling van afbeeldingen $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu in elk punt van K.*

Dan geldt het volgende. Als P continu is op M, dan is $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op M. Ook is P asymptotisch compact op K. Dus de ω-limietverzameling

$$\omega(K) := \{\mu \in M : \text{er bestaan } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \text{ zodat } n_k \to \infty \text{ en } P^{n_k}\mu_k \to \mu\} \subseteq K$$

is compact en er geldt $P(\omega(K)) = \omega(K)$. Verder trekt $\mathcal{A} := \omega(K)$ de verzameling K uniform aan, dat wil zeggen $\sup_{\mu\in K} \rho(P^n\mu, \mathcal{A}) \to 0$ als $n \to \infty$. Ook geldt dat $\rho(P^n\mu, \mathcal{A}) \to 0$ als $n \to \infty$ voor iedere $\mu \in M$. Daarenboven heeft de met ρ topologisch equivalente metriek $\rho_{\mathcal{A}}$ op $\mathcal{A}$ gedefinieerd door $\rho_{\mathcal{A}}(\mu,\nu) := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \rho(P^n\mu, P^n\nu)$ de eigenschap dat P als afbeelding van $(\mathcal{A}, \rho_{\mathcal{A}})$

naar $(\mathcal{A}, \rho_{\mathcal{A}})$ isometrisch is. De afbeelding $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is dus een homeomorfisme. Bovendien is de afsluiting $\mathcal{G}$ van $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ als deelverzameling van $(C(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \rho_\infty)$ een compacte en abelse topologische groep met samenstelling als groepsoperatie die bestaat uit isometrische homeomorfismen voor de metriek $\rho_{\mathcal{A}}$. Hier is ρ_∞ de supremummetriek ten opzichte van ρ. Als M niet-leeg is, is $\mathcal{A}$ niet-leeg.

Opmerking 6.0.4. Als $M = \mathcal{P}(S)$, dan kunnen we P eenvoudig uitbreiden naar een Markov-operator $\mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$. Als ρ afkomt van de Dudleynorm, dan is $\mathcal{P}(S)$ compact voor compacte en separabele metrische S, zie Theorem 8.9.3 in [2], dus dan kan $K = M = \mathcal{P}(S)$ worden genomen in Stelling 6.0.3. Equicontinuïteit hebben we in dat geval bijvoorbeeld als de Markov-operator niet-expansief is of als hij de spectraalkloofeigenschap heeft. Iedere Markov-operator $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ is niet-expansief in de $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$-norm, zodat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op M is als ρ afkomt van de norm van totale variatie. In Paragraaf 6.3 zien we hoe compacte verzamelingen in de norm van totale variatie eruitzien.

6.1 Structuur van de kleinste insnoerende verzameling van een Markov-operator

In deze paragraaf onderzoeken we de structuur van de verzameling $\mathcal{A}$ uit Stelling 6.0.3 in meer detail.

Definitie 6.1.1 (Passende metriek)**.** We noemen een metriek ρ' op een convexe verzameling $\mathcal{C}$ *passend bij de convexe structuur* of simpelweg *passend* (Engels: *compatible with the convex structure* of *compatible*) als de afbeelding $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} : (\mu, \nu) \mapsto t\mu + (1-t)\nu$ continu is voor elke $t \in [0, 1]$.

Voorbeeld 6.1.2. Als S een metrische ruimte is, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ convex is en ρ' een metriek op $\mathcal{C}$ is die afkomt van een norm, zoals de norm van totale variatie of de Dudleynorm, dan is ρ' passend.

Propositie 6.1.3. *Veronderstel dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten, en neem haar notatie over. Als ρ passend is als metriek op het convexe omhulsel van $\mathcal{A}$, dan is $\mathcal{A}$ convex.*

Bewijs. Stel dat ρ passend is als metriek op het convexe omhulsel van $\mathcal{A}$. Neem $\mu, \nu \in \mathcal{A}$. Zij $t \in [0, 1]$ en schrijf $\lambda = t\mu + (1-t)\nu \in M$. Kies een rij $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} P^{n_k} = \mathrm{Id}$ in $(C(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \rho_\infty)$. Hier is Id de identiteit op $\mathcal{A}$. Dan geldt er

$$\lim_{k\to\infty} P^{n_k}\lambda = \lim_{k\to\infty} tP^{n_k}\mu + (1-t)P^{n_k}\nu = t\mu + (1-t)\nu = \lambda.$$

Hier gebruiken we in de tweede stap dat ρ passend is bij de convexe structuur. Maar nu krijgen we

$$\rho(\lambda, \mathcal{A}) = \rho\Big(\lim_{k\to\infty} P^{n_k}\lambda, \mathcal{A}\Big) = \lim_{k\to\infty} \rho(P^{n_k}\lambda, \mathcal{A}) = 0$$

wegens Stelling 6.0.3. Dus $\lambda \in \mathcal{A}$. □

Gevolg 6.1.4. *Veronderstel dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten, en neem haar notatie over. Als ρ afkomt van een norm, dan is $\mathcal{A}$ convex.*

6.1.1 Banen van maten onder de werking van een Markov-operator

In Paragraaf 5.3 hebben we onder andere gekeken naar de topologische structuur van de banen onder de werking van een topologische groep. In deze subparagraaf kijken we naar andere eigenschappen van de banen, uiteraard in het licht van Stelling 6.0.3 en de daarin genoemde topologische groep $\mathcal{G}$, die canoniek werkt op M.

Definitie 6.1.5 (Baan)**.** Zij S een topologische ruimte, en $\varphi : S \to S$ een afbeelding. Voor $x \in S$ is $\mathcal{O}_x = \{\varphi^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ de *baan van x onder φ* (Engels: *orbit of x under φ*), en is $\overline{\mathcal{O}}_x = \overline{\{\varphi^n x : n \in \mathbb{N}_0\}}$ de *gesloten baan van x onder φ* (Engels: *closed orbit of x under φ*).

We nemen voor de rest van de subparagraaf aan dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten en nemen we ook haar notatie over. Verder nemen we aan dat er een $U : \mathrm{BM}(S) \to \mathrm{BM}(S)$ bestaat zodat $\langle \mu, Uf\rangle = \langle P\mu, f\rangle$ geldt voor elke $f \in \mathrm{BM}(S)$ en $\mu \in M$. Dit lijkt op de definitie van regulariteit van een Markov-operator, met als enige verschil dat het domein van P hier M is in plaats van heel $\mathcal{M}^+(S)$. Het volgende lemma laat zien dat de gesloten baan $\overline{\mathcal{O}}_\mu$ van een maat $\mu \in M$ onder P overeenstemt met de eerdere definitie als de baan onder de werking van de groep $\mathcal{G}$.

Lemma 6.1.6. *Zij $\mu \in \mathcal{A}$. Dan werkt $\mathcal{G}$ transitief op $\overline{\mathcal{O}}_\mu$ en er geldt $\mathcal{G}\mu = \overline{\mathcal{O}}_\mu$. Het volgt dat $\nu \in \overline{\mathcal{O}}_\mu$ dan en slechts dan als $\overline{\mathcal{O}}_\mu = \overline{\mathcal{O}}_\nu$.*

Bewijs. Neem $\nu \in \overline{\mathcal{O}}_\mu$. Het voldoet om te bewijzen dat er een $g \in \mathcal{G}$ bestaat met $\nu = g\mu$. Laat $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij natuurlijke getallen zijn zodat $\lim_{k\to\infty} P^{n_k}\mu = \nu$ in (M, ρ). Omdat $\mathcal{G}$ compact is, bestaat er een deelrij $(n_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ zodat $g := \lim_{l\to\infty} P^{n_{k_l}}$ bestaat in $(C(\mathcal{A}, \mathcal{A}), \rho_\infty)$. Maar dan hebben we

$$g\mu = \lim_{l\to\infty} P^{n_{k_l}}\mu = \nu. \qquad \square$$

We definiëren de equivalentierelatie $\sim$ op $\mathcal{A}$ door $\mu \sim \nu \iff \mathcal{G}\mu = \mathcal{G}\nu$. Dan is $\mathcal{A}/\!\sim$ de banendecompositie van $\mathcal{A}$ onder P.

Omdat $\mathcal{G}$ een compacte topologische groep is, bestaat de Haarkansmaat m op $\mathcal{G}$. De maat m is een translatie-invariante Borelkansmaat op $\mathcal{G}$ zodat $m(\Delta) = m(\Delta^{-1})$ voor iedere Borelverzameling Δ in $\mathcal{G}$. Veronderstel dat de afbeelding $\mathcal{G} \to \mathbb{R} : g \mapsto (g\mu)(E)$ Borelmeetbaar is voor alle $\mu \in \mathcal{A}$ en open verzamelingen $E \subseteq S$. In veel gevallen is dat zo. Als ρ bijvoorbeeld afkomt van de norm van totale variatie, dan is de afbeelding zelfs continu. En uit Lemma 3.2.1 weten we dat $\mathcal{M}(S)_{\mathrm{BL}} \to \mathbb{R} : \mu \mapsto \mu(E)$ meetbaar is voor iedere open verzameling $E \subseteq S$. Er volgt: als ρ afkomt van de Dudleynorm, dan is de afbeelding $\mathcal{G} \to \mathbb{R} : g \mapsto (g\mu)(E)$ als samenstelling van een continue met een meetbare afbeelding Borelmeetbaar voor iedere maat $\mu \in \mathcal{A}$ en open verzameling E van S. Kies $\mathcal{O} \in \mathcal{A}/\!\sim$ en neem $\mu \in \mathcal{O}$. Dan bestaat de verzamelingsgewijze integraal $\mu_{\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{G}} g\mu \,\mathrm{d}m(g)$, zie Propositie 2.3.1. Stel dat $\mu_{\mathcal{O}} \in M$. Met behulp van Propositie 2.3.1 en gebruikmakend van translatie-invariantie berekenen we nu voor Borelverzamelingen $E \subseteq S$:

$$\begin{aligned}(P\mu_{\mathcal{O}})(E) &= \langle P\mu_{\mathcal{O}}, \mathbb{1}_E\rangle = \langle \mu_{\mathcal{O}}, U\mathbb{1}_E\rangle = \int_{\mathcal{G}} \langle g\mu, U\mathbb{1}_E\rangle \,\mathrm{d}m(g) = \int_{\mathcal{G}} \big((Pg)\mu\big)(E)\,\mathrm{d}m(g)\\ &= \int_{\mathcal{G}} (g\mu)(E)\,\mathrm{d}m(g) = \mu_{\mathcal{O}}(E).\end{aligned}$$

Er volgt dat $P\mu_{\mathcal{O}} = \mu_{\mathcal{O}}$. Voor iedere baan $\mathcal{O} \in \mathcal{A}/\!\sim$ is er dus een invariante maat $\mu_{\mathcal{O}}$, mits $\mu_{\mathcal{O}}$ een element is van M voor elke $\mathcal{O} \in \mathcal{A}/\!\sim$. Voor een baan $\mathcal{O} \in \mathcal{A}/\!\sim$ geldt verder: als ρ afkomt van de Dudleynorm, zit $\mu_{\mathcal{O}}$ in $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{O}) \subseteq M$, het gesloten convexe omhulsel van $\mathcal{O}$. Dat komt door Propositie 2.3.6 samen met Corollary II.8 uit [3]. Deze waarneming roept de vraag op of $\mu_{\mathcal{O}}$ en $\mu_{\mathcal{O}'}$ hetzelfde kunnen zijn terwijl $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ twee verschillende banen zijn. Het antwoord is ja. Met andere woorden, de afbeelding $\mathcal{A}/\!\sim\, \to \mathcal{P}(S) : \mathcal{O} \mapsto \mu_{\mathcal{O}}$ is in het algemeen niet injectief. Dat laat het volgende belangrijke voorbeeld zien.

Voorbeeld 6.1.7. Laat S de complexe eenheidscirkel zijn en neem $M = \mathcal{P}(S)$. Kies een irrationaal getal $r > 0$ en definieer $T : S \to S$ door $T(z) = ze^{2\pi \mathrm{i}\cdot r}$. Zij $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ de transportoperator T_*. Laat d de metriek op $\mathcal{P}(S)$ zijn die wordt geïnduceerd door de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm. Dan is P isometrisch, dus $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu op $\mathcal{P}(S)$. Bovendien is $\mathcal{P}(S)$ compact. We kunnen dus Stelling 6.0.3 gebruiken met insnoerende verzameling $K = \mathcal{P}(S)$. Het volgt dat $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{P}(S))$ niet-leeg en compact is, en dat $P(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. De metriek $\rho_{\mathcal{A}}$ uit Stelling 6.0.3 is gelijk aan d. Een maat die invariant is onder P, is translatie-invariant. De enige translatie-invariante kansmaat op de eenheidscirkel is de Lebesguemaat λ, geschaald zodat λ een kansmaat is. Merk op dat $\delta_1, \lambda \in \mathcal{A}$. Nu, de baan van δ_1 onder $\mathcal{G}$ is $\{\delta_z : z \in S\}$. De baan van λ onder P is $\{\lambda\}$. Dus $\mu_{\{\delta_z : z \in S\}} = \mu_{\{\lambda\}}$, terwijl $\{\delta_z : z \in S\} \neq \{\lambda\}$. Het is zelfs zo dat er overaftelbaar veel verschillende banen zijn. Voor iedere $a, b \in (0, 2\pi]$ met $a \neq b$ is de baan van de kansmaten $2\pi/a \cdot \lambda|_{\{e^{it}:0\leq t\leq a\}}$ en $2\pi/b \cdot \lambda|_{\{e^{it}:0\leq t\leq b\}}$ verschillend, terwijl de banen wel dezelfde bijbehorende invariante maat hebben.

Opmerking 6.1.8. Omdat P isometrisch is met betrekking tot de metriek $\rho_{\mathcal{A}}$, geldt $\rho_{\mathcal{A}}(\mu_{\mathcal{O}}, g\mu) = \rho_{\mathcal{A}}(\mu_{\mathcal{O}}, g'\nu)$ voor iedere gesloten baan $\mathcal{O}$ en iedere $\mu, \nu \in \mathcal{O}$ en $g, g' \in \mathcal{G}$. Elke baan $\mathcal{O}$ is dus bevat in een sfeer met betrekking tot $\rho_{\mathcal{A}}$ met middelpunt $\mu_{\mathcal{O}}$.

6.1.2 Oprekken van banen

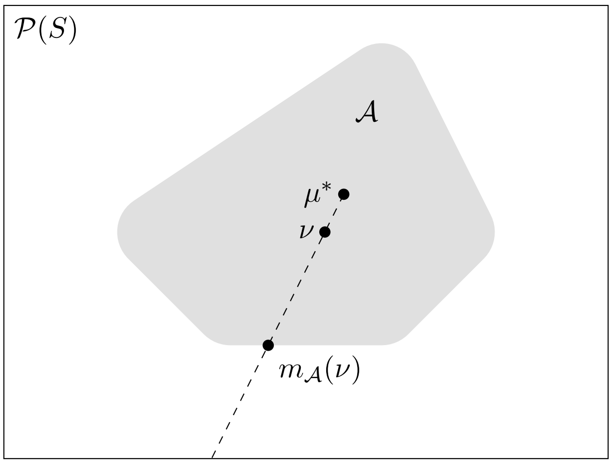
In deze subparagraaf nemen we weer aan dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten en nemen we ook haar notatie over. Verder nemen we aan dat P maar één invariante maat $\mu^* \in \mathcal{P}(S) \cap M$ heeft en dat ρ afkomt van een norm. Neem $\nu \in \mathcal{A}$ en laat $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}_\nu$ de gesloten baan van ν onder P zijn. Voor iedere $r \in [0,1]$ zit $r\mu^* + (1-r)\nu$ weer in $\mathcal{A}$ wegens Gevolg 6.1.4. We kunnen echter ook bekijken in hoeverre we de baan $\mathcal{O}$ kunnen 'oprekken'. We doen dat als volgt. Definieer als eerste de 'maximale straal' $r_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [1, \infty]$ door

$$r_{\mathcal{A}}(\nu) = \sup\{r \geq 0 : \mu^* + r(\nu - \mu^*) \in \mathcal{A}\}.$$

Definieer vervolgens $m_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ door

$$m_{\mathcal{A}}(\nu) = \mu^* + r_{\mathcal{A}}(\nu)(\nu - \mu^*).$$

Zie Figuur 6.1. Dan ligt $m_{\mathcal{A}}(\nu)$ inderdaad in $\mathcal{A}$ voor $\nu = \mu^*$, maar ook voor $\nu \neq \mu^*$. Dit laatste



Figuur 6.1: Visualisatie van $m_{\mathcal{A}}(\nu)$ voor een zekere $\nu \in \mathcal{A}$. De stippellijn stelt de verzameling $\mathcal{P}(S) \cap \{\mu^* + r(\nu - \mu^*) : r \geq 0\}$ voor.

zien we in door de waarneming dat $r_{\mathcal{A}}(\nu) < \infty$ als $\nu \neq \mu^*$. Vervolgens kunnen we geslotenheid van $\mathcal{A}$ gebruiken om te zien dat

$$\mu^* + r_{\mathcal{A}}(\nu)(\nu - \mu^*) = \lim_{r \uparrow r_{\mathcal{A}}(\nu)} \mu^* + r(\nu - \mu^*) \in \mathcal{A}, \qquad \nu \in \mathcal{A} \setminus \{\mu^*\}.$$

De afbeeldingen $r_{\mathcal{A}}$ en $m_{\mathcal{A}}$ zijn in het algemeen niet continu in μ^*, maar ook niet in andere punten.

