



Universiteit  
Leiden  
The Netherlands

**Randgevallen: Thoms theorie van cobordisme en transversaliteit**  
Buijsen, Matthijs

**Citation**

Buijsen, M. (2024). *Randgevallen: Thoms theorie van cobordisme en transversaliteit*.

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [License to inclusion and publication of a Bachelor or Master Thesis, 2023](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/4209114>

**Note:** To cite this publication please use the final published version (if applicable).

M.J. Buijsen

**Randgevallen:  
Thoms theorie van cobordisme en transversaliteit**

Bachelorscriptie

30 juni 2024

Scriptiebegeleider: dr. F. Pasquotto



Universiteit Leiden  
Mathematisch Instituut  
([matthijs.buijsen@hetnet.nl](mailto:matthijs.buijsen@hetnet.nl))

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Gladde variëteiten</b>	<b>5</b>
2.1	Gladde variëteiten met en zonder rand . . . . .	5
2.2	Gladde afbeeldingen en raakruimtes . . . . .	7
2.3	Vectorbundels . . . . .	9
2.4	Homotopiegroepen en gladde homotopie . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Transversaliteit</b>	<b>14</b>
3.1	Reguliere waarden en transversaliteit . . . . .	14
3.2	Cobordisme . . . . .	18
<b>4</b>	<b>De Grassmannvariëteit en universele bundels</b>	<b>21</b>
4.1	Grassmannvariëteit en universele bundel . . . . .	21
4.2	Universele eigenschap . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Thom-Pontryaginconstructie</b>	<b>27</b>
5.1	Eerste constructiepoging en Thomruimte . . . . .	27
5.2	De constructie . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Stiefel-Whitneygetallen</b>	<b>33</b>
6.1	Stiefel-Whitneyklassen . . . . .	33
6.2	Stiefel-Whitneygetallen en cobordisme . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Discussie</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Cohomologie</b>	<b>42</b>

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

In de achttiende en het begin van de negentiende eeuw zorgde het gezamenlijk werk van verschillende wiskundigen voor een van de grootste paradigmaveranderingen in de geschiedenis van de wiskunde. De meetkunde, een van de oudste disciplines binnen de wiskunde, werd opgeschud door de mogelijkheid om een van de vijf klassieke axioma's van Euclides weg te laten. Dit gaf de mogelijkheid om een veel grotere verzameling meetkundige ruimtes te bekijken, die gekenmerkt worden door een zekere mate van kromming. In eerste instantie werden zo voornamelijk oppervlaktes bestudeerd, twee-dimensionale ruimtes die leven in drie dimensies, zoals bollen, donuts en het hyperbolisch vlak. Deze oppervlakken kregen snel praktische toepassingen, toen ze het natuurlijk speelvlak bleken van Hamiltoniaanse en Lagrangiaanse mechanica, modellen in de klassieke mechanica. Zij motiveerden een uitgebreide analyse op deze oppervlakken, zodat er afgeleides, raakruimtes, integralen en differentiaalvergelijken op werden gedefinieerd.

Vrij snel motiveerde de natuurkunde echter om de oppervlaktes waarop al deze analyse mogelijk was, te generaliseren naar hogere dimensies. De eerste die grote stappen zette in het formaliseren van deze noties, was Riemann. Hij gaf in zijn oratie een intuïtie voor de ruimtes die nu variëteiten heten, en introduceerde in zijn proefschrift de Riemannoppervlakken[1][2]. Deze werden later gegeneraliseerd tot Riemannvariëteiten, die de ruimtes bleken te zijn waarop al onze gewenste analyse natuurlijk was.

Poincaré introduceerde topologische technieken om deze en algemenere variëteiten te bestudeerde, en formuleerde het vermoeden van Poincaré, dat in de twintigste eeuw een belangrijke motivator was voor verdere bestudering van de variëteiten. Tegelijkertijd bracht Einstein met zijn algemene relativiteitstheorie het bestuderen van gladde variëteiten in het centrum van de natuurkundige belangstelling. Verdere wiskundige kennis van deze variëteiten was nodig en dit bracht Whitney tot zijn definitie van gladde variëteiten, die de intuïtie van de negentiende-eeuwse wiskundigen formaliseerde en nog steeds gebruikt wordt. Whitney bewees direct enkele eigenschappen die het nut van zijn definitie lieten zien. Zo liet hij zien dat iedere variëteit in een (platte) Euclidische ruimte gelegd kan worden.

Whitneys definitie gaf een nieuwe impuls aan het onderzoek van variëteiten en hoewel zijn definitie intuïtief en eenvoudig was, bleek deze al vrij snel mysterieuze eigenschappen aan variëteiten te geven. Zo bleek het gegeneraliseerde vermoeden van Poincaré niet altijd waar te zijn, waren er verschillende, exotische structuren op ruimtes zo simpel als de bol en was het classificeren van variëteiten, dat voor krommen en oppervlakken erg eenvoudig was, schier onmogelijk. In dimensie 4 of hoger blijkt er zelfs geen enkele zinvolle classificatie van variëteiten op diffeomorfisme (de natuurlijke 'hetzelfde-zijn' structuur voor gladde variëteiten) mogelijk, op een manier die erg precies gemaakt kan worden.

Dit zijn de vraagstukken waar een differentiaaltopoloog zich mee bezighoudt. De differentiaaltopoloog zoekt enerzijds naar eigenschappen om verschillende gladde variëteiten van elkaar te onderscheiden, en anderzijds naar manieren om nieuwe variëteiten te construeren. Ondanks de bovengenoemde ‘tegenslagen’ bij het onderscheiden van variëteiten, bracht de twintigste eeuw ook erg elegante theorieën en classificaties. In deze scriptie zullen we het werk van René Thom (1923-2002) behandelen, die in de jaren ’50 een nieuwe ‘hetzelfde-zijn’ structuur aan variëteiten gaf waardoor ze wel goed te classificeren zijn, en hier in 1958 een Fieldsmedaille voor kreeg. Deze structuur, cobordisme, lijkt op het eerste gezicht arbitrair: twee variëteiten worden nu als hetzelfde gezien wanneer ze gezamenlijk de rand vormen van een hogerdimensionale variëteit. Toch bleek dat cobordisme enerzijds zinvolle informatie gaf over variëteiten en dat anderzijds relatief eenvoudig te zien was wanneer twee variëteiten cobordant zijn. Om dit te laten zien introduceerde Thom eveneens transversaliteit, dat inmiddels fundamenteel gereedschap is in het bestuderen van variëteiten.

Wij zullen in deze scriptie cobordisme en transversaliteit introduceren en laten zien hoe ze verbonden zijn, waarna we daadwerkelijk gladde variëteiten op cobordisme na zullen classificeren. Hiervoor zullen we beginnen met de spelregels: in het tweede hoofdstuk definiëren we gladde variëteiten formeel, samen met enkele eerste eigenschappen en topologische technieken om ze te bestuderen. In het derde hoofdstuk geven we de definitie van zowel transversaliteit als cobordisme, en bewijzen we het fundamentele verband tussen deze twee begrippen. Hierna bestuderen we de omgevingen van variëteiten in hoofdstuk vier, en laten we zien hoe we deze kunnen onderscheiden van elkaar met behulp van een zekere ‘universele bundel’. Dit gebruiken we in hoofdstuk vijf om uiteindelijk gladde variëteiten op cobordisme na te classificeren. Hoewel we dan alle cobordismeklassen berekend hebben, zijn we tegen die tijd nog steeds geen variëteit tegengekomen die (op een niet-triviale manier) geen rand is. In hoofdstuk zes gaan we naar zo’n variëteit op zoek en vinden we deze met behulp van de Stiefel-Whitneygetallen, die in later cobordismeonderzoek een zeer belangrijke rol hebben gekregen.

Deze scriptie vereist enige elementaire voorkennis van analyse, groepentheorie en (algebraïsche) topologie. Begrippen uit de differentiaalmeetkunde zullen allemaal in de scriptie gegeven worden en waar mogelijk toegelicht met enkele voorbeelden. De lezer die hier wel vertrouwd mee is, kan, behalve misschien een snelle blik voor de notatie, beginnen bij paragraaf 2.4 over homotopiegroepen. Het zesde hoofdstuk vereist ook kennis van singuliere homologie en cohomologie (waarvan enkele basiskennmerken in appendix A zullen worden besproken), maar de eerste vijf hoofdstukken zijn goed los te lezen zonder deze begrippen te kennen.

## Hoofdstuk 2

# Gladde variëteiten

Om onze zoektocht naar fundamentele eigenschappen van variëteiten te beginnen, moeten eerst de spelregels duidelijk zijn. Daarom zal dit hoofdstuk beginnen met een kort overzicht van basisdefinities over variëteiten. Nadat we de definitie en enkele voorbeelden hebben gezien, zullen we naar de structuurbehoudende afbeeldingen tussen gladde variëteiten kijken. Deze heten gladde afbeeldingen, en gladde homeomorfismen zijn diffeomorfismen. Een belangrijk kenmerk van gladde variëteiten is dat ze lokaal plat zijn, en dus lineair te benaderen. Dit doen we met de introductie van de raakruimtes van punten in variëteiten, die in het hoofdstuk over transversaliteit een belangrijke rol zullen krijgen.

In deze scriptie willen we globale eigenschappen van variëteiten vinden. De Deense wiskundige Heegard sprak al in zijn dissertatie: ‘Twee gesloten oppervlakken, van bijvoorbeeld genus 0, gelegen in een variëteit van dimensie vier, zijn altijd equivalent, maar, zoals we zien, zijn hun omgevingen niet noodzakelijk equivalent.’ [3] De omgevingen waar Heegard over sprak, zijn zogenaamde buisvormige omgevingen en deze hebben veel gemeen met (en zijn ook diffeomorf met) normaalbundels. Een normaalbundel is een voorbeeld van een **vectorbundel** boven een variëteit. De verschillen in buisvormige omgevingen en dus in vectorbundels boven een variëteit blijken in hoofdstukken 4 en 5 de sleutel te zijn om verschillende cobordismeklassen te herkennen.

Cobordisme, waarvan we de formele definitie in hoofdstuk 3 zullen geven, is zo’n globale eigenschap van een variëteit. Een dergelijke globale eigenschap noemen we een topologische invariant. Een van de simpelste invarianten van een variëteit is de homotopiegroep, een generalisatie van de fundamenteelgroep. Deze zullen we daarom introduceren en we zullen direct bekijken wat de relatie is tussen homotopiegroepen, die gaan over continue afbeeldingen, en de natuurlijke afbeeldingen tussen gladde variëteiten, gladde afbeeldingen.

De eerste drie paragrafen van dit hoofdstuk zijn in feite een bondige introductie in de differentiaalmeetkunde en geïnspireerd door het boek van Lee [4]. Voor meer en uitgebreidere behandeling van voorbeelden verwijzen we naar de eerste tien hoofdstukken van dit boek.

### 2.1 Gladde variëteiten met en zonder rand

**Definitie 2.1.** *Een (topologische) variëteit  $M$  is een topologische ruimte met de volgende drie eigenschappen:*

1.  *$M$  is een Hausdorffruimte (dus iedere twee verschillende punten  $p, q \in M$  hebben omgevingen  $U, V \subset M$  zodat  $U \cap V = \emptyset$ ).*
2.  *$M$  is tweedst-aftelbaar (haar topologie heeft een aftelbare basis).*

3.  $M$  is lokaal Euclidisch van dimensie  $n$  (ieder punt  $p \in M$  heeft een omgeving  $U$  die homeomorf is met  $\mathbb{R}^n$ ).

De derde voorwaarde betekent concreet dat ieder punt  $p \in M$  een omgeving  $U$  heeft met een homeomorfisme  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Een dergelijk paar  $(U, \phi)$  noemen we een **kaart** van  $M$ . Een verzameling van kaarten zodat het domein  $M$  overdekt noemen we een **atlas van  $M$** . Met zo'n atlas kunnen we een zogeheten 'gladde' structuur aanbrengen op  $M$ , zodat het een gladde variëteit is. Neem hiervoor twee kaarten  $(U, \phi)$  en  $(V, \psi)$  zodat  $U \cap V \neq \emptyset$ . Dan is  $\phi \circ \psi^{-1}$  een homeomorfisme  $\psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ . We noemen dit homeomorfisme glad als het glad is zoals gedefinieerd voor functies  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (merk op dat het domein en codomein inderdaad deelverzamelingen zijn van  $\mathbb{R}^n$ ). Wanneer ook de inverse  $\psi \circ \phi^{-1}$  glad is, is  $\phi \circ \psi^{-1}$  een **diffeomorfisme**. In dat geval zijn de kaarten  $(U, \phi)$  en  $(V, \psi)$  glad compatibel. Een atlas voor  $M$  waar alle kaarten onderling glad compatibel zijn, heet een gladde structuur voor  $M$ .<sup>1</sup> De combinatie van een topologische variëteit  $M$  met een gladde structuur maakt  $M$  tot een gladde variëteit. We zullen een aantal voorbeelden van gladde variëteiten geven. De Hausdorffvoorwaarde en tweedst-aftelbaarheid zullen we doorgaans niet controleren, aangezien deze automatisch volgen voor deelruimtes van  $\mathbb{R}^n$ .

**Voorbeeld 2.1** (Punten).

Een aftelbare verzameling van punten is een gladde variëteit, waar de kaarten  $\phi : \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0$  de enige mogelijke (constante) afbeeldingen zijn.//

**Voorbeeld 2.2** (Euclidische ruimtes).

Iedere Euclidische ruimte  $\mathbb{R}^n$  is een gladde variëteit, bijvoorbeeld via de atlas die slechts de kaart  $(\mathbb{R}^n, \text{Id})$  heeft. Dit is niet per se de enige gladde structuur op  $\mathbb{R}^n$ . Zo is  $\mathbb{R}$  ook een gladde variëteit onder de kaart  $(\mathbb{R}, \psi)$ , met  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $\psi(x) = x^3$ .//

**Voorbeeld 2.3** (Grafieken van gladde functies).

Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een gladde functie. Dan is de verzameling  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$  een 1-dimensionale gladde variëteit, via de kaart  $(M, \pi)$  met  $\pi$  de projectie op de eerste coördinaat.//

**Voorbeeld 2.4** (Bollen).

De  $n$ -dimensionale bol  $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1\}$  is een  $n$ -dimensionale variëteit. Voor de kaarten bekijken we de stereografische projectie vanuit de noordpool  $(0, 0, \dots, 1)$  en de zuidpool  $(0, 0, \dots, -1)$ . Twee kaarten  $(S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\}, \sigma^+)$  en  $(S^n \setminus \{(0, 0, \dots, -1)\}, \sigma^-)$  geven de bol een gladde structuur waar  $\sigma^+ : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  en  $\sigma^- : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  geschikte diffeomorfismen zijn. We zullen  $\sigma^+$  definiëren, de afbeelding vanaf de zuidpool werkt analoog.

Neem  $\sigma^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}$ . Dit is goed gedefinieerd aangezien  $x_{n+1} \neq 1$  op het domein, en heeft inverse  $\sigma^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \frac{(2u_1, \dots, 2u_n, |u|^2 - 1)}{|u|^2 + 1}$ . Het blijkt dat  $\sigma^+$  en  $\sigma^-$  glad compatibel zijn, en ze dus een gladde structuur aan de bol geven.//

**Voorbeeld 2.5** (Projectieve ruimtes).

Ons eerste voorbeeld van een variëteit die niet direct in een Euclidische ruimte  $\mathbb{R}^n$  zit, is de reële projectieve ruimte  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Dit is de verzameling equivalentieklassen op  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  waar twee punten equivalent zijn als ze op dezelfde lijn door de oorsprong in  $\mathbb{R}^{n+1}$  liggen. Zij  $\pi$  de quotiëntafbeelding. Dan vormen de kaarten  $(\pi(U_i), \phi_i)$  voor  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  met  $U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x_i \neq 0\}$  en  $\phi_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$  een gladde atlas. De inverse  $\phi_i^{-1}$  wordt namelijk gedefinieerd door  $\phi_i^{-1}(u_1, \dots, u_n) = [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n] (= \pi(u_1, \dots, u_{n+1}))$  en de kaarten blijken weer glad compatibel.//

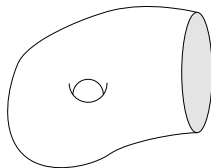
<sup>1</sup>Strikt genomen is een gladde structuur een maximale gladde atlas  $\mathcal{A}$ . Dat wil zeggen, er is geen grotere gladde atlas waar  $\mathcal{A}$  in bevat is. Iedere gladde atlas blijkt echter uniek bevat te zijn in een maximale gladde atlas, dus zullen wij hier niet verder op ingaan.

**Voorbeeld 2.6** (Productvariëteiten en tori).

Als  $M$  en  $N$  (gladde) variëteiten zijn van dimensie  $m$  en  $n$ , is  $M \times N$  een variëteit van dimensie  $m + n$ . De kaarten zijn productsgewijs te verkrijgen: neem voor  $(U, \phi_1)$  en  $(V, \phi_2)$  kaarten van  $M$  en  $N$  respectievelijk en definieer een homeomorfisme  $\psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  door  $\psi(u, v) = (\phi_1(u), \phi_2(v))$ . Op deze manier is ook de torus  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  waar het product  $n$  maal wordt genomen, een  $n$ -variëteit. //

In deze scriptie gebruiken we een belangrijke uitbreiding van gladde variëteiten: gladde variëteiten met rand. We definiëren het  $n$ -dimensionale bovenhalfvlak  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ . Hierbij definiëren we  $\text{Int } \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  en  $\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ .

**Definitie 2.2.** Een topologische variëteit met rand is een tweedst-aftelbare Hausdorfruimte  $M$  zodat ieder punt een omgeving heeft die homeomorf is met  $\mathbb{R}^n$  of  $\mathbb{H}^n$ . Wanneer een punt  $p \in M$  door zo'n homeomorfisme wordt afgebeeld op  $\partial\mathbb{H}^n$ , noemen we  $p$  een **randpunt**. Deze punten vormen samen  $\partial M$ , de rand van  $M$ . Overige punten van  $M$  heten **binnenpunten**, die samen  $\text{Int } M$ , de binnenkant van  $M$  vormen. We definiëren gladde structuren op variëteiten met rand analoog aan het geval voor variëteiten zonder rand, met de kanttekening dat een afbeelding  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{H}^k (\subset \mathbb{R}^k)$  glad wordt genoemd als er een uitbreiding  $\tilde{F} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  van  $F$  bestaat.



Figuur 2.1: Een variëteit met rand

Het is niet volledig triviaal, maar blijkt uit bijvoorbeeld [4] dat de rand en het interieur goed-gedefinieerd zijn. Bovendien geldt het volgende eenvoudige, maar belangrijke lemma:

**Lemma 2.1.** De rand  $\partial M$  van een  $n$ -variëteit is gesloten en een  $(n - 1)$ -variëteit zonder rand.

*Schets van bewijs.* Een deelvariëteit van een  $n$ -variëteit met lagere dimensie is altijd gesloten, aangezien  $\mathbb{R}^k$  gesloten is in  $\mathbb{R}^n$  voor  $k < n$ . De tweede uitspraak volgt door kaarten van  $M$  te beperken tot de eerste  $n - 1$  coördinaten.  $\square$

## 2.2 Gladde afbeeldingen en raakruimtes

Zoals vaak in wiskunde zijn we misschien nog wel meer dan in de gladde variëteit zelf, geïnteresseerd in afbeeldingen tussen gladde variëteiten die essentiële structuren (zoals de gladde structuur) behouden. Voor gladde variëteiten heten deze structuurbehoudende afbeeldingen **gladde afbeeldingen**.

**Definitie 2.3** (Gladde afbeeldingen). Zij  $M, N$  gladde variëteiten en  $F : M \rightarrow N$  een afbeelding. We noemen  $F$  **glad** als er voor alle  $p \in M$  kaarten  $(U, \phi)$  en  $(V, \psi)$  zijn zodat  $p \in U$ ,  $F(U) \subset V$  en  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  een gladde functie is van  $\phi(U)$  naar  $\psi(V)$ . Voor  $M$  en  $N$  gladde variëteiten met rand en  $F : M \rightarrow N$  een afbeelding, is gladheid analoog gedefinieerd, waar we weer de conventie gebruiken dat afbeeldingen van en/of naar  $\mathbb{H}^n$  glad zijn als ze kunnen worden uitgebreid tot een gladde afbeelding van en/of naar  $\mathbb{R}^n$ .