Voorbeeld 6.1.9. Beschouw Voorbeeld 6.1.7 nogmaals. Omdat $\overline{\text{co}}\{\delta_x : x \in S\} = \mathcal{A}$ geldt voor de $\|\cdot\|^*_{\text{BL}}$-norm, bestaat er een rij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ binnen het convexe omhulsel van $\{\delta_x : x \in S\}$ die convergeert naar de Lebesguemaat $\lambda = \mu^*$. Dus $\lim_{n\to\infty} \mu_n/2 + \delta_1/2 = \lambda/2 + \delta_1/2$. Maar we hebben ook:

$$\lim_{n\to\infty} r_{\mathcal{A}}(\mu_n/2 + \delta_1/2) = 1 \neq 2 = r_{\mathcal{A}}(\lambda/2 + \delta_1/2).$$

Dus $r_{\mathcal{A}}$ is niet continu in $\lambda/2 + \delta_1/2$. Het volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} m_{\mathcal{A}}(\mu_n/2 + \delta_1/2) = \lim_{n\to\infty} \mu_n/2 + \delta_1/2 = \lambda/2 + \delta_1/2 \neq \delta_1 = m_{\mathcal{A}}(\lambda/2 + \delta_1/2).$$

Dus $m_{\mathcal{A}}$ is ook niet continu is $\lambda/2 + \delta_1/2$.

Verder gedraagt $r_{\mathcal{A}}$ zich niet netjes met betrekking tot convexe combinaties. Laat bijvoorbeeld $\lambda_1 = 2\lambda|_{\{e^{it}:0\leq t\leq \pi\}}$ en $\lambda_2 = 2\lambda|_{\{e^{it}:\pi\leq t\leq 2\pi\}}$. Dan geldt er voor iedere $t \in [0,1]$ dat

$$r_{\mathcal{A}}(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) = \frac{1}{|2t-1|}.$$

Hier kiezen we $1/0 = \infty$.

Hoewel $r_{\mathcal{A}}$ niet continu is, heeft $r_{\mathcal{A}}$ wel andere fijne eigenschappen. Hiervoor definiëren we een nieuwe functie $\hat{r}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,1]$ door $\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu) = 1/r_{\mathcal{A}}(\mu)$, waar we $1/\infty = 0$ kiezen.

Propositie 6.1.10. *De functie $r_{\mathcal{A}}$ is constant op gesloten banen. Voor elke $t \in [0,1]$ en $\mu \in \mathcal{A}$ geldt er*

$$\hat{r}_{\mathcal{A}}(t\mu^* + (1-t)\mu) = (1-t)\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu). \tag{6.2}$$

Verder is $\hat{r}_{\mathcal{A}}$ convex, dat wil zeggen dat

$$\hat{r}_{\mathcal{A}}(t\mu + (1-t)\nu) \leq t\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu) + (1-t)\hat{r}_{\mathcal{A}}(\nu), \qquad t \in [0,1],\ \mu,\nu \in \mathcal{A}.$$

In het bijzonder hebben we voor $t \in [0,1]$ en $\mu,\nu \in \mathcal{A}$ dat

$$r_{\mathcal{A}}(t\mu + (1-t)\nu) \geq \min\{r_{\mathcal{A}}(\mu), r_{\mathcal{A}}(\nu)\}.$$

Bewijs. Zij $\mathcal{O} \in \mathcal{A}/\!\sim$ en neem $\mu,\nu \in \mathcal{O}$. Kies een rij $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $g = \lim_{k\to\infty} P^{m_k}$ bestaat in $(C(\mathcal{A},\mathcal{A}),\rho_\infty)$ en $\nu = g\mu$. Dan hebben we

$$\mu^* + r_{\mathcal{A}}(\mu)(\nu - \mu^*) = \lim_{k\to\infty} P^{m_k}\big(\mu^* + r_{\mathcal{A}}(\mu)(\mu - \mu^*)\big) \in \mathcal{A}.$$

Dus $r_{\mathcal{A}}(\nu) \geq r_{\mathcal{A}}(\mu)$. Uit symmetrie-overwegingen zien we in dat $r_{\mathcal{A}}(\mu) = r_{\mathcal{A}}(\nu)$.

Voor $t \in [0,1)$ en $\mu \in \mathcal{A}$ is het duidelijk dat

$$r_{\mathcal{A}}(t\mu^* + (1-t)\mu) = \frac{r_{\mathcal{A}}(\mu)}{1-t},$$

wegens de waarneming dat

$$\mu^* + \frac{r_{\mathcal{A}}(\mu)}{1-t}(t\mu^* + (1-t)\mu - \mu^*) = \mu^* + r_{\mathcal{A}}(\mu)(\mu - \mu^*).$$

Dit bewijst Vergelijking (6.2).

Laat nu $\mu,\nu \in \mathcal{A}$ en $t \in [0,1]$. Schrijf $\mu = x\mu^* + (1-x)\mu'$ met $x \in [0,1]$ en $\mu' \in \mathcal{A}$ zodat $r_{\mathcal{A}}(\mu') = 1$. Neem ook $y \in [0,1]$ en $\nu' \in \mathcal{A}$ met $r_{\mathcal{A}}(\nu') = 1$ zodat $\nu = y\mu^* + (1-y)\nu'$. Merk op dat de gelijkheden $\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu) = 1 - x$ en $\hat{r}_{\mathcal{A}}(\nu) = 1 - y$ gelden wegens Vergelijking (6.2). Verder:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_{\mathcal{A}}(t\mu + (1-t)\nu) &= \hat{r}_{\mathcal{A}}\big(tx\mu^* + t(1-x)\mu' + (1-t)y\mu^* + (1-t)(1-y)\nu'\big)\\
&= \hat{r}_{\mathcal{A}}\big((tx + (1-t)y)\mu^* + t(1-x)\mu' + (1-t)(1-y)\nu'\big)\\
&\leq 1 - (tx + (1-t)y) = t(1-x) + (1-t)(1-y)\\
&= t\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu) + (1-t)\hat{r}_{\mathcal{A}}(\nu).
\end{aligned}$$

De ongelijkheid geldt wegens Vergelijking (6.2). De laatste ongelijkheid van het lemma zien we door op te merken dat

$$\hat{r}_{\mathcal{A}}(t\mu + (1-t)\nu) \leq t\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu) + (1-t)\hat{r}_{\mathcal{A}}(\nu) \leq \max\{\hat{r}_{\mathcal{A}}(\mu), \hat{r}_{\mathcal{A}}(\nu)\} = \frac{1}{\min\{r_{\mathcal{A}}(\mu), r_{\mathcal{A}}(\nu)\}}.$$

Dit rondt het bewijs af. □

Lemma 6.1.11. *De verzamelingen $\mathcal{A}_1 = \{\mu \in \mathcal{A} : r_{\mathcal{A}}(\mu) = 1\}$ en $\operatorname{ext}(\mathcal{A})$, de verzameling van extreme punten van $\mathcal{A}$, zijn $\mathcal{G}$-invariant, dat wil zeggen dat $g\mu \in \mathcal{A}_1$ voor $\mu \in \mathcal{A}_1, g \in \mathcal{G}$, en $g\nu \in \operatorname{ext}(\mathcal{A})$ voor $\nu \in \operatorname{ext}(\mathcal{A}), g \in \mathcal{G}$. Ook geldt $\operatorname{ext}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_1$.*

Bewijs. Omdat $r_{\mathcal{A}}$ op gesloten banen constant is wegens Propositie 6.1.10, vinden we direct dat $\mathcal{A}_1$ $\mathcal{G}$-invariant is. Zij $\mu \in \mathcal{A}$ nu een extreem punt van $\mathcal{A}$ en neem $g \in \mathcal{G}$. Kies $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}$ en $0 \leq t \leq 1$ zodanig dat $g\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. Dan hebben we $\mu = tg^{-1}\mu_1 + (1-t)g^{-1}\mu_2$. Er volgt dat $t = 0$ of $t = 1$ omdat μ een extreem punt is van $\mathcal{A}$. Dus $g\mu \in \operatorname{ext}(\mathcal{A})$. Als $\mu \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, dan zit μ in het inwendige van het lijnstuk tussen μ^* en $m_{\mathcal{A}}(\mu) = \mu^* + r_{\mathcal{A}}(\mu)(\mu - \mu^*)$, zodat $\mu \notin \operatorname{ext}(\mathcal{A})$. Dit bewijst de laatste uitspraak. □

6.2 Asymptotiek voor de Dudleynorm

In deze paragraaf nemen we aan dat de metriek ρ uit Stelling 6.0.3 afkomt van de Dudleynorm. Eerst kijken we naar transport-operatoren, vervolgens bewijzen we een resultaat over de convergentie van zogenoemde Cesàrogemiddeldes, en als laatste bekijken we de rol van de drager van de invariante maat beter.

6.2.1 Resultaten voor transport-operatoren

Als in Stelling 6.0.3 P een transport-operator is, M gelijk is aan $\mathcal{P}(S)$ met S Pools en ρ afkomt van de Dudleynorm, dan weten we precies wanneer P voldoet aan de voorwaarden van die stelling. In de bewijzen zullen we gebruikmaken van de begrippen en resultaten uit Paragraaf 2.3.

Stelling 6.2.1. *Neem aan dat (S, d) een volledige separabele metrische ruimte is. Stel dat $P = T_*$ geldt voor een zekere continue afbeelding $T : S \to S$. Hier is P zoals in Stelling 6.0.3, waar $M = \mathcal{P}(S)$ en waar ρ van de Dudleynorm afkomt. We nemen de notatie voor de verzameling $\mathcal{A}$ uit die stelling over. De verzameling functies $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu op S. Schrijf*

$$K_T := \{x \in S : \delta_x \in \mathcal{A}\}$$

en

$$\omega(K_T) := \{x \in S : \text{er bestaan } (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}, (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K_T \text{ zodat } n_k \to \infty \text{ en } T^{n_k}x_k \to x\}.$$

Dan voldoet T aan alle voorwaarden in Stelling 5.2.5 met $\varphi = T$ en $K = K_T$. Definieer voor $s \in S$ de verzameling L_s van limietpunten van $\{T^n s : n \in \mathbb{N}\}$. Dan geldt er $\mathcal{A}_T := \omega(K_T) = \bigcup_{s\in S} L_s$. Ook hebben we $x \in \mathcal{A}_T$ dan en slechts dan als $\delta_x \in \mathcal{A}$. Dus $K_T = \mathcal{A}_T$. Daarenboven is $\mathcal{A}$ de verzameling van alle kansmaten waarvan de drager binnen $\mathcal{A}_T$ ligt. Als P een unieke invariante kansmaat heeft, dan heeft $\mathcal{A}_T$ maar één gesloten baan onder de werking van T.

Bewijs. Merk op dat P continu is in de Dudleynorm, omdat P Markov-Feller is, zie Propositie 4.1.2. Dan is $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op $\mathcal{P}(S)$. Equicontinuïteit van $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ volgt nu uit de discrete versie van Proposition 4.1 uit [14]. We bewijzen nu dat K_T inderdaad een insnoerende verzameling is. Veronderstel voor een tegenspraak dat K_T geen insnoerende verzameling is. Dan bestaat er een element $x \in S$ zodat niet geldt dat $\lim_{n\to\infty} d(T^n x, K_T) = 0$. Het volgt dat er een $\varepsilon > 0$ is zodat er voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een $n_k \geq k$ bestaat met $d(T^{n_k}x, K_T) \geq \varepsilon$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stijgend is. Er is een stijgende rij natuurlijke getallen $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zodat $(\delta_{T^{n_{k_m}}x})_{m\in\mathbb{N}} = (P^{n_{k_m}}\delta_x)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeert vanwege de totale begrensdheid van $\{P^{n_k}\delta_x : k \in \mathbb{N}\}$. Dit laatste zien we in door te gebruiken dat $\lim_{k\to\infty} \rho(P^{n_k}\delta_x, \mathcal{A}) = 0$ en dat $\mathcal{A}$ totaal begrensd is. Omdat de verzameling Diracmaten gesloten ligt in $\mathcal{P}(S)$, is er een $y \in S$ zodat

$$\delta_y = \lim_{m\to\infty} \delta_{T^{n_{k_m}}x} = \lim_{m\to\infty} P^{n_{k_m}}\delta_x \in \mathcal{A}.$$

In het bijzonder hebben we dus $\lim_{m\to\infty} T^{n_{k_m}}x = y \in K_T$. Dat is een tegenspraak, wat bewijst dat K_T inderdaad een insnoerende verzameling is.

Laten we nu bewijzen dat K_T compact is. We laten daartoe zien dat K_T rijcompact is. Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij binnen K_T. Dan is $(\delta_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ een rij binnen $\mathcal{A}$. Wegens de rijcompactheid van $\mathcal{A}$ is er een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty}\delta_{x_{n_k}}$ bestaat in $\mathcal{A}$. Omdat de verzameling Diracmaten gesloten is, is er een $x \in S$ met $\delta_x = \lim_{k\to\infty}\delta_{x_{n_k}} \in \mathcal{A}$. Het volgt dat $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in K_T$. Dit bewijst dat K_T rijcompact is. Dit bewijst op zijn beurt weer dat T aan alle voorwaarden in Stelling 5.2.5 voldoet met $\varphi = T$ en $K = K_T$.

Kies een rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} P^{n_k} = \mathrm{Id}$ in $C(\mathcal{A},\mathcal{A})$.

We laten nu zien dat $x \in \mathcal{A}_T$ dan en slechts dan als $\delta_x \in \mathcal{A}$ en dat $\mathcal{A}_T = \bigcup_{s\in S} L_s$. Neem $x \in S$. Als $x \in \mathcal{A}_T$, dan is het duidelijk dat $\delta_x \in \mathcal{A}$. Stel andersom dat $\delta_x \in \mathcal{A}$. Dan volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{T^{n_k}x} = \lim_{k\to\infty} P^{n_k}\delta_x = \delta_x,$$

zodat $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}x = x$. Het volgt dat $x \in L_x$. Dit bewijst dat $x \in \mathcal{A}_T$ en dat $\mathcal{A}_T = \bigcup_{s\in S} L_s$.

We bewijzen nu dat $\mathcal{A} = \{\mu \in \mathcal{P}(S) : \mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_T\}$. Neem $\mu \in \mathcal{A}$. Definieer $f \in \mathrm{BL}(S)$ door

$$f(x) = \min\big(d(x,\mathcal{A}_T), 1\big).$$

Gebruikend dat $\lim_{k\to\infty} P^{n_k}\mu = \mu$ in $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$ krijgen we

$$\begin{aligned}\langle \mu, f\rangle &= \lim_{k\to\infty}\langle P^{n_k}\mu, f\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle \mu, f\circ T^{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty}\int_S f(T^{n_k}x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_S \lim_{k\to\infty} f(T^{n_k}x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

In de berekening gebruiken we in de op een na laatste stap de gedomineerde-convergentiestelling. In de laatste stap gebruiken we dat $d(T^{n_k}x, \mathcal{A}_T) \to 0$ als $k \to \infty$. Maar f is strikt positief op $\mathcal{A}_T^c$ en niet-negatief. Er volgt: $\int_{\mathcal{A}_T^c} f\,\mathrm{d}\mu = 0$ en $d(x,\mathcal{A}_T) = f(x) = 0$ voor μ-bijna alle $x \in \mathcal{A}_T^c$. Dus $\mu(\mathcal{A}_T) = 1 - \mu(\mathcal{A}_T^c) = 1$. Hier volgt uit dat $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_T$. Neem nu $\mu \in \mathcal{P}(S)$ met $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{A}_T$. Omdat S Pools is, geldt er $\mu(\mathcal{A}_T) = 1$. We weten al dat $\delta_x \in \mathcal{A}$ voor elke $x \in \mathcal{A}_T = K_T$, zodat

$$\mu = \int_S \delta_x\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{A}_T} \delta_x\,\mathrm{d}\mu(x) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}.$$

Hier zijn de integralen Bochnerintegralen en gebruiken we Corollary II.8 uit [3]. Dit bewijst dat $\mathcal{A}$ precies de verzameling is van kansmaten met drager binnen $\mathcal{A}_T$.

Stel dat $\mathcal{A}_T$ twee verschillende gesloten banen heeft onder de werking van T. Dan zijn er $x, y \in \mathcal{A}_T$ verschillend met $\overline{\mathcal{O}}_x \neq \overline{\mathcal{O}}_y$. Schrijf m voor de Haarmaat op $\mathcal{G}$. We zagen eerder al dat $\int_{\mathcal{G}} g\delta_x\,\mathrm{d}m(g)$ en $\int_{\mathcal{G}} g\delta_y\,\mathrm{d}m(g)$ invariante maten zijn. Hier werken we met veramelingsgewijze integralen. Merk op dat er voor iedere $g, h \in \mathcal{G}$ elementen $x' \in \overline{\mathcal{O}}_x$ en $y' \in \overline{\mathcal{O}}_y$ bestaan zodat $g\delta_x = \delta_{x'}$ en $h\delta_y = \delta_{y'}$. Omdat $\overline{\mathcal{O}}_x$ en $\overline{\mathcal{O}}_y$ disjunct zijn, krijgen we nu, als verzamelingsgewijze integralen,

$$\int_{\mathcal{G}} g\delta_y\,\mathrm{d}m(g)(\overline{\mathcal{O}}_x) = \int_{\mathcal{G}} g\delta_y(\overline{\mathcal{O}}_x)\,\mathrm{d}m(g) = 0 \neq 1 = \int_{\mathcal{G}} g\delta_x(\overline{\mathcal{O}}_x)\,\mathrm{d}m(g) = \int_{\mathcal{G}} g\delta_x\,\mathrm{d}m(g)(\overline{\mathcal{O}}_x).$$

Dus P heeft minstens twee invariante kansmaten. □

Een omkering van Stelling 6.2.1 geldt ook. Voor een topologische ruimte S en een daarbinnen liggende Borelverzameling $V \subseteq S$ schrijven we $\mathcal{P}(V) := \{\mu \in \mathcal{P}(S) : \mu(V) = 1\}$. In principe kan verwarring ontstaan met de definitie van $\mathcal{P}(V)$ als verzameling Borelkansmaten op V, maar het zal uit de context duidelijk zijn wat er wordt bedoeld.

Stelling 6.2.2. *Neem aan dat (S, d) een volledige separabele metrische ruimte is. Stel dat een zekere continue afbeelding $T : S \to S$ voldoet aan de voorwaarden van Stelling 5.2.5. We nemen de notatie in die stelling over, waar we $\mathcal{A}_T$ zullen schrijven in plaats van de daar genoemde verzameling $\mathcal{A}$. Dan wordt aan alle voorwaarden van Stelling 6.0.3 voldaan door de Markov-operator $P = T_*$ met $M = \mathcal{P}(S)$ en compacte insnoerende verzameling $K = \mathcal{P}(\mathcal{A}_T) \subseteq \mathcal{P}(S)$ in de door $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}}$ geïnduceerde metriek. Het volgt dat alle resultaten van Stelling 6.2.1 weer gelden voor $P = T_*$. Als $\mathcal{A}_T$ één gesloten baan heeft onder T, dan heeft P een unieke invariante maat.*

Bewijs. Merk als eerste op dat $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is op S wegens Stelling 5.2.5. Wegens de discrete versie van Proposition 4.1 uit [14] is $\{T^n_* : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op $\mathcal{P}(S)$. We weten al dat $\mathcal{P}(\mathcal{A}_T)$ compact is, omdat $\mathcal{A}_T$ compact is. We bewijzen nu dat $\mathcal{P}(\mathcal{A}_T)$ inderdaad een insnoerende verzameling is. We bewijzen eerst voor $\mu \in \mathcal{P}(S)$ die in het convexe omhulsel van de verzameling Diracmaten zitten dat $\lim_{n\to\infty} \rho(T^n_*\mu, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)) = 0$. Neem $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in [0, 1]$ met $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ en $x_1, \ldots, x_N \in S$, en beschouw de kansmaat $\sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\rho\left(T^n_* \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)\right) &= \rho\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{T^n x_i}, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)\right) \\
&\le \inf\left\{\rho\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{T^n x_i}, \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{y_i}\right) : y_1, \ldots, y_N \in \mathcal{A}_T\right\} \\
&\le \inf\left\{\sum_{i=1}^N \lambda_i \rho(\delta_{T^n x_i}, \delta_{y_i}) : y_1, \ldots, y_N \in \mathcal{A}_T\right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \lambda_i \inf\{\rho(\delta_{T^n x_i}, \delta_{y_i}) : y_i \in \mathcal{A}_T\} \\
&= \sum_{i=1}^N \lambda_i \inf\left\{\frac{2d(T^n x_i, y_i)}{2 + d(T^n x_i, y_i)} : y_i \in \mathcal{A}_T\right\} \\
&\le \sum_{i=1}^N \lambda_i \inf\{d(T^n x_i, y_i) : y_i \in \mathcal{A}_T\} \\
&= \sum_{i=1}^N \lambda_i d(T^n x_i, \mathcal{A}_T) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Dit bewijst dat $\mathcal{P}(\mathcal{A}_T)$ convexe combinaties van Diracmaten aantrekt. Kies nu $\mu \in \mathcal{P}(S)$ willekeurig en zij $\varepsilon > 0$. Door de equicontinuïteit bestaat er een $\delta > 0$ zodat $\rho(T^n_*\mu, T^n_*\nu) < \varepsilon/2$ geldt voor iedere $\nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\rho(\mu, \nu) < \delta$. Omdat het convexe omhulsel van de verzameling Diracmaten dicht ligt in $\mathcal{P}(S)$, bestaan er een $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in [0, 1]$ met $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ en $x_1, \ldots, x_N \in S$ zodat $\rho\Big(\mu, \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}\Big) < \delta$. Neem nu $N' \in \mathbb{N}$ zodat

$$\rho\left(T^n_* \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)\right) < \varepsilon/2$$

voor iedere $n \geq N'$. Uit de driehoeksongelijkheid krijgen we nu direct voor $n \geq N'$ dat

$$\rho(T_*^n\mu, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)) \leq \rho\left(T_*^n\mu, T_*^n \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}\right) + \rho\left(T_*^n \sum_{i=1}^N \lambda_i \delta_{x_i}, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)\right) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dus inderdaad hebben we ook dat $\lim_{n\to\infty} \rho(T_*^n\mu, \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)) = 0$. We concluderen dat er wordt voldaan aan de voorwaarden van Stelling 6.0.3 met $P = T_*$, $M = \mathcal{P}(S)$ en compacte insnoerende verzameling $K = \mathcal{P}(\mathcal{A}_T)$. Merk op dat we uit Stelling 6.2.1 krijgen dat de kleinste insnoerende verzameling $\mathcal{A}$ van P gelijk is aan $\mathcal{P}(\mathcal{A}_T)$.

Neem nu aan dat $\mathcal{A}_T$ maar één gesloten baan heeft. Definieer $P := T_*$. Schrijf m voor de Haarmaat op $\mathcal{G} = \overline{\{P^n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq C(\mathcal{P}(\mathcal{A}_T), \mathcal{P}(\mathcal{A}_T))$ en definieer de invariante maat $\mu^* = \int_{\mathcal{G}} g\delta_y \,\mathrm{d}m(g)$ voor een zekere $y \in \mathcal{A}_T$. We herinneren eraan dat deze integraal opgevat kan worden als verzamelingsgewijze integraal en als Bochnerintegraal wegens Lemma 3.2.1, continuïteit van $x \mapsto g\delta_x$ en Propositie 2.3.6. Voor elke $x \in \mathcal{A}_T$ is er door de rijcompactheid van $\mathcal{G}$ een $h(x) \in \mathcal{G}$ zodat $\delta_x = h(x)\delta_y$, dus wegens translatie-invariantie van m geldt er voor elke $x \in \mathcal{A}_T$ en $E \in \mathcal{B}(S)$:

$$\int_{\mathcal{G}} g\delta_x(E) \,\mathrm{d}m(g) = \int_{\mathcal{G}} gh(x)\delta_y(E) \,\mathrm{d}m(g) = \int_{\mathcal{G}} g\delta_y(E) \,\mathrm{d}m(g) = \mu^*(E). \tag{6.3}$$

Zij μ een onder P invariante maat. Merk op dat $\mu \in \mathcal{A}$, zodat $\mu(\mathcal{A}_T) = 1$. Kies $g \in \mathcal{G}$ willekeurig en schrijf $g = \lim_{k\to\infty} P^{m_k}$ in $C(\mathcal{A}, \mathcal{A})$. Wegens Theorem 3.7.9 uit [12], Propositie 2.3.6 en Gevolg 2.3.7 geldt als Bochnerintegraal én als verzamelingsgewijze integraal:

$$\begin{aligned} g\mu = g\int_{\mathcal{A}_T} \delta_x \,\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{k\to\infty} P^{m_k} \int_{\mathcal{A}_T} \delta_x \,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{A}_T} P^{m_k}\delta_x \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{A}_T} \lim_{k\to\infty} P^{m_k}\delta_x \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{A}_T} g\delta_x \,\mathrm{d}\mu(x)\,. \end{aligned}$$

Er volgt voor $E \in \mathcal{B}(S)$ dat

$$g\mu(E) = \int_{\mathcal{A}_T} g\delta_x(E) \,\mathrm{d}\mu(x), \qquad g \in \mathcal{G},$$

en, wegens de stelling van Fubini en Vergelijking (6.3),

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_{\mathcal{G}} g\mu(E) \,\mathrm{d}m(g) = \int_{\mathcal{G}} \left(\int_{\mathcal{A}_T} g\delta_x(E) \,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}m(g) \\ &= \int_{\mathcal{A}_T} \left(\int_{\mathcal{G}} g\delta_x(E) \,\mathrm{d}m(g) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{A}_T} \mu^*(E) \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \mu^*(E). \end{aligned}$$

We concluderen dat P een unieke invariante maat heeft. □

6.2.2 Convergentie van Cesàrogemiddeldes

In deze subparagraaf nemen we aan dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten en nemen we haar notatie ook over.

Definitie 6.2.3 (Cesàrogemiddeldes)**.** Voor $n \in \mathbb{N}$ schrijven we $P^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k$ voor de zogenoemde *Cesàrogemiddeldes* (Engels: *Cesàro averages*).

Propositie 6.2.4. *Neem aan dat S een volledige separabele metrische ruimte is, dat $M = \mathcal{P}(S)$ en dat ρ afkomt van de Dudleynorm. Veronderstel verder dat P continu is op $\mathcal{P}(S)$ en dat P een unieke invariante kansmaat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ heeft. Voor iedere kansmaat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ convergeert de rij $\left(P^{(n)}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ van Cesàrogemiddeldes naar μ^*.*

Bewijs. Zij $\mu \in \mathcal{P}(S)$. Allereerst tonen we aan dat $\rho(P^{(n)}\mu, \mathcal{A}) \to 0$ als $n \to \infty$. Laat $\varepsilon > 0$. Kies $N_1 \in \mathbb{N}$ zodat $\rho\big(P^k\mu, \mathcal{A}\big) < \varepsilon/2$ als $k \geq N_1$. Neem nu $N \in \mathbb{N}$ zodat $2N_1/N < \varepsilon/2$ en $N > N_1$, ofwel $N > \max\{N_1, 4N_1/\varepsilon\}$. Merk op voor $n \geq N$ en $\nu \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\left\|P^{(n)}\mu - \nu\right\|_{\mathrm{BL}}^* &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left(P^k\mu - \nu\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n-1}\left(P^k\mu - \nu\right)\right\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1-1}\left(\left\|P^k\mu\right\|_{\mathrm{BL}}^* + \|\nu\|_{\mathrm{BL}}^*\right) + \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=N_1}^{n-1}(P^k\mu - \nu)\right\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&= \frac{2N_1}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\left\|\left(\frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}P^k\mu\right) - \nu\right\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left\|\left(\frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}P^k\mu\right) - \nu\right\|_{\mathrm{BL}}^*
\end{aligned}$$

Omdat $\mathcal{A}$ convex is, geldt voor iedere $n \geq N$ dat

$$\begin{aligned}
\rho\Big(P^{(n)}\mu, \mathcal{A}\Big) &= \inf\Big\{\left\|P^{(n)}\mu - \nu\right\|_{\mathrm{BL}}^* : \nu \in \mathcal{A}\Big\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \inf\left\{\left\|\left(\frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}P^k\mu\right) - \nu\right\|_{\mathrm{BL}}^* : \nu \in \mathcal{A}\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \inf\left\{\left\|\frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}(P^k\mu - \nu_k)\right\|_{\mathrm{BL}}^* : \nu_{N_1}, \ldots, \nu_{n-1} \in \mathcal{A}\right\} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \inf\left\{\frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}\left\|P^k\mu - \nu_k\right\|_{\mathrm{BL}}^* : \nu_{N_1}, \ldots, \nu_{n-1} \in \mathcal{A}\right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}\inf\Big\{\left\|P^k\mu - \nu_k\right\|_{\mathrm{BL}}^* : \nu_k \in \mathcal{A}\Big\} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n-N_1}\sum_{k=N_1}^{n-1}\rho\Big(P^k\mu, \mathcal{A}\Big) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nu een stijgende rij natuurlijke getallen. Wegens het al bewezen resultaat is $\big\{P^{(n_k)}\mu : k \in \mathbb{N}\big\}$ relatief compact. Er bestaan daarom een $\nu \in \mathcal{P}(S)$ en een stijgende rij $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen met $\lim_{m\to\infty} P^{(n_{k_m})}\mu = \nu$. Vanwege de continuïteit van P, krijgen we:

$$P\nu = \lim_{m\to\infty} PP^{(n_{k_m})}\mu = \lim_{m\to\infty} P^{(n_{k_m})}\mu + \frac{1}{n_{k_m}}(P^{n_{k_m}}\mu - \mu) = \nu + 0 = \nu.$$

Dus $\nu = \mu^*$. Dus iedere deelrij van $\big(P^{(n)}\mu\big)_{n\in\mathbb{N}}$ heeft een deelrij die naar μ^* convergeert. Het volgt dat $\big(P^{(n)}\mu\big)_{n\in\mathbb{N}}$ naar μ^* convergeert. □

Voorbeeld 6.2.5. Beschouw Voorbeeld 6.0.1 nogmaals. We deden enige moeite om te bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} T_*^{(n)}\delta_x = \delta_0/2 + \delta_1/2$ in de Dudleynorm. Nu krijgen we dit resultaat direct uit Propositie 6.2.4.

Opmerking 6.2.6. Propositie 6.2.4 lijkt op de stelling van Birkhoff-Khinchin. Die zegt dat voor iedere $\mu \in \mathcal{P}(S)$, $f \in L^1(\mu)$ en een zogenaamde ergodische afbeelding $T : S \to S$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k = \int_S f \,\mathrm{d}\mu$$

μ-bijna overal.

6.2.3 Rol van de drager van de invariante maat

In deze subparagraaf bewijzen we interessante resultaten, zoals Propositie 6.2.9 en Stelling 6.2.13, voor als we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten met, onder andere, de extra aanname dat er een unieke invariante kansmaat bestaat.

Voor een topologische ruimte S en een maat $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ schrijven we $L^1_m(\mu) := \{\nu \in \mathcal{M}(S) : \nu \ll \mu\}$. Dan hebben we $L^1_m(\mu) \cong L^1(\mu)$ voor elke $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ via de isometrie uit Lemma 4.3.3. Het volgende resultaat en zijn bewijs is gebaseerd op Lemma 4.3.2 uit [26] en het bewijs ervan.

Lemma 6.2.7. *Zij S een topologische ruime en P een Markov-operator op S met een invariante maat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$. De verzameling $L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ is P-invariant, dat wil zeggen dat $P(L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)) \subseteq L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$.*

Bewijs. Neem $\mu \in L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ en neem $f \in L^1(\mu^*)$ niet-negatief zodat $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu^*$ voor $A \in \mathcal{B}(S)$. Er bestaat een niet-negatieve, niet-dalende rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mu^*) = L^\infty(\mu)$ zodat $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0$: neem bijvoorbeeld $f_n = f\mathbb{1}_{\{f\le n\}}$. Definieer de maat μ_n door $\mu_n(A) = \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu^*$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dan volgt wegens Lemma 4.3.3 dat

$$\|P\mu_n - P\mu\|_{\mathrm{TV}} \le \|\mu_n - \mu\|_{\mathrm{TV}} = \|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Bovendien geldt er dat $\|f_n\|_\infty \mu^* - \mu_n \in \mathcal{M}^+(S)$, en dus

$$\|f_n\|_\infty \mu^* - P\mu_n = P(\|f_n\|_\infty \mu^* - \mu_n) \in \mathcal{M}^+(S)$$

voor $n \in \mathbb{N}$. Het volgt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $P\mu_n \ll \mu^*$. Omdat $\lim_{n\to\infty} P\mu_n = P\mu$ in de norm van totale variatie, concluderen we dat $P\mu \ll \mu^*$. Dus $P\mu \in L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$. $\square$

Lemma 6.2.8. *Zij (S, d) een volledige en separabele metrische ruimte en $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ een kansmaat. De afsluiting van $L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ in $(\mathcal{P}(S), \|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}})$ is $\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat $\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ gesloten is. Zij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ een rij die in $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}}$ convergeert naar een zekere maat $\mu \in \mathcal{P}(S)$. Definieer $f \in \mathrm{BL}(S)$ door

$$f(x) = \min\big(d(x, \mathrm{supp}(\mu^*)), 1\big).$$

Dan is f strikt groter dan 0 op $\mathrm{supp}(\mu^*)^c$ en is f identiek 0 op $\mathrm{supp}(\mu^*)$. We berekenen nu:

$$\langle \mu, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mu_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{supp}(\mu^*)} f \,\mathrm{d}\mu_n = 0.$$

Dus $\int_{\mathrm{supp}(\mu^*)^c} f \,\mathrm{d}\mu = 0$, zodat $\mu(\mathrm{supp}(\mu^*)) = 1$ en $\mu \in \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$. Dit laat zien dat $\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ inderdaad gesloten is.