Gladheid is zo dus lokaal gedefinieerd (dat wil zeggen, door eigenschappen van de kaarten) en zo is bijvoorbeeld direct af te leiden dat gladde functies continu zijn.



**Voorbeeld 2.7** (Overdekking cirkel en torus).

Parametriseer de cirkel  $S^1$  met een hoek  $\theta$  (bijvoorbeeld ten opzichte van de vector  $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ ). De overdekking  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  van de cirkel (in  $\mathbb{R}^2$ ) door  $\mathbb{R}$  gegeven door  $\epsilon(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  is glad. In lokale coördinaten wordt de afbeelding namelijk gegeven door  $\tilde{\epsilon}(t) = 2\pi t + c$  voor een reële constante  $c$ . Zo is ook de afbeelding  $\epsilon^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  naar de  $n$ -torus (in  $\mathbb{R}^{2k}$ ) gegeven door  $\epsilon^n(x_1, \dots, x_n) = (\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1), \dots, \cos(2\pi x_n), \sin(2\pi x_n))$  glad.//

**Definitie 2.4** (Diffeomorfisme). *Als  $M$  en  $N$  gladde variëteiten zijn met of zonder rand, en er een gladde afbeelding  $F : M \rightarrow N$  bestaat met een gladde inverse, noemen we  $M$  **diffeomorf** met  $N$  en  $F$  een **diffeomorfisme** tussen  $M$  en  $N$ .*

In de differentiaalmeetkunde worden eigenschappen bestudeerd die onder diffeomorfismes niet veranderen. Zoals isomorfe groepen en homeomorfe topologische variëteiten ‘essentieel hetzelfde’ zijn, zien we ook diffeomorfe variëteiten vaak als hetzelfde. Dit is dan ook onze belangrijkste globale invariant voor variëteiten.

**Voorbeeld 2.8** ( $\mathbb{R}^n$  is diffeomorf met de open eenheidsbal  $B^n$ ).

Een diffeomorfisme  $F : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  wordt gegeven door

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}} \text{ met inverse } F^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}}.$$

We zien direct dat beide afbeeldingen glad zijn.//

**Voorbeeld 2.9** (Homeomorfe variëteiten kunnen diffeomorf zijn).

Zij  $M$  en  $N$  twee homeomorfe topologische variëteiten via het homeomorfisme  $F : M \rightarrow N$ . Als  $N$  een gladde structuur heeft, kunnen we  $M$  een gladde structuur geven zodat  $M$  en  $N$  diffeomorf zijn. Neem namelijk voor een kaart  $(U, \phi)$  van  $N$  de kaart  $(F^{-1}(U), \phi \circ F)$  voor  $M$ .

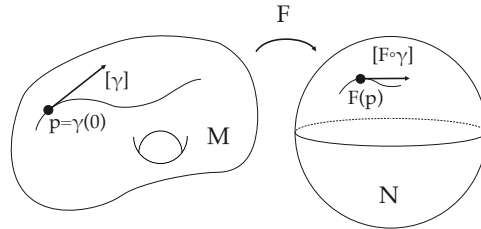
Fascinerend genoeg hoeven homeomorfe ruimtes niet diffeomorf te zijn: Lee geeft in [4] een verrassend overzicht waaruit blijkt dat bijvoorbeeld  $\mathbb{R}^4$  niet-diffeomorfe gladde structuren toestaat, zogeheten exotische gladde structuren. Veel van de variëteiten waar we het over hebben, zoals  $\mathbb{R}^n$  en  $S^n$ , hebben echter op een bepaalde manier een ‘standaard’ gladde structuur. We zullen zo vaak over variëteiten waarvan ze weten dat ze homeomorf zijn direct zeggen dat ze diffeomorf zijn, op de manier die hierboven beschreven staat. Zo zeggen we bijvoorbeeld over de eenpuntscompactificatie van  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  dat deze diffeomorf is met  $S^n$ .//

In de klassieke analyse in  $\mathbb{R}^3$  worden oppervlakken  $M$  gelineariseerd in een punt  $p$  door hun raakruimte  $T_p M$ . Dit is de vereniging van raakvectoren  $\gamma'(0)$  van krommen  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  over zo’n oppervlak met  $\gamma(0) = p$ . Over een variëteit  $M$  wordt  $T_p M$  analoog gedefinieerd. Aangezien er wel verschillende manieren kunnen zijn om een omgeving van  $U$  te parametriseren, ziet de definitie er wat ingewikkelder uit.

**Definitie 2.5** (Raakruimte in een punt). *Bekijk  $p \in M$  voor een gladde  $n$ -variëteit  $M$ . Bekijk de verzameling van kaarten  $\Lambda = \{(U, \phi) : p \in U\}$  en definieer een equivalentierelatie  $\sim$  op  $\Lambda \times \mathbb{R}^n$ , waar we  $\mathbb{R}^n$  zien als vectorruimte, als volgt:  $((U, \phi), v) \sim ((V, \psi), w)$  dan en slechts dan als  $D(\psi\phi^{-1})(\phi(p))v = w$ , waar  $D(\psi\phi^{-1})$  de Jacobiaan is van  $\psi \circ \phi^{-1}$ . Een raakvector van  $p$  is nu een equivalentieklasse  $[(U, \phi), v]$  voor  $\sim$  en de verzameling van raakvectoren noteren we met  $T_p M$ .*

Door per kaart te kijken zien we dat  $T_p M$  een vectorruimte is isomorf met  $\mathbb{R}^n$ . Zoals gezegd zijn raakvectoren intuïtiever dan de definitie ze doet lijken, en we raden de lezer aan om gedurende de scriptie over ze te blijven denken als afgeleides van krommen door een punt. Dit maakt ook de definitie van de differentiaal van een afbeelding een stuk intuïtiever: aangezien vectoren in  $\mathbb{R}^n$  afgeleides van krommen zijn en iedere  $p \in M$  een omgeving diffeomorf aan  $\mathbb{R}^n$  heeft, kunnen we een raakvector  $[(U, \phi), v]$  identificeren met een kromme  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \phi(U) (\cong \mathbb{R}^n)$  en een hierdoor geïnduceerde raakvector  $[(U, \phi), \gamma'(0)]$  zodat  $\gamma(\mathbb{R}) \subset U$  en  $\phi^{-1}(\gamma(0)) = p$ . Via  $\phi$  kunnen we  $\gamma$  ook zien als kromme op  $M$  (het beeld van  $\phi(\gamma)$  is tenslotte diffeomorf met het beeld van  $\gamma$ ), met  $\gamma(0) = p$ , die via verschillende kaarten een raakvector induceert. Deze raakvector noteren we dan met  $[\gamma]$ .

**Definitie 2.6** (Differentiaal van een gladde afbeelding). *Zij  $p \in M$  een punt in een gladde variëteit,  $N$  een gladde variëteit en  $F : M \rightarrow N$  glad. Dan is de differentiaal in  $p$ , genoteerd met  $T_p F$ , de afbeelding  $T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  die een vector  $[\gamma]$  (met  $\gamma$  zoals hierboven besproken) stuurt naar  $[F \circ \gamma]$ .*



Figuur 2.2: De differentiaal van  $F$

Dit maakt in het bijzonder van  $T_p F$  een lineaire afbeelding, wat te zien is door de afbeelding lokaal uit te drukken in coördinaten. De differentiaal van een afbeelding stelt ons in staat nog drie belangrijke (globale) relaties tussen variëteiten te definiëren.

**Definitie 2.7** (Onderdompeling, indompeling en inbedding). *Een gladde afbeelding  $F : M \rightarrow N$  heet een*

- *onderdompeling als  $T_p F$  surjectief is voor alle  $p \in M$ .*
- *indompeling als  $T_p F$  injectief is voor alle  $p \in M$ .*
- *inbedding als  $F$  een injectief diffeomorfisme naar op zijn beeld is.*

*Als er een  $F : M \rightarrow N$  bestaat die aan een van de voorwaarden voldoet, zeggen we dat  $M$  respectievelijk ondergedompeld, ingedompeld of ingebed kan worden in  $N$ .*

**Voorbeeld 2.10** (Kraagomgevingstelling, Whitney [4, Theorem 9.25]).

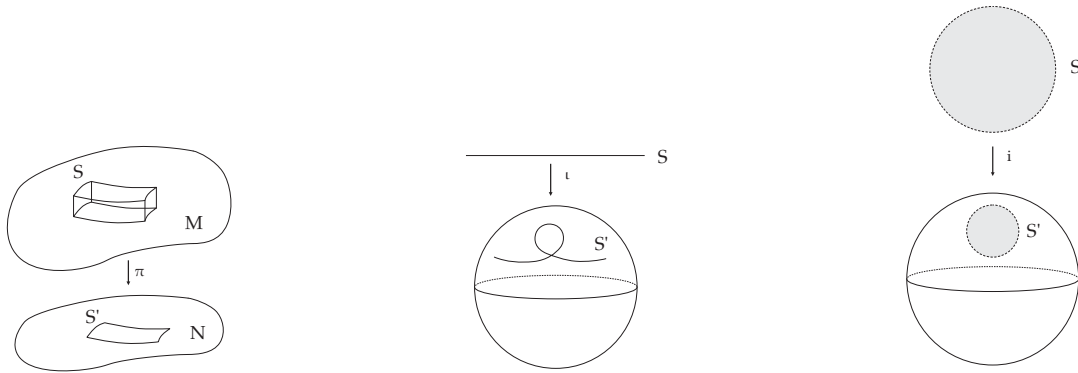
Stel dat  $M$  een gladde variëteit met rand is met  $\partial M \neq \emptyset$ , dan kan  $\partial M \times [0, 1]$  glad ingebed worden in  $M$ , zodanig dat  $\partial M \times \{0\}$  wordt afgebeeld op  $\partial M$  (dit heet een kraagomgeving van  $\partial M$ ).//

## 2.3 Vectorbundels

**Definitie 2.8** (Vectorbundel). *Een **gladde vectorbundel** van rang  $k$  over  $M$  is een gladde variëteit  $E$  met een surjectieve gladde afbeelding  $\pi : E \rightarrow M$  zodanig dat  $E$  en  $\pi$  voldoen aan:*

- (i) *Voor iedere  $p \in M$  heeft de vezel  $E_p = \pi^{-1}(p)$  de structuur van een  $k$ -dimensionale reële vectorruimte.*
- (ii) *Er bestaat een lokale trivialisatie van  $E$  over open omgevingen  $U$ . Dat wil zeggen, iedere  $p \in M$  heeft een open omgeving  $U$  en een diffeomorfisme  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  zodat  $\pi_U \circ \Phi = \pi$  en  $\Phi$ , beperkt tot een vezel  $E_q$ , een isomorfisme van vectorruimtes is.*

Als er een lokale trivialisatie van  $E$  over heel  $M$  bestaat, oftewel  $U = M$  voldoet aan de tweede voorwaarde, noemen we  $E$  een triviale bundel. We zullen een vectorbundel  $E$  met basisruimte  $M$  en projectie  $\pi$  noteren met  $\pi : E \rightarrow M$ . Eerst bekijken we enkele voorbeelden van vectorbundels.



Figuur 2.3: Een onderdompeling, indompeling en inbedding

**Voorbeeld 2.11** (Productbundel).

Iedere variëteit  $M$  heeft de (triviale) productbundel  $E = M \times \mathbb{R}^k$  met als projectie de coördinaatprojectie  $\pi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ .//

Veel vectorbundels zijn echter niet triviaal.

**Voorbeeld 2.12** (Raakbundel).

Zij  $M$  een gladde variëteit. De raakbundel  $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$  van een variëteit met projectie  $\pi : TM \rightarrow M$  gegeven door  $(p, v) \mapsto p$  is een vectorbundel. Deze is triviaal voor bijvoorbeeld  $S^1, \mathbb{R}^n$  en de torus  $T^n$ . Het blijkt echter dat de raakbundel niet triviaal is voor alle bollen behalve  $S^1, S^3$  en  $S^7$  ([4]).//

**Voorbeeld 2.13** (Normaalbundel).

Zij  $M$  een ondergedompelde deelvariëteit van  $\mathbb{R}^n$ , en  $T_p M^\perp$  het orthogonale complement van de raakruimte.<sup>2</sup> Dan is

$$NM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M^\perp\}$$

met  $\pi$  wederom de projectie op de eerste coördinaat, een vectorbundel, die we de normaalbundel noemen.//

**Voorbeeld 2.14** (Möbiusbundel).

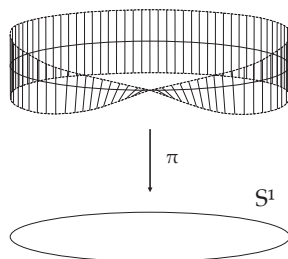
De enige niet-triviale vectorbundel die gemakkelijk te visualiseren is, is de Möbiusbundel[4]. Neem hiervoor de equivalentierelatie op  $\mathbb{R}^2$  gegeven door  $(x, y) \sim (x', y')$  dan en slechts dan als  $(x', y') = (x + n, (-1)^n y)$  voor zekere  $n \in \mathbb{Z}$ , en bekijk  $E = \mathbb{R}^2 / \sim$ . Noem de quotiëntafbeelding  $q$ .

We merken op dat de restrictie van  $q$  tot  $S = [0, 1] \times \mathbb{R}$  al surjectief is. Enkel de randen van  $S$  worden niet-triviaal afgebeeld door  $q_S$ , en wel door identificatie met zichzelf door spiegeling in  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Bekijken we nu voor  $r > 0$  het quotiënt van de rechthoek  $[0, 1] \times [-r, r]$ , dan krijgen we de Möbiusband. Deze is (fysiek) te knutselen van papier door een strook te nemen en een uiteinde ‘gedraaid’ op het andere te plakken.

Bekijk nu  $\epsilon \circ \pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ , waarbij  $\pi_1$  de projectie op de eerste coördinaat is en  $\epsilon$  de gladde overdekkingsafbeelding  $\epsilon(t) = e^{2\pi i t}$ . Aangezien  $\epsilon \circ \pi_1$  constant is op iedere equivalentieklasse, induceert deze een (gladde) overdekking  $\pi : E \rightarrow S^1$ , waardoor  $E$  en  $\pi$  samen een vectorbundel over  $S^1$  vormen. Deze is niet triviaal,

<sup>2</sup>De ondergedompelde deelvariëteit heeft bijvoorbeeld de Euclidische metriek van  $\mathbb{R}^n$ , maar  $NM$  zelf kan ook onafhankelijk van een metriek gedefinieerd worden als  $NM = T\mathbb{R}^n / TM$ .

aangezien de vectorruimte ‘gespiegeld’ is na een rotatie over de cirkel.<sup>3</sup> //



Figuur 2.4: De Möbiusbundel

We vatten de basisvariëteit graag op als deelvariëteit van een vectorbundel  $\pi : E \rightarrow M$ . Dit kan via secties.

**Definitie 2.9.** Een (gladde) *sectie* van een vectorbundel  $\pi : E \rightarrow M$  is een gladde afbeelding  $\sigma : M \rightarrow E$  zodanig dat  $\pi \circ \sigma = Id_M$ . De *nulsectie*  $\sigma_0 : M \rightarrow E$  gegeven door  $\sigma(p) = (p, 0)$  zullen we regelmatig identificeren met  $M$ .

We noemen globale secties  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  van een vectorbundel  $E \rightarrow M$  lineair onafhankelijk als de vectoren die ze aannemen voor alle  $p \in M$  lineair onafhankelijk zijn. Uit Lee ([4]) halen we de volgende nuttige karakterisatie voor triviale vectorbundels.

**Lemma 2.2.** Een gladde vectorbundel van rang  $n$  is triviaal dan en slechts dan als er  $n$  onafhankelijke gladde secties zijn.

## 2.4 Homotopiegroepen en gladde homotopie

Een van de eerste topologische invarianten die we leren is de fundamentealgroep. Deze koppelt aan een wegsamenhangende topologische ruimte met een basispunt een groep, die bestaat uit homotopieklassen van lussen die beginnen en eindigen in dat basispunt. Een lus is homeomorf met de cirkel  $S^1$ , en dus is de fundamentealgroep van  $(X, p)$  gelijk aan de homotopieklassen van afbeeldingen  $S^1 \rightarrow X$  waar een vast punt van  $S^1$  op  $p$  wordt afgebeeld. Fundamentealgroepen zijn relatief eenvoudig te berekenen, maar niet erg goed in verschillen tussen topologische ruimtes te detecteren voor hoge dimensies. Zo is de fundamentealgroep van  $\mathbb{R}^3$  gelijk aan die van  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ : beide zijn triviaal. Om dit te verhelpen zijn (onder andere) ook hogere homotopiegroepen ontwikkeld. Deze hogere homotopiegroepen zijn een belangrijk instrument in en waren een belangrijke motivatie voor Thoms theorie die wij zullen behandelen. We zullen ons hier echter slechts beperken tot de noodzakelijke definities en voor details verwijzen naar [5].

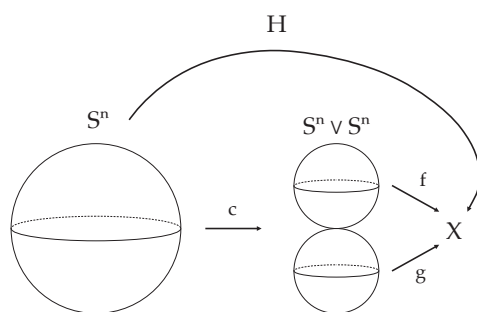
We brengen in herinnering dat voor twee topologische ruimtes  $X$  en  $Y$  en twee basispunten  $x \in X$  en  $y \in Y$ , we de wigsom  $X \vee Y$  over  $(x, y)$  definiëren als  $X \sqcup Y / \sim$ , waar  $p \sim q$  dan en slechts dan als  $p = q$  of  $p = x$  én

<sup>3</sup>Preciezer gezegd, is de Möbiusbundel niet-oriënteerbaar, terwijl  $S^1 \times \mathbb{R}$  dat uiteraard wel is. Er is namelijk een overdekkingsafbeelding  $\mathbb{R}^2 \rightarrow E$ , waarvan de automorfismegroep  $\mathbb{Z}$  is. Voor werkingen van oneven getallen wordt de oriëntatie gespiegeld. Details zijn te vinden in [4]

$q = y$  (of andersom). Stel dat we voor een topologische ruimte  $Z$  een afbeelding  $f : X \rightarrow Z$  en een afbeelding  $g : Y \rightarrow Z$  hebben met  $f(x) = g(y)$ . Dan kunnen we voor de wigsom  $X \vee Y$  over  $(x, y)$  de wigafbeelding  $f \vee g$  definiëren door

$$\begin{aligned} (f \vee g)(p) &= f(p) \text{ als } p \in X \\ (f \vee g)(p) &= g(p) \text{ als } p \in Y, \end{aligned}$$

waar we zien dat er op de overlap geen verwarring over de definitie kan bestaan door de aanname  $f(x) = g(y)$ . Voor  $s \in S^n$  bestaat er een afbeelding  $c : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ , waar  $S^n \vee S^n$  het wigproduct is over  $(s, s)$ , door alles boven de evenaar op de eerste  $S^n$  af te beelden, de evenaar op het basispunt, en alles onder de evenaar op de tweede  $S^n$  af te beelden. Deze afbeelding  $c$  noemen we de instorting van  $S^n$  in de evenaar. Zo kunnen we homotopiegroepen definiëren.



Figuur 2.5: Optelling in homotopiegroepen

**Definitie 2.10** (Homotopiegroepen). *Zij  $X$  een topologische ruimte en neem  $s \in S^n$ , de  $n$ -bol, en  $x \in X$ . We schrijven nu  $[(S^n, s), (X, x)]$  voor de verzameling  $\{f : S^n \rightarrow X : f \text{ is continu en } f(s) = x\} / \sim$ . Hier geldt  $f \sim g$  als  $f$  en  $g$  homotoop zijn via een homotopie die het basispunt behoudt.*

*De groepsstructuur van  $[(S^n, s), (X, x)]$  is als volgt: voor  $\alpha, \beta \in [(S^n, s), (X, x)]$  en  $f \in \alpha, g \in \beta$  representanten van  $\alpha$  en  $\beta$ , is een representant van  $\alpha + \beta$  een zekere afbeelding  $h : S^n \rightarrow S^n \vee S^n \rightarrow X$ . Hier is  $h$  de samenstelling van de instorting van  $S^n$  in de evenaar in  $S^n \vee S^n$  over  $(s, s)$ , en vervolgens de afbeelding van het wigproduct naar  $X$  gegeven door  $f \vee g$ .*

Het is te controleren dat deze afbeelding  $h$  voor  $S^1$  inderdaad overeenkomt met het aaneenschakelen van lussen dat we kennen van de fundamentealgroep. Net als voor de fundamentealgroep, geldt voor  $[(S^n, s), (X, x)]$  dat de keuze van het basispunt niet uitmaakt voor de groepsstructuur als  $X$  wegsamenhangend is. In zo'n geval zullen we schrijven  $[S^n, X]$ .