Omdat het convexe omhulsel van $\{\delta_x : x \in \mathrm{supp}(\mu^*)\}$ dicht ligt in $(\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*)), \|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}})$ en $L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ convex is, hoeven we alleen voor iedere $x_0 \in \mathrm{supp}(\mu^*)$ te bewijzen dat er een rij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van maten binnen $L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \delta_{x_0}$ in $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}}$. Zij hiertoe $x_0 \in \mathrm{supp}(\mu^*)$. Definieer voor $n \in \mathbb{N}$ de functie $g_n := \mathbb{1}_{B_{1/n}(x_0)} / \mu^*\big(B_{1/n}(x_0)\big)$ en de maat $\mu_n \in L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ door $\mu_n(A) = \int_A g_n \,\mathrm{d}\mu^*$. Merk op dat de g_n inderdaad goed gedefinieerd zijn vanwege de aanname dat $x_0 \in \operatorname{supp}(\mu^*)$. We bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \delta_{x_0}$. Zij $\varphi \in \mathrm{BL}(S)$. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
|\langle \mu_n, \varphi\rangle - \langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle| &= \left| \int_S g_n \varphi \,\mathrm{d}\mu^* - \varphi(x_0) \right| \\
&= \left| \int_S g_n \varphi - g_n \varphi(x_0) \,\mathrm{d}\mu^* \right| \\
&\leq \int_S |g_n \varphi - g_n \varphi(x_0)| \,\mathrm{d}\mu^* \\
&= \int_{B_{1/n}(x_0)} |g_n(x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \,\mathrm{d}\mu^*(x) \\
&\leq |\varphi|_L \int_{B_{1/n}(x_0)} |g_n(x)| d(x, x_0) \,\mathrm{d}\mu^*(x) \\
&\leq \frac{|\varphi|_L}{n} \int_{B_{1/n}(x_0)} |g_n(x)| \,\mathrm{d}\mu^*(x) \\
&= \frac{|\varphi|_L}{n} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Uit Stelling 4.0.2 samen met de waarneming dat $\|\mu_n\|_{\mathrm{TV}} = 1$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ volgt nu dat $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \delta_{x_0}$ in de Dudleynorm. $\square$

Propositie 6.2.9. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een Markov-operator op S die continu is met betrekking tot de metriek die wordt geïnduceerd door $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$. Laat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ een onder P invariante maat zijn. De verzameling $\mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$ is P-invariant, dat wil zeggen, $P\big(\mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \subseteq \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$.*

Bewijs. Zij $\mu \in \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat P continu is, bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $\|P\nu - P\mu\|_{\mathrm{BL}}^* < \varepsilon$ geldt wanneer $\nu \in \mathcal{P}(S)$ en $\|\nu - \mu\|_{\mathrm{BL}}^* < \delta$. Wegens Lemma 6.2.8 bestaat er een $\nu \in L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$ zodat $\|\nu - \mu\|_{\mathrm{BL}}^* < \delta$. Dus $\|P\nu - P\mu\|_{\mathrm{BL}}^* < \varepsilon$. Uit Lemma 6.2.7 krijgen we $P\nu \in L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)$, zodat

$$\rho\big(P\mu, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \leq \rho\big(P\mu, L^1_m(\mu^*) \cap \mathcal{P}(S)\big) \leq \rho(P\mu, P\nu) < \varepsilon.$$

Hier is ρ de door de Dudleynorm geïnduceerde metriek op $\mathcal{M}(S)$. Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was, krijgen we dat $\rho\big(P\mu, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) = 0$. Uit de geslotenheid van $\mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$ zien we nu dat $P\mu \in \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$. $\square$

We werken in de volgende resultaten toe naar Stelling 6.2.13. We nemen voor de rest van de subparagraaf aan dat we weer in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten, en we nemen ook haar notatie over. We nemen aan dat S een volledige en separabele metrische ruimte is, dat $M = \mathcal{P}(S)$ en dat ρ afkomt van $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$. Verder nemen we aan dat P regulier en Markov-Feller is, en dat P een unieke invariante maat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ heeft.

Lemma 6.2.10. *Voor $\mu \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$ is er een $\varepsilon > 0$ zodat $\rho\big(P^n\mu, \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \geq \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. Zij $\mu \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$. Het voldoet om te bewijzen dat $\overline{\mathcal{O}}_\mu \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*)) = \varnothing$, omdat $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$ compact is en $\overline{\mathcal{O}}_\mu$ gesloten. Stel dat $\nu \in \overline{\mathcal{O}}_\mu \cap \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$. Dan volgt met Lemma 6.1.6 en Propositie 6.2.9 dat

$$\mu \in \overline{\mathcal{O}}_\mu = \overline{\mathcal{O}}_\nu = \overline{\{P^n\nu : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*)).$$

Dat is een duidelijke tegenspraak. $\square$

Lemma 6.2.11. *Zij $\mu \in \mathcal{A}$ en $\varepsilon > 0$. Definieer $N_\varepsilon = \{x \in S : d(x, \operatorname{supp}(\mu^*)) < \varepsilon\}$ en $C_\varepsilon = S \setminus N_\varepsilon$. Er is een strikt stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodanig dat $\lim_{k\to\infty}(P^{n_k}\mu)(C_\varepsilon) = 0$.*

Bewijs. We weten van Propositie 6.2.4 dat $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\mu = \mu^*$ in de Dudleynorm. Stelling 3.0.1 geeft dat $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\mu = \mu^*$ zwak. Volgens de portmanteaustelling, Stelling 4.0.1, en de geslotenheid van C_ε, geldt er dat

$$0 \le \liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\mu(C_\varepsilon) \le \limsup_{n\to\infty} P^{(n)}\mu(C_\varepsilon) \le \mu^*(C_\varepsilon) = 0,$$

zodat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k\mu(C_\varepsilon) = 0$. In het bijzonder geldt $\inf_{n\ge N} P^n\mu(C_\varepsilon) = 0$ voor elke $N \in \mathbb{N}$. We vinden:

$$\liminf_{n\to\infty} P^n\mu(C_\varepsilon) = \lim_{N\to\infty}\inf_{n\ge N} P^n\mu(C_\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

Dit bewijst de uitspraak. □

Lemma 6.2.12. *Zij $\mu \in \mathcal{P}(S)$ en $\varepsilon > 0$. Laat $V \subseteq S$ een Borelverzameling zijn. Definieer $N_\varepsilon(V) = \{x \in S : d(x, V) < \varepsilon\}$ en stel dat $\mu(N_\varepsilon(V)) = 1$. Dan geldt $\rho(\mu, \mathcal{P}(V)) \le \varepsilon$.*

Bewijs. Kies $\delta > 0$ willekeurig. Merk op dat $N := \overline{N_\varepsilon(V)} \subseteq \{x \in S : d(x, V) \le \varepsilon\}$. Omdat het convexe omhulsel van $\{\delta_x : x \in N\}$ dicht ligt in $\mathcal{P}(N)$, bestaan er een $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1]$ en $x_1, \ldots, x_n \in N$ zodat $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ en $\|\mu - \sum_{i=1}^n a_i\delta_{x_i}\|^*_{\mathrm{BL}} < \delta$. Voor $i \in \{1, \ldots, n\}$ bestaat er een $y_i \in V$ zodat $d(x_i, y_i) < \varepsilon + \delta$. We krijgen dus $\|\delta_{x_i} - \delta_{y_i}\|^*_{\mathrm{BL}} \le d(x_i, y_i) < \varepsilon + \delta$ voor $i = 1, \ldots, n$. Definieer $\nu = \sum_{i=1}^n a_i\delta_{y_i} \in \mathcal{P}(V)$. Er volgt dat

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i\delta_{x_i} - \nu\right\|^*_{\mathrm{BL}} = \left\|\sum_{i=1}^n a_i(\delta_{x_i} - \delta_{y_i})\right\|^*_{\mathrm{BL}} \le \sum_{i=1}^n a_i\|\delta_{x_i} - \delta_{y_i}\|^*_{\mathrm{BL}} < \sum_{i=1}^n a_i(\varepsilon + \delta) = \varepsilon + \delta.$$

Met de driehoeksongelijkheid zien we nu direct dat $\rho(\mu, \mathcal{P}(V)) \le \|\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}} < \varepsilon + 2\delta$. Omdat $\delta > 0$ willekeurig was, concluderen we dat $\rho(\mu, \mathcal{P}(V)) \le \varepsilon$. □

Stelling 6.2.13. *Er geldt dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$.*

Bewijs. Zij $\mu \in \mathcal{A}$. In het licht van Lemma 6.2.10 voldoet het om te laten zien dat er een strikt stijgende rij $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen bestaat zodat $\lim_{k\to\infty} \rho\big(P^{m_k}\mu, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) = 0$. Als een dergelijke rij $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ namelijk bestaat, dan convergeert een zekere deelrij van $(P^{m_k}\mu)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ vanwege compactheid van $\mathcal{A}$ naar een element in $\mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*)) \cap \mathcal{A}$, zodat $\mu \in \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))$ wegens Lemma 6.2.10.

Laat $\varepsilon > 0$ en definieer $N_\varepsilon = \{x \in S : d(x, \operatorname{supp}(\mu^*)) < \varepsilon\}$ en $C_\varepsilon = S \setminus N_\varepsilon$. Kies met behulp van Lemma 6.2.11 een stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) = 0$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) \ne 1$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Zij $k \in \mathbb{N}$. Definieer $\mu_1 = P^{n_k}\mu(\cdot \cap C_\varepsilon)$ en $\mu_2 = P^{n_k}\mu(\cdot \cap N_\varepsilon)/(1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon)) \in \mathcal{P}(S)$. Dan hebben we $P^{n_k}\mu = \mu_1 + (1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\mu_2$. We krijgen daarom voor $\nu \in \mathcal{P}(S)$ dat

$$\begin{aligned}
\|P^{n_k}\mu - \nu\|^*_{\mathrm{BL}} &= \|\mu_1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon)\nu + (1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\mu_2 - (1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\nu\|^*_{\mathrm{BL}} \\
&\le \|\mu_1\|^*_{\mathrm{BL}} + \|P^{n_k}\mu(C_\varepsilon)\nu\|^*_{\mathrm{BL}} + \|(1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\mu_2 - (1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\nu\|^*_{\mathrm{BL}} \\
&= P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) + P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) + (1 - P^{n_k}\mu(C_\varepsilon))\|\mu_2 - \nu\|^*_{\mathrm{BL}} \\
&\le 2P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) + \|\mu_2 - \nu\|^*_{\mathrm{BL}}.
\end{aligned}$$

Uit Lemma 6.2.12 volgt dat $\rho\big(\mu_2, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \le \varepsilon$. We zien nu:

$$\rho\big(P^{n_k}\mu, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \le 2P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) + \rho\big(\mu_2, \mathcal{P}(\operatorname{supp}(\mu^*))\big) \le 2P^{n_k}\mu(C_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Laten we $k \to \infty$, dan volgt dat $\limsup_{k\to\infty} \rho\big(P^{n_k}\mu, \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))\big) \leq \varepsilon$. Voor iedere $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ bestaat er dus een $n \geq N$ met $\rho\big(P^n\mu, \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))\big) < 2\varepsilon$. Hieruit volgt het bestaan van een strikt stijgende rij $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van natuurlijke getallen zodat $\lim_{k\to\infty} \rho\big(P^{m_k}\mu, \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))\big) = 0$, zoals gewenst. □

Opmerking 6.2.14. In het geval dat P een transport-operator T_* is voor een zekere continue afbeelding $T : S \to S$ is het bewijs van Stelling 6.2.13 eenvoudiger. Schrijf $\mathcal{A}_T$ voor de verzameling als in Stelling 6.2.2. Zij $x \in \mathrm{supp}(\mu^*)$. Dan geldt er vanwege Propositie 6.2.9 dat

$$\{Tx\} = \mathrm{supp}(P\delta_x) \subseteq \mathrm{supp}(\mu^*).$$

Maar uit Stelling 6.2.1 weten we dat $\mathcal{A}_T$ maar één baan onder T heeft. Dus

$$\mathcal{A}_T = \overline{\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \mathrm{supp}(\mu^*).$$

Het volgt dat $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{A}_T) \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$.

Gevolg 6.2.15. *De afbeelding P beperkt tot een afbeelding $\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*)) \to \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ voldoet aan de voorwaarden voor Stelling 6.0.3, met $M = \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ en $K = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$.*

6.3 Asymptotiek voor de norm van totale variatie

In deze paragraaf nemen we aan dat de metriek ρ uit Stelling 6.0.3 afkomt van de norm van totale variatie. Het helpt dan om te weten hoe compacte verzamelingen eruitzien in de norm van totale variatie. In deze paragraaf is S een topologische ruimte.

Stelling 6.3.1. *Zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ een compacte verzameling in de norm van totale variatie. Dan bestaat er een maat $\nu \in \mathcal{P}(S)$ zodat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $\sup_{\mu\in\mathcal{A}} \mu(E) < \varepsilon$ wanneer $\nu(E) < \delta$ en $E \in \mathcal{B}(S)$. In het bijzonder geldt $\mu \ll \nu$ voor alle $\mu \in \mathcal{A}$ en hebben we voor iedere naar $\varnothing$ dalende rij $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van Borelverzamelingen dat $\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{A}} \mu(E_n) = 0$.*

Bewijs. Merk op dat $\mathcal{A}$ rijcompact is. Het resultaat volgt nu uit Theorem IV.9.2 uit [5]. □

Een simpel gevolg van Lemma 4.3.3 en Stelling 6.3.1 is het volgende.

Gevolg 6.3.2. *Zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ is compact in de norm van totale variatie;*
2. *Er bestaat een maat $\nu \in \mathcal{P}(S)$ zodanig dat $\mu \ll \nu$ geldt voor iedere $\mu \in \mathcal{A}$ en $\left\{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} : \mu \in \mathcal{A}\right\}$ compact is in $L^1(\nu)$;*
3. *Er bestaat een maat $\nu \in \mathcal{P}(S)$ zodanig dat $\mu \ll \nu$ geldt voor iedere $\mu \in \mathcal{A}$, en voor elke dergelijke kansmaat ν is $\left\{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} : \mu \in \mathcal{A}\right\}$ compact in $L^1(\nu)$.*

Voorbeeld 6.3.3. Neem $S = [0, 1]$ en kies $\delta \in (0, 1]$. Zij λ de Lebesguemaat op $[0, 1]$. Definieer

$$M = \left\{\frac{1}{\delta}\lambda|_{[a,a+\delta]} : a \in [0, 1-\delta]\right\}.$$

We laten zien dat M compact is in de norm van totale variatie. Voor iedere $\mu \in M$ geldt dat $\mu \ll \lambda$. Zij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ een rij. Definieer $a_n \in [0, 1-\delta]$ voor $n \in \mathbb{N}$ als het getal zodat $\mu_n = \frac{1}{\delta}\lambda|_{[a_n,a_n+\delta]}$. Merk op dat $\frac{\mathrm{d}\mu_n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\delta}\mathbb{1}_{[a_n,a_n+\delta]}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Er bestaat een stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zodat $a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in [0, 1-\delta]$ bestaat, omdat $[0, 1-\delta]$ (rij)compact is. Maar dan convergeert $\left(\frac{\mathrm{d}\mu_{n_k}}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\lambda)$ naar $\frac{1}{\delta}\mathbb{1}_{[a,a+\delta]}$ vanwege de berekening

$$\begin{aligned}\int_S \left|\mathbb{1}_{[a_{n_k},a_{n_k}+\delta]} - \mathbb{1}_{[a,a+\delta]}\right| \mathrm{d}\lambda &= \lambda([a_{n_k}, a_{n_k}+\delta] \setminus [a, a+\delta]) + \lambda([a, a+\delta] \setminus [a_{n_k}, a_{n_k}+\delta]) \\ &\leq 2|a_{n_k} - a| \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Dit laat zien dat $\left\{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} : \mu \in M\right\}$ (rij)compact is.

Stelling 6.3.4. *Zij $\nu \in \mathcal{P}(S)$, en laat $M \subseteq \mathcal{P}(S) \cap \{\mu \in \mathcal{M}(S) : \mu \ll \nu\} = \mathcal{P}(S) \cap L^1_m(\nu)$ een verzameling kansmaten zijn. Veronderstel dat er voor iedere rij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ een deelrij $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ en een maat $\mu \in M$ bestaan zodat $\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(E) = \mu(E)$ voor iedere $E \in \mathcal{B}(S)$ en*

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(\left\{x \in S : \left|\frac{\mathrm{d}\mu_{n_k}}{\mathrm{d}\nu} - \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

voor elke $\varepsilon > 0$. Dan is M compact.

Bewijs. We bewijzen dat M rijcompact is. Zij $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ een rij. Per aanname bestaan er een deelrij $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ en een maat $\mu \in M$ zodat $\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(E) = \mu(E)$ voor iedere $E \in \mathcal{B}(S)$ en

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left(\left\{x \in S : \left|\frac{\mathrm{d}\mu_{n_k}}{\mathrm{d}\nu} - \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

voor elke $\varepsilon > 0$. De rij $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeert wegens Theorem IV.9.5 in [5] $\sigma(\mathcal{M}(S)_{\mathrm{TV}}, \mathcal{M}(S)^*_{\mathrm{TV}})$-zwak naar μ. Maar $\left(\frac{\mathrm{d}\mu_{n_k}}{\mathrm{d}\nu}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeert dan $\sigma(L^1(\nu), L^1(\nu)^*)$-zwak naar $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$ wegens Lemma 4.3.3. Vanwege Theorem IV.8.12 uit [5] convergeert $\left(\frac{\mathrm{d}\mu_{n_k}}{\mathrm{d}\nu}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ nu in $\|\cdot\|_{L^1(\nu)}$ naar $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$. Lemma 4.3.3 geeft ons dat $\lim_{k\to\infty} \mu_{n_k} = \mu$ in de norm van totale variatie. ☐

Wat betreft de structuur van de verzameling $\mathcal{A}$ zoals in Stelling 6.0.3 waar ρ afkomt van $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$, hebben we tot nu toe alleen de resultaten van Paragrafen 5.3 en 6.1. Echter, er zijn andere resultaten, gerelateerd aan Stelling 4.3.5, die vrijwel de hele structuur van $\mathcal{A}$ geven. Zie bijvoorbeeld [17] en [18]. Zoals Theorem 1 uit [18] aangeeft, is $\mathcal{A}$ dan namelijk het convexe omhulsel van een eindig aantal maten. Theorem 1 is verzwakt en in onze notatie in Stelling 6.3.6 opgeschreven. Daarvoor hebben we wel eerst de definitie van een zogeheten band nodig.

Definitie 6.3.5 (Band)**.** Een verzameling $M \subseteq \mathcal{M}(S)$ heet een *band* (Engels: *band*) als voor iedere $\nu \in M$ en $\mu \in \mathcal{M}(S)$ met $\mu \ll \nu$ geldt dat $\mu \in M$.