Aangezien  $S^n \vee S^n$  homeomorf is met  $S^n$  waar de evenaar is samengetrokken in een punt, is een alternatieve definitie voor de somoperatie als volgt: kies voor  $\alpha + \beta$  een representant  $f \in \alpha$  zodat de bovenste helft van  $S^n$  inclusief de evenaar wordt afgebeeld op het basispunt, en  $g \in \beta$  zodat juist de onderste helft wordt afgebeeld op het basispunt. Dan is de afbeelding die op de bovenste helft overeenkomt met  $g$  en op de onderste met  $f$  een representant van  $\alpha + \beta$ . De evenaar wordt dan dus op het basispunt afgebeeld. We zullen verder nog het volgende lemma gebruiken:

**Lemma 2.3.** *Voor een wegsamenhangende topologische ruimte  $X$  en afbeelding  $f : S^n \rightarrow X$  is  $f$  homotoop met een constante afbeelding dan en slechts dan als  $f$  uitgebreid kan worden tot een afbeelding  $\tilde{f} : B^{n+1} \rightarrow X$ , met  $B^{n+1}$  de gesloten eenheidsbol.*

Voor het bewijs, dat eenvoudig is met behulp van een iets algemenere homotopiegroep, de relatieve homotopiegroep, verwijzen we wederom naar [5].

In principe komen homotopiegroepen uit het domein van de algebraïsche topologie, en gaan ze dus over continue afbeeldingen. De natuurlijke afbeeldingen tussen gladde variëteiten zijn echter gladde afbeeldingen. De volgende klassieke stelling van Whitney vertelt ons echter dat iedere homotopieklasse een gladde afbeelding bevat, waardoor we dus niet bang hoeven te zijn dat we in het vervolg van de scriptie geen gladde representant van een homotopieklasse kunnen vinden.

**Stelling 2.1** (Benaderingsstelling van Whitney). [4, Theorem 6.26] *Stel dat  $M$  een gladde variëteit is met of zonder rand,  $N$  een gladde variëteit (zonder rand), en  $F : M \rightarrow N$  een continue afbeelding. Dan is  $F$  homotoop met een gladde afbeelding. Als  $F$  al glad is op een gesloten deelverzameling  $A \subset N$ , kan de homotopie genomen worden zodat deze constant is op  $A$ .*

Het bewijs is technisch maar een mooie toepassing van het werk van Whitney, dat we gedurende de scriptie veel zullen gebruiken, maar waarvan we de bewijzen helaas achterwege moeten laten, en verwijzen naar het uitgebreide hoofdstuk 6 van [4].

Een tweede eigenschap van homotopieën die we nodig zullen hebben is de homotopieuitbreidingsstelling. Stel dat we voor topologische ruimtes  $X$  en  $Y$ , en een gesloten  $A \subset X$ , afbeeldingen  $f : X \rightarrow Y$  en  $g : A \rightarrow Y$  hebben en een homotopie  $H : A \times [0, 1] \rightarrow Y$  van  $f|_A$  naar  $g|_A$ . De homotopieuitbreidingsstelling vertelt ons nu wanneer  $H$  zich uitbreidt tot een algemene homotopie van  $f$  naar  $g$ . Bewijzen zijn terug te vinden in veel topologielesboeken en in [6].

**Stelling 2.2** (Homotopieuitbreidingsstelling). *Zij  $A$  een gesloten deelruimte van een variëteit  $X$  en  $Y$  een topologische ruimte<sup>4</sup>. Zij  $f : X \rightarrow Y$  en  $g : A \rightarrow Y$  continu zodat er een homotopie  $H$  is van  $f|_A$  naar  $g|_A$ . Als  $A$  het retract is van een open deelverzameling van  $X$ , kan  $H$  worden uitgebreid tot een homotopie van  $f$  naar een  $g' : X \rightarrow Y$  zodat  $g'_A = g$ .*

Van de homotopieuitbreidingsstelling zijn veel verschillende versies met verschillende voorwaarden, genoeg zelfs, om meer dan 2000 pagina's over te schrijven, zoals Mortini en Rupp deden in [7]. Wij halen hier deze sterkere versie van de homotopieuitbreidingsstelling, voor het eerst bewezen door Borsuk, uit, die wij specifiek nodig hebben:

**Stelling 2.3** (Borsuk homotopieuitbreidingsstelling). *Zij  $X$  een variëteit,  $A$  een gesloten deelruimte van  $X$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$  een retract van  $\mathbb{R}^n$  en  $f, g$  twee homotope afbeeldingen  $f : X \rightarrow Y$  en  $g : A \rightarrow Y$ . Stel dat er een homotopie  $H_A : A \times I \rightarrow Y$  van  $f|_A$  naar  $g|_A$  gegeven is. Dan breidt  $H_A$  uit tot een homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  van  $f$  naar  $g$ .*

Het verschil in beide stellingen is dat in stelling 2.2 de homotopie uitbreidt naar een (verder onbekende)  $g$ , en in stelling 2.3 deze uitbreidt naar een gegeven  $g$ . Mortini geeft ook voorwaarden voor compacte ruimtes  $Y \subset \mathbb{R}^n$  om een retract van  $\mathbb{R}^n$  te zijn: dit is zo wanneer  $Y$  samentrekbaar én lokaal samentrekbaar is. Voor compacte variëteiten hoeft  $Y$  dus alleen samentrekbaar te zijn om een retract te zijn, aangezien deze per definitie lokaal samentrekbaar zijn.

---

<sup>4</sup>Eigenlijk is het genoeg als  $X$  normaal is, maar alle variëteiten zijn normaal.

# Hoofdstuk 3

## Transversaliteit

Om cobordante deelvariëteiten van een variëteit met of zonder rand  $W$  te vinden, bekijken we eerst technieken om überhaupt gesloten deelvariëteiten van  $W$  te vinden. We beginnen met deelvariëteiten die verkregen worden uit zogenoemde reguliere waardes, en generaliseren deze met het concept van transversaliteit. Vervolgens laten we door middel van een aantal stellingen de kracht van transversaliteit zien. We eindigen met de formele introductie en definitie van cobordisme, met enkele voorbeelden, om tenslotte een toepassing van transversaliteit in de cobordismetheorie te geven.

### 3.1 Reguliere waardes en transversaliteit

In deze paragraaf zijn  $M$  en  $N$  gladde variëteiten. Een belangrijke klasse van gesloten deelverzamelingen van variëteiten zijn niveauverzamelingen. Zij  $F : M \rightarrow N$  een afbeelding en  $c \in N$ . Dan heet  $F^{-1}(c)$  een **niveauverzameling** van  $F$ . De vraag is nu wanneer een niveauverzameling van een gladde afbeelding  $F$  een deelvariëteit is. De klassieke regulierewaardestelling zegt dat dit geldt voor niveauverzamelingen van **reguliere waardes**. Zij  $F : M \rightarrow N$  een gladde afbeelding. Een punt  $p \in M$  is een **regulier punt voor  $F$**  als  $T_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  surjectief is. Wanneer dit niet zo is, noemen we  $p$  een **kritiek punt voor  $F$** . Nu is een punt  $c \in N$  een **reguliere waarde voor  $F$**  als alle  $p \in F^{-1}(c)$  reguliere punten zijn.

**Stelling 3.1** (Regulierewaardestelling). *Zij  $M$  en  $N$  gladde variëteiten, en zij  $F : M \rightarrow N$  een gladde afbeelding. Als  $y \in F(M)$  een reguliere waarde is, dan is  $F^{-1}(y)$  een deelvariëteit van  $M$ , met als codimensie in  $M$  de dimensie van  $N$ .*

Het bewijs is een toepassing van de implicietefunctiestelling en wordt gegeven in bijvoorbeeld [4]. Veel bekende deelvariëteiten zijn te karakteriseren als niveauverzameling van een gladde afbeelding.

**Voorbeeld 3.1** (Bollen).

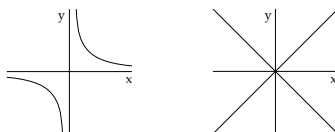
Neem  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Nu is  $c \in \mathbb{R}$  regulier voor  $c \neq 0$ . De bijbehorende afbeelding van raakruimtes  $T_x f : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{R}$  wordt namelijk gegeven door  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto 2 \sum_{k=1}^n x_k v_k$  en is dus surjectief als  $x_k \neq 0$  voor zekere  $k$ . Dit is duidelijk het geval wanneer  $c > 0$ . De niveauverzamelingen  $F^{-1}(c)$  zijn de bollen met de oorsprong als middelpunt en straal  $\sqrt{c}$ .

Merk op dat ook punten  $c < 0$  reguliere waardes zijn. Ook dan is  $F^{-1}(c) = \emptyset$  een deelvariëteit van  $\mathbb{R}^n$ , maar nu is de codimensie niet meer gelijk aan 1. Ook  $F^{-1}(0) = \{0\}$  is een deelvariëteit, maar heeft ook codimensie  $n$ . //

**Voorbeeld 3.2** (Hyperbolen).

Neem  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ . Nu is iedere  $c \neq 0$  een reguliere waarde. De afbeelding van raakruimtes  $T_{(x,y)}f : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_c\mathbb{R}$  is net als bij de bollen surjectief voor  $c \neq 0$ . De niveauverzamelingen  $F^{-1}(c)$  zijn dit keer de hyperbolen.

Dit maal geldt  $F^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \text{ of } x = -y\}$ , de vereniging van twee lijnen. Dit is geen variëteit aangezien het in de oorsprong zichzelf doorsnijdt. //



Figuur 3.1:  $c > 0$  en  $c = 0$  voor  $x^2 - y^2 = c$

Ook variëteiten die niet eenvoudig in een plaatje te vangen zijn kunnen we schrijven als niveauverzameling:

**Voorbeeld 3.3** (Matrixgroepen:  $SL(n)$ ,  $O(n)$ ).

Neem  $\det : (M, n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $A \mapsto \det A$ . Weer is iedere  $c \neq 0$  een reguliere waarde. De determinant is namelijk een polynoom in de matrixcoördinaten van  $A$  en Jacobi's formule voor de afgeleide van de determinant leert ons dat de raakafbeelding surjectief is voor  $\det(A) \neq 0$ . In het bijzonder is 1 regulier, en dus is  $\det^{-1}(1) = SL(n)$ , de ondergroep van matrices met determinant 1, een deelvariëteit van dimensie  $n$ . Neem  $G : (M, n \times n) \rightarrow Sym(n)$ , met  $Sym(n)$  de groep van symmetrische matrices, gegeven door  $A \mapsto AA^T$ . De afbeelding kan wederom uitgedrukt worden in polynomen in de coördinaten en is dus glad. Nu is  $I \in Sym(n)$  een reguliere waarde (zie bijvoorbeeld: [8]) De bijbehorende niveauverzameling is  $O(n)$ , de groep van matrices waarvoor geldt  $AA^T = I$ , en deze heeft dus dimensie  $\frac{n(n-1)}{2}$ . //

In zijn onderzoek naar cobordisme liep René Thom aan tegen een algemenere vraag over het variëteit zijn (of niet) van niveauverzamelingen: wanneer is, voor  $F : M \rightarrow N$  glad en  $S \subset N$  een gladde deelvariëteit,  $F^{-1}(S)$  een deelvariëteit van  $M$ ? Een eerste goede gok zouden de  $S \subset N$  kunnen zijn, waar ieder punt in  $S$  een reguliere waarde is. De niveauverzamelingen zijn dan inderdaad deelvariëteiten, maar de eis blijkt te streng te zijn, zoals het volgende voorbeeld van [9] laat zien:

**Voorbeeld 3.4** (Geen reguliere waardes, wel deelvariëteit).

Neem  $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ ,  $N = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$  en  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$  en  $\pi : M \rightarrow N$  gegeven door  $(0, x_2, x_3) \mapsto (0, x_2, 0)$ . De raakruimte-afbeelding  $T_x\pi : TM \rightarrow TN$  wordt gegeven door  $(0, v_2, v_3) \mapsto (0, v_2, 0)$ . Deze is dus nergens surjectief, maar  $\pi^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$  is wel degelijk een variëteit. //

De oplossing is transversaliteit. Transversaliteit formaliseert de notie van twee variëteiten die elkaar op een 'fijne' manier doorsnijden.

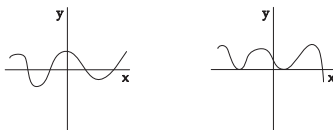
**Definitie 3.1** (Transversale variëteiten). *Zij  $N$  een gladde variëteit en  $P, Q \subset N$  ingebede deelvariëteiten. We zeggen dat  $P$  en  $Q$  elkaar transversaal snijden als voor alle  $x \in P \cap Q$  geldt  $T_xP + T_xQ = T_xN$ . Algemeener zeggen we dat voor variëteiten  $M$  en  $N$  glad, en  $Q \subset N$  een ingebede deelvariëteit, een gladde functie  $f : M \rightarrow N$  transversaal is aan  $Q$  als geldt in  $T_xf + T_{f(x)}Q = T_{f(x)}N$  voor alle  $x \in M$  met  $f(x) \in Q$ .*



**Opmerking 3.1.** De definitie met transversaliteit als relatie tussen een functie en variëteit is inderdaad te zien als generalisatie van onze eerste definitie door de inclusieafbeelding  $\iota : P \rightarrow N$  te nemen.

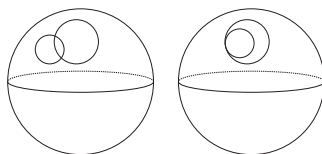
**Opmerking 3.2.** Onderdompelingen  $f : M \rightarrow N$  snijden transversaal aan iedere deelvariëteit  $Q \subset M$ .

**Voorbeeld 3.5** (Krommen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).



Figuur 3.2: Links een kromme transversaal aan de x-as, rechts niet transversaal  
//

**Voorbeeld 3.6** (Kromme op bol).



Figuur 3.3: Links transversale krommen, rechts niet transversaal  
//

Inderdaad is transversaliteit een generalisatie van reguliere waarden: voor  $Q = \{y\}$  zijn  $f$  en  $Q$  transversaal aan elkaar dan en slechts dan als  $y$  een reguliere waarde is van  $f$ . De volgende stelling zegt ons dat transversaal snijden inderdaad de voorwaarde is die we zoeken.

**Stelling 3.2** (Transversaliteit). *Zijn  $M$  en  $N$  gladde variëteiten en  $f : M \rightarrow N$  een gladde afbeelding, en  $Q \subset N$  een gladde deelvariëteit. Als  $f$  transversaal is aan  $Q$  is  $f^{-1}(Q)$  een gladde deelvariëteit van  $M$ . De codimensie van  $f^{-1}(Q)$  is gelijk aan de codimensie van  $Q$  in  $N$ .*

*Bewijs.* We bewijzen de stelling lokaal en nemen daarom aan dat  $N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  en  $Q = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ . Bekijk nu  $f \circ \pi$ , met  $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de projectie op de laatste  $n - k$  coördinaten. Nu is  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  transversaal aan  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  dan en slechts dan als  $f \circ \pi$  reguliere waarde 0 heeft. Nu geldt  $f^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = (f \circ \pi)^{-1}(0)$  en volgt het resultaat uit de regulierewaardestelling. Het globale geval volgt direct uit het lokale geval.  $\square$

De kracht van transversaliteit in de differentiaaltopologie ligt in het feit dat ze ‘sterke’ gevolgen kan hebben, maar op zichzelf een ‘zwakke’ eis is. Preciezer gezegd geldt de volgende stelling:

**Stelling 3.3** (Transversaliteitshomotopiestelling). *Zij  $M$  en  $N$  gladde variëteiten en  $X \subset N$  een ingebedde deelvariëteit. Iedere gladde afbeelding  $f : M \rightarrow N$  is homotoop aan een gladde afbeelding  $g : M \rightarrow N$  die transversaal is aan  $X$ . Als  $f$  al transversaal is aan  $X$  op een gesloten deelverzameling  $A \subset X$ , kan de homotopie gekozen worden zodat  $f|_A = g|_A$ .*

Voor het bewijs hebben we een belangrijke stelling van Arthur Sard nodig en een gevolg hiervan van Hassler Whitney, dat Whitney overigens kon bewijzen zonder de stelling van Sard te gebruiken.

**Stelling 3.4** (Stelling van Sard, 1942). *[4, Theorem 6.10] Zij  $M$  en  $N$  gladde variëteiten (met of zonder rand) en  $F : M \rightarrow N$  glad. Dan ligt de verzameling van reguliere waardes dicht in  $N$ .*

**Stelling 3.5** (Inbeddingsstelling van Whitney, 1936). *[4, Theorem 6.15] Iedere gladde variëteit van dimensie  $n$  kan worden ingebed in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

Nu we alle variëteiten kunnen leggen in een Euclidische ruimte, kunnen we nog een ingrediënt voor ons bewijs toevoegen. Als  $M$  is ingebed in  $\mathbb{R}^n$  kunnen we ook zijn normaalbundel  $NM$ , die dan automatisch ingebed is in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , afbeelden in  $\mathbb{R}^n$  via de afbeelding  $E : NM \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeven door

$$E(x, v) = x + v.$$

We definiëren voor een ingebedde deelvariëteit  $M \subset \mathbb{R}^k$  een **buisvormige omgeving van  $M$**  als een omgeving van  $M$  in  $\mathbb{R}^m$  die diffeomorf is met het beeld onder  $E$  van een open deelverzameling  $V \subset NM$  zodat

$$V = \{(x, v) \in NM : |v| < \delta(x)\},$$

voor een positieve continue functie  $\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Nu blijkt dat iedere ingebedde deelvariëteit van  $\mathbb{R}^n$  inderdaad een buisvormige omgeving  $U$  heeft, die diffeomorf is met  $NM$ [4]. Hiernaast is er ook een gladde retractie  $r : U \rightarrow M$  waarvan de raakruimteafbeelding surjectief is (dat wil zeggen,  $r$  is een onderdompeling).

Om het bewijs van de transversaliteitshomotopiestelling te versimpelen, gaan we werken met een algemenere variant van homotopie. Hiervoor nemen we  $N, M$  en  $S$  gladde variëteiten zodat voor iedere  $s \in S$  er een afbeelding is  $F_s : M \rightarrow N$ . De verzameling  $\{F_s : s \in S\}$  is nu een **gladde familie van afbeeldingen** als de afbeelding  $F : M \times S \rightarrow N$  gegeven door  $F(x, s) = F_s(x)$  glad is. Door voor  $S$  een open omgeving van  $[0, 1]$  te nemen zien we dat dit inderdaad een generalisering van homotopie is. We hebben nu voldoende terminologie om het volgende gevolg van de stelling van Sard te formuleren.

**Gevolg 3.1** (Parametrische transversaliteitsstelling). *Zij  $M$  en  $N$  gladde variëteiten,  $X \subset N$  een ingebedde deelvariëteit en  $\{F_s : s \in S\}$  een gladde familie van afbeeldingen van  $M$  naar  $N$ . Als de afbeelding  $F : M \times S \rightarrow N$  transversaal is aan  $X$ , dan is de verzameling  $\{s \in S : F_s \text{ is transversaal aan } X\}$  dicht in  $S$ .*

*Schets van bewijs.* De aanname vertelt ons dat  $F^{-1}(X)$  een deelvariëteit is van  $M \times S$ . Zij  $\pi : M \times S \rightarrow S$  de projectie op  $S$ . Er kan bewezen worden dat als  $s \in S$  een reguliere waarde is van  $\pi|_{F^{-1}(X)}$ ,  $F_s$  transversaal is aan  $X$  [4]. Aangezien de reguliere waardes  $s$  dicht liggen in  $S$ , bewijst dit de stelling.  $\square$

Dit geeft ons materiaal om de transversaliteitshomotopiestelling te bewijzen. We moeten nu namelijk bewijzen dat voor iedere gladde afbeelding  $f : M \rightarrow N$ , er een familie van afbeeldingen  $\{F_s : s \in S\}$  bestaat zodat  $F : M \times S \rightarrow N$  transversaal is aan  $X$ .

*Bewijs van stelling 3.3.* We nemen aan dat we  $N$  ingebed hebben in  $\mathbb{R}^k$ . Zij  $U$  een buisvormige omgeving van  $N$  in  $\mathbb{R}^k$  en  $r : U \rightarrow N$  een gladde retractie die ook een onderdompeling is. We definiëren een continue functie  $\delta : N \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$\delta(x) = \sup\{\epsilon \leq 1 : B_\epsilon(x) \subset U\},$$

en construeren een functie  $e : M \rightarrow \mathbb{R}$  die voldoet aan  $0 < e(p) < \delta(f(p))$  (dit is mogelijk volgens [4, Corollary 6.24]). Neem nu  $S = B^k$  de open eenheidsbal, en definieer  $F : M \times S \rightarrow N$  door

$$F(p, s) = r(f(p) + e(p)s).$$

De functie is welgedefinieerd aangezien  $f(p) + e(p)s \in U$  altijd geldt door de afchatting van  $e$ . Als samenstelling van gladde functies is  $F$  glad, en er geldt  $F(p, 0) = f(p)$ . Nu is  $(f(p) + e(p)s)|_{\{p\} \times S}$  een diffeomorfisme van  $\{p\} \times S$  naar de buisvormige omgeving van  $f(p)$  rondom  $N$  en dus zeker een onderdompeling. Bovendien was ook  $r$  een onderdompeling. Dan is  $F|_{\{p\} \times S}$  voor alle  $p \in M$  een onderdompeling, dus is  $F$  ook een onderdompeling en dus zeker ook transversaal aan  $X$ .

Uit de parametrische transversaliteitsstelling volgt nu dat er een  $s \in S$  is zodat  $F_s$  transversaal is aan  $X$ . Deze  $F_s$  is homotoop met  $f = F_0$  via  $H(p, s) = F(p, \gamma(s))$  voor  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^k$  een pad van 0 naar  $s$ . Dit pad bestaat aangezien  $\mathbb{B}^k$  wegsamenhangend is.

Als  $f$  al transversaal is aan  $X$  op een gesloten  $A \subset M$ , kunnen we  $e(p) = 0$  kiezen voor  $p \in A$  (met behulp van een verdeling van de eenheid, zie weer [4]), waardoor inderdaad geldt  $f|_A = (F_s)|_A$ .  $\square$

## 3.2 Cobordisme

Tenslotte geven wij een verrassende toepassing van de transversaliteitshomotopiestelling. We beginnen met de formele definitie van cobordismegroepen.

**Definitie 3.2** ((Ongeoriënteerd) cobordisme<sup>1</sup>). *Twee compacte gladde  $n$ -variëteiten (zonder rand)  $M$  en  $N$  heten **cobordant** als er een gladde compacte  $n + 1$ -variëteit met rand  $W$  bestaat met  $\partial W = M \sqcup N$ . Een dergelijke  $W$  wordt een cobordisme van  $M$  naar  $N$  genoemd.*

**Lemma 3.1.** *Cobordisme is een equivalentierelatie op compacte  $n$ -variëteiten en de equivalentieklassen vormen een groep  $\Omega^n$  onder disjuncte vereniging van representanten.*

*Bewijs.* Iedere compacte variëteit  $M$  is cobordant met zichzelf via  $[0, 1] \times M$ . Symmetrie is triviaal aangezien  $M \sqcup N = N \sqcup M$ . Stel nu dat  $A$  cobordant is aan  $B$  en  $B$  cobordant is aan  $C$ . Neem  $X$  een cobordisme van  $A$  naar  $B$  en  $Y$  een cobordisme van  $B$  naar  $C$ . Wegens de kraagomgevingstelling 2.10 kunnen  $B \times (-1, 0]$  en  $B \times [0, 1)$  ingebed worden in respectievelijk  $X$  en  $Y$ . Via deze inbeddingen kunnen we  $X$  en  $Y$  in  $B$  aan elkaar plakken en zo verkrijgen we een cobordisme van  $A$  naar  $C$ .

De groepsstructuur is duidelijk: de klasse van  $\emptyset$  is het neutrale element, ieder element is zijn eigen inverse en associativiteit geldt aangezien disjuncte vereniging associatief is.  $\square$

**Voorbeeld 3.7** (Cobordisme in dimensie 0).

Twee punten  $\{p\}$  en  $\{q\}$  zijn altijd cobordant aan elkaar via een lijn tussen deze  $p$  en  $q$ . Een punt vormt echter geen rand van een compacte 1-dimensionale variëteit, aangezien dat alleen eindige verenigingen van lijnstukken zijn (en cirkels, die geen rand hebben). Een vereniging van een even aantal punten is dus cobordant met iedere vereniging van een even aantal punten en op dezelfde manier is een oneven aantal punten cobordant met ieder oneven aantal punten. Zo zien we  $\Omega^0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

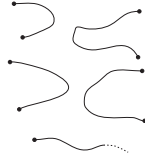
**Voorbeeld 3.8** (Cobordisme in dimensie 1).

Alle compacte 1-variëteiten (zonder rand) zijn eindige verenigingen van cirkels. Deze zijn cobordant aan elkaar via variaties op de ‘broek’ in figuur 3.5. Zo zien we dat  $\Omega^1$  de triviale groep is.

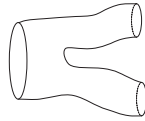
We zien direct dat ieder element in een ongeoriënteerde cobordismegroep maximaal orde twee heeft.<sup>2</sup> Ons doel

<sup>1</sup>Hoewel er meer soorten cobordisme bestaan dan alleen ongeoriënteerd cobordisme, zullen wij altijd ongeoriënteerd cobordisme bedoelen wanneer we ‘cobordisme’ schrijven.

<sup>2</sup>Voor georiënteerde groepen is dit niet zo en de groepsstructuur is dan een stuk interessanter. Alle stellingen in deze scriptie kunnen worden uitgebreid naar georiënteerde cobordismegroepen en dit was ook de focus van René Thom. Aangezien oriëntatie op variëteiten verre van triviaal is om te definiëren, hebben we er in deze scriptie voor gekozen ons te beperken tot ongeoriënteerde variëteiten.



Figuur 3.4: Cobordisme in dimensie 0, het onderste punt kan niet verbonden worden



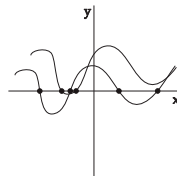
Figuur 3.5: De broek

de rest van deze scriptie zal zijn cobordismegroepen nader te bestuderen en voor zover mogelijk te berekenen. Een gevolg van de transversaliteitshomotopie is een eerste stap in deze richting en geeft een sterk resultaat dat de basis zal vormen in onze zoektocht naar cobordismegroepen.

**Lemma 3.2.** *Zij  $M, N$  gladde variëteiten en  $X \subset N$  een gesloten deelvariëteit. Neem aan dat  $M$  compact is. Als  $f, g : M \rightarrow N$  homotoop zijn en beide transversaal aan  $X$ , dan zijn  $f^{-1}(X)$  en  $g^{-1}(X)$  cobordant.*

*Bewijs.* Neem een homotopie van  $f$  naar  $g$ , zeg  $H$ . Volgens de homotopietransversaliteitsstelling is  $H$  homotoop met een  $H'$  zodanig dat  $H'$  transversaal is aan  $X$ , en aangezien  $f$  en  $g$  al transversaal zijn aan  $X$  kunnen we ervoor zorgen dat  $H'(p, 0) = f(p)$  en  $H'(p, 1) = g(p)$ . Nu is  $H'^{-1}(X)$  een variëteit, en dus een cobordisme van  $f^{-1}(X)$  naar  $g^{-1}(X)$ .  $\square$

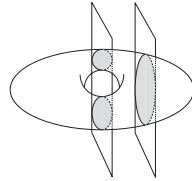
**Voorbeeld 3.9** (Punten).



Figuur 3.6: Twee homotope krommen transversaal aan de x-as, ze snijden de x-as samen in een even aantal punten

Twee homotope krommes, transversaal aan de x-as, doorsnijden de x-as altijd op evenveel punten modulo 2. De cobordismegroep voor  $n = 0$  is dus  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Voorbeeld 3.10** (Broek).



Figuur 3.7: Twee vlakken die de donut transversaal snijden

Zie figuur 3.7. Allebei de doorsnijdingen zijn transversaal aan de donut. Ze zijn ook duidelijk homotoop, dus twee cirkels zijn cobordant aan een cirkel.//

## Hoofdstuk 4

# De Grassmannvariëteit en universele bundels

Lemma 3.2 geeft ons een praktische manier om cobordante variëteiten te vinden. Het hint ons namelijk dat we het cobordismeprobleem kunnen herformuleren als een homotopieprobleem van homotopieklassen van  $M$  naar  $N$  voor geschikte variëteiten. Dit zullen we in hoofdstuk 5 ook daadwerkelijk doen. Voor het zover is hebben we meer materiaal nodig om variëteiten van elkaar te onderscheiden. De buisvormige omgevingen, die we eerder gebruikten om de transversaliteitshomotopiestelling te bewijzen, blijken weer een cruciale rol te spelen.

Om verschillende buisvormige omgevingen, of verschillende vectorbundels in het algemeen, van elkaar te onderscheiden, zijn namelijk de universele bundel en de Grassmannvariëteit ontwikkeld. De Grassmannvariëteit is meestal de eerste echt abstracte variëteit in een lesboek en we zullen beginnen met deze te definiëren en aan te tonen dat het een gladde variëteit is. Hierna zullen we boven de Grassmannvariëteit een bundel definiëren, de universele bundel. De sleutel voor het cobordismeprobleem blijkt vervolgens de universele eigenschap van vectorbundels te zijn. De universele eigenschap lijkt eerst af te hangen van de dimensie van een bundel, maar we zullen tenslotte zien dat er een ‘universele bundel’ bestaat zodat de universele eigenschap onafhankelijk van dimensie gedefinieerd kan worden.

### 4.1 Grassmannvariëteit en universele bundel

Verschillende vectorbundels blijken te classificeren te zijn als verschillende homotopieklassen van afbeeldingen naar een geschikte vectorbundel. De homotopieklassen zijn in dit geval afbeeldingen naar een zogenoemde universele bundel, een vectorbundel over de **Grassmannvariëteit**.

**Definitie 4.1** (Grassmannvariëteiten). *Zij  $V$  een  $n$ -dimensionale vectorruimte. Voor gehele getallen  $0 \leq k \leq n$ , noteren we met  $G_k(V)$  de verzameling van  $k$ -dimensionale lineaire deelruimtes van  $\mathbb{R}^n$ , die we de **Grassmannvariëteit** noemen. Voor de topologie kijken we naar  $k$ -tupels van lineair onafhankelijke elementen in  $\mathbb{R}^n$ . Zo'n  $k$ -tupel kunnen we zien als deelverzameling van  $\mathbb{R}^{kn}$ , en de Grassmannvariëteit heeft de quotiënttopologie geïnduceerd door de quotiëntafbeelding die het  $k$ -tupel afbeeldt naar de deelruimte in  $G_k(V)$  voortgebracht door de  $k$ -tupel en de standaard topologie van  $\mathbb{R}^{kn}$ . De veelvoorkomende Grassmannvariëteit  $G_k(\mathbb{R}^n)$  noteren we met  $G_{k,n}$ .*

Zoals de naam suggereert, is de Grassmannvariëteit ook een variëteit, en zelfs een compacte gladde variëteit. Dit is echter niet triviaal, en het bewijs van de gladheid (of een schets ervan) zal het eerste deel van onze constructie van de universele bundel vormen. Onderweg introduceren we namelijk ook de terminologie en een

gladde structuur die we nodig hebben voor de constructie van een vectorbundel over  $G_{k,n}$ . Onze constructie en ons bewijs volgen grotendeels [10].

**Lemma 4.1.** *De Grassmannvariëteit  $G_k(V)$ , waar  $V$  dimensie  $n$  heeft, is een gladde variëteit van dimensie  $k(n-k)$ .*

*Bewijs.* Laat  $P \in G_k(V)$ . We zoeken nu dus een omgeving van  $P$  diffeomorf met  $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ . Kies  $Q$ , een deelruimte van  $V$  van dimensie  $n-k$ , zodanig dat  $V = P \oplus Q$ . Voor iedere lineaire afbeelding  $A : P \rightarrow Q$  (die we identificeren met de  $k \times (n-k)$  bijbehorende matrix  $A$ ) hebben we precies één  $k$ -dimensionale deelruimte  $\Gamma(A)$  van  $V$ , gegeven door

$$\Gamma(A) = \{v + Av : v \in P\}.$$

Een dergelijke  $\Gamma(A)$  doorsnijdt  $Q$  enkel in  $0$ : immers, uit  $v + Av \in Q$ , met  $v \in P$  en  $Av \in Q$ , volgt  $v \in Q$ , en voor  $v \in P \cap Q$  geldt  $v = 0$ . Dat iedere deelruimte  $S \subset V$  met  $Q \cap S = \{0\}$  op deze manier bij een lineaire afbeelding  $P \rightarrow Q$  hoort, zien we als volgt in: zij  $\pi_P : V \rightarrow P$  en  $\pi_Q : V \rightarrow Q$  de coördinaatprojecties verkregen door  $V = P \oplus Q$  te bekijken. Dan is  $\pi_{P|S}$  een isomorfisme. Nu is  $A = \pi_{Q|S} \circ \pi_{P|S}^{-1}$  een lineaire afbeelding  $P \rightarrow Q$ , waarvoor door de keuze van  $A$  duidelijk geldt  $S = \{v + Av : v \in P\}$ .

Nu is  $U_Q$ , de deelverzameling van  $G_k(V)$  van  $k$ -dimensionale vectorruimtes met triviale doorsnijding van  $Q$ , de omgeving van  $P$  die we zoeken. Zij  $L(P; Q)$  de vectorruimte van lineaire afbeeldingen van  $P$  naar  $Q$ . We hebben gezien dat er een bijectie  $\Gamma : L(P; Q) \rightarrow U_Q$  bestaat. Aangezien  $L(P; Q)$  isomorf is met  $M((n-k) \times k, \mathbb{R})$  en dus met  $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ , induceert dit een bijectie  $\phi : U_Q \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ . De gladheid van transitieafbeeldingen tussen de kaarten, de Hausdorfeigenschap en de tweedst-aftelbaarheid volgen uit de lineaire algebra, en zijn te vinden in [4, Example 1.36]  $\square$

We construeren een eenvoudige vectorbundel boven  $G_{k,n}$ .

**Definitie 4.2** (Universele bundel). *De universele bundel  $E_{k,n}$  boven  $G_{k,n}$  is de vectorbundel van rang  $k$*

$$E_{k,n} = \{(P, v) : P \in G_{k,n} \text{ en } v \in P\},$$

*met de topologie van  $G_{k,n} \times \mathbb{R}^k$  en de projectie  $\pi : E \rightarrow G_{k,n}$  gedefinieerd door  $\pi(P, v) = P$ . De structuur van de vectorruimte wordt geërfd van  $P$ .*

Vanaf nu bedoelen we met  $E_{k,n}$  de universele bundel.

**Lemma 4.2.** *De universele bundel is een vectorbundel.*

*Bewijs.* We hoeven slechts te controleren dat er voor ieder punt  $P \in G_{k,n}$  een omgeving  $U$  bestaat met een lokale trivialisatie van  $E_{k,n}$  over  $U$ . Neem  $U_Q$  zoals in het bewijs van lemma 4.1 en definieer

$$\Phi : \pi^{-1}(U_Q) \rightarrow U_Q \times \mathbb{R}^k$$

door  $\Phi(P', v) = (P', \pi_P(v))$ , waarbij  $\pi_P$  de loodrechte projectie op  $P$  is voor een zekere basis van  $P$ . Dan is  $\Phi$  een bijectie die constant is op de eerste coördinaat en lineair op de tweede, en dus zeker een diffeomorfisme. Bovendien is het duidelijk een isomorfisme van vectorruimtes, zoals besproken in lemma 4.1.  $\square$

## 4.2 Universele eigenschap

Uit de klassieke differentiaalmeetkunde kennen we voor een kromme  $C \subset \mathbb{R}^k$  (een 1-dimensionale variëteit) de bolafbeelding  $t : C \rightarrow S^1$ , die een punt  $p$  naar zijn raakvector van lengte 1 stuurt, en de Gaussafbeelding  $n : C \rightarrow S^k$ , die  $p \in C$  naar zijn normaalvector van lengte 1 stuurt. Met de Grassmannvariëteit kunnen we een gegeneraliseerde Gaussafbeelding  $\bar{g} : M \rightarrow G_{k,n}$  definiëren die  $p \in M$  naar zijn raakruimte  $T_p M$  stuurt. De universele bundel stelt ons in staat de geïnduceerde afbeelding  $g : TM \rightarrow E_{k,n}$  te definiëren als  $g(p, v) = (T_p M, v)$ . Dit is een voorbeeld van een bundelafbeelding.

**Definitie 4.3** (Bundelafbeelding). *Zij  $\pi : E \rightarrow M$  en  $\pi' : E' \rightarrow M'$  vectorbundels. Een (gladde) afbeelding  $F$  van vectorbundels  $E$  naar  $E'$  is een (gladde) bundelafbeelding als er een afbeelding  $f : M \rightarrow M'$  bestaat zodat  $\pi' \circ F = f \circ \pi$  en bovendien voor iedere  $p \in M$  de restrictie  $F|_{E_p} : E_p \rightarrow E_{f(p)}$  een (lineair) injectief homomorfisme is. Twee vectorbundels zijn isomorf als de basisafbeelding  $f : M \rightarrow M'$  een diffeomorfisme is en de overdekkingsafbeelding een isomorfisme van vectorruimtes op iedere vezel.*

Het is direct duidelijk dat  $g : TM \rightarrow E_{k,n}$  een bundelafbeelding is. De reden dat we  $E_{k,n}$  ‘universeel’ noemen, is dat bijna iedere vectorbundel afgebeeld kan worden op  $E_{k,n}$  boven een basisruimte  $G_{k,n}$  met  $n$  groot genoeg.<sup>1</sup> Deze universele eigenschap zullen we nu bewijzen voor compacte variëteiten.