Merk op: als we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten waar ρ afkomt van de norm van totale variatie en M de doorsnede van een band met $\mathcal{P}(S)$ is, dan is de verzameling $\mathcal{A}$ convex wegens Gevolg 6.1.4 en compact. We kunnen dan dus spreken over de extreme punten van $\mathcal{A}$.

Stelling 6.3.6. *Neem aan dat we in de situatie van Stelling 6.0.3 zitten en neem haar notatie over. Veronderstel dat ρ afkomt van de norm van totale variatie en dat M de doorsnede van een band met $\mathcal{P}(S)$ is. Dan bestaan er een natuurlijk getal r, maten $\nu_1, \dots, \nu_r \in \mathcal{A}$ en corresponderende afbeeldingen $\lambda_1, \dots, \lambda_r : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zodat voor iedere $\mu \in M$ geldt dat*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^n\mu - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\mu)\nu_{\alpha^n(i)} \right\|_{\mathrm{TV}} = 0,$$

waar α een permutatie van $\{1, \dots, r\}$ is zodat $P(\nu_i) = \nu_{\alpha(i)}$ voor $i = 1, \dots, r$. Bovendien bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met $P^N\nu_i = \nu_i$ voor $i = 1, \dots, r$. Ook geldt er voor iedere $\mu \in M$ dat $\sum_{i=1}^r \lambda_i(\mu) = 1$. In het bijzonder hebben we $\mathcal{A} = \overline{\mathrm{co}}(\{\nu_1, \dots, \nu_r\})$, heeft $\mathcal{A}$ dus eindig veel extreme punten en is $\mathcal{G}$ eindig.

Bewijs. Dit is een zwakkere versie van Theorem 1 uit [18]. □

Voorbeeld 6.3.7. Dit voorbeeld is gebaseerd op een voorbeeld uit [20]. Zij S een topologische ruimte. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$, en kies een meetbare functie $k : S^2 \to [0, \infty)$ zodat $\int_S k(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) = 1$ voor elke $y \in S$. Neem verder het bestaan van een $k_0 \in L^1(\mu)$ zodat $k(x,y) \leq k_0(x)$ geldt voor alle $y \in S$ aan. Neem $M = \{\nu \in \mathcal{P}(S) : \nu \ll \mu\} = \mathcal{P}(S) \cap L^1_m(\mu)$. Definieer $P : M \to M$ als volgt. Zij $\nu \in M$. Neem $f \in L^1(\mu)$ zodat $\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$ geldt voor alle $A \in \mathcal{B}(S)$. Definieer voor $A \in \mathcal{B}(S)$ dan

$$(P\nu)(A) = \int_A \widetilde{P} f\,\mathrm{d}\mu,$$

waar $\widetilde{P} : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ gegeven wordt door

$$\left(\widetilde{P} g\right)(x) = \int_S k(x,y) g(y)\,\mathrm{d}\mu(y), \qquad g \in L^1(\mu), x \in S.$$

Dan geldt inderdaad $P\nu \in M$, onder andere vanwege

$$\begin{aligned}(P\nu)(S) &= \int_S \left(\widetilde{P} f\right)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_S \int_S k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_S \int_S k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_S f(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \nu(S) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Merk op dat voor elke $\nu \in M$ geldt dat $\frac{\mathrm{d}P\nu}{\mathrm{d}\mu} = \widetilde{P} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Laat

$$K' = \left\{ \nu \in M : 0 \leq \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \leq k_0 \right\}$$

en

$$K = P(K'), \quad \widetilde{K}' = \{ f \in L^1(\mu) : \|f\|_{L^1} = 1,\ 0 \leq f \leq k_0 \},\ \widetilde{K} = \widetilde{P}\left(\widetilde{K}'\right).$$

We zitten in de situatie van Stelling 6.0.3 en Stelling 6.3.6 als we bewijzen dat K compact is en dat K de elementen van M puntsgewijs aantrekt. Dat laatste is het geval omdat $P\nu \in K'$ en $P^2\nu \in K$ geldt voor iedere $\nu \in M$. Verder is K compact dan en slechts dan als $\widetilde{K}$ compact is wegens Lemma 4.3.3. We zijn dus klaar als we laten zien dat $\widetilde{K}$ compact is.

Nu, $\widetilde{K}'$ is relatief zwak compact dan en slechts dan als $\widetilde{K}'$ uniform integreerbaar (Engels: uniformly integrable) is. Dit resultaat staat ook wel bekend als de stelling van Dunford-Pettis en is ook te zien uit Theorem IV.8.9 uit [5] en de stelling van Eberlein-Smulian, zie bijvoorbeeld Theorem V.6.1 in [5]. Maar $\widetilde{K}'$ is duidelijk uniform integreerbaar, dus $\widetilde{K}'$ is relatief zwak compact. Zij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{K}'$ een rij die convergeert naar $f \in L^1(\mu)$. Dan krijgen we direct dat $\|f\|_{L^1} = 1$. Ook is er een deelrij $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \widetilde{K}'$ die puntsgewijs bijna overal naar f convergeert. Dus $0 \leq f \leq k_0$ en daarmee $f \in \widetilde{K}'$. Het volgt dat $\widetilde{K}'$ gesloten is. Omdat $\widetilde{K}'$ convex is, is $\widetilde{K}'$ zwak gesloten dan en slechts dan als $\widetilde{K}'$ gesloten is, zie Theorem V.3.13 uit [5]. Dus $\widetilde{K}'$ is ook zwak gesloten, wat laat zien dat $\widetilde{K}'$ zwak compact is. Merk op dat $\widetilde{P}$ continu is en dat $\widetilde{P}\big(\overline{B}_1(0)\big) \subseteq \{f \in L^1(\mu) : |f| \leq k_0\}$ uniform integreerbaar en daarmee relatief zwak compact is. In andere woorden, $\widetilde{P}$ is continu en zwak compact. Omdat $L^1(\mu)$ de zogenaamde Dunford-Pettis-eigenschap (Engels: Dunford-Pettis property) heeft, is $\widetilde{K} = \widetilde{P}\left(\widetilde{K}'\right)$ compact in $\|\cdot\|_{L^1}$. Zie Théorème 1 in [7], of Theorem 5.4.5 in [1], voor een bewijs dat L^1-ruimten de Dunford-Pettis-eigenschap hebben.

6.4 Vergelijking van situaties in Dudleynorm en norm van totale variatie

In deze paragraaf vergelijken we Stelling 6.3.6 met onze resultaten rondom de Dudleynorm, in het bijzonder Stelling 6.2.13. Die eerste stelling is in zekere zin sterker dan de laatste: nemen we aan dat P een unieke invariante maat heeft in de situatie van Stelling 6.3.6, dan moet die maat wel $\mu^* = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r \nu_i$ zijn. Ook is iedere maat $\nu \in \mathcal{A} = \overline{\mathrm{co}}(\{\nu_1, \dots, \nu_r\})$ van de vorm $\nu = \sum_{i=1}^r a_i \nu_i$, met $a_1, \dots, a_r \in [0,1]$. Dus de drager van iedere $\nu \in \mathcal{A}$ is bevat in $\bigcup_{i=1}^r \mathrm{supp}(\nu_i) = \mathrm{supp}(\mu^*)$. Met andere woorden, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$.

Echter, van Stelling 6.2.13 krijgen we niet per se dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu^*))$ in de situatie van Stelling 6.3.6. Stel dat we in de situatie van Stelling 6.3.6 zitten en neem aan dat P een unieke invariante maat heeft. We kunnen Stelling 6.2.13 in dit geval niet gebruiken omdat niet aan de voorwaarden wordt voldaan. Het eerste probleem is dat de domeinen van de betreffende afbeeldingen P in de stellingen niet overeenkomen. En hoewel een insnoerende verzameling in de norm van totale variatie ook een insnoerende verzameling in de Dudleynorm is, is equicontinuïteit in de $\|\cdot\|_{\mathrm{BL}}^*$-norm niet gegarandeerd. Andersom kunnen we kijken naar de vraag welke extra aannames we kunnen doen over een afbeelding $P : M \to M$ als in Stelling 6.0.3, waarbij de metriek ρ afkomt van de Dudleynorm, zodat P ook voldoet aan de voorwaarden voor Stelling 6.0.3 als de metriek afkomt van de norm van totale variatie.

In het licht van Stelling 3.1.6 zien we dat we het noodzakelijk is dat een insnoerende verzameling in de norm van totale variatie in zekere zin uniform insnoerend moet zijn over alle toelaatbare metrieken d op de Poolse ruimte S zodat (S,d) volledig is.

Propositie 6.4.1. *Stel dat S een Poolse ruimte is, laat $M \subseteq \mathcal{P}(S)$ en zij $P : M \to M$ een afbeelding. Schrijf $\mathcal{D}_S$ voor de verzameling toelaatbare metrieken d op S zodat (S,d) volledig is. Veronderstel dat $K \subseteq M$ een insnoerende verzameling voor P is in de norm van totale variatie. Dan volgt dat*

$$\sup_{d \in \mathcal{D}_S} \inf_{\nu \in K} \|P^n\mu - \nu\|_{\mathrm{BL},d}^* \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

voor elke $\mu \in M$.

Bewijs. Zij $\mu \in M$. We berekenen met behulp van Stelling 3.1.6:

$$\sup_{d \in \mathcal{D}_S} \inf_{\nu \in K} \|P^n\mu - \nu\|_{\mathrm{BL},d}^* \le \inf_{\nu \in K} \sup_{d \in \mathcal{D}_S} \|P^n\mu - \nu\|_{\mathrm{BL},d}^* = \inf_{\nu \in K} \|P^n\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dit is wat we moesten bewijzen. □

In de norm van totale variatie weten we de structuur van $\mathcal{A}$ en de bijbehorende groep $\mathcal{G}$ uit Stelling 6.0.3. In het algemene geval hebben we alleen de resultaten van Paragrafen 5.3 en 6.1. In het geval waar de metriek ρ afkomt van de Dudleynorm hebben we daarnaast de resultaten uit Paragraaf 6.2.

7

Voldoende voorwaarden voor de e-eigenschap

Een eenvoudig gevolg van Stelling 6.0.3 is het volgende.

Propositie 7.0.1. *Laat S een separabele en volledige metrische ruimte zijn en zij $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een asymptotisch stabiele Markov-operator. Geef $\mathcal{M}^+(S)$ de metriek die afkomt van de Dudleynorm. Neem aan dat P continu is en dat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ als verzameling afbeeldingen op $\mathcal{P}(S)$ equicontinu is in de unieke invariante maat. Dan is $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu op $\mathcal{M}^+(S)$.*

Bewijs. Schrijf $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ voor de unieke invariante maat. Dan voldoet P aan de voorwaarden van Stelling 6.0.3 met $M = \mathcal{P}(S)$ en $K = \{\mu^*\}$, waar ρ afkomt van de Dudleynorm. We krijgen dus dat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ als verzameling afbeeldingen van $\mathcal{P}(S)$ naar $\mathcal{P}(S)$ equicontinu is. Kies $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$ willekeurig. Als $\mu = 0$, dan is equicontinuïteit in μ duidelijk: voor elke $\varepsilon > 0$ geldt voor $\delta = \varepsilon > 0$ en $\nu \in \mathcal{M}^+(S)$ met $\|\nu - 0\|_{\mathrm{BL}}^* < \delta$ dat

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P^n \nu\|_{\mathrm{BL}}^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P^n \nu\|_{\mathrm{TV}} = \|\nu\|_{\mathrm{TV}} = \|\nu\|_{\mathrm{BL}}^* < \varepsilon.$$

Neem in het vervolg aan dat $\mu \neq 0$. Neem verder zonder verlies van algemeenheid aan dat $\mu \in \mathcal{P}(S)$. Neem een rij $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+(S)$ die convergeert naar μ. In het bijzonder convergeert $(\mu_m(S))_{m\in\mathbb{N}}$ naar $\mu(S) = 1$. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $\mu_m \neq 0$ voor elke $m \in \mathbb{N}$. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P^n \mu_m - P^n \mu\|_{\mathrm{BL}}^* &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \mu_m(S) \cdot P^n\left(\frac{\mu_m}{\mu_m(S)}\right) - \mu_m(S) \cdot P^n \mu + (\mu_m(S) - 1) P^n \mu \right\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_m(S) \left\| P^n\left(\frac{\mu_m}{\mu_m(S)}\right) - P^n \mu \right\|_{\mathrm{BL}}^* + \|(\mu_m(S) - 1) P^n \mu\|_{\mathrm{BL}}^* \\
&= \mu_m(S) \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| P^n\left(\frac{\mu_m}{\mu_m(S)}\right) - P^n \mu \right\|_{\mathrm{BL}}^* \right) + |\mu_m(S) - 1| \\
&\xrightarrow{m\to\infty} \mu(S) \cdot 0 + |\mu(S) - 1| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dit laat zien dat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ inderdaad als verzameling afbeeldingen op $\mathcal{M}^+(S)$ equicontinu is in μ. $\square$

Het is in de praktijk lastig te bepalen wat de invariante maat is, en dus al helemaal om equiconintuïteit erin te bepalen. We zullen in dit hoofdstuk een constructie maken van maten waarmee we resultaten kunnen bewijzen die de e-eigenschap garanderen. Aan het einde, in Proposities 7.2.18 en 7.2.19, zien we hoe we die resultaten kunnen gebruiken om equicontinuïteit makkelijker te bepalen.

Definitie 7.0.2 (e-eigenschap in een punt)**.** Zij S een metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S met duale U. Dan heeft P de e-*eigenschap in een punt* $z \in S$ (Engels: e-*property in a point* $z \in S$) als $\{U^n f\}_{n\in\mathbb{N}}$ equicontinu in z is voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$.

Opmerking 7.0.3. Een reguliere Markov-operator P op een metrische ruimte S heeft de e-eigenschap dan en slechts dan als P de e-eigenschap heeft in ieder punt van S.

7.1 Een decompositieconstructie voor kerniteraties

We geven in deze paragraaf de eerder genoemde constructie, die onder andere in [15] staat. Ze komt waarschijnlijk van Lasota en komt veelvuldig voor in werk van Tomasz Szarek. De reden achter de naam van deze paragraaf is dat een Markov-operator P kan worden opgevat als de overgangskern van een Markovproces in discrete tijd. De constructie geeft een decompositie van de iteraties $P^n\delta_x$. Hier kan $P^n\delta_x$ worden opgevat als de verdeling van de $n$de stap in het Markovproces met begintoestand x. Om de juistheid van de constructie aan te tonen gebruiken we een hulpstelling.

Lemma 7.1.1. *Zij μ een eindige, positieve maat op een zekere meetbare ruimte (X,Ω), zij I een indexverzameling, en laat $(X_i)_{i\in I}$ een familie van paarsgewijs disjuncte meetbare verzamelingen in (X,Ω) zijn. Dan is het aantal $i \in I$ met $\mu(X_i) > 0$ aftelbaar.*

Bewijs. Definieer
$$A_n := \left\{ i \in I : \mu(X_i) \geq \frac{1}{n} \right\}$$
voor $n \in \mathbb{N}$ en $A := \{i \in I : \mu(X_i) > 0\}$. Dan is A_n eindig voor elke $n \in \mathbb{N}$. Anders is er een $n \in \mathbb{N}$ en een rij $(i_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A_n \subseteq I$ van verschillende indices, zodat
$$\infty > \mu(S) \geq \mu\left(\bigcup_{i\in A_n} X_i \right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_{i_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_{i_k}) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$
Het volgt direct dat $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ aftelbaar is. $\square$

Lemma 7.1.2. *Zij $\alpha \geq 0$, S een metrische ruimte, en $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$. Neem aan dat er een $x \in S$ en een $r > 0$ bestaan zodat $\mu(B_r(x)) > \alpha$. Dan bestaat er een $0 < r' < r$ zodat $\mu(B_{r'}(x)) > \alpha$ en $\mu(\partial B_{r'}(x)) = 0$.*

Bewijs. Laat d de metriek op S zijn. Omdat $\lim_{s\uparrow r} \mu(B_s(x)) = \mu(B_r(x)) > \alpha$, is er een $s < r$ met $\mu(B_t(x)) > \alpha$ voor elke $t \in (s,r)$. Merk op: voor elke $t \in (s,r)$ geldt er
$$\partial B_t(x) = \overline{B_t(x)} \setminus B_t(x) \subseteq \overline{B}_t(x) \setminus B_t(x) = \{y \in S : d(x,y) = t\}.$$
Dus $(\partial B_t(x))_{t\in(s,r)}$ is een familie van paarsgewijs disjuncte meetbare verzamelingen. Wegens Lemma 7.1.1 moet er een $r' \in (s,r)$ bestaan met $\mu(\partial B_{r'}(x)) = 0$. Maar per definitie van s geldt ook dat $\mu(B_{r'}(x)) > \alpha$. $\square$

Opmerking 7.1.3. In [25] wordt Lemma 7.1.2 simpelweg gebruikt. De vraag rees hoe het bewezen kon worden. Het antwoord op Mathematics Stack Exchange is hier overgenomen, weliswaar vertaald en wat uitgebreider opgeschreven.[1]

[1] Het woord ‘antwoord’ is een in de pdf-versie klikbare link naar de website `https://math.stackexchange.com/questions/1415968`.