**Stelling 4.1** (Universele bundeleigenschap voor compacte variëteiten). *Iedere  $k$ -vectorbundel  $\pi : E \rightarrow M$  over een compacte basisruimte heeft een bundelafbeelding  $f : E \rightarrow E_{k,n}$  waar  $\pi' : E_{k,n} \rightarrow G_{k,n}$  de universele bundel is met  $n$  groot genoeg.*

*Bewijs.* We construeren een afbeelding  $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  (voor een nog onbekende  $n$ ) zodat voor iedere vezel  $E_p$  de beperking  $\bar{f}|_{E_p}$  een lineaire injectieve afbeelding  $\bar{f}|_{E_p} : E_p \rightarrow \mathbb{R}^n$  is. De gezochte functie wordt dan gedefinieerd door  $f(p, v) = (\bar{f}(E_p), \bar{f}(v))$ , waarna gladheid volgt uit de lokale trivialiteit van  $E$ . We kiezen een overdekking  $\{U_1, \dots, U_r\}$  van de basisruimte  $M$  zodanig dat  $E$  lokaal getrivialiseerd kan worden boven iedere  $U_i$  (dit kan aangezien  $M$  compact is). Voor iedere  $U_i$  is er nu vanwege de lokale trivialiteit een afbeelding  $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$  zodanig dat iedere vezel  $E_p \subset \pi^{-1}(U_i)$  lineair wordt afgebeeld. Er bestaat een gladde partitie van de eenheid onder  $\{U_1, \dots, U_r\}$ , en we noemen de bijbehorende familie van functies  $\psi_1, \dots, \psi_r : M \rightarrow \mathbb{R}$ . We breiden iedere  $h_i$  hiermee uit tot  $h'_i : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  op de volgende manier:

$$\begin{aligned} h'_i(p, v) &= 0 \text{ voor } p \notin U_i \\ h'_i(p, v) &= \psi_i(p)h_i(p, v) \text{ voor } p \in U_i. \end{aligned}$$

Iedere  $h'_i$  is glad en lineair op iedere vezel. De gezochte functie  $\bar{f}$  wordt nu (onafhankelijk van  $p$ )

$$\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^k \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{rk}$$

gedefinieerd door

$$\bar{f}(p, v) = (h'_1(p, v), \dots, h'_r(p, v)).$$

Deze afbeelding is lineair en injectief als we ons beperken tot een vezel, dus wordt de gezochte afbeelding

$$f(p, v) = (\bar{f}(E_p), \bar{f}(v)).$$

□

Om onze discussie over de universele bundel in de toekomst aanzienlijk te vereenvoudigen, introduceren we een ‘universeelere’ bundel. Deze bundel zal ons in staat te stellen de toevoeging ‘voor  $n$  groot genoeg’ weg te laten, door te praten over een oneindige Grassmanniaan  $G_{k,\infty}$ . Een tweede voordeel is dat de eis voor compactheid in de stelling wegvalt. Het concept achter de oneindige Grassmanniaan is vrij intuïtief: het is de verzameling van  $k$ -dimensionale deelruimtes van  $\mathbb{R}^n$ , waar  $n$  varieert over alle positieve gehele getallen. Het formaliseren hiervan en het geven van een goede topologie vereist echter wat werk. We schrijven  $\mathbb{R}^\infty$  voor de vectorruimte bestaande uit oneindige rijtjes  $v = (v_1, v_2, \dots)$  met slechts eindig veel elementen ongelijk aan 0. We identificeren  $\mathbb{R}^k$  met de deelruimtes waarvoor geldt  $v_i = 0$  voor alle  $i > k$ , zodat we krijgen  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \dots$  en de vereniging  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^\infty$ . De topologie van  $\mathbb{R}^\infty$  is de limiet van de topologie van de rij  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \dots$ . Een deelverzameling  $U$  van  $\mathbb{R}^\infty$  is dus open als  $U \cap \mathbb{R}^k$  een open deelverzameling is van  $\mathbb{R}^k$  voor alle  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  (en gesloten deelverzamelingen zijn analoog gedefinieerd).

<sup>1</sup>Om precies te zijn kan iedere vectorbundel boven een compacte basisruimte worden afgebeeld op  $E_{k,n}$ , en zullen we nog een bundel construeren zodat dit zelfs voor iedere vectorbundel boven een paracompacte basisruimte kan (en dus in het bijzonder voor iedere vectorbundel boven een variëteit).



**Definitie 4.4** (Oneindige Grassmanniaan). *De oneindige Grassmanniaan  $G_{k,\infty}$  of  $G_k$  is de verzameling van alle  $k$ -dimensionale deelruimtes van  $\mathbb{R}^\infty$ . De topologie is de limiet van de topologie van de rij  $G_{k,k} \subset G_{k,k+1} \subset G_{k,k+2} \subset \dots$*

We merken op dat de oneindige Grassmanniaan geen echte variëteit meer is. Zo heeft het geen vaste, eindige dimensie. Het is natuurlijk wel een topologische ruimte en ook boven topologische ruimtes zijn vectorbundels te definiëren. Daarom construeren we geen gladde structuur en vervangen we in de hele terminologie over vectorbundels en afbeeldingen hiervan het woord glad door continu, diffeomorfisme door homeomorfisme, etcetera.

Analoog aan de constructie van onze universele bundels  $E_{k,n}$  construeren we nu dé universele bundel.

**Definitie 4.5** (Universele bundel 2). *De universele bundel  $E_k$  boven  $G_k$  is de vectorbundel van rang  $k$*

$$E_k = \{(P, v) : P \in G_k \text{ en } v \in P\}$$

*met de topologie van  $G_k \times \mathbb{R}^\infty$  en de projectie  $\pi : E \rightarrow G_k$  gedefinieerd door  $\pi(P, v) = P$ . De structuur van de vectorruimte wordt geërfd van  $P$ .*

Ook nu is  $E_k$  inderdaad een vectorbundel, wat we analoog aan lemma 4.2 gaan bewijzen. Hier gebruiken we dezelfde afbeelding  $\Phi : \pi^{-1}U_Q \rightarrow U_Q \times \mathbb{R}^k$  als voor het eindige geval  $E_{k,n}$  en nemen de directe limiet van deze afbeelding voor  $n$  naar oneindig. De deelverzameling  $U_Q \subset G_{k,n}$  was gedefinieerd als de deelverzameling van  $k$ -dimensionale vectorruimtes die triviale doorsnijding heeft met  $Q = P^\perp$  voor zekere  $P \in G_{k,n}$ . Ze verandert dus afhankelijk van  $n$ , en we noteren de  $U_Q$  voor een zekere  $G_{k,n}$  dus als  $U_{Q,n}$ . De ‘algemene’  $U_{Q,\infty}$  is nu de limiet van  $U_{Q,n} \subset U_{Q,n+1} \subset \dots$ . Aangezien we moeten controleren of de geconstrueerde  $\Phi$  inderdaad een homeomorfisme is, moeten we wat meer weten over de topologie van de  $U_{Q,\infty} \times \mathbb{R}^k$ . Het volgende technische lemma geeft ons voldoende informatie.

**Lemma 4.3.** *Zij  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  en  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$  rijtjes van lokaal compacte ruimtes met directe limieten  $A$  en  $B$ . Dan is het Cartesisch product  $A \times B$  topologisch gelijk aan de directe limiet van  $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$*

*Bewijs.* Zij  $W$  open in de producttopologie  $A \times B$ . Dan geldt  $W = U \times V$  en  $U \cap A_i$  en  $V \cap B_i$  zijn open voor alle gehele  $i \geq 1$ , en dus is  $W \cap (A_i \times B_i) = (U \cap A_i) \times (V \cap B_i)$  open voor alle gehele  $i \geq 1$ . Dus is  $W$  open in de directe limiet  $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$

Zij  $W$  open in de limiet van de reeks  $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$ , en  $(a, b) \in W$ . We laten zien dat  $W$  open is in  $A \times B$ . Voor zekere  $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  geldt  $(a, b) \in A_i \times B_i$ . Wegens lokale compactheid kunnen we omgevingen  $U_i \subset A_i$  kiezen zodat  $U_i \subset K_i$  voor een compacte  $K_i$  en  $a \in U_i$ , en op dezelfde manier een  $b \in V_i \subset L_i$  voor  $V_i$  open en  $L_i$  compact. We kunnen  $K_i$  en  $L_i$  bovendien kiezen zodat  $K_i \times L_i \subset W$ . Kies als dat nog niet het geval was voor een initiële  $K_i$  en  $L_i$  bijvoorbeeld  $U'_i = U_i \cap (W \cap A_i)$  en vervolgens  $U'_i \subset K_i \subset W \cap A_i$ . Dit kan aangezien  $W \cap A_i$  lokaal compact is met de deelverzamelingtopologie.

Zo kiezen we voor alle  $j \geq i$  omgevingen  $U_j \subset K_j$  en  $V_j \subset L_j$  zodat  $U_k \subset U_j$  en  $V_k \subset V_j$  voor alle  $k < j$  en  $U_j \times V_j \subset W$  voor alle  $j$ . Neem nu  $U = U_i \subset U_{i+1} \subset \dots$  en  $V = V_i \subset V_{i+1} \subset \dots$ . Dan is  $U \times V \subset W$  dus open, en door dit voor alle punten in  $W$  te doen vinden we dat  $W$  in de producttopologie de vereniging is van open verzamelingen.  $\square$

**Lemma 4.4.** *De oneindige universele bundel is een vectorbundel.*

*Bewijs.* We laten zien dat er voor ieder punt  $P \in G_k$  een omgeving  $U$  bestaat met een lokale trivialisatie van  $E_k$  boven  $U$ . Voor zekere  $N$  geldt  $P \in G_{k,N}$ . Neem voor iedere  $n \geq N$  de omgeving  $U_{Q,n}$  zoals in het bewijs van lemma 4.2 en definieer  $\Phi_n$  net als daar. Nu bestaat er een functie  $\Phi : \pi^{-1}(U_{Q,\infty}) \rightarrow U_{Q,\infty} \times \mathbb{R}^n$  zodat  $\Phi|_{\pi^{-1}U_{Q,n}} = \Phi_n$  voor iedere  $n$ , aangezien het beeld van een deelverzameling van  $\pi^{-1}(U_{Q,\infty})$  constant blijft voor  $\Phi_i$  met  $i \geq n$ . Lemma 4.3 zegt ons nu dat  $\Phi$  continu is en aangezien de afbeelding weer constant is op de eerste coördinaat en lineair op de tweede heeft  $\Phi$  ook zeker een continue inverse. Dus is  $\Phi$  een homeomorfisme en isomorfisme van vectorruimtes, en dus hiermee een lokale trivialisatie van  $U_{Q,\infty}$ .  $\square$

Stelling 4.1 kunnen we nu als volgt generaliseren:

**Stelling 4.2** (Universele bundeleigenschap voor variëteiten). *Iedere  $k$ -vectorbundel  $\pi : E \rightarrow M$  over een gladde variëteit heeft een bundelafbeelding  $f : E \rightarrow E_k$ , waar  $\pi' : E_k \rightarrow G_k$  de universele bundel is.*

Voor compacte variëteiten is het bewijs analoog aan stelling 4.1, waar we  $\mathbb{R}^{rk}$  in de constructie van  $\bar{f}$  opvatten als deelruimte van  $\mathbb{R}^\infty$ , en  $f$  dus gedefinieerd wordt door een afbeelding  $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ . Het bewijs voor het algemene geval maakt gebruik van het feit dat variëteiten paracompact zijn en is vrij technisch. Aangezien wij de universele overdekking enkel zullen gebruiken voor bundels boven compacte basisruimtes, verwijzen we voor het algemene geval naar het boek van Milnor [10]. We schrijven vanaf nu  $E_k$  voor de vectorbundel  $\pi : E_k \rightarrow G_k$ .

Bundelafbeeldingen naar de universele bundel hebben verder nog een belangrijke eigenschap: ze zijn homotoop, en wel op zo'n manier dat de bundelstructuur behouden blijft door de homotopie. Dit noemen we **bundelhomotoop**. Formeel gezegd: twee afbeeldingen  $f$  en  $g$  van vectorbundels  $E \rightarrow E'$  zijn bundelhomotoop als er een continue functie  $h : E \times [0, 1] \rightarrow E'$  bestaat zodanig dat voor iedere  $t_* \in [0, 1]$  geldt dat  $h(\dots, t_*) : E \rightarrow E'$  een bundelafbeelding is.

**Stelling 4.3.** *Twee bundelafbeeldingen van een  $k$ -vectorbundel  $\pi : E \rightarrow M$  naar de universele bundel  $E_n$  zijn bundelhomotoop.*

*Bewijs.* Een bundelafbeelding  $f : E \rightarrow E_n$  induceert zoals in ons eerdere bewijs van stelling 4.1 een afbeelding  $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  zodat de restrictie op vezels lineair en injectief is. Andersom legt een  $\bar{f}$  die op vezels lineair en injectief is ook  $f$  vast: voor  $p \in M$  wordt het beeld van iedere vector boven  $M$  bepaald door  $\bar{f}$  en zo moet gelden  $f(p, v) = (\bar{f}(E_p), \bar{f}(v))$ .

Neem nu  $f, g : E \rightarrow E_n$  twee bundelafbeeldingen. Stel dat voor alle  $p \in M$  geldt dat  $\bar{f}|_{E_p}(v) \in \mathbb{R}^\infty$  niet gelijk is aan  $-c\bar{g}|_{E_p}(v)$ , voor alle  $c \in [0, \infty)$  en  $v \in E_p \setminus \{0\}$ . Dan is

$$h(\bar{v}, t) = (1-t)\bar{f}(v) + t\bar{g}(v) \text{ voor } 0 \leq t \leq 1$$

een homotopie tussen  $\bar{f}$  en  $\bar{g}$ . Aangezien scalaire vermenigvuldiging en optelling van vectoren continu zijn, is onze homotopie dat ook. Verder is de afbeelding injectief als homomorfisme over iedere vezel: stel  $(1-t)\bar{f}(v) + t\bar{g}(v) = 0$ . Dan volgt  $\bar{f}(v) = \frac{-t}{1-t}\bar{g}(v)$ , en met  $t \in [0, 1]$  is dit in strijd met onze aanname. Zo kunnen we een afbeelding  $h : E \times [0, 1] \rightarrow E_k$  definiëren door

$$h(p, v, t) = (\bar{h}(E_p, t), \bar{h}(v, t)).$$

Deze moet nog continu zijn. Om dit te bewijzen, volstaat het te bewijzen dat de bijbehorende afbeelding van de basisruimtes  $\hat{h} : M \times [0, 1] \rightarrow G_k$  continu is. Continuïteit van  $h$  volgt dan uit de lineariteit op de vezels. We bewijzen de continuïteit van  $\hat{h}$  lokaal op een open  $U \subset M$  zodanig dat  $U$  lokaal getrivialiseerd kan worden over  $E$ . We kunnen dan  $k$  lineair onafhankelijke secties  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  nemen, waardoor  $\hat{h}|_{U \times [0, 1]}$  een samenstelling wordt van een functie  $\hat{h}_1 : U \times [0, 1] \rightarrow \prod_{i=1}^k (\mathbb{R}^\infty)_i$  gegeven door

$$(p, t) \mapsto (\bar{h}(\sigma_1(p), t), \dots, \bar{h}(\sigma_k(p), t))$$

gevolgd door een projectie  $p : \prod_{i=1}^k (\mathbb{R}^\infty)_i \rightarrow G_k$ , die de  $k$  vectoren in  $\prod_{i=1}^k (\mathbb{R}^\infty)_i$  afbeeldt op de deelruimtes die ze voortbrengen. Beide zijn duidelijk continu volgens lemma 4.3, en zo is ook  $\hat{h}$  continu. Hieruit volgt dat  $h$  een bundelhomotopie van  $f$  naar  $g$  is.

We laten nu onze aanname dat  $\bar{f}(v)$  en  $\bar{g}(v)$  niet afhankelijk zijn via een negatieve scalar los en reduceren het algemene geval naar dit eerdere geval. Neem  $d_1 : E_k \rightarrow E_k$  de afbeelding geïnduceerd door de  $i$ -de basisvector naar de  $2i$ -de te sturen en  $d_2 : E_n \rightarrow E_n$  de afbeelding geïnduceerd door  $i$ -de basisvector naar de  $(2i-1)$ -ste te sturen. Dit zijn bundelafbeeldingen aangezien ze injectief en lineair op de vezels zijn. Nu geldt er wegens het al bewezen geval  $f \sim d_1 \circ f$  en  $g \sim d_2 \circ g$ . Iedere vector ongelijk aan 0 wordt namelijk de hoogste index ongelijk aan 0 afgebeeld op een nog hogere index, waardoor  $\bar{f}(v) = cd_1(\bar{f}(v))$  onmogelijk is. Aangezien vezels in het beeld van  $d_1 \circ f$  enkel worden afgebeeld op deelruimtes voortgebracht door even

basisvectoren van  $\mathbb{R}^\infty$ , en vezels in het beeld van  $d_2 \circ g$  juist enkel op deelruimtes voortgebracht door oneven basisvectoren, geldt ook  $d_1 \circ f \sim d_2 \circ g$ . Zo vinden we de homotopieën  $f \sim d_1 \circ f \sim d_2 \circ g \sim g$ .  $\square$

Stelling 4.2 en 4.2 laten samen zien dat iedere  $n$ -vectorbundel  $E \rightarrow M$  overeenkomt met een homotopieklasse  $[M, G_n]$ , met  $G_n$  de oneindige Grassmanniaan. We kunnen namelijk een bundelafbeelding  $F$  nemen, en hiervan de geïnduceerde homotopieklasse  $[f]$  van afbeeldingen vanaf de basisruimte  $M$ . Door gebruik te maken van de zogenaamde homotopieoverdekkingsstelling, in combinatie met een homotopieuitbreidingsstelling zoals in hoofdstuk 2, maar dan met bundelhomotopie, generaliseert Hirsch bijvoorbeeld in [6] deze uitspraak tot de volgende stelling:

**Stelling 4.4** (Classificatiestelling vectorbundels). *Iedere  $k$ -vectorbundel  $E$  boven een variëteit  $M$  heeft een op bundelhomotopie na unieke classificerende afbeelding  $f_E : M \rightarrow G_k$ . Als  $M$  een rand heeft, breidt een classificerende afbeelding  $\partial M \rightarrow G_{k,n}$  voor de bundel  $E$  beperkt tot de rand, uniek uit tot een classificerende afbeelding voor  $M$ . Voor twee vectorbundels  $E$  en  $E'$  zijn de classificerende afbeeldingen  $f_E$  en  $f_{E'}$  bundelhomotoop dan en slechts dan als  $E$  isomorf is met  $E'$ . Al deze uitspraken gelden ook voor de eindige Grassmanniaan  $G_{k,n}$ , als  $n$  groot genoeg is en  $M$  compact.*

## Hoofdstuk 5

# Thom-Pontryaginconstructie

Zoals gehint in de inleiding van vorig hoofdstuk, kunnen we van het cobordisme probleem een homotopie probleem maken. De constructie die dit mogelijk maakt heet de Thom-Pontryagin constructie. Dit is een isomorfisme tussen de homotopiegroep van een zekere ruimte  $E_k^*$ ,  $[S^{2k+1}, E_k^*]$ , en de cobordismegroep  $\Omega^k$ . Zoals de notatie suggereert is  $E_k^*$  afgeleid van de universele bundel  $E_k$ . De Thom-Pontryaginconstructie is het hoogtepunt van Thom's werk over cobordisme en brengt alle begrippen uit deze scriptie op elegante wijze samen.

Voor het zover is, zullen we echter nog wat werk moeten doen: dit hoofdstuk start met het uitzoeken van geschikte topologische ruimtes om ons cobordisme probleem te vertalen naar een homotopie probleem. Een van de nog missende ingrediënten blijkt de Thomruimte te zijn, die we dan ook zullen introduceren en met wat voorbeelden zullen toelichten. De Thomruimte blijkt het laatste missende puzzelstukje te zijn en we zullen dan ook laten zien hoe alle stukjes hierna op hun plaats vallen. Specifieker bekijken we de Thomruimte van de universele bundel die vorig hoofdstuk geïntroduceerd werd. Voor de universele bundel over een eindige Grassmannvariëteit blijkt dit erg eenvoudig het gezochte isomorfisme te geven.

Wanneer we naar de universele bundel over de oneindige Grassmanniaan proberen uit te breiden, krijgen we een algemener en eleganter resultaat, maar zullen we wel toevlucht moeten nemen tot een constructie die wat meer werk en voorkennis vereist. Het bewijs hiervan zullen we dus achterwege laten, waarna we wel tenslotte kort kijken hoe de cobordismegroepen, die we dan uit kunnen rekenen, eruit zien.

### 5.1 Eerste constructiepoging en Thomruimte

Wegens lemma 3.2 is er een sterke relatie tussen homotope afbeeldingen en cobordante variëteiten. We gebruiken dat door op deze manier een afbeelding te maken van homotopieklassen naar cobordismeklassen: neem een variëteit  $N$  en een gesloten deelvariëteit  $A \subset N$  vast en kies een variëteit  $N'$ . Iedere homotopieklasse van afbeeldingen  $N' \rightarrow N$  bevat nu wegens stelling 3.3 een element transversaal aan  $A$ , en dan is wegens stelling 3.2  $f^{-1}(A)$  een gesloten deelvariëteit van  $N'$ . Volgens lemma 3.2 zitten variëteiten die zo uit dezelfde homotopieklassen geconstrueerd zijn in dezelfde cobordismeklasse. Zo is een afbeelding van de homotopieklasse  $[N', N]$  naar de cobordismeklasse  $\Omega^k$  goed gedefinieerd. Ons doel is nu  $N$ ,  $N'$  en  $A$  zo te kiezen dat deze afbeelding een bijectie is.

Hiervoor zoeken we allereerst een variëteit  $N'$  waarin alle compacte variëteiten ingebed kunnen worden. Met de inbeddingsstelling van Whitney (zie stelling 3.5) is een kandidaat voor  $N'$  makkelijk te vinden. Alle compacte deelvariëteiten van dimensie  $k$  kunnen immers ingebed worden in  $S^{2k+1}$ . Bovendien kunnen we nu onze homotopiegroepen uit hoofdstuk 2 weer gebruiken, waardoor de homotopieklassen een groepsstructuur

hebben. Hiermee kunnen we ons doel om een bijectie te vinden bijstellen, en zelfs op zoek gaan naar een isomorfisme.

Nu zoeken we dus een gesloten  $A \subset N$  (en eerst überhaupt een bijbehorende  $N$ ) zodat voor iedere compacte deelvariëteit  $M \subset S^{2k+1}$  er een gladde functie  $f : S^{2k+1} \rightarrow N$  met  $f^{-1}(A) = M$ . Dit is gelukkig mogelijk met de achtergrond in classificatie van vectorbundels uit het vorige hoofdstuk. Bekijk een variëteit  $N$  en een gesloten deelvariëteit  $A \subset N$ . Neem een representant  $f$  van een homotopieklasse zodanig dat  $f^{-1}(A) = M$  (die ingebed is in  $S^{2k+1}$ ). Nu bekijken we een buisvormige omgeving  $NM$  van  $M$  in  $S^{2k+1}$  en een buisvormige omgeving  $NA$  van  $A$  in  $N$ . Wegens transversaliteit weten we dat  $T_{f(x)}A + \text{im } T_x f = T_{f(x)}N$  voor alle  $x \in M$ . Hieruit volgt dat de normaalbundel  $NA$  volledig in het beeld zit van de raakafbeelding van  $f$ , dat wil zeggen, het volgende diagram commuteert:

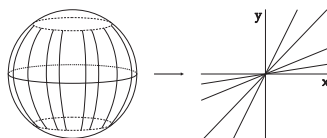
$$\begin{array}{ccc} NM & \xrightarrow{Tf} & NA \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & A \end{array} .$$

We kunnen  $NM$  dus terugtrekken uit  $NA$  via  $Tf$ . Uit de variëteit  $A$  die we zoeken moet dus een willekeurige compacte variëteit  $M$  met normaalbundel  $NM$  kunnen worden teruggetrokken via een bundelafbeelding. Een geschikte  $A$  en  $N$  worden gelukkig precies beschreven in stelling 4.2 en worden gegeven door  $G_k$  en  $E_k$ , de Grassmanniaan en universele bundel. Om de constructie te vereenvoudigen, beginnen we met  $G_{k,n}$  en  $E_{k,n}$ , de universele bundel over een eindige Grassmannvariëteit voor dimensie  $n$  groot genoeg.

We schrijven  $U$  voor de buisvormige omgeving van  $M$ . Zo'n buisvormige omgeving  $U$  is diffeomorf met  $NM$ , en in deze sectie zullen we de twee wanneer het uitkomt met elkaar identificeren. Nu hebben we dus een bundelafbeelding  $g : U \rightarrow E_{k,n}$ , die via de nulsectie een afbeelding  $f : M \rightarrow G_{k,n}$  induceert, zodat  $f^{-1}(G_{k,n}) = M$ . Deze  $M$  en zijn omgeving  $U$  waren natuurlijk bevat in  $S^{2k+1}$ . Aangezien we willen dat  $g$  een representant is van een homotopieklasse van  $[S^{2k+1}, E]$ , moeten we  $g$  nog kunnen uitbreiden naar de hele bol  $S^{2k+1}$ . Bovendien mogen punten buiten  $M$  niet op de basis  $G_{k,n}$  worden afgebeeld: dit zou namelijk het inverse beeld  $g^{-1}(G_{k,n})$  ongelijk maken aan  $M$ . Deze gelijkheid  $g^{-1}(G_{k,n}) = M$  was echter juist de essentie van onze constructie. Zo'n uitbreiding is echter niet altijd mogelijk, zoals het volgende voorbeeld laat zien:

**Voorbeeld 5.1** (Uitbreiding is niet altijd mogelijk).

Bekijk de compacte variëteit  $S^1 \subset S^2$ . De bijbehorende afbeelding  $g : NS^1 \rightarrow E_{1,2}$  is nu een diffeomorfisme gegeven door  $(p, v) \mapsto (\{\lambda\theta_p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, v)$ , waar  $\theta_p$  de hoek is die  $p$  maakt ten opzichte van  $(1, 0) \in S^1$  (ingebed in  $\mathbb{R}^2$ ). Voor een extensie van  $g$  naar heel  $S^2$  zou de rand van  $NS^1$  wegens continuïteit moeten worden afgebeeld op  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda\theta_p, tv)$ . Deze limiet bestaat echter niet in  $E_{1,2}$ . //



Figuur 5.1: Uitbreiding is niet altijd mogelijk

Intuïtief lijkt het echter duidelijk dat dit ons niet zou moeten tegenhouden in onze constructie. Thom voelde

dit correct aan en loste het probleem volledig op. Het blijkt voldoende te zijn de missende limiet in voorbeeld 5.1 toe te voegen op de volgende manier:

**Definitie 5.1** (Thomruimte). *Zij  $E$  een vectorbundel. De Thomruimte van  $E$  is  $E^* = E \cup \{\infty\}$ , waar  $\infty \notin E$ . De topologie van  $E$  breidt zich uit naar  $E^*$  door als omgevingen van  $\infty$  de complementen van compacte deelverzamelingen te nemen.*

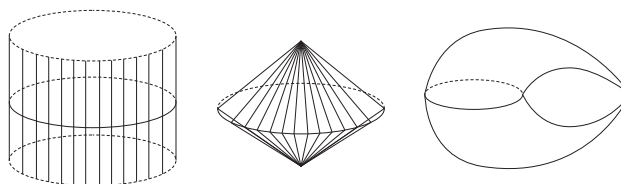
**Voorbeeld 5.2** (Thomruimte boven punt).

Neem de vectorbundel  $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \{p\}$ . De Thomruimte is nu  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$ .

We geven een alternatieve equivalente definitie van de Thomruimte:

**Definitie 5.2** (Thomruimte II). *Zij  $E$  een vectorbundel en  $Q = \{(p, v) : |v| \geq 1\}$ . Dan is de Thomruimte  $E^* = E/Q$  met de quotiënttopologie.*

**Voorbeeld 5.3** (Thomruimte normaalbundel van een cirkel).



Figuur 5.2: Thomruimte  $NS^1$  is geen variëteit: links de normaalbundel, rechts de Thomruimte van de normaalbundel

Neem  $S^1$  met zijn normaalbundel  $NS^1$ . Dit is een cilinder met oneindige hoogte. De Thomruimte  $((NS)^1)^*$  verkrijgen we door de cilinder (met rand) van hoogte 1 te nemen en de rand boven en onder in een punt aan elkaar te plakken. Zie figuur 5.1.

Dit voorbeeld laat zien dat niet iedere Thomruimte weer een gladde variëteit is. Het heeft dan ook geen zin over een ‘gladde’ uitbreiding van  $g$  te praten. Dit compliceert de constructie, aangezien we hierdoor ook geen begrippen als transversaliteit kunnen gebruiken. We breiden  $g$  alsnog uit door ieder punt op  $S^{2k+1} \setminus NM$  af te beelden op  $\infty$ . Deze afbeelding is nog steeds glad op  $NM \rightarrow E$  en continu op de hele bol. Iedere homotopieklasse  $[S^{2k+1}, E^*]$  blijkt een element  $g$  te bevatten dat glad is op  $g^{-1}(E_{k,n})$  (het inverse beeld van de gewone universele bundel, dus zonder het punt in oneindig) en bovendien transversaal is aan de basisruimte  $G_{k,n}$ .

## 5.2 De constructie

Met de Thomruimte in onze gereedschapskist kunnen we verder met de constructie. We schrijven om notatie te vereenvoudigen  $G$  en  $E$  voor de Grassmannvariëteit en universele bundel respectievelijk (van geschikte dimensies).

Een eerste hulplemma over de Thomruimte is het volgende:

**Lemma 5.1.** *Voor een Thomruimte  $E^*$  van een vectorbundel  $E$  boven een variëteit  $M$ , is  $E^* \setminus M$  samentrekbaar. Voor  $Y$  een gesloten deelvariëteit van een variëteit  $A$  en  $K \subset E^* \setminus M$  een compacte samentrekbare deelverzameling van  $E^* \setminus M$ , en twee afbeeldingen  $f, g : A \rightarrow K$  die overlappen op  $Y$ , zijn  $f$  en  $g$  homotoop, en kan de homotopie gekozen worden zodat deze constant is op  $Y$ .*

*Bewijs.* Een samentrekking naar  $\infty$  is gegeven door

$$\begin{aligned} \Phi : (E^* \setminus M) \times I &\rightarrow E^* \setminus M \\ (x, t) &\mapsto \left( \frac{1+t}{1-t} \right) x, \text{ voor } 0 \leq t < 1 \\ (x, 1) &\mapsto \infty. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat twee afbeeldingen  $f, g : A \rightarrow E^* \setminus M$  homotoop zijn. Stel dat ze bovendien op een gesloten  $Y \subset A$  overlappen, en dat er een compacte samentrekbare  $K \subset E^* \setminus M$  is zodat het beeld van  $f$  en  $g$  bevat is in  $K$ . Dan is  $H : Y \times [0, 1]$  gegeven door  $H(p, t) = f(p) = g(p)$  een (constante) homotopie van  $f|_Y$  naar  $g|_Y$ . Aangezien  $K$  samentrekbaar is en dus een retract van  $\mathbb{R}^n$  (na inbedding, die mogelijk is), vertelt stelling 2.3 ons dat de homotopie zich uitbreidt tot een homotopie over heel  $A$ . Dus zijn  $f$  en  $g$  homotoop via een homotopie die constant is op  $Y$ .  $\square$

De keuze voor  $K$  lijkt erg specifiek, maar voorbeelden van zo'n  $K$  zijn de verzamelingen  $\{(p, v) \in E^* \setminus M : |v| \geq c \text{ voor } c \in (0, 1)\}$ .

Er zijn veel continue afbeeldingen  $g : S^{2k+1} \rightarrow E^*$  mogelijk, maar de afbeeldingen waarin wij geïnteresseerd zijn, zijn erg gelimiteerd. Zo moet de beperking tot  $g^{-1}(E)$  glad zijn en moet  $g^{-1}(E)$  een buisvormige omgeving  $U \cong NM$  zijn van  $g^{-1}(G)$ , zodat het volgende diagram een bundelafbeelding is commuteert:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g|_U} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{g|_M} & G \end{array} .$$

Dit betekent dus ook dat  $g$  transversaal snijdt aan  $G$ . Functies die aan deze voorwaarden voldoen zullen we **functies in standaardvorm** noemen. Hoewel dit een zeer beperkte deelverzameling van functies lijkt, laat het volgende lemma ons zien dat in iedere homotopieklasse zo'n functie zit, en dit dus de enige functies zijn waar we over na hoeven te denken.

**Lemma 5.2.** *Iedere afbeelding  $f : S^{2k+1} \rightarrow E^*$  is homotoop aan een afbeelding in standaardvorm.*

*Bewijs.* Kies eerst een  $f_0$  homotoop aan  $f$  zodat  $f_0^{-1}(E) \neq \emptyset$ . Wegens stelling 3.3 kunnen we aannemen dat  $f_0|_{f_0^{-1}(E)}$  transversaal snijdt aan  $G$ . We schrijven nu  $M = f_0^{-1}(G)$  en kiezen  $U \subset f_0^{-1}(E)$ , zodat  $U$  inderdaad een buisvormige omgeving van  $M$  is. Verder nemen we ook een gesloten schijfomgeving  $D \subset U$ . We kunnen  $U$  nu een vectorbundelstructuur geven diffeomorf met  $NM$ , zodat  $f_0$  voldoet aan bovenstaand diagram wegens transversaliteit<sup>1</sup>. Nu definiëren we  $h : S^{2k+1} \rightarrow E^*$  door  $h(p) = f_0(p)$  voor  $p \in U$  en  $h(p) = \infty$  voor  $p \in S^{2k+1} \setminus U$ .

Deze  $h$  is in standaardvorm, dus laten we zien dat  $h$  homotoop is met  $f_0$  en dus met  $f$ . Dit volgt direct uit lemma 5.1, aangezien  $f_0$  en  $h$  overlappen op  $D$ ,  $S^{2k+1} \setminus \text{Int } D$  door beide afgebeeld wordt in een samentrekbaar compacte deelruimte  $K \subset E^* \setminus G$  en de afbeeldingen gelijk zijn op de gesloten deelvariëteit  $\partial D$ .  $\square$

Hiermee kunnen we ons isomorfisme  $\tau : [S^{2k+1}, E_{k,n}^*] \rightarrow \Omega^n$  definiëren.

<sup>1</sup>Dit vereist eigenlijk een technisch argument dat onze identificatie van  $NM$  met buisvormige omgevingen  $U$  formaliseert. Zie [6] voor details.

**Definitie 5.3** (Thom-Pontryagin isomorfisme  $\tau$ ). *Zij  $\alpha \in [S^{2k+1}, E^*]$ . Uit de transversaliteitshomotopiestelling volgt dat er een  $f \in [\alpha], f : S^{2k+1} \rightarrow E^*$  is zodat  $f|_{(S^{2k+1} \setminus f^{-1}(\infty))}$  transversaal snijdt aan  $G$ . Definieer nu  $\tau : [S^{2k+1}, E^*] \rightarrow \Omega^k$  door  $\tau(\alpha) = [f^{-1}(G)]$ .*

Deze constructie, de Thom-Pontryaginconstructie, brengt alle belangrijke resultaten uit deze scriptie samen en is een hoogtepunt van de twintigste eeuw in de differentiaaltopologie. Ons bewijs volgt nauw het bewijs in [6] van Hirsch.

**Stelling 5.1** (Isomorfisme van cobordismegroepen naar homotopiegroepen). *De afbeelding uit definitie 5.3  $\tau : [S^{2k+1}, E^*] \rightarrow \Omega^k$  is welgedefinieerd en een isomorfisme.*

*Bewijs.* De keuze van  $f$  maakt wegens lemma 3.2 niet uit, en dus is  $\tau$  welgedefinieerd. We moeten nog bewijzen dat  $\tau$  een injectief en surjectief homomorfisme is. We beginnen met bewijzen dat  $\tau$  een homomorfisme is, dat wil zeggen,  $\tau(\alpha + \beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$ . Bekijk  $\alpha, \beta \in [S^{2k+1}, E^*]$ . Voor  $f \in \alpha$  en  $g \in \beta$  zodat de bovenste respectievelijk onderste helft van  $S^{2k+1}$  op  $\infty$  worden afgebeeld, is een representant van  $\alpha + \beta$  de afbeelding  $h$  die op de onderste helft overeenkomt met  $f$  en op de bovenste met  $g$  (zie hoofdstuk 2). Uiteraard kunnen we zowel  $f, g$  als  $h$  weer transversaal aan  $G$  kiezen. Er geldt natuurlijk  $h^{-1}(G) = f^{-1}(G) \sqcup g^{-1}(G)$ , aangezien  $f^{-1}(G)$  op het noordelijk halfrond ligt en  $g^{-1}(G)$  op het zuidelijk halfrond in onze definitie van  $h$ . Dit geeft

$$\begin{aligned} \tau(\alpha + \beta) &= [h^{-1}(G)] \\ &= [f^{-1}(G) \sqcup g^{-1}(G)] \\ &= [f^{-1}(G)] + [g^{-1}(G)] \\ &= \tau(\alpha) + \tau(\beta). \end{aligned}$$

We gaan door met surjectiviteit. Zij  $[M] \in \Omega^n$ . Dan kan  $M$  ingebed worden in  $\mathbb{R}^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+1} \cup \{\infty\} \cong S^{2k+1}$  vanwege de inbeddingsstelling van Whitney. Kies nu een buisvormige omgeving  $U \subset S^{2k+1}$  van  $M$ . Er is nu wegens stelling 4.1 een bundelafbeelding naar  $U \rightarrow E$ , die we continu kunnen uitbreiden tot  $g : S^{2k+1} \rightarrow E^*$ , door  $S^{2k+1} \setminus U$  af te beelden op  $\infty$ . Per constructie snijdt  $g$  transversaal aan  $G$  (beperkt tot  $g^{-1}(E)$ ) en geldt  $g^{-1}(E) = M$ . Dus volgt  $\tau([g]) = [M]$ .

Tenslotte bewijzen we injectiviteit. Stel dus  $[g] \in \ker(\tau)$ . Wegens lemma 5.2 kunnen we aannemen dat  $g \in [g]$  in standaardvorm is waardoor we krijgen  $g^{-1}(G) = M$ , die een buisvormige omgeving  $U$  heeft. De aanname  $[g] \in \ker(\tau)$  zegt ons dat  $M$  de rand is van een  $(n+1)$ -variëteit  $W$ .

We zullen laten zien dat  $W$  te inbedden is in de eenheidsbal  $B^{2k+2}$ , op zo'n manier dat de inbedding een uitbreiding is van onze inbedding van  $M = \partial W$  in  $S^{2k+1}$ . Hiervoor breiden we eerst de inbedding van  $M$  uit tot een inbedding van een open omgeving van  $M$  in  $W$  via de kraagomgevingstelling 2.10. Zo kunnen we  $M \times [0, 1)$ , diffeomorf met een omgeving  $V \subset W$ , inbedden in de schijf, zodat het beeld van  $M \times \{0\}$  de inbedding van  $M$  in  $S^{2k+1}$  is. Deze inbedding  $i : M \times [0, 1) \rightarrow B^{2k+2}$  vervormen we op een diffeomorfe wijze als volgt: we nemen  $h : i(M \times [0, 1)) \rightarrow B^{2k+2}$  gegeven door

$$\begin{aligned} h(i(p, t)) &= \frac{e^{-\frac{1}{1-t}}}{e^{-\frac{1}{1-t}} + e^{-\frac{1}{t}}} i(p, t) \text{ voor } t > 0 \\ h(i(p, t)) &= i(p, t) \text{ voor } t = 0. \end{aligned}$$

Rechtstreekse verificatie of het bewijs van Lee in [4, Lemma 2.21] laten zien dat deze functie glad is en de eigenschap heeft dat punten voor  $t \rightarrow 1$  naar de oorsprong worden getrokken. Aangezien punten slechts geschaald worden met een positief getal, is  $h$  ook een diffeomorfisme. We krijgen zo een inbedding van  $M \times [0, 1) \cong V \subset W$  die een soort kegel is met de (ontbrekende) top in  $0 \in B^{2k+2}$ . Deze breiden we uit door de rest van  $W$ , dus  $W \setminus V$  in  $0$  te leggen.

Dit geeft samenvattend een 'inbedding'  $\tilde{h} : W \rightarrow B^{2k+2}$  gegeven door

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= h(i(p, t)) \text{ voor } x \in V \cong M \times [0, 1) \\ \tilde{h}(x) &= 0 \text{ voor } x \in W \setminus V. \end{aligned}$$



Dit is geen echte inbedding, aangezien de afbeelding niet injectief is in  $W \setminus V$ . Als gevolg van Whitney's inbeddingsstelling 3.5 bestaan er echter inbeddingen die arbitrair dicht bij  $\tilde{h}$  liggen<sup>2</sup>. In het bijzonder is  $\tilde{h}$  dan ook homotoop met zo'n inbedding, en volgens [11] kunnen we deze homotopie constant kiezen op bijvoorbeeld de gesloten  $M \times [0, \frac{1}{2}]$ .

Op dezelfde manier kunnen we ook de buisvormige omgeving  $U$  van  $M$  in  $S^{2k+1}$  uitbreiden tot een buisvormige omgeving  $U'$  van  $W$  in  $B^{2k+2}$ . De normaalbundel  $NW$  van  $W$  beperkt tot zijn rand  $M$  is namelijk isomorf met  $NM$  (dit is rechtstreeks te verifiëren), en dus in het bijzonder diffeomorf met  $NM$ . Hierdoor geldt  $\partial NW = NM$  en dan kunnen we ons kraagomgevings- en inbeddingbenaderingargument weer toepassen, met nu  $NM$  op de plek van  $M$ .