We geven nu de constructie. Zij S een volledige separabele metrische ruimte en $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere Markov-operator die Markov-Feller is. Geef $\mathcal{M}^+(S)$ en $\mathcal{P}(S)$ de zwakke topologie, ofwel de topologie die wordt geïnduceerd door de Dudleynorm. Gegeven een vijftal (k, z, x_0, r, α) met $k \in \mathbb{N}$, $z \in S$, $x_0 \in S$, $r > 0$ en $\alpha \in (0, 1)$, construeren we onder later gespecificeerde aannames, zie Vergelijkingen (7.1) en (7.2), natuurlijke getallen $n_1, \ldots, n_k$, een open omgeving $O \subseteq S$ van x_0 en kansmaten ν_i^x en μ_i^x op S voor $i = 1, \ldots, k$ en $x \in O$. Met inductie bepalen we de volgende objecten voor $i = 1, \ldots, k$:

- Een natuurlijk getal n_i;
- Een open omgeving $O_i \subseteq S$ van x_0;
- Een kansmaat $\nu_i^x \in \mathcal{P}(S)$ voor iedere $x \in O_i$ zodat de afbeelding $O_i \to \mathcal{P}(S) : x \mapsto \nu_i^x$ continu is in x_0;
- Een kansmaat $\mu_i^x \in \mathcal{P}(S)$ voor iedere $x \in O_i$ zodat de afbeelding $O_i \to \mathcal{P}(S) : x \mapsto \mu_i^x$ continu is in x_0.

We definiëren ze op zo'n manier dat

- de ongelijkheden in Vergelijkingen (7.1) en (7.2) waar zijn voor de n_l en $\mu_l^{x_0}$;
- de ν_l^x voor $x \in \bigcap_{i=1}^k O_i =: O$ en $l = 1, \ldots, k$ geconcentreerd zijn op $B_r(z)$, ofwel
$$\nu_1^x(B_r(z)) = \ldots = \nu_k^x(B_r(z)) = 1;$$
- voor $x \in O$ en $n \geq n_1 + \ldots + n_k$ geldt dat
$$P^n\delta_x = (1-\alpha)^k P^{n-n_1-\ldots-n_k}\mu_k^x + \alpha \sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)^{i-1}P^{n-\sum_{j=1}^{i} n_j}\nu_i^x.$$

Basisstap: Als eerste nemen we aan:

$$\text{Er bestaat een } n_1 \in \mathbb{N} \text{ zodat } P^{n_1}\delta_{x_0}(B_r(z)) > \alpha. \tag{7.1}$$

We kunnen Lemma 7.1.2 gebruiken om een $r_1 < r$ te vinden met $P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z)) > \alpha$ en $P^{n_1}\delta_{x_0}(\partial B_{r_1}(z)) = 0$. Definieer de kansmaten $\nu_1^{x_0}$ en $\mu_1^{x_0}$ door

$$\nu_1^{x_0}(\cdot) = \frac{P^{n_1}\delta_{x_0}(\cdot \cap B_{r_1}(z))}{P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z))} \quad \text{en} \quad \mu_1^{x_0} = \frac{1}{1-\alpha}(P^{n_1}\delta_{x_0} - \alpha\nu_1^{x_0}).$$

Merk op dat de afbeelding $S \to \mathcal{P}(S) : x \mapsto P^{n_1}\delta_x$ zwak continu in x_0 is wegens de continuïteit van P, en dat $\{\mu \in \mathcal{P}(S) : \mu(B_{r_1}(z)) > \alpha\} \ni P^{n_1}\delta_{x_0}$ open is in $\mathcal{P}(S)$ wegens de portmanteaustelling. Het inverse beeld van deze verzameling onder de afbeelding bevat daarom een open omgeving O_1 van x_0. We vinden dat $P^{n_1}\delta_x(B_{r_1}(z)) > \alpha$ voor alle $x \in O_1$. Verder zien we dat $\mu_1^{x_0}$ een positieve maat is, omdat voor $E \in \mathcal{B}(S)$ geldt dat

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\mu_1^{x_0}(E) &= P^{n_1}\delta_{x_0}(E) - \frac{\alpha}{P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z))} \cdot P^{n_1}\delta_{x_0}(E \cap B_{r_1}(z)) \\ &\geq P^{n_1}\delta_{x_0}(E) - P^{n_1}\delta_{x_0}(E \cap B_{r_1}(z)) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

oftewel $\mu_1^{x_0}(E) \geq 0$. Ook is $\mu_1^{x_0}(S)$ gelijk aan 1, zodat $\mu_1^{x_0}$ inderdaad een kansmaat is. Definieer nu voor $x \in O_1$ de kansmaten ν_1^x en μ_1^x op S door

$$\nu_1^x(\cdot) = \frac{P^{n_1}\delta_x(\cdot \cap B_{r_1}(z))}{P^{n_1}\delta_x(B_{r_1}(z))} \quad \text{en} \quad \mu_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(P^{n_1}\delta_x - \alpha\nu_1^x).$$

Om dezelfde reden als boven is μ_1^x voor elke $x \in O_1$ inderdaad een kansmaat. We bewijzen nu dat de afbeelding $O_1 \to \mathcal{P}(S) : x \mapsto \nu_1^x$ continu is in x_0. Neem een rij $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq O_1$ die convergeert naar x_0. We weten dat $\lim_{m\to\infty} P^{n_1}\delta_{x_m} = P^{n_1}\delta_{x_0}$ omdat P Markov-Feller is. Wegens de portmanteaustelling en door $P^{n_1}\delta_{x_0}(\partial B_{r_1}(z)) = 0$ geldt er:

$$\begin{aligned}\liminf_{m\to\infty} P^{n_1}\delta_{x_m}(B_{r_1}(z)) \geq P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z)) = P^{n_1}\delta_{x_0}\left(\overline{B_{r_1}(z)}\right) &\geq \limsup_{m\to\infty} P^{n_1}\delta_{x_m}\left(\overline{B_{r_1}(z)}\right)\\ &\geq \limsup_{m\to\infty} P^{n_1}\delta_{x_m}(B_{r_1}(z)).\end{aligned}$$

Er volgt dat $\lim_{m\to\infty} P^{n_1}\delta_{x_m}(B_{r_1}(z)) = P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z))$. Dus voor een open verzameling $E \subseteq S$ geldt, weer wegens de portmanteaustelling:

$$\begin{aligned}\liminf_{m\to\infty} \nu_1^{x_m}(E) = \liminf_{m\to\infty} \frac{P^{n_1}\delta_{x_m}(E\cap B_{r_1}(z))}{P^{n_1}\delta_{x_m}(B_{r_1}(z))} &= \liminf_{m\to\infty} \frac{P^{n_1}\delta_{x_m}(E\cap B_{r_1}(z))}{P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z))}\\ &\geq \frac{P^{n_1}\delta_{x_0}(E\cap B_{r_1}(z))}{P^{n_1}\delta_{x_0}(B_{r_1}(z))} = \nu_1^{x_0}(E).\end{aligned}$$

Dus $\lim_{m\to\infty} \nu_1^{x_m} = \nu_1^{x_0}$ door de portmanteaustelling. Dit bewijst dat $x \mapsto \nu_1^x$ continu is in x_0. Hieruit is het duidelijk dat $x \mapsto \mu_1^x$ ook continu is in x_0.

Inductiestap: Neem nu aan dat we voor een zekere $l \in \{1, \dots, k-1\}$ het natuurlijke getal n_l, de open omgeving O_l van x_0 en de kansmaten ν_l^x en μ_l^x voor $x \in O_l$ hebben gedefinieerd. We nemen aan:

$$\text{Er bestaat een } n_{l+1} \in \mathbb{N} \text{ zodat } P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(B_r(z)) > \alpha. \tag{7.2}$$

Wegens Lemma 7.1.2 bestaat er nu een $r_{l+1} < r$ zodanig dat $P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(B_{r_{l+1}}(z)) > \alpha$ en $P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(\partial B_{r_{l+1}}(z)) = 0$. Definieer de kansmaten $\nu_{l+1}^{x_0}$ en $\mu_{l+1}^{x_0}$ door

$$\nu_{l+1}^{x_0}(\cdot) = \frac{P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(\cdot \cap B_{r_{l+1}}(z))}{P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(B_{r_{l+1}}(z))} \quad \text{en} \quad \mu_{l+1}^{x_0} = \frac{1}{1-\alpha}\big(P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0} - \alpha\nu_{l+1}^{x_0}\big).$$

Op precies dezelfde manier als bij de basisstap zien we dat $\nu_{l+1}^{x_0}$ en $\mu_{l+1}^{x_0}$ kansmaten zijn. We krijgen ook op vergelijkbare manier een open omgeving $O_{l+1} \subseteq O_l$ van x_0 zodanig dat $P^{n_{l+1}}\mu_l^x(B_{r_{l+1}}(z)) > \alpha$ voor alle $x \in O_{l+1}$: hier gebruiken we de continuïteit van $x \mapsto \mu_l^x$ in x_0. Definieer voor $x \in O_{l+1}$ nu

$$\nu_{l+1}^{x}(\cdot) = \frac{P^{n_{l+1}}\mu_l^{x}(\cdot \cap B_{r_{l+1}}(z))}{P^{n_{l+1}}\mu_l^{x}(B_{r_{l+1}}(z))} \quad \text{en} \quad \mu_{l+1}^{x} = \frac{1}{1-\alpha}\big(P^{n_{l+1}}\mu_l^{x} - \alpha\nu_{l+1}^{x}\big).$$

Net als bij de inductiestap zien we dat ν_{l+1}^x en μ_{l+1}^x kansmaten zijn voor iedere $x \in O_{l+1}$. We kunnen, weer gebruikmakend van de continuïteit van $x \mapsto \mu_l^x$ in x_0, ook op een soortgelijke wijze laten zaten dat de afbeeldingen $O_{l+1} \to \mathcal{P}(S)$ gedefinieerd door $x \mapsto \nu_{l+1}^x$ en $x \mapsto \mu_{l+1}^x$ continu zijn in x_0.

Neem $O := \bigcap_{i=1}^k O_i$. We bewijzen nu de geclaimde eigenschappen. De ongelijkheden in Vergelijkingen (7.1) en (7.2) zijn per constructie waar voor de n_l en $\mu_l^{x_0}$. Het is ook duidelijk dat $\nu_1^x(B_r(z)) = \ldots = \nu_k^x(B_r(z)) = 1$ voor alle $x \in O$. De andere eigenschap is gemakkelijk met inductie te bewijzen: er geldt voor $x \in O$ dat

$$\begin{aligned}P^{n_1+\ldots+n_k}\delta_x &= P^{n_2+\ldots+n_k}P^{n_1}\delta_x = P^{n_2+\ldots+n_k}\left(\alpha\nu_1^x + (1-\alpha)\mu_1^x\right)\\ &= \alpha P^{n_2+\ldots+n_k}\nu_1^x + (1-\alpha)P^{n_3+\ldots+n_k}P^{n_2}\mu_1^x\\ &= \alpha P^{n_2+\ldots+n_k}\nu_1^x + (1-\alpha)P^{n_3+\ldots+n_k}\left(\alpha\nu_2^x + (1-\alpha)\mu_2^x\right)\\ &= \alpha P^{n_2+\ldots+n_k}\nu_1^x + \alpha(1-\alpha)P^{n_3+\ldots+n_k}\nu_2^x + (1-\alpha)^2P^{n_3+\ldots+n_k}\mu_2^x\\ &= \ldots\\ &= \alpha P^{n_2+\ldots+n_k}\nu_1^x + \alpha(1-\alpha)P^{n_3+\ldots+n_k}\nu_2^x + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{k-1}\nu_k^x + (1-\alpha)^k\mu_k^x.\end{aligned}$$

Dus voor $x \in O$ en $n \geq n_1 + \ldots + n_k$ krijgen we:

$$\begin{aligned}
P^n\delta_x &= \alpha P^{n-n_1}\nu_1^x + \ldots + \alpha(1-\alpha)^{k-1}P^{n-n_1-\ldots-n_k}\nu_k^x + (1-\alpha)^k P^{n-n_1-\ldots-n_k}\mu_k^x \\
&= (1-\alpha)^k P^{n-n_1-\ldots-n_k}\mu_k^x + \alpha\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)^{i-1}P^{n-\sum_{j=1}^{i} n_j}\nu_i^x.
\end{aligned}$$

7.2 Uitbreidingsresultaten vanuit de constructie

In deze paragraaf bespreken we de resultaten die we kunnen halen uit de in Paragraaf 7.1 gegeven constructie. Het gaat dan vooral om resultaten die de e-eigenschap in meer punten, soms alle punten, geven, als gegeven is dat een Markov-operator in een bepaald punt de e-eigenschap heeft.

Stelling 7.2.1. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een asymptotisch stabiele reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Schrijf $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ voor de unieke invariante maat en U voor de duale van P. Neem aan dat er voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$ en $\varepsilon > 0$ een punt $z \in \mathrm{supp}(\mu^*)$ en een open omgeving O van z bestaan zodat $|U^n f(x) - U^n f(z)| < \varepsilon$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$ en $x \in O$. Dan heeft P de e-eigenschap.*

Bewijs. Zij $x_0 \in S$. Kies $f \in \mathrm{BL}(S)$ en $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $z \in \mathrm{supp}(\mu^*)$ en $r > 0$ zodat $\sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(x) - U^n f(z)| \leq \varepsilon/4$ voor alle $x \in B_r(z)$. Kies $\alpha := \mu^*(B_r(z))/2 > 0$ en neem $k \in \mathbb{N}$ zó dat $2(1-\alpha)^k\|f\|_\infty < \varepsilon/2$. Laat $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $O \subseteq S$ en $\nu_i^x, \mu_i^x \in \mathcal{P}(S)$ voor $i = 1, \ldots, k$ en $x \in O$ zijn zoals in de constructie vanuit (k, z, x_0, r, α) in Paragraaf 7.1. Merk op dat die constructie mogelijk is omdat aan de aannames van Vergelijkingen (7.1) en (7.2) wordt voldaan. De portmanteaustelling en de asymptotische stabiliteit geven namelijk dat

$$\liminf_{n\to\infty} P^n\mu(B_r(z)) \geq \mu^*(B_r(z)) > \alpha$$

voor elke $\mu \in \mathcal{P}(S)$. Voor iedere $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$ en $x \in O$ geldt er verder, vanwege het feit dat ν_i^x en $\nu_i^{x_0}$ geconcentreerd zijn op $B_r(z)$:

$$\begin{aligned}
|\langle P^n\nu_i^x, f\rangle - \langle P^n\nu_i^{x_0}, f\rangle| &= |\langle \nu_i^x, U^n f\rangle - \langle \nu_i^{x_0}, U^n f\rangle| \\
&\leq |\langle \nu_i^x, U^n f - U^n f(z)\rangle| + |\langle \nu_i^{x_0}, U^n f - U^n f(z)\rangle| \\
&\leq \langle \nu_i^x, |U^n f - U^n f(z)|\rangle + \langle \nu_i^{x_0}, |U^n f - U^n f(z)|\rangle \\
&\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Dus voor $x \in O$ en $n \geq n_1 + \ldots + n_k$ volgt dat

$$\begin{aligned}
&|U^n f(x) - U^n f(x_0)| = |\langle P^n\delta_x - P^n\delta_{x_0}, f\rangle| \\
&\quad = \left|\left\langle (1-\alpha)^k P^{n-n_1-\ldots-n_k}(\mu_k^x - \mu_k^{x_0}) + \alpha\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)^{i-1}P^{n-\sum_{j=1}^{i} n_j}(\nu_i^x - \nu_i^{x_0}), f\right\rangle\right| \\
&\quad \leq 2(1-\alpha)^k\|f\|_\infty + \alpha\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)^{i-1}\left|\left\langle P^{n-\sum_{j=1}^{i} n_j}(\nu_i^x - \nu_i^{x_0}), f\right\rangle\right| \\
&\quad < \varepsilon/2 + \alpha\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)^{i-1}\varepsilon/2 \\
&\quad < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nu kunnen we een open verzameling $O' \subseteq O$ om x_0 heen vinden zodat $|U^n f(x) - U^n f(x_0)| < \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in O'$. Dit bewijst dat P de e-eigenschap in x_0 heeft. Aangezien x_0 willekeurig gekozen is, concluderen we: P heeft de e-eigenschap. $\square$

Het volgende resultaat komt uit [19] en is een direct gevolg van Stelling 7.2.1.

Gevolg 7.2.2. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een asymptotisch stabiele reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Schrijf $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ voor de unieke invariante maat. Als P de* e-eigenschap *heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$, dan heeft P de* e-eigenschap*.*

Bewijs. Als P de e-eigenschap heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$, dan voldoet z voor alle $f \in \mathrm{BL}(S)$ en $\varepsilon > 0$ in Stelling 7.2.1. □

Het volgende resultaat komt uit [15] en het bewijs ervan is gebaseerd op Lemma 2.4 uit datzelfde artikel. Hier laten we zien dat dit resultaat valt af te leiden uit Stelling 7.2.1.

Gevolg 7.2.3. *Zij (S, d) een volledige en separabele metrische ruimte en P een asymptotisch stabiele reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Schrijf $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ voor de unieke invariante maat. Als het inwendige van* $\operatorname{supp}(\mu^*)$ *niet-leeg is, dan heeft P de* e-eigenschap*.*

Bewijs. Veronderstel dat het inwendige van $\operatorname{supp}(\mu^*)$ niet-leeg is. Schrijf U voor de duale van P. We gaan de voorwaarde voor Stelling 7.2.1 na. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. We gebruiken de categoriestelling van Baire. Zij $W \subseteq \operatorname{supp}(\mu^*)$ een niet-lege open deelverzameling van S. Dan is $Y = \overline{W}$ niet-leeg en volledig. Definieer

$$Y_n := \{y \in Y : |U^m f(y) - \langle \mu^*, f\rangle| \leq \varepsilon/3 \text{ voor iedere } m \geq n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Merk op dat

$$Y_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} \{y \in Y : |U^m f(y) - \langle \mu^*, f\rangle| \leq \varepsilon/3\}$$

gesloten is voor iedere $n \in \mathbb{N}$, omdat P Feller is. Verder hebben we voor elke $y \in S$ dat

$$\lim_{m\to\infty} |U^m f(y) - \langle \mu^*, f\rangle| = \lim_{m\to\infty} |\langle P^m\delta_y, f\rangle - \langle \mu^*, f\rangle| \leq \lim_{m\to\infty} \|P^m\delta_y - \mu^*\|_{\mathrm{BL}}^* \cdot \|f\|_{\mathrm{BL}} = 0,$$

zodat $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. De categoriestelling van Baire zegt nu dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat Y_N als deelverzameling van Y een niet-leeg inwendige heeft. Er bestaat dus een in de ruimte $\overline{W}$ open verzameling $V \subseteq Y_N$. Er is een open verzameling $V' \subseteq S$ zodat $V = V' \cap \overline{W}$. Neem $v \in V = V' \cap \overline{W}$ en kies $\delta > 0$ zodat $B_\delta(v) \subseteq V'$. Er bestaat nu een $z \in B_\delta(v)$ met $z \in W$. Dan vinden we dat $z \in V' \cap W$. In het bijzonder geldt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$. Neem $r' > 0$ zodat $B_{r'}(z) \subseteq V' \cap W \subseteq V$. Dan geldt voor elke $x \in B_{r'}(z)$ dat $x \in Y_N$, zodat

$$|U^m f(x) - U^m f(z)| \leq |U^m f(x) - \langle \mu^*, f\rangle| + |\langle \mu^*, f\rangle - U^m f(z)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$$

voor alle $m \geq N$. Wegens continuïteit van $Uf, \ldots, U^{N-1}f$ in z kunnen we nu een $r \in (0, r']$ vinden zodat $|U^m f(x) - U^m f(z)| < \varepsilon$ geldt voor iedere $x \in B_r(z)$ en $m \in \mathbb{N}$. □

In Gevolgen 7.2.2 en 7.2.3 hebben we dat Vergelijking (7.2) waar is voor welke kansmaat $\mu_l^{x_0}$ dan ook, vanwege de asymptotische stabiliteit. In Stelling 7.2.7, die volgt, zien we een resultaat waarbij Vergelijking (7.2) niet in het algemeen waar is, maar wel nog steeds waar is voor de geconstrueerde maten $\mu_l^{x_0}$. We herinneren aan Definitie 6.2.3 voor de notatie $U^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^n$ en $P^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^n$ voor $n \in \mathbb{N}$. We volgen [26] in de volgende definitie.

Definitie 7.2.4 (P-invariantie en ergodiciteit)**.** Zij P een Markov-operator op een topologische ruimte S. Een Borelverzameling $E \subseteq S$ heet *P-invariant* (Engels: *P-invariant*) als $P\delta_x(E) = 1$ voor elke $x \in E$. Een Borelkansmaat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ is *ergodisch met betrekking tot P* of simpelweg *ergodisch* (Engels: *ergodic with respect to P* of *ergodic*) als μ invariant is onder P en $\mu(E) = 0$ of $\mu(E) = 1$ geldt voor iedere P-invariante Borelverzameling $E \subseteq S$.

Lemma 7.2.5. *Zij P een Markov-operator op een separabele en volledige metrische ruimte S die continu is ten opzichte van de metriek die wordt geïnduceerd door de Dudleynorm. Voor elke invariante maat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ is de drager van μ P-invariant.*

Bewijs. Zij $\mu \in \mathcal{P}(S)$ invariant onder P. Wegens Propositie 6.2.9 is $\mathcal{P}(\mathrm{supp}(\mu))$ P-invariant. Het volgt dat $P\delta_x(\mathrm{supp}(\mu)) = 1$ voor iedere $x \in \mathrm{supp}(\mu)$. □

Lemma 7.2.6. *Zij S een volledige en separable metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S. Schrijf U voor de duale van P. Stel dat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een ergodische maat voor P is. Laat $z \in S$ en $r > 0$ en definieer $f = \mathbb{1}_{B_r(z)}$. Dan is er een meetbare verzameling $C \subseteq S$ van maat $\mu(C) = 1$ zodat $P\delta_x(C) = 1$ en $U^{(n)}f(x) \to \langle \mu, f\rangle = \mu(B_r(z))$ voor elke $x \in C$.*

Bewijs. Dit is Lemma 5.4.6 samen met Corollary 5.4.3, beide uit [26]. Dat eerste resultaat verwijst naar Proposition 2.4.2 in [10], hoewel de notatie daar anders is. We leggen uit hoe en waarom we Proposition 2.4.2 uit [10] kunnen gebruiken.

Definieer $\widetilde{P} : S \times \mathcal{B}(S) \to [0, 1]$ door

$$\widetilde{P}(x, A) = P\delta_x(A) = \langle P\delta_x, \mathbb{1}_A\rangle = U\mathbb{1}_A(x).$$

Merk hieruit op dat de afbeelding $\widetilde{P}(\cdot, A) : S \to [0, 1]$ voor vaste $A \in \mathcal{B}(S)$ gelijk is aan $U\mathbb{1}_A$ en daarom meetbaar is. Dus $\widetilde{P}$ is een overgangskern. Verder hebben we voor $x \in S$ dat

$$\widetilde{P}f(x) = \int_S f(y)\widetilde{P}(x, \mathrm{d}y) = \int_S f(y)\,\mathrm{d}P\delta_x(y) = \langle P\delta_x, f\rangle = \langle \delta_x, Uf\rangle = Uf(x).$$

Ook geldt voor $A \in \mathcal{B}(S)$:

$$\mu\widetilde{P}(A) = \int_S \widetilde{P}(x, A)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_S U\mathbb{1}_A(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \langle \mu, U\mathbb{1}_A\rangle = P\mu(A) = \mu(A).$$

Per definitie van P-invariantie, $\widetilde{P}$-invariantie en ergodiciteit met betrekking tot P en $\widetilde{P}$ zien we dat μ ook ergodisch is met betrekking tot $\widetilde{P}$. Proposition 2.4.2 uit [10] geeft nu dat

$$\lim_{n\to\infty} U^{(n)}f(x) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}^{(n)}f(x) = \langle \mu, f\rangle$$

voor μ-bijna alle $x \in S$. Er volgt dat

$$B := \left\{x \in S : U^{(n)}f(x) \to \langle \mu, f\rangle\right\}$$

voldoet aan $\mu(B) = 1$. Volgens Corollary 5.4.3 uit [26] bestaat er een meetbare verzameling $C \subseteq B$ zodat $P\delta_x(C) = 1$ voor iedere $x \in C$ en $\mu(C) = 1$. □

Stelling 7.2.7. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een ergodische maat met betrekking tot P zijn. Als P de* e-*eigenschap heeft in een punt $z \in \mathrm{supp}(\mu)$, dan heeft P de* e-*eigenschap in μ-bijna alle punten van S. Met andere woorden: P heeft de* e-*eigenschap ofwel in μ-bijna alle punten, ofwel in geen enkel punt van* $\mathrm{supp}(\mu)$.

Bewijs. Schrijf U voor de duale van P en neem aan dat er een punt $z \in \mathrm{supp}(\mu)$ bestaat zodat P de e-eigenschap heeft in z. Wegens Lemma 7.2.6 bestaat er voor elke $m \in \mathbb{N}$ een meetbare verzameling $C_m \subseteq S$ van maat $\mu(C_m) = 1$ zodat $P\delta_x(C_m) = 1$ en $\lim_{n\to\infty} U^{(n)}\mathbb{1}_{B_{1/m}(z)}(x) = \mu\big(B_{1/m}(z)\big)$ voor alle $x \in C_m$. Neem $C := \bigcap_{m=1}^{\infty} C_m$. Merk op dat $\mu(C) = 1$. We bewijzen dat P de e-eigenschap heeft in elk punt van C. Kies hiertoe $x_0 \in C$. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $m \in \mathbb{N}$ zodat $\sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(x) - U^n f(z)| \leq \varepsilon/4$ voor alle $x \in B_r(z)$, waar $r = 1/m$. Kies $\alpha := \mu(B_r(z))/2 > 0$ en neem $k \in \mathbb{N}$ zó dat $2(1 - \alpha)^k \|f\|_\infty < \varepsilon/2$. Laat

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $O \subseteq S$ en $\nu_i^x, \mu_i^x \in \mathcal{P}(S)$ voor $i = 1, \ldots, k$ en $x \in O$ zijn zoals in de constructie vanuit (k, z, x_0, r, α) in Paragraaf 7.1. We kunnen het bewijs van Stelling 7.2.1 volledig nadoen. We hoeven alleen na te gaan dat aan de aannames van Vergelijkingen (7.1) en (7.2) wordt voldaan. Omdat x_0 een element is van C_m, geldt $\lim_{n\to\infty} U^{(n)}\mathbb{1}_{B_r(z)}(x_0) = \mu(B_r(z))$. Dit omschrijven geeft

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_{x_0}(B_r(z)) = \mu(B_r(z)) > \alpha.$$

Dit bewijst dat er een $n_1 \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $P^{n_1}\delta_{x_0}(B_r(z)) > \alpha$.

We bewijzen met inductie dat $\mu_l^{x_0}(C_m) = 1$ en dat Vergelijking (7.2) waar is voor $l = 1, \ldots, k-1$. Voor alle kansmaten $\nu \in \mathcal{P}(S)$ met $\nu(C_m) = 1$ geldt dat

$$P\nu(C_m) = \langle \nu, U\mathbb{1}_{C_m}\rangle = \int_{C_m} \langle \delta_x, U\mathbb{1}_{C_m}\rangle \,\mathrm{d}\nu(x) = \int_{C_m} P\delta_x(C_m)\,\mathrm{d}\nu(x) = 1. \tag{7.3}$$

Hieruit zien we met herhaaldelijk toepassen: $P^{n_1}\delta_{x_0}(C_m) = 1$. Dus

$$\mu_1^{x_0}(C_m) = \frac{1}{1-\alpha}(P^{n_1}\delta_{x_0}(C_m) - \alpha\nu_1^{x_0}(C_m)) \geq \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha) = 1.$$

Nu rekenen we uit, waar we het lemma van Fatou in de vierde stap en een eigenschap van C_m in de vijfde stap gebruiken:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\mu_1^{x_0}(B_r(z)) &= \liminf_{n\to\infty} \left\langle \mu_1^{x_0}, U^{(n)}\mathbb{1}_{B_r(z)} \right\rangle \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{C_m} \left\langle \delta_x, U^{(n)}\mathbb{1}_{B_r(z)} \right\rangle \mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{C_m} P^{(n)}\delta_x(B_r(z))\,\mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) \\
&\geq \int_{C_m} \liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x(B_r(z))\,\mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) \\
&= \int_{C_m} \mu(B_r(z))\,\mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) = \mu(B_r(z)) \\
&> \alpha.
\end{aligned}$$

In het bijzonder is er dus een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $P^{n_2}\mu_1^{x_0}(B_r(z)) > \alpha$. Stel nu voor een zekere $l \in \{1, \ldots, k-2\}$ dat $\mu_l^{x_0}(C_m) = 1$ en dat Vergelijking (7.2) waar is. Wegens Vergelijking (7.3) hebben we $P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(C_m) = 1$. Dus $\mu_{l+1}^{x_0}(C_m) = 1$. Op dezelfde manier als boven kunnen we nu uitrekenen dat

$$\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\mu_{l+1}^{x_0}(B_r(z)) > \alpha.$$

Er moet dus een $n_{l+2} \in \mathbb{N}$ bestaan met $P^{n_{l+2}}\mu_{l+1}^{x_0}(B_r(z)) > \alpha$. □

Stelling 7.2.8. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een invariante maat zijn en schrijf U voor de duale van P. Veronderstel dat er een P-invariante verzameling C bestaat zodanig dat $\left(P^{(n)}\delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak convergeert naar μ voor elke $x \in C$. Neem verder aan dat er voor iedere $f \in \mathrm{BL}(S)$ en $\varepsilon > 0$ een punt $z \in \mathrm{supp}(\mu)$ en een open omgeving O van z bestaan zodat $|U^n f(x) - U^n f(z)| < \varepsilon$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $x \in O$. Dan heeft P de e-eigenschap in alle punten van C.*

Bewijs. Het bewijs lijkt sterk op dat van Stelling 7.2.7. Laat $x_0 \in C$. Zij $f \in \mathrm{BL}(S)$ en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies een $z \in \mathrm{supp}(\mu)$ zodanig dat er een $r > 0$ bestaat met $\sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(x) - U^n f(z)| \leq \varepsilon/4$ voor alle $x \in B_r(z)$. Kies $\alpha := \mu(B_r(z))/2 > 0$ en neem $k \in \mathbb{N}$ zó dat $2(1-\alpha)^k \|f\|_\infty < \varepsilon/2$. Laat $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $O \subseteq S$ en $\nu_i^x, \mu_i^x \in \mathcal{P}(S)$ voor $i = 1, \ldots, k$ en $x \in O$ zijn zoals in de constructie vanuit (k, z, x_0, r, α) in Paragraaf 7.1. We kunnen het bewijs van Stelling 7.2.1 volledig nadoen. We hoeven alleen na te gaan dat aan de aannames van Vergelijkingen (7.1) en (7.2) wordt voldaan. Per aanname geldt dat $P^{(n)}\delta_{x_0} \to \mu$ zwak, zodat $\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_{x_0}(B_r(z)) \geq \mu(B_r(z)) > \alpha$ vanwege de portmanteaustelling. Dit bewijst dat er een $n_1 \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $P^{n_1}\delta_{x_0}(B_r(z)) > \alpha$.

We bewijzen met inductie dat $\mu_l^{x_0}(C) = 1$ en dat Vergelijking (7.2) waar is voor $l = 1, \ldots, k-1$. Merk op: $P^{n_1}\delta_{x_0}(C) = 1$. Er volgt dat $\mu_1^{x_0}(C) = 1$. Nu rekenen we uit, waar we het lemma van Fatou in de tweede stap en de pormanteaustelling in de derde stap gebruiken:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\mu_1^{x_0}(B_r(z)) &= \liminf_{n\to\infty} \int_C P^{(n)}\delta_x(B_r(z))\, \mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) \\
&\geq \int_C \liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x(B_r(z))\, \mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) \\
&\geq \int_C \mu(B_r(z))\, \mathrm{d}\mu_1^{x_0}(x) = \mu(B_r(z)) \\
&> \alpha.
\end{aligned}$$

In het bijzonder is er dus een $n_2 \in \mathbb{N}$ zodat $P^{n_2}\mu_1^{x_0}(B_r(z)) > \alpha$. Stel nu voor een zekere $l \in \{1, \ldots, k-2\}$ dat $\mu_l^{x_0}(C) = 1$ en dat Vergelijking (7.2) waar is. Er geldt dat $P^{n_{l+1}}\mu_l^{x_0}(C) = 1$, zodat $\mu_{l+1}^{x_0}(C) = 1$. Net als boven kunnen we nu uitrekenen dat $\liminf_{n\to\infty} P^{(n)}\mu_{l+1}^{x_0}(B_r(z)) > \alpha$. Er moet dus een $n_{l+2} \in \mathbb{N}$ bestaan met $P^{n_{l+2}}\mu_{l+1}^{x_0}(B_r(z)) > \alpha$. □

Opmerking 7.2.9. Een niet-lege P-invariante verzameling C als in Stelling 7.2.8 moet noodzakelijkerwijs voldoen aan $\mu(\overline{C}) = 1$, ofwel $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{C}$. De portmanteaustelling geeft namelijk voor $x \in C$ dat

$$\mu(\overline{C}) \geq \limsup_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x(\overline{C}) = 1.$$

Gevolg 7.2.10. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een invariante maat zijn. Veronderstel dat er een P-invariante verzameling C bestaat zodanig dat $\left(P^{(n)}\delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak convergeert naar μ voor elke $x \in C$. Als P de* e-eigenschap *heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu)$, dan heeft P de* e-eigenschap *in alle punten van C.*

Nemen we in Gevolg 7.2.10 specifieke P-invariante verzamelingen C, dan krijgen we de volgende resultaten.

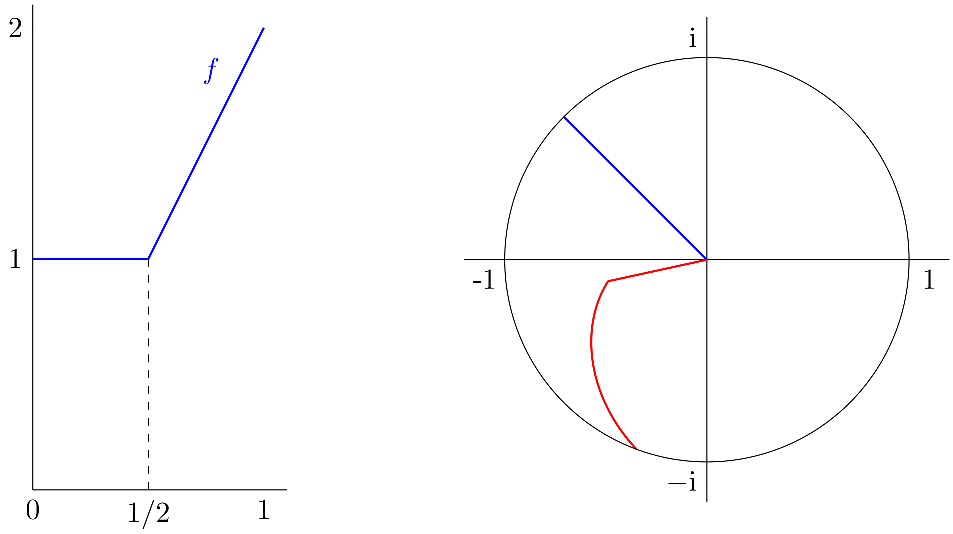
Gevolg 7.2.11. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Veronderstel het bestaan van een invariante maat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ zodat $\left(P^{(n)}\delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak convergeert naar μ voor elke $x \in S$. Als P de* e-eigenschap *heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu)$, dan heeft P de* e-eigenschap.