Dit geeft een uitbreiding van onze  $g : S^{2k+1} \rightarrow E^*$  tot  $g : B^{2k+2} \rightarrow E^*$ . Stelling 4.4 geeft namelijk een uitbreiding van  $g_U$  naar  $\tilde{g} : U' \rightarrow E$  en deze is uit te breiden naar de hele bol  $B^{2k+2}$  door  $\tilde{g}(p) = \infty$  voor  $p \in B^{2k+2} \setminus U$ . Buiten  $U$  en  $U'$  blijft de afbeelding ook continu, aangezien deze op de overlap goed gedefinieerd is (alle punten zowel op de rand als daar buiten gaan daar naar  $\infty$ ). Uit lemma 2.3 maken we dan op dat  $[g] = 0$ , aangezien  $g$  uitgebreid kan worden tot een afbeelding  $\tilde{g} : B^{2k+2} \rightarrow E^*$ .  $\square$

Deze stelling kon Thom, met geavanceerdere algebraïsche technieken, generaliseren naar een 'stabiele' versie. Hierdoor hoeven we niet meer telkens te spreken van 'n groot genoeg', maar nemen we op een technische manier een limietisomorfisme naar de Thomruimte van de universele bundel boven de oneindige Grassmannvariëteit.

**Stelling 5.2** (Isomorfisme van cobordismegroepen naar homotopiegroepen). *Voor de universele bundel  $E_k^*$  is er een isomorfisme  $\tau : [S^{2k+1}, E_k^*] \rightarrow \Omega^k$ .*

Het bewijs (in het Frans) is te vinden in [12], die de universele bundel overigens noteert met  $M(O(n))$ . Het gebruikt wiskundige technieken die niet nieuw waren in Thom's tijd, maar buiten het bereik van deze scriptie voeren.

Met dit isomorfisme, en de nodige algebraïsche topologie, kunnen we verschillende eigenschappen van de cobordismegroepen afleiden. Thom was voor de ongeoriënteerde cobordismegroepen zelfs in staat voor iedere dimensie hun volledige structuur te bepalen. Wij hebben helaas noch de tijd en ruimte noch de algebraïsche topologie behandeld om een bewijs hiervan te geven, maar zullen u zijn resultaat niet onthouden.

**Stelling 5.3** (Thom, [12]). *Zij  $d(k)$  het aantal partities van  $k$  zonder getallen van de vorm  $2^m - 1$ . Voor dimensie  $k \geq 1$  is de ongeoriënteerde cobordismegroep  $\Omega^k$  isomorf met de directe som van  $d(k)$  maal  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .*

We wisten al dat  $\text{gold } \Omega^0 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Dit geeft het volgende overzicht van cobordismegroepen in tabel 5.1.

k	$\Omega^k$	k	$\Omega^k$
0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	6	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
1	0	7	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	8	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$
3	0	9	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$
4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	10	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$
5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		

Tabel 5.1: Ongeoriënteerde cobordismegroepen

Bovendien kunnen we een aantal niet-triviale eigenschappen van variëteiten afleiden. Zo zien we bijvoorbeeld eenvoudig in dat  $\Omega^1$  en  $\Omega^3$  de enige triviale cobordismegroepen zijn. Voor grotere dimensies  $k$  is namelijk of  $k$  zelf een partitie van  $k$  zonder getallen van de vorm  $2^m - 1$ , of, als geldt  $k = 2^m - 1$ , is  $(k - 2) + 2$  zo'n partitie. In iedere dimensie behalve 1 en 3 bestaat er dus een variëteit die geen rand is.

Ook zijn alle cobordismegroepen dus eindig. Dit betekent dat we aan een verzameling  $A$  slechts  $d(k)$  variëteiten genoeg hebben om zeker te weten dat iedere variëteit een rand vormt met de disjuncte vereniging van variëteiten in  $A$ .

<sup>2</sup>Preciezer gezegd zegt corollary 6.17 in [4] dat iedere gladde afbeelding  $M \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  uniform benaderd kan worden door inbeddingen.

## Hoofdstuk 6

# Stiefel-Whitneygetallen

Met de Thom-Pontryagin constructie in het vorige hoofdstuk lijken we het ongeoriënteerd cobordisme probleem volledig te hebben opgelost. De groepsstructuur van alle  $\Omega^k$  is immers bekend, op eventuele combinatorische moeilijkheden bij het berekenen van partities na. Onze bespreking van ongeoriënteerd cobordisme kan echter niet volledig zijn zonder minimaal een niet-triviaal element in een cobordismegroep te geven, dat wil zeggen, een variëteit die geen rand is.

In het hoofdstuk over transversaliteit zagen we al dat een punt geen rand is. Voor hogere dimensies is het echter helemaal niet eenvoudig zo'n niet-randende variëteit te vinden. We weten echter uit vorig hoofdstuk dat voor  $k \geq 4$ , er niet-randende  $k$ -variëteiten bestaan. We zullen in dit hoofdstuk laten zien dat de reële projectieve ruimte  $\mathbb{R}P^k$  geen rand is voor  $k$  even. Onderweg introduceren we enkele belangrijke technieken die ook in moderner (co-)bordismeonderzoek volop gebruikt worden. We zullen eerst de Stiefel-Whitneyklassen van een vectorbundel definiëren. Dit maakt van verschillende vectorbundels boven dezelfde variëteit een structuur behoudende ring. Voor de reële projectieve ruimte blijken de klassen niet-triviaal te zijn, en we zullen ze gebruiken om een aantal interessante eigenschappen van de reële projectieve ruimte te vinden. Om klassen van vectorbundels boven verschillende variëteiten te vergelijken, introduceren we vervolgens Stiefel-Whitneygetallen. Deze blijken ons vervolgens snel terug te brengen naar cobordisme, waarna we inderdaad kunnen bewijzen dat  $\mathbb{R}P^k$  geen rand is.

Een Stiefel-Whitneyklasse is een eerste voorbeeld van een karakteristieke klasse van vectorbundels, waar Milnor en Stashef een klassiek geworden boek[10] over schreven. Hun hoofdstuk over Stiefel-Whitneyklassen zullen we nauw volgen.

Dit hoofdstuk vereist in tegenstelling tot eerdere hoofdstukken wat meer voorkennis in de algebraïsche topologie. Noodzakelijke begrippen zijn zeer beknopt te vinden in appendix A, maar lezers die nog niet vertrouwd zijn met singuliere cohomologie zullen dit hoofdstuk wellicht wat lastiger vinden.

### 6.1 Stiefel-Whitneyklassen

Een Stiefel-Whitneyklasse koppelt een vectorbundel boven een variëteit aan elementen van de cohomologiegroep van deze variëteit met coëfficiënten in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Om te kunnen praten over verschillende vectorbundels boven dezelfde basisvariëteit en de relaties hiertussen duidelijk te kunnen maken, zullen we in dit hoofdstuk  $E(\alpha) \rightarrow M$  en  $E(\beta) \rightarrow M$  gebruiken als notatie voor verschillende vectorbundels boven dezelfde variëteit. Deze notatie kunnen we gebruiken om makkelijker nieuwe vectorbundels te noteren die we

construeren uit oude.

Voor  $E(\alpha) \rightarrow M$  en  $E(\beta) \rightarrow M$  gladde vectorbundels boven  $\alpha$  bestaat er een gladde vectorbundel  $E(\alpha \oplus \beta)$  zodanig dat iedere vezel  $E_p(\alpha \oplus \beta)$  isomorf is met  $E_p(\alpha) \oplus E_p(\beta)$ . Dit is de Whitney'som van  $E(\alpha)$  en  $E(\beta)$ , die kan worden verkregen als terugtrekking van  $E(\alpha) \times E(\beta) \rightarrow M \times M$  boven  $M$ , per definitie de vectorbundel die past in het volgende bundelafbeeldingdiagram:

$$\begin{array}{ccc} E(\alpha \oplus \beta) & \xrightarrow{\tilde{d}} & E(\alpha) \times E(\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{d} & M \times M \end{array},$$

waar  $d : M \rightarrow M \times M$  gegeven is door  $d(p) = (p, p)$ . Voor twee vectorbundels  $E = E(\alpha)$  en  $E' = E(\beta)$  zullen we soms  $E \oplus E'$  noteren als we  $E(\alpha \oplus \beta)$  bedoelen, als de betekenis duidelijk volgt uit de context.

Wanneer er een metriek (bijvoorbeeld de Euclidische) gedefinieerd is op onze vectorbundels, kunnen we voor een deelbundel  $(E(\alpha) \rightarrow M) \subset (E(\beta) \rightarrow M)$  nu  $E(\alpha^\perp)$  definiëren als  $\bigcup_{p \in M} E_p(\alpha^\perp)$ , waar  $E_p(\alpha^\perp)$  de volgende vezel is:  $\{v \in E_p(\beta) : v \cdot w = 0 \text{ voor alle } w \in E_p(\alpha)\}$ .<sup>1</sup>

De (Stiefel-Whitney) 'koppeling' van vectorbundels aan elementen van cohomologiegroepen voldoet aan de volgende vier axioma's. Zij blijken voldoende te zijn om existentie en uniciteit te garanderen, maar voor het bewijs hiervan verwijzen we naar [10].

1. Voor iedere vectorbundel  $E(\alpha) \rightarrow M$  bestaat er een reeks cohomologieklassen

$$w_i(E(\alpha)) \in H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), i \in 0, 1, 2, \dots$$

Deze cohomologieklassen heten Stiefel-Whitneyklassen van  $E(\alpha)$ . De klasse  $w_0(\alpha)$  is  $1 \in H^0(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , en als  $E(\alpha)$  rang  $n$  heeft geldt  $w_i(E(\alpha)) = 0$  voor  $i > n$ .

2. De klassen zijn natuurlijk: als een afbeelding  $f : M \rightarrow N$  overdekt wordt door een bundelafbeelding  $E(\alpha) \rightarrow E(\beta)$ , dan geldt  $w_i(E(\alpha)) = f^*(w_i(E(\beta)))$ , waar  $f^*$  de geïnduceerde cohomologieafbeelding is.
3. Voor  $E(\alpha) \rightarrow M$  en  $E(\beta) \rightarrow M$  geldt  $w_k(E(\alpha \oplus \beta)) = \sum_{i=1}^k w_i(E(\alpha))w_{k-i}(E(\beta))$ , waar het product het cupproduct is (in dit hoofdstuk zullen we het cupproduct in de gradueerde ring  $H^*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  regelmatig met een gewoon product noteren).
4. Voor de Möbiusbundel uit 2.14 die we noteren met  $E(\gamma) \rightarrow S^1$ , geldt  $w_i(E(\gamma)) \neq 0$ .

Het laatste axioma zorgt ervoor dat niet voor iedere vectorbundel  $w_i(E(\alpha)) = 0$  kan gelden voor  $i > 0$ , zodat de Stiefel-Whitneyklassen daadwerkelijk informatie bevatten. Zo helpen ze ons om triviale vectorbundels van niet-triviale te onderscheiden. Regel 2 en 3 zorgen dat we verschillende vectorbundels kunnen vergelijken. Ze hebben een aantal nuttige gevolgen en laten direct zien dat een triviale vectorbundel ook triviale Stiefel-Whitneyklassen heeft.

**Lemma 6.1.** 1. *Isomorfe bundels hebben dezelfde Stiefel-Whitneyklassen.*

2. *Voor een triviale vectorbundel  $E(\epsilon) \rightarrow M$  geldt  $w_i(E(\epsilon)) = 0$  voor  $i > 0$ .*

*Bewijs.* 1. In dat geval bestaat er voor  $E(\alpha) \rightarrow M$  en  $E(\beta) \rightarrow N$  isomorf een diagram van bundelafbeeldingen:

$$\begin{array}{ccc} E(\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & E(\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\Phi} & N \end{array},$$

waar  $\Phi$  een diffeomorfisme is, en gebruiken we axioma 2.

<sup>1</sup>Waar we tot nu toe metrieken hebben geprobeerd te vermijden, blijken ze in dit hoofdstuk onoverkomelijk te zijn. De lezer die niet bekend is met metrieken kan een metriek simpelweg zien als het standaardinproduct uit de lineaire algebra op iedere vezel. Voor een uitgebreide uitleg over metrieken verwijzen wij naar [4]

2. Nu bestaat er een bundelafbeelding

$$\begin{array}{ccc} E(\epsilon) & \xrightarrow{\tilde{c}} & \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{c} & \{p\} \end{array},$$

waar  $c$  uiteraard een constante afbeelding naar een punt is. Aangezien de cohomologiegroep  $H^i(\{p\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  triviaal is voor  $i > 0$ , geldt  $w_i(E(\epsilon)) = 0$  voor  $i > 0$ . □

Samen met het derde axioma kunnen we twee nieuwe eigenschappen afleiden.

**Lemma 6.2.** 1. Als  $E(\epsilon)$  triviaal is, geldt  $w_i(E(\epsilon \oplus \alpha)) = w_i(E(\alpha))$  voor alle  $i$ .

2. Als  $E(\alpha) \rightarrow M$  een  $n$ -vectorbundel is met een Euclidische metriek en een sectie van  $E(\alpha)$  bestaat die nergens 0 is, geldt  $w_n(E(\alpha)) = 0$ . Als er  $k$  lineair onafhankelijke secties bestaan, geldt  $w_{n-k+1}(E(\alpha)) = w_{n-k+2}(E(\alpha)) = \dots = w_n(E(\alpha)) = 0$ .

*Bewijs.* De eerste uitspraak volgt direct. Voor de tweede uitspraak merken we op dat zo'n sectie een 1-dimensionale triviale vectorbundel  $E(\beta)$  induceert zodat  $E(\alpha) = E(\beta \oplus \beta^\perp)$  en gebruiken nu de eerste uitspraak en het feit dat  $E(\beta^\perp)$  dimensie  $n - 1$  heeft, zodat  $w_n(E(\beta^\perp)) = 0$ . De laatste uitspraak volgt dan inductief. □

We definiëren een ring waarin alle Stiefel-Whitneyklassen van een vectorbundel gezamenlijk een element zijn,

**Definitie 6.1.**  $H^\Pi(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  is de ring die bestaat uit alle oneindige (formele) reeksen

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

waar  $a_i \in H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Vermenigvuldiging werkt zoals gebruikelijk in reeksen:  $(a_0 + a_1 + a_2 \dots)(b_0 + b_1 + b_2 \dots) = (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots$

Optelling werkt zoals de notatie suggereert via de groepsomtelling van  $H^i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  per index, dus  $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) + (b_0 + b_1 + b_2 \dots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \dots$

Het product is commutatief (aangezien we werken in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) en associatief. De **volledige Stiefel-Whitneyklasse** van een  $n$ -vectorbundel  $E(\alpha) \rightarrow M$  is nu

$$w(E(\alpha)) = 1 + w_1(E(\alpha)) + w_2(E(\alpha)) + \dots + w_n(E(\alpha)) + 0 + \dots \in H^\Pi(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Dit maakt ons 'lelijke' derde axioma een stuk eleganter: in feite zegt deze nu  $w(E(\alpha \oplus \beta)) = w(E(\alpha))w(E(\beta))$ .

De eenhedenring  $(H^\Pi(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^*$  bestaat uit alle elementen met  $a_0 = 1$  en vormt een groep onder vermenigvuldiging; hiervoor hebben we namelijk voor  $w = 1 + w_1 + w_2 \dots \in H^\Pi(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  een inverse  $\bar{w} = 1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \dots$  nodig, en deze kunnen we inductief vinden met de productrelaties.

Voor onze relatie  $w(E(\alpha \oplus \beta)) = w(E(\alpha))w(E(\beta))$  betekent dit dat  $w(E(\beta)) = \bar{w}(E(\alpha))w(E(\alpha \oplus \beta))$ . Dit zullen we vaak gebruiken voor een triviale  $E(\alpha \oplus \beta)$ , in dat geval geldt  $w(E(\beta)) = \bar{w}(E(\alpha))$ . Een bijzonder resultaat is het volgende:

**Lemma 6.3.** Stel dat  $M \subset \mathbb{R}^n$  een gladde ingebedde variëteit is. Voor de raakbundel en normaalbundel  $TM \rightarrow M$  en  $NM \rightarrow M$  geldt  $w(NM) = \bar{w}(TM)$  en dus ook  $w_i(NM) = \bar{w}_i(TM)$  en  $w(NM)w(TM) = 1$ .

*Bewijs.* De Whitney som van  $NM$  en  $TM$  is de triviale bundel  $\mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ , en dus volgt het lemma uit bovenstaande discussie. □

We zijn eindelijk klaar om te laten zien wat Stiefel-Whitneyklassen ons vertellen over variëteiten. We gebruiken de notatie  $w(M)$  voor de volledige Stiefel-Whitneyklasse van de raakbundel  $TM \rightarrow M$ .

**Voorbeeld 6.1** (Volledige Stiefel-Whitneyklasse van  $S^n$ ).

Als we  $S^n$  inbedden in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , hebben we een triviale normaalbundel. Nu volgt uit lemma 6.3 en  $w(NS^n) = 1$  dat ook  $w(S^n) = 1$ . We weten echter dat de bol niet altijd paralleliseerbaar is, maar we kunnen de raakbundel niet onderscheiden van de triviale bundel met Stiefel-Whitneyklassen.//

We zullen ons nu richten op de Stiefel-Whitneyklassen van vectorbundels boven projectieve ruimtes  $\mathbb{R}P^n$ . Deze zullen ons meer informatie geven, en dat komt voor een groot deel door de volgende elegante structuur van de cohomologie van  $\mathbb{R}P^n$  modulo 2:

**Lemma 6.4.** *De groep  $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  is isomorf met  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  voor  $0 \leq i \leq n$  en is triviaal voor  $i > n$ . Neem  $a$  het niet-nul element van  $H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , dan is  $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  voortgebracht door  $a^i$  (met wederom het cupproduct als vermenigvuldiging).*

Voor het bewijs, zie [13]. We zullen vanaf nu  $a$  schrijven voor de generator uit het lemma. Aangezien voor  $i > n$  de groep  $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  triviaal is, geldt  $a^{n+1} = 0$ .

**Voorbeeld 6.2** (Volledige Stiefel-Whitneyklasse universele bundel boven projectieve ruimte).

Merk op dat de reële projectieve ruimte  $\mathbb{R}P^n$  ook wel de Grassmannvariëteit  $G_{1,n+1}$  is. Bekijk de universele bundel  $E_{1,n+1} \rightarrow G_{1,n+1} (\cong \mathbb{R}P^n)$ . Voor  $n = 1$  is dit de Möbiusbundel en dus geldt  $w(E_{1,2}) = 1 + a$  door axioma 1 en 4.

Voor grotere dimensies  $E_{1,n+1}$  met  $n > 1$  bekijken we de inclusie  $i : G_{1,2} \rightarrow G_{1,n}$  die overdekt wordt door een bundelafbeelding  $\bar{i} : E_{1,2} \rightarrow E_{1,n+1}$ , en dus volgt  $\bar{i}^*(w_1(E_{1,n+1})) = w_1(E_{1,2}) \neq 0$ . Dus kan ook  $w_1(E_{1,n+1})$  niet 0 zijn, en uit lemma 6.4 volgt dan  $w_1(E_{1,n+1}) = a$ . Met axioma 1 krijgen we zo  $w(E_{1,n+1}) = 1 + a$ .//

**Voorbeeld 6.3** (Volledige Stiefel-Whitneyklasse met iedere coëfficiënt (kleiner dan de rang) ongelijk aan 0).

We kunnen  $E_{1,n+1}$  inbedden als vectorbundel in de triviale bundel  $E_{n+1,n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1} \times G_{1,n+1}$  boven  $G_{1,n+1}$ . Zij  $E_{1,n+1}^\perp$  het orthogonaal complement van  $E_{1,n+1}$  in  $\mathbb{R}^{n+1} \times G_{1,n+1}$ . Dan geldt  $w(E_{1,n+1}^\perp) = \bar{w}(E_{1,n+1}) = (1+a)^{-1} = 1+a+a^2+\dots+a^n$ , aangezien  $(1+a)(1+a+a^2+\dots+a^n) = (1+a+a^2+\dots+a^n) + (a+a^2+\dots+a^n+0) = 1$ .//

**Voorbeeld 6.4** ( $w(\mathbb{R}P^n)$ ).

We herinneren ons dat raakruimtes  $T_p M$  in een punt  $p \in M$  equivalentieklasse zijn waar iedere lokaal getrivialiseerde omgeving  $U_p$  van  $p$  een representant bevat van iedere raakvector. De lokaal getrivialiseerde omgevingen van (een lijn)  $P \in G_{1,n+1}$  zijn volgens het bewijs van stelling 4.1 precies de homomorfismen  $L(P, P^\perp)$ , waar  $P$  als lijn is ingebed in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Hierdoor zal het volgende lemma, dat we verder niet formeel bewijzen, dan ook geen grote verrassing zijn:

**Lemma 6.5.** *De raakruimte  $T_p \mathbb{R}P^n$  van de reële projectieve ruimte is isomorf met  $L(P, P^\perp)$ .*

Met dit lemma kunnen we ook de raakbundel  $T\mathbb{R}P$  karakteriseren, en we zullen deze isomorfe bundel suggestief (doch slordig) noteren met  $\text{Hom}(E_{1,n+1}, E_{1,n+1}^\perp) \rightarrow G_{1,n+1}$ . Merk eerst op dat  $\text{Hom}(E_{1,n+1}, E_{1,n+1}) \rightarrow G_{1,n+1}$  triviaal is: de sectie  $p \mapsto (p, \text{Id})$  (oftewel  $p \mapsto (p, 1)$  uitgedrukt in coördinaten) is globaal en glad. Dus geldt  $T\mathbb{R}P^n \oplus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^n) \cong \text{Hom}(E_{1,n+1}, E_{1,n+1}^\perp) \oplus \text{Hom}(E_{1,n+1}, E_{1,n+1})$ .