Opmerking 7.2.12. Dit is een veralgemenisering van Gevolg 7.2.2.

Gevolg 7.2.13. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een invariante maat zijn. Veronderstel dat $\left(P^{(n)}\delta_x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwak convergeert naar μ voor elke $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Als P de* e-eigenschap *heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu)$, dan heeft P de* e-eigenschap *in alle punten van $\operatorname{supp}(\mu)$. Met andere woorden: P heeft de* e-eigenschap *ofwel in geen enkel punt van $\operatorname{supp}(\mu)$, ofwel in elk punt van $\operatorname{supp}(\mu)$.*

Bewijs. Dit is een direct gevolg van Gevolg 7.2.10 en Lemma 7.2.5. □

Gevolg 7.2.14. *Zij S een volledige en separabele metrische ruimte en P een reguliere Markov-operator op S. Laat $\mu \in \mathcal{P}(S)$ een ergodische maat zijn. Veronderstel dat P de Cesàro-e-eigenschap heeft. Als P de* e-eigenschap *heeft in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu)$, dan heeft P de* e-eigenschap *in alle punten van $\operatorname{supp}(\mu)$. Met andere woorden: P heeft de* e-eigenschap *ofwel in geen enkel punt van $\operatorname{supp}(\mu)$, ofwel in elk punt van $\operatorname{supp}(\mu)$.*



(a) De grafiek van f.

(b) Het beeld (in rood) onder T van het lijnstuk $\{re^{i3\pi/4} : 0 \leq r \leq 1\}$ (in blauw).

Figuur 7.1: Visualisatie van de afbeeldingen f en T uit Voorbeeld 7.2.17.

Bewijs. Corollary 7.3.5 en Proposition 7.3.11 uit [26] geven samen dat $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x = \mu$ zwak voor iedere $x \in \operatorname{supp}(\mu)$. Pas nu Gevolg 7.2.13 toe. □

Opmerking 7.2.15. Vergelijk Gevolg 7.2.14 met Stelling 7.2.7. Als we de Cesàro-e-eigenschap aannemen in plaats van het zwakkere Feller zijn, krijgen we de e-eigenschap in elk punt van de drager in plaats van in bijna alle punten.

Opmerking 7.2.16. Er zijn ook versies van de e-eigenschap en de e-eigenschap in een punt waar $\mathrm{BL}(S)$ wordt vervangen door $C_b(S)$. Met die definities zijn alle resultaten boven nog waar, met dezelfde bewijzen.

Voorbeeld 7.2.17. Zij $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ de gesloten eenheidsschijf in het complexe vlak. Definieer $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{als } r \leq \frac{1}{2}; \\ 2r & \text{als } r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Beschouw verder de Markov-operator $P = T_*$ op S, waar de continue afbeelding $T : S \to S$ gegeven wordt door

$$T(z) = z \cdot e^{if(|z|)}.$$

Zie Figuur 7.1. Dan is P regulier en Markov-Feller. Laat λ_r voor $0 \leq r \leq 1$ de zó geschaalde Lebesguemaat op $S_r := \{z \in S : |z| = r\}$ zijn dat λ_r een kansmaat is. Voor $0 \leq r \leq 1/2$ is λ_r invariant onder P. Immers, voor $0 \leq r \leq 1/2$ en $E \in \mathcal{B}(S)$ geldt er:

$$P\lambda_r(E) = \lambda_r(T^{-1}(E)) = \lambda_r(T^{-1}(E \cap S_r)) + \lambda_r(T^{-1}(E \cap S_r^c)) = \lambda_r(E \cap S_r) + 0 = \lambda_r(E).$$

Zij $r \in [0, 1/2]$. We bewijzen dat λ_r ergodisch is. De redenatie volgt Proposition 4.11 uit [9] en gebruikt Fourierreeksen. Laat $E \subseteq S$ een P-invariante Borelverzameling zijn. Omdat E P-invariant is, hebben we dat

$$\delta_{T(x)}(E) = P\delta_x(E) = 1,$$

ofwel $T(x) \in E$, voor iedere $x \in E$. Dus voor iedere $x \in E \cap S_r$ geldt $T(x) \in E \cap S_r$. Er volgt voor iedere $x \in E \cap S_r$ dat

$$(\mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T)(x) = 1 = \mathbb{1}_{E\cap S_r}(x).$$

Dus $\mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T \geq \mathbb{1}_{E\cap S_r}$. Derhalve:

$$0 \leq \langle \lambda_r, |\mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T - \mathbb{1}_{E\cap S_r}|\rangle = \langle \lambda_r, \mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T\rangle - \langle \lambda_r, \mathbb{1}_{E\cap S_r}\rangle = \langle P\lambda_r, \mathbb{1}_{E\cap S_r}\rangle - \langle \lambda_r, \mathbb{1}_{E\cap S_r}\rangle \\ = 0.$$

Hieruit zien we dat $\mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T = \mathbb{1}_{E\cap S_r}$ λ_r-bijna overal. Als we $\mathbb{1}_{E\cap S_r}$ opvatten als functie van S_r naar $\mathbb{R}$, dan zien we dat er getallen $a_n \in \mathbb{C}$ voor $n \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat

$$\mathbb{1}_{E\cap S_r}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

geldt voor λ_r-bijna alle $z \in S_r$. Gebruiken dat $\mathbb{1}_{E\cap S_r} \circ T = \mathbb{1}_{E\cap S_r}$ λ_r-bijna overal geeft voor λ_r-bijna alle $z \in S_r$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (T(z))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} z^n.$$

Dus $a_n = a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}$ voor iedere $n \in \mathbb{Z}$. Er volgt dat $a_n = 0$ voor $n \neq 0$, en daar volgt weer uit dat $\mathbb{1}_{E\cap S_r}(z) = a_0$ voor λ_r-bijna alle $z \in S_r$. Dus $\lambda_r(E \cap S_r) \in \{0, 1\}$ en $\lambda_r(E) \in \{0, 1\}$. Dit bewijst dat λ_r ergodisch is.

In overeenstemming met Stelling 7.2.7 doen we de volgende waarnemingen.

- Stel dat $0 \leq r < 1/2$. Als $z \in S_r$, dan heeft P de e-eigenschap in z, want voor $f \in \mathrm{BL}(S)$ geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} |(f \circ T^n)(x) - (f \circ T^n)(z)| &\leq \lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f|_L \cdot |T^n(x) - T^n(z)| \\ &= \lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f|_L \cdot |x\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}| \\ &= 0. \end{aligned}$$

  Stelling 7.2.7 geeft dat P de e-eigenschap heeft in λ_r-bijna alle punten. Dat klopt inderdaad, aangezien we met bovenstaand argument inzien dat P de e-eigenschap heeft in ieder punt van S_r.

- Als $r = 1/2$ en $z = 1/2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in S_r$, dan heeft P niet de e-eigenschap in z. Bekijk namelijk de rij $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, met $x_m = z \cdot (1 + 1/m)$ voor $m \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |T^n(x_m) - T^n(z)| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| 1/2(1 + 1/m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+(1+1/m)n)} - 1/2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+n)} \right| \\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+(1+1/m)n)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+n)} \right| - \frac{1}{2m} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{m}} - 1 \right| - \frac{1}{2m} \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

  voor alle $m \in \mathbb{N}$, hoewel $\lim_{m\to\infty} x_m = z$. De Markov-operator P heeft dus in geen enkel punt van $\mathrm{supp}(\lambda_{1/2}) = S_{1/2}$ de e-eigenschap. In dit geval geeft Stelling 7.2.7 niet dat P de e-eigenschap heeft in $\lambda_{1/2}$-bijna alle punten, wat ook inderdaad niet waar is.

Voor $1/2 < r \leq 1$ is λ_r ergodisch dan en slechts dan als π/r irrationaal is, en heeft P in geen enkel punt van S_r de e-eigenschap. Het voorbeeld gaat er echter om dat we zien dat beide situaties van Stelling 7.2.7 tegelijkertijd voor kunnen komen, dus we zullen dit niet bewijzen.

Zoals we in het begin van dit hoofdstuk al zeiden, is het soms moeilijk om te bepalen wat de onder een Markov-operator invariante maten precies zijn en is het dus al helemaal moeilijk om equicontinuïteit erin aan te tonen. De volgende proposities zijn daarom nuttig.

Propositie 7.2.18. *Zij $P : \mathcal{M}^+(S) \to \mathcal{M}^+(S)$ een reguliere, asymptotisch stabiele Markov-operator op een separabele en volledige metrische ruimte S. Veronderstel dat P Markov-Feller is. Schrijf $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$ voor de unieke invariante kansmaat en U voor de duale van P. Geef $\mathcal{M}^+(S)$ de metriek die afkomt van de Dudleynorm. Dan zijn equivalent:*

1. *P heeft de* e*-eigenschap;*
2. *$\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu op $\mathcal{M}^+(S)$;*
3. *$\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu in μ^*;*
4. *P heeft de* e*-eigenschap in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$;*
5. *$\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu in δ_z voor een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$.*

Bewijs. Punt 1. en 2. zijn equivalent wegens Theorem 4.1 in [14] en punt 2. en 3. zijn equivalent door Propositie 7.0.1. Gevolg 7.2.2 geeft dat punt 1. en punt 4. equivalent zijn. Dit bewijst dat de eerste vier punten equivalent zijn. De implicatie 2. $\implies$ 5. is triviaal. Neem als laatste aan dat er een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$ bestaat zodat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is in δ_z. We rekenen uit voor $f \in \mathrm{BL}(S)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} |U^n f(x) - U^n f(z)| &= \lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle P^n\delta_x, f\rangle - \langle P^n\delta_z, f\rangle| \\ &\leq \lim_{x\to z} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P^n\delta_x - P^n\delta_z\|^*_{\mathrm{BL}} \cdot \|f\|_{\mathrm{BL}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dus $\{U^n f : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu in z voor elke $f \in \mathrm{BL}(S)$. We concluderen dat P de e-eigenschap heeft in z. □

Het volgende, en laatste, resultaat verbindt Hoofdstuk 6, in het bijzonder Subparagraaf 6.2.2, met de hier bewezen resultaten. Het geeft aan dat in Stelling 6.0.3, waar $M = \mathcal{P}(S)$ en waar ρ afkomt van de Dudleynorm, de aanname dat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is op de insnoerende verzameling K vervangen kan worden door een andere uitspraak, wanneer we aannemen dat P regulier en Markov-Feller is en dat P een unieke invariante kansmaat heeft.

Propositie 7.2.19. *Stel dat S een separabele en volledige metrische ruimte is en zij P een reguliere Markov-operator op S die Markov-Feller is. Geef $\mathcal{M}^+(S)$ de metriek die afkomt van de Dudleynorm. Veronderstel het bestaan van een unieke invariante kansmaat $\mu^* \in \mathcal{P}(S)$. Neem verder aan dat er een compacte insnoerende verzameling $K \subseteq \mathcal{P}(S)$ voor de beperking $P|_{\mathcal{P}(S)} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ bestaat. Dan zijn equivalent:*

1. *Er geldt $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x = \mu^*$ voor alle $x \in S$ en P heeft de* e*-eigenschap in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*)$;*
2. *De familie $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ is equicontinu op $\mathcal{M}^+(S)$.*

Bewijs. Neem punt 1. aan. Dan heeft P de e-eigenschap wegens Gevolg 7.2.11. Uit Theorem 4.1 in [14] vinden we dat $\{P^n : n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu is op $\mathcal{M}^+(S)$.

Neem nu punt 2. aan. Vanwege Theorem 4.1 uit [14] heeft P de e-eigenschap. In het bijzonder heeft P dus de e-eigenschap in een punt $z \in \operatorname{supp}(\mu^*) \neq \varnothing$. Merk op dat P voldoet aan de voorwaarden voor Stelling 6.0.3, waar $M = \mathcal{P}(S)$ en waar ρ afkomt van $\|\cdot\|^*_{\mathrm{BL}}$. Uit Propositie 6.2.4 krijgen we dat $\lim_{n\to\infty} P^{(n)}\delta_x = \mu^*$ voor alle $x \in S$. □

Bibliografie

[1] F. Albiac en N.J. Nigel. *Topics in Banach Space Theory*. Springer, 2006. DOI: 10.1007/0-387-28142-8.

[2] V.I. Bogachev. *Measure Theory*. Springer Verlag: Berlin Heidelberg, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-34514-5.

[3] J. Diestel en J.J. Uhl Jr. *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society, 1977. URL: https://bookstore.ams.org/surv-15.

[4] R.M. Dudley. „Convergence of Baire measures". In: *Studia Mathematica* 27 (3 1966), p. 251–268. URL: http://eudml.org/doc/217174.

[5] N. Dunford en J.T. Schwartz. *Linear Operators. Part 1: General Theory*. Interscience Publishers, 1958.

[6] E.Y. Emel'yanov. *Non-spectral Asymptotic Analysis of One-Parameter Operator Semigroups*. Birkhäuser Basel, 2007. DOI: 10.1007/978-3-7643-8114-1.

[7] A. Grothendieck. „Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$". Frans. In: *Canadian Journal of Mathematics* 5 (1953), p. 129–173. DOI: 10.4153/CJM-1953-017-4.

[8] M. Hairer. *Ergodic properties of a class of non-Markovian processes*. Jun 2007. URL: http://www.hairer.org/papers/Kaiserslautern.pdf.

[9] J. Hawkins. *Ergodic Dynamics*. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-59242-4.

[10] O. Hernández-Lerma en J.B. Lasserre. *Markov Chains and Invariant Probabilities*. Birkhäuser Basel, 2003. DOI: 10.1007/978-3-0348-8024-4.

[11] E. Hewitt en K.A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis. Volume I, Structure of Topological Groups Integration theory Group Representations*. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 1963. DOI: 10.1007/978-3-662-40409-6.

[12] E. Hille en R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-groups*. Colloquium Publications, Vol. 31. American Mathematical Society, 1996. URL: https://bookstore.ams.org/coll-31.

[13] S.C. Hille. „Fundamentals of Nonlinear Analysis". Dictaat van college Mathetmatisch Instituut, Universiteit Leiden. 2012.

[14] S.C. Hille, T. Szarek, D.T.H. Worm en M.A. Ziemlańska. „Equivalence of equicontinuity concepts for Markov operators derived from a Schur-like property for spaces of measures". In: *Statistics & Probability Letters* 169, 108964 (2020). DOI: 10.1016/j.spl.2020.108964.

[15] S.C. Hille, T. Szarek en M.A. Ziemlańska. „Equicontinuous families of Markov operators in view of asymptotic stability". In: *Comptes Rendus. Mathematique* 355 (2017), p. 1247–1251. DOI: 10.1016/j.crma.2017.10.019.

[16] K.H. Hofmann en S.A. Morris. *The Structure of Compact Groups. A Primer for the Student - A Handbook for the Expert*. 2de ed. Walter de Gruyter GmbH, 2006. DOI: 10.1515/9783110199772.

[17] J. Komorník. „Asymptotic Periodicitiy of Markov and Related Operators”. In: *Dynamics Reported (Expositions in Dynamical Systems)*. Deel 2. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, 1993. DOI: 10.1007/978-3-642-61232-9_2.

[18] J. Komorník en E.G.F. Thomas. „Asymptotic periodicity of Markov operators on signed measures”. In: *Mathematica Bohemica* 116.2 (1991), p. 174–180. DOI: 10.21136/MB.1991.126138.

[19] R. Kukulski en H. Wojewódka-Ściążo. „The e-property of asymptotically stable Markov-Feller operators”. In: *Colloquium Mathematicum* 165 (2021), p. 269–283. DOI: 10.4064/cm8165-6-2020.

[20] A. Lasota, T.Y. Li en J.A. Yorke. „Asymptotic periodicity of the iterates of Markov operators”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 286 (1984), p. 751–764. DOI: 10.1090/S0002-9947-1984-0760984-4.

[21] A. Lasota en M.C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise*. 2de ed. Springer, 1994. DOI: 10.1007/978-1-4612-4286-4.

[22] B. Lemmens en O. van Gaans. „Dynamics of non-expansive maps on strictly convex Banach spaces”. In: *Israel Journal of Mathematics* 171 (2009), p. 425–442. DOI: 10.1007/s11856-009-0057-2.

[23] J.R. Munkres. *Topology*. 2de ed. Pearson, 2000. URL: https://www.pearson.com/us/higher-education/product/Munkres-Topology-2nd-Edition/9780131816299.html.

[24] G.R. Sell en Y. You. *Dynamics of Evolutionary Equations*. Springer Verlag: New York, 2002. DOI: 10.1007/978-1-4757-5037-9.

[25] A.V. Skorokhod. „Limit Theorems for Stochastic Processes”. In: *Theory of Probability & Its Applications* 1 (3 1956), p. 261–290. DOI: 10.1137/1101022.

[26] D.T.H. Worm. „Semigroups on spaces of measures”. Proefschrift. Universiteit Leiden, 2010. URL: https://hdl.handle.net/1887/15948.

[27] R. Zaharopol. *Invariant Probabilities of Markov-Feller Operators and Their Supports*. Birkhäuser Basel, 2005. DOI: 10.1007/b98076.

[28] M. Ziemlańska. „Approach to Markov Operators on Spaces of Measures by Means of Equicontinuity”. Proefschrift. Universiteit Leiden, 2021. URL: https://hdl.handle.net/1887/3135034.

Symbolenlijst

Index