Dit is door per vezel te kijken weer duidelijk isomorf met  $\text{Hom}(E_{1,n+1}, E_{1,n+1}^\perp \oplus E_{1,n+1})$ , die per definitie van de Whitney'som en  $E_{1,n+1}^\perp$  isomorf is met  $\text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R}^{n+1} \times G_{1,n}))$ , homomorfismen naar de triviale bundel van rang  $n+1$ . Deze splitsen we weer op in een  $n+1$ -voudige Whitney'som:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R}^{n+1} \times G_{1,n})) &\cong \text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R} \times G_{1,n}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{R} \times G_{1,n})) = \\ &\text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R} \times G_{1,n})) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R} \times G_{1,n})). \end{aligned}$$

Nu is een enkele  $\text{Hom}(E_{1,n+1}, (\mathbb{R} \times G_{1,n}))$  isomorf met  $E_{1,n+1}$ , aangezien op iedere vezel boven  $p \in G_{1,n+1}$  een homomorfisme vast ligt met het beeld van een vector in  $E_{(1,n+1)}$ . Zo krijgen we, het begin en einde van alle isomorfismen vergelijkend,  $T\mathbb{R}P^n \oplus (\mathbb{R} \times \mathbb{R}P^n) \cong E_{1,n+1} \oplus \dots \oplus E_{1,n+1}$ , waar de rechter Whitney'som  $n+1$



Met meer gevorderde technieken kan bewezen worden dat  $\mathbb{R}P^1, \mathbb{R}P^3$  en  $\mathbb{R}P^7$  de enige parallelleerbare reële projectieve ruimtes zijn.[14] Dit heeft puur algebraïsche implicaties door de volgende stelling, waarvan het bewijs in Milnor-Stasheff [10] te vinden is:

**Stelling 6.2.** *Stel dat er een bilineair product  $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bestaat zonder nuldelers. Dan is  $\mathbb{R}P^{n-1}$  parallelleerbaar, en dus is  $n$  een 2-macht.*

Dit vertelt ons dat de reële getallen, de complexe getallen, de quaternionen en de Cayleygetallen de enige zogenaamde compositiealgebra's zijn.

Een tweede interessant gevolg van de Stiefel-Whitneyklasse van  $\mathbb{R}P^n$  heeft te maken met indompelingen van variëteiten. Whitney bewees naast zijn al genoemde inbeddingsstelling 3.5 ook dat iedere variëteit van dimensie  $n$  ingedombeld kan worden in  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . [4] Milnor en Stasheff laten met behulp van de Stiefel-Whitneyklasse van  $\mathbb{R}P^{2^r}$  dat deze niet in  $\mathbb{R}^n$  ingedompeld kan worden voor  $n < 2 \cdot 2^r - 1$ , en dus is Whitney's ondergrens de beste ondergrens.

## 6.2 Stiefel-Whitneygetallen en cobordisme

De Stiefel-Whitneyklassen worden voor ons pas echt interessant als we Stiefel-Whitneyklassen van raakruimtes van verschillende variëteiten makkelijk kunnen vergelijken, en zo een nieuwe topologische invariant kunnen introduceren. In [10] wordt bewezen dat voor een variëteit de  $n$ -de homologiegroep met coëfficiënten in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , isomorf is met  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Dus heeft  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  een uniek niet-triviaal element  $\mu_M$ , en kunnen we  $\mu$  evalueren in ieder element  $\nu \in H^n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Deze evaluatie noteren we met  $\nu[M]$ .

Bekijk nu niet-negatieve getallen  $r_1, r_2, \dots, r_n$  zodat  $\sum_{i=1}^n ir_i = n$ . Voor  $n = 3$  zijn alle opties bijvoorbeeld  $(r_1, r_2, r_3) = (3, 0, 0)$ ,  $(r_1, r_2, r_3) = (1, 2, 0)$  en  $(r_1, r_2, r_3) = (0, 0, 1)$ .

Nu geldt voor een vectorbundel  $E \rightarrow M$  dat het monoom  $w_1(E)^{r_1} w_2(E)^{r_2} \dots w_n(E)^{r_n} \in H^n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , aangezien het cupproduct de dimensie van twee elementen van homologiegroepen bij elkaar optelt.

**Definitie 6.2.** *Het getal  $w_1(TM)^{r_1} w_2(TM)^{r_2} \dots w_n(TM)^{r_n} [M]$  is het Stiefel-Whitneygetal voor het monoom  $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}$ .*

$M$  en  $M'$  hebben dezelfde Stiefel-Whitneygetallen als geldt

$$w_1(TM)^{r_1} w_2(TM)^{r_2} \dots w_n(TM)^{r_n} [M] = w_1(TM')^{r_1} w_2(TM')^{r_2} \dots w_n(TM')^{r_n} [M']$$

voor ieder monoom  $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}$  met kloppende dimensievoorwaarden. Op deze manier worden de Stiefel-Whitneygetallen samen inderdaad een topologische invariant. Het lijkt lastig om de Stiefel-Whitneygetallen te berekenen, maar er zal blijken dat we dit in ieder geval voor  $\mathbb{R}P^n$  kunnen. Eerst geven we twee fundamentele stellingen van Pontryagin en Thom die het nut van Stiefel-Whitneygetallen aantonen.

**Stelling 6.3** (Pontryagin, bewijs in [10]). *Als  $W$  een compacte gladde  $(n+1)$ -variëteit is met rand  $M$ , dan zijn alle Stiefel-Whitneygetallen van  $M$  gelijk aan 0.*

**Stelling 6.4** (Thom[12]). *Als alle Stiefel-Whitneygetallen van  $M$  gelijk zijn aan 0, is  $M$  een rand van een  $(n+1)$ -variëteit.*

**Gevolg 6.1.** *Twee gladde compacte  $n$ -variëteiten  $M$  en  $N$  zijn cobordant dan en slechts dan als hun Stiefel-Whitneygetallen gelijk zijn.*

*Bewijs.* De cohomologiering  $H^*(M \sqcup N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  is isomorf met  $H^*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^*(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Door de natuurlijkheid van Stiefel-Whitneyklassen geldt verder via de projecties op  $M$  en  $N$  dat

$$\begin{aligned} w_i(T(M \sqcup N)) &= w_i(TM \sqcup TN) = \\ &= (w_i(TM), w_i(TN)) \in H^*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^*(N; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Nu geldt dus

$$\begin{aligned} & w_1(T(M \sqcup N))^{r_1} w_2(T(M \sqcup N))^{r_2} \dots w_n(T(M \sqcup N))^{r_n} [M \sqcup N] = \\ & ((w_1(T(M))^{r_1} w_2(T(M))^{r_2} \dots w_n(T(M))^{r_n}), (w_1(T(N))^{r_1} w_2(T(N))^{r_2} \dots w_n(T(N))^{r_n})) [M, N] = \\ & ((w_1(T(M))^{r_1} w_2(T(M))^{r_2} \dots w_n(T(M))^{r_n}) [M] + ((w_1(T(N))^{r_1} w_2(T(N))^{r_2} \dots w_n(T(N))^{r_n}) [N] \end{aligned}$$

en dit is 0 voor alle monomen  $w_1^{r_1} \dots w_n^{r_n}$  die aan de voorwaarden voldoen dan en slechts dan als alle Stiefel-Whitneygetallen gelijk zijn.  $\square$

Tenslotte laten we zien dat iedere reële projectieve ruimte  $\mathbb{R}P^{2k}$  voor  $k$  geheel geen rand is, dat wil zeggen, dat niet al zijn Stiefel-Whitneygetallen 0 zijn. Schrijf  $n = 2k$ . In dat geval is  $w_n(T(\mathbb{R}P^n))$  namelijk

$$\binom{n+1}{n} a^n = (2k+1)a^n = a^n \in H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Hieruit volgt het Stiefel-Whitneygetal  $w_n(T(\mathbb{R}P^n))[\mathbb{R}P^n] = 1$  en ook

$$w_1^n(T(\mathbb{R}P^n))[\mathbb{R}P^n] = ((n+1)a^n)[\mathbb{R}P^n] = a^n[\mathbb{R}P^n] = 1.$$

Hiermee is  $\mathbb{R}P^{2k}$  dus geen rand.

Voor  $n = 2k - 1$  (met  $k \geq 1$ ) werkt dit argument natuurlijk niet. Sterker nog, er geldt dan  $w(T(\mathbb{R}P^n)) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$  en hierdoor geldt  $w_i(T(\mathbb{R}P^n)) = 0$  als  $i$  oneven is. Een partitie van een oneven getal moet echter een oneven getal bevatten, en dus moet in onze keuze van  $r_1, r_2, \dots, r_n$  er een  $r_i$  met oneven  $i$  zijn. Dan geldt echter  $w_1(T(\mathbb{R}P^n))^{r_1} w_2(T(\mathbb{R}P^n))^{r_2} \dots w_n(T(\mathbb{R}P^n))^{r_n} [\mathbb{R}P^n] = 0[\mathbb{R}P^n] = 0$  en dus is ieder Stiefel-Whitneygetal 0.

De reële projectieve ruimte  $\mathbb{R}P^n$  is dus voor oneven  $n$  altijd een rand, en voor even  $n$  nooit een rand.



# Hoofdstuk 7

## Discussie

In deze scriptie hebben we het cobordisme probleem voor ongeoriënteerde variëteiten (grotendeels) opgelost. Met extra structuren op zowel de variëteiten als de cobordismes zijn er echter nog veel meer cobordisme problemen te formuleren. Door te kijken naar de cobordismeklasse van het cartesisch product kunnen we cobordismegroepen bovendien ook een ringstructuur geven:

$$[M][N] = [M \times N]$$

In deze paragraaf bespreken we kort enkele hoogtepunten uit de afgelopen halve eeuw aan cobordisme onderzoek. Voor Thom had Pontryagin al onderzoek gedaan naar cobordismes van gekaderde variëteiten ('framed manifolds'). Dit zijn variëteiten met een gladde globale sectie naar de normaalbundel, en dit blijkt het cobordisme probleem aanzienlijk simpeler te maken [9].

Thom vond geïnspireerd hierdoor zoals we al zagen eerst algemenere ongeoriënteerde cobordismegroepen, maar wist ook de ringstructuur te ontrafelen. Hiernaast kon hij met vrijwel exact dezelfde methode als in deze scriptie een isomorfisme vinden tussen de homotopiegroepen van de georiënteerde Thomruimte van de universele bundel en de georiënteerde cobordismegroepen [10][12]<sup>1</sup>. Deze kon hij nog niet allemaal uitrekenen, maar hij wist wel genoeg eigenschappen al zelf te vinden. Zo bewees hij dat georiënteerde groepen eindig gegenereerd zijn en zelfs eindig als de dimensie niet deelbaar is door 4. Verder wist hij dat er tussen georiënteerde variëteiten en zekere Pontryagingetallen van een variëteit eenzelfde verband is als tussen ongeoriënteerde variëteiten en Stiefel-Whitneygetallen. Voor kleine dimensies gaf Thom de volgende georiënteerde cobordismegroepen  $O^k$ :

k	$O^k$	k	$O^k$
0	$\mathbb{Z}$	4	$\mathbb{Z}$
1	0	5	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2	0	6	0
3	0	7	0

Tabel 7.1: Georiënteerde cobordismegroepen

Als de inclusies van twee cobordante variëteiten  $M$  en  $N$  in hun cobordisme  $W$  homotopie-equivalenties zijn, spreken we van een  $h$ -cobordisme. Er werd lang gedacht dat ieder  $h$ -cobordisme van enkelvoudig samenhangende  $M$ ,  $N$  en  $W$ , op zekere (precies te maken) wijze isomorf was met het eenvoudige cobordisme  $M \times [0, 1]$ . Stephen Smale bewees dit voor dimensie  $n \geq 5$  en bewees hiermee een groot aantal versies van het generaliseerde vermoeden van Poincaré. Eerder werd altijd gedacht dat meetkundige en topologische

<sup>1</sup>De bewijzen lijken zo erg op elkaar, dat Thom in zijn artikel één stelling had voor het isomorfisme van georiënteerde en ongeoriënteerde cobordismegroepen

problemen in grote dimensies alleen maar lastiger werden, maar Smale liet zo zien dat bijvoorbeeld het vermoeden van Poincaré in dimensie 3 en 4 juist lastig was. Hier kreeg hij in 1966 een Fieldsmedaille voor[15]. Verder is meer onderzoek gedaan om te bepalen welke (klassen van) variëteiten randen zijn, zoals wij deden voor  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Dit kan bijvoorbeeld door aan te tonen dat alle Stiefel-Whitneygetallen 0. Een hoogtepunt in dit onderzoek was het pas in 1982 bewezen vermoeden dat alle vlakke Riemannvariëteiten randen zijn [16]. Een belangrijke toepassing vindt cobordisme in ‘operatietheorie’ (surgery theory), waar geprobeerd wordt op een gecontroleerde wijze nieuwe variëteiten van oude te construeren. Het blijkt namelijk dat nieuwe variëteiten op deze manier enkel te construeren zijn als ze cobordant aan elkaar zijn. Kervaire en Milnor gebruikten deze theorie om alle exotische structuren van bollen te classificeren[17]. Operatietheorie speelde later ook een rol in Perelmans bewijs van het vermoeden van Poincaré, en later werd zelfs een bewijs gevonden voor dit vermoeden met cobordisme als belangrijkste techniek[18][19].

# Bijlage A

## Cohomologie

We brengen in herinnering dat singuliere homologie  $H_i(X, A)$  voor een topologische ruimte  $X$  en een abelse groep  $A$  gedefinieerd is aan de hand van ketens in  $X$  (continue inbeddingen van simplices in  $X$ ) met coëfficiënten in  $A$ :

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \rightarrow \dots$$

waar de pijlen randhomomorfismen  $\partial_i$  zijn. De homologie van  $C_i$  is nu de quotiëntgroep  $\ker(\partial_i)/\text{im}(\partial_{i+1})$ . Alle ketengroepen  $C_i$  hebben een duale coketengroep  $C_i^* = \text{hom}(C_i, A)$ , waar wij  $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nemen, en zo heeft iedere  $\partial_i$  een duaal homomorfisme

$$d_i : C_i^* \rightarrow C_{i+1}^*.$$

Op deze manier verkrijgen we een rij

$$\dots \leftarrow C_{i+1}^* \xleftarrow{d_i} C_i^* \xleftarrow{d_{i-1}} C_{i-1}^* \leftarrow \dots$$

De cohomologiegroep  $H^i(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  bestaat nu uit de klassen van  $\ker(d_i)/\text{im}(d_{i-1})$ .

Voor een continue functie  $f : X \rightarrow Y$  is er een geïnduceerd homomorfisme  $f^* : H^i(Y) \rightarrow H^i(X)$ , aangezien  $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$  ook een homomorfisme is.

Over het algemeen zijn de eigenschappen van singuliere cohomologie zeer vergelijkbaar met die van homologie (ze zijn tenslotte elkaars duale), maar cohomologie heeft het voordeel dat we van de cohomologiegroepen een ring  $H^*(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  van kunnen maken met het **cupproduct**. Het cupproduct van coketens  $\alpha \in C_i^*$  en  $\beta \in C_j^*$  wordt gegeven door  $\alpha \cup \beta = \alpha(a)\beta(b)$  voor alle  $a \in C_i$  en  $b \in C_j$ . We zien dat geldt  $\alpha \cup \beta \in C_{i+j}^*$ , door de coëfficiënten van  $a$  en  $b$  achter elkaar te zetten.

Het cupproduct blijkt een welgedefinieerd product op cohomologieklassen te induceren, dat voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. Voor  $\alpha \in H^p(X, A)$  en  $\beta \in H^q(X, A)$  geldt  $\alpha \cup \beta = (-1)^{pq} \beta \cup \alpha$ . Met  $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is het cupproduct dus commutatief.
2. Voor  $f : X \rightarrow Y$  continu en dus  $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$  het geïnduceerde homomorfisme, geldt  $f^*(\alpha \cup \beta) = f^*(\alpha) \cup f^*(\beta)$ .

Meer details zijn te vinden in ieder boek over elementaire algebraïsche topologie, zie bijvoorbeeld [5].

# Dankwoord

Voor deze scriptie ben ik veel dank verschuldigd aan mijn begeleidster Federica Pasquotto, die dit fascinerende onderwerp heeft aangedragen en mij zeer actief en attent heeft geholpen de informatie mij eigen te maken en hier op te schrijven. Ze heeft als proeflezer hopelijk het gros van de fouten uit deze scriptie gefilterd, en bovendien mijn tijd op het Mathematisch Instituut vrolijker gemaakt met onze wekelijkse afspraak.

Ook wil ik mijn lieve vriendin Maria bedanken, niet alleen voor alle algemene steun en (wellicht geveinsde) interesse in differentiaaltopologie, maar ook in het bijzonder voor het maken van alle schitterende plaatjes die u in deze scriptie heeft kunnen vinden. Verder ben ik al mijn medestudenten dankbaar voor al hun gratis uitleg, creativiteit en gezelligheid.

# Bibliografie

- [1] Bernhard Riemann. “Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”. Proefschrift. Georg-August-Universität Göttingen, 1854.
- [2] Bernhard Riemann. “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.” Proefschrift. Georg-August-Universität Göttingen, 1851.
- [3] Poul Heegard. “Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske flæders sammenhang”. Proefschrift. University of Copenhagen, 1898.
- [4] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2022.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.
- [7] Raymond Mortini en Rudolf Rupp. *Extension problems and stable ranks*. Birkhäuser, 2021.
- [8] Nicholas M. Rouse. *Compact Lie Groups*. 2014.
- [9] Sturmius Tuschmann. *Transversality and framed cobordism*. 2022.
- [10] John W. Milnor en James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [11] Milton Persson. “The Whitney embedding theorem”. Masterscriptie. Umea University, 2014.
- [12] René Thom. “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”. In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 28, p. 17-86 (1954).
- [13] P.J. Hilton en S. Wylie. *Homology theory: an introduction to algebraic topology*. Cambridge University Press, 1960.
- [14] R. Bott en J. Milnor. “ON THE PARALLELIZABILITY OF THE SPHERES (Reprinted from Bulletin of the AMS, vol 64, 1958)”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 48 (okt 2011).
- [15] S. Smale. “On the structure of manifolds”. In: jul 2007, p. 269–283. ISBN: 978-981-270-559-4. DOI: 10.1142/9789812772107\_0005.
- [16] D.C. Royster en C. David G.C. Hamrick. “Flat Riemannian Manifolds are Boundaries.” In: *Inventiones mathematicae* 66 (1982), p. 405–414. URL: <http://eudml.org/doc/142890>.
- [17] Michel A. Kervaire en John W. Milnor. “Groups of homotopy sphere: I, p. 504=537”. In: *Annals of mathematics* (1963).
- [18] Grisha Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. 2003. arXiv: math/0303109 [math.DG]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0303109>.
- [19] Ming Yang. *Cobordism Theory and Poincare Conjecture*. 2010. arXiv: 0901.2375 [math.GT]. URL: <https://arxiv.org/abs/0901.2375>